

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

**Band:** 23 (1963)

**Artikel:** Systèmes hyperstatiques tridimensionnels et effet des efforts tranchants et normaux

**Autor:** Absi, E.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-19392>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 31.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# **Systèmes hyperstatiques tridimensionnels et effet des efforts tranchants et normaux**

*Dreidimensionale, statisch unbestimmte Systeme und Einfluß der Quer- und Normalkräfte*

*Three-dimensional, Indeterminate Structures and the Effect of Shearing and Axial Forces*

E. ABSI

Docteur ès Sciences, Ingénieur des Arts et Manufactures  
Attaché à la Direction du C.E.B.T.P. (Paris)

## **1. Etude du déplacement des nœuds d'un système**

La notion d'équations intrinsèques joue un rôle important dans les méthodes actuelles de résolution des systèmes hyperstatiques de haut degré et qui se prêtent facilement au calcul automatique. (Méthodes de Cross, Gheler, théorème des 3 moments ...) Ces équations expriment les moments  $M_{ij}$  et  $M_{ji}$  agissant aux deux extrémités d'un élément  $A_i A_j$ , en fonction des déformations des nœuds  $A_i$  et  $A_j$ , et des charges extérieures appliquées sur  $A_i A_j$ . Donc, il est utile de connaître le nombre des déplacements indépendants que peuvent prendre les nœuds d'un système.

Tout système peut être décomposé en un ensemble de cellules élémentaires. Chacune d'elles est formée, par définition, d'une succession d'éléments droits ou courbes  $A_0, \dots, A_n$  dont le déplacement relatif  $\vec{d}_{0n}$  des deux nœuds extrêmes  $A_0$  et  $A_n$  est soit connu, soit décompté dans une autre cellule. Le nombre  $D$  de déplacements indépendants des nœuds du système est donné par l'expression suivante, facile à établir:

$$D = 3(N - C) - K \quad (1)$$

où:

- $N$ : Nombre total des éléments droits ou courbes,
- $K$ : Nombre total des éléments droits uniquement,
- $C$ : Nombre total des cellules élémentaires du système.

Il est à remarquer que le nombre  $K$  ne comprend pas les éléments droits surabondants qui relient, par définition, deux nœuds dont l'entredistance est de nature fixe.

Le nombre  $D$  est appelé degré de liberté de déplacement du système. On peut le définir aussi comme étant le nombre d'appuis simples supplémentaires qu'il faudrait prévoir à des nœuds mobiles  $A_k$  judicieusement choisis pour s'opposer à l'écroulement du système si tous ses nœuds étaient articulés. Ces appuis ne seraient donc pas surabondants et il aurait été possible, en conséquence, de déterminer leurs réactions; c'est-à-dire déterminer la résultante des efforts tranchants et normaux à l'extrémité  $A_k$  des différents éléments aboutissant à ce nœud. La rigidité des différents nœuds  $A_i$  du système tient lieu, en quelque sorte, de ces  $D$  appuis fictifs. On peut donc énoncer le théorème suivant:

«En chaque nœud mobile  $A_k$  du système, il est toujours possible d'exprimer la résultante  $\vec{R}_k$  des efforts à l'extrémité  $A_k$  des différents éléments aboutissant à ce nœud en fonction des différents moments  $\vec{M}_{ij}$  et des charges extérieures  $\vec{P}$ .»

Si le nœud  $A_k$  est soumis à une charge extérieure  $\vec{F}_k$ , l'équilibre des forces en  $A_k$  s'écrit:

$$\vec{R}_k(\vec{M}_{ij}, \vec{P}) = \vec{F}_k. \quad (2)$$

## 2. Méthode générale de résolution des systèmes hyperstatiques

La connaissance des déformations (rotations  $\vec{\theta}_i$  et déplacements  $\vec{A}_i$ ) des différents nœuds  $A_i$  du système permet, par l'intermédiaire des équations intrinsèques, de déterminer complètement le problème. Le nombre  $L$  de ces déformations est évidemment:

$$L = 3F + D \quad (3)$$

où:

$F$ : Nombre des nœuds du système,

$D$ : Degré de liberté de déplacement.

Il y a donc lieu d'établir  $L$  équations indépendantes entre ces  $L$  inconnues. Celles-ci s'obtiennent en exprimant:

— L'équilibre des moments en chaque nœud  $A_i$  du système:

$$\sum_j \vec{M}_{ij} = 0. \quad (4)$$

Ceci nous donne  $3F$  équations.

