

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen  
**Band:** 23 (1963)

**Artikel:** Comportement post-critique des âmes à tensions résiduelles  
**Autor:** Škaloud, M. / Donea, J.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-19408>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 05.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Comportement post-critique des âmes à tensions résiduelles

*Überkritisches Verhalten von Stegblechen mit Eigenspannungen*

*Post-Critical Behaviour of Webs with Residual Stresses*

M. ŠKALOUD

Doc., Ing., C. Sc., Institut de Mécanique  
Théorique et Appliquée de l'Académie des  
Sciences, Prague

J. DONEA

Ingénieur physicien Aspirant F.N.R.S.,  
Université de Liège

### Introduction

Le calcul actuel des âmes est basé sur la conception de tensions critiques déduites de la théorie linéaire du voilement.

Cette conception sous-estime cependant la force portante des âmes réelles qui, on le sait, possèdent une importante réserve post-critique de résistance.

Il est bien connu, d'autre part, que les constructions métalliques courantes présentent toujours des tensions résiduelles qui peuvent fortement influencer le comportement post-critique de leurs âmes.

C'est pourquoi nous nous sommes proposés d'étudier le comportement hypercritique d'une âme comprimée sollicitée par des tensions résiduelles.

Notre premier travail a consisté en une généralisation des équations des grandes déformations dues à VON KÁRMÁN [1], en vue de rendre compte de la présence dans l'âme d'un champ de tensions résiduelles.