— L'équilibre des forces aux nœuds mobiles  $A_k$ : Pour les  $D$  déplacements indépendants l'équation (2) nous donne  $D$  équations indépendantes.

En résumé: Entre les  $L$  inconnues de déformations du système on peut écrire  $L$  équations linéaires indépendantes. La détermination de ces inconnues permet de calculer les moments dans les différents éléments  $A_i A_j$  du système par l'intermédiaire des équations intrinsèques.

### 3. Equation intrinsèque d'un élément droit et effets des efforts tranchant et normal

L'équation intrinsèque de flexion d'une poutre droite à section constante s'écrit:

$$M_{ij} = m_{ij} + A \theta_i + B \theta_j \quad (5)$$

où :

$m_{ij}$ : Moment d'encastrement parfait.

$A$  et  $B$ : Coefficients de rigidité et de répercussion.

$t = \frac{B}{A}$ : Coefficient de transmission.

On prend généralement  $A = 2B = \frac{4EI}{l}$ . Ces valeurs ne font pas intervenir les effets des efforts normal  $N$  et tranchant  $T$ .

Vu l'importance de l'équation (5) dans la résolution des systèmes hyperstatiques, nous avons repris son examen tout en tenant compte simultanément des effets des efforts  $N$  et  $T$ .

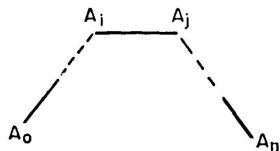


Fig. 1.

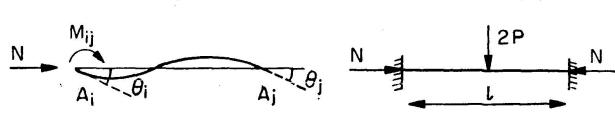


Fig. 2.

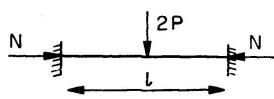


Fig. 3.

L'examen général permet d'établir:

#### a) Moment d'encastrement parfait $m_{ij}$

Dans l'expression de  $m_{ij}$  il faut tenir compte de  $N$ . Ainsi, pour une charge concentrée  $2P$  au milieu de  $A_i A_j$  on a:

$$m_{ij} = -\frac{Pl}{v} \operatorname{tg} \frac{v}{4} \quad \left( v^2 = \frac{N l^2}{EI} \right).$$

#### b) Valeurs des coefficients $A$ , $B$ et $t$

L'effort normal est une compression  $N > 0$ :

$$\begin{aligned} A &= \frac{N}{w} \frac{wl \cos wl - \left(1 + \frac{N}{G\Omega}\right) \sin wl}{wl \sin wl - 2 \left(1 + \frac{N}{G\Omega}\right) (1 - \cos wl)}, \\ B &= -\frac{N}{w} \frac{wl - \left(1 + \frac{N}{G\Omega}\right) \sin wl}{wl \sin wl - 2 \left(1 + \frac{N}{G\Omega}\right) (1 - \cos wl)}, \\ t &= \frac{B}{A} = -\frac{wl - \left(1 + \frac{N}{G\Omega}\right) \sin wl}{wl \cos wl - \left(1 + \frac{N}{G\Omega}\right) \sin wl}. \end{aligned} \quad (6)$$

L'effort normal est une traction  $N < 0$ :

$$\begin{aligned} A &= -\frac{N}{w} \frac{wl \operatorname{ch} wl - \left(1 + \frac{N}{G\Omega}\right) \operatorname{sh} wl}{wl \operatorname{sh} wl + 2 \left(1 + \frac{N}{G\Omega}\right) (1 - \operatorname{ch} wl)}, \\ B &= \frac{N}{w} \frac{wl - \left(1 + \frac{N}{G\Omega}\right) \operatorname{sh} wl}{wl \operatorname{sh} wl + 2 \left(1 + \frac{N}{G\Omega}\right) (1 - \operatorname{ch} wl)}, \\ t &= \frac{B}{A} = -\frac{wl - \left(1 + \frac{N}{G\Omega}\right) \operatorname{sh} wl}{wl \operatorname{ch} wl - \left(1 + \frac{N}{G\Omega}\right) \operatorname{sh} wl} \end{aligned} \quad (7)$$

où:

$$w^2 = \frac{|N|}{EI \left(1 - \frac{N}{G\Omega}\right)} \quad (\Omega: \text{section réduite}).$$

$E$  et  $G$ : Coefficients d'élasticité longitudinal et transversal.

### c) Variation et discussion de $A$ , $B$ et $t$

Les abaques I, II et III donnent respectivement les variations de  $\frac{Al}{EI}$ ,  $\frac{Bl}{EI}$  et  $t$  en fonction des deux paramètres sans dimensions  $n$  et  $\lambda$ :

Le paramètre  $n = \frac{Nl^2}{EI}$  caractérise l'effet de l'effort normal.

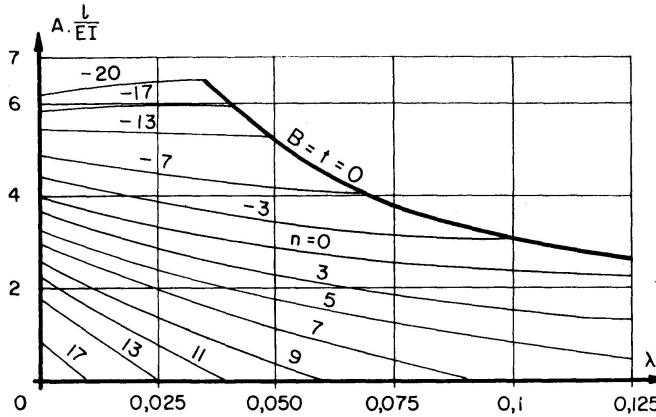
Le paramètre  $\lambda = \frac{EI}{G\Omega l^2}$  caractérise l'effet de l'effort tranchant.

Pour se fixer les idées sur les limites de variation prises pour  $\lambda$ , le tableau suivant donne les longueurs  $l$  d'une poutre en  $I$  à larges ailes de hauteur  $h = 30$  cm correspondant aux différentes valeurs de  $\lambda$ :

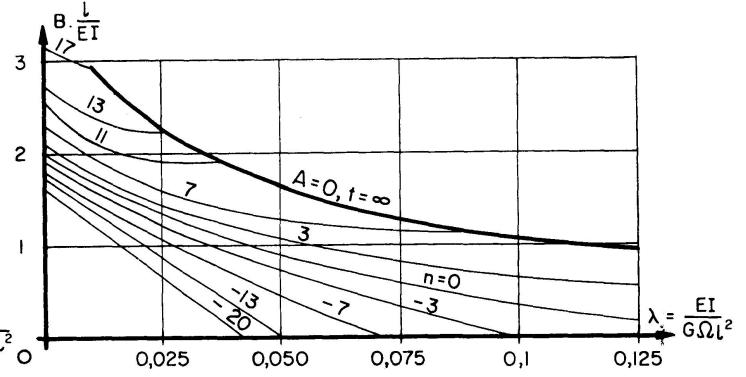
$\lambda$	= 0,025	0,050	0,075	0,1	0,125
$l$ (cm)	= 285	205	165	140	130
$\rho = \frac{l}{h}$	= 9,5	6,83	5,5	4,67	4,33

En particulier, si les ailes sont renforcées par des plats, les valeurs de  $\rho$  augmentent. Ainsi, si les plats ont la même épaisseur que les ailes, les valeurs précédentes de  $\rho$  sont à multiplier pratiquement par  $\sqrt{2}$ . Or, de telles valeurs de  $\rho$  sont assez souvent rencontrées dans les bureaux d'études.

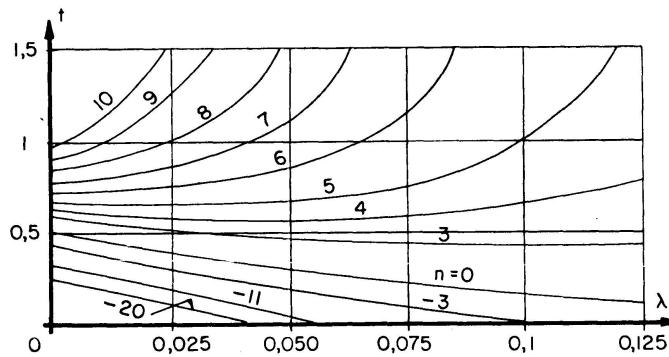
Analytiquement, les expressions (6) et (7) peuvent prendre des valeurs négatives. Or, les coefficients  $A$ ,  $B$  et  $t$  n'ont de sens physique toujours que s'ils sont positifs. Donc, les valeurs  $A = 0$  et  $B = t = 0$  délimitent la zone dans laquelle l'équation (5) est applicable. En d'autre terme, pour une valeur donnée de  $n$  (compression ou traction) et à partir d'une certaine valeur de  $\lambda$ , le comportement de l'élément  $A_i A_j$  ne peut plus être traité par la théorie générale des poutres de la résistance des matériaux.



Abaques I



Abaques II



Abaques III

*d) Applications**Première application*

L'élément  $A_i A_j$  est sur appui simple en  $A_i$  et encastré en  $A_j$ . La force critique de flambage est  $N_c \approx 2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 EI$ . Appliquons en  $A_i$  un couple  $C$  et un effort normal  $N = 0,35 N_c \approx 7 \frac{EI}{l^2}$ . Par réaction, il apparaît en  $A_j$  un couple d'enca斯特rement  $C'$  et l'on a:

$$M_{ij} = C = A \theta_i \quad M_{ji} = C' = B \theta_i = t C. \quad (8)$$

Si l'on ne tient pas compte des effets des efforts tranchant et normal, on a la valeur communément admise  $t = 0,5$  et l'on trouve  $C' = 0,5 C$ . Par contre, les abaques III montrent que pour  $n = \frac{N l^2}{EI} = 7$ , le coefficient  $t$  prend la valeur  $t = 0,75$  pour  $\lambda = 0$  (effet de l'effort tranchant est négligeable) et tend vers l'infini pour  $\lambda = 0,09$  ce qui correspond à  $A = 0$ . On voit que  $t$  varie dans de très larges limites. De même, on met en évidence le fait bien connu que l'effort

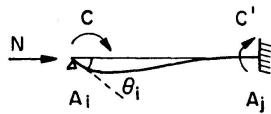


Fig. 4.

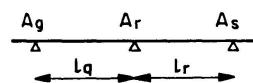


Fig. 5.

tranchant a pour effet de réduire la charge critique de flambage. ( $C' \rightarrow \infty$  pour  $t = \frac{B}{A} \rightarrow \infty$  et  $A \rightarrow 0$ ).

### *Deuxième application; Théorème des trois moments*

L'expression générale du théorème des trois moments comprenant simultanément les effets des efforts tranchant et normal s'écrit:

$$\frac{t_{qr} M_q}{A_{rq} [1 - (t_{qr})^2]} + M_r \left[ \frac{1}{A_{rq} [1 - (t_{qr})^2]} + \frac{1}{A_{rs} [1 - (t_{sr})^2]} \right] + \frac{t_{sr}}{A_{rs} [1 - (t_{sr})^2]} = U. \quad (9)$$

Si l'on néglige les effets de  $N$  et  $T$ , on a  $A = 4 \frac{EI}{l}$  et  $t = 0,5$ . L'équation précédente devient l'expression bien connue du théorème des trois moments:

$$M_q \frac{l_q}{I_q} + 2 M_r \left( \frac{l_q}{I_q} + \frac{l_r}{I_r} \right) + M_s \frac{l_s}{I_s} = 6 E U. \quad (10)$$

### **Résumé**

La résolution des systèmes hyperstatiques de haut degré se facilite par l'utilisation des équations intrinsèques.

On discute principalement l'équation intrinsèque de flexion d'une poutre droite à section constante et on montre les effets des efforts tranchant et normal sur le comportement de cette poutre.

### **Zusammenfassung**

Die Berechnung hochgradig statisch unbestimmter Systeme wird vereinfacht durch die Anwendung der Grundgleichungen.

Es wird vor allem die Grundgleichung für die Biegung eines geraden Balkens mit konstantem Querschnitt behandelt. Dabei werden die Einflüsse der Quer- und Normalkraft auf das Verhalten dieses Trägers aufgezeigt.

### **Summary**

The solution of highly indeterminate structures is made easier by using the intrinsic equations.

The intrinsic equation of bending of a straight beam of constant cross-section is principally discussed and the effects of the shear and of the normal force on the behaviour of such a beam are shown.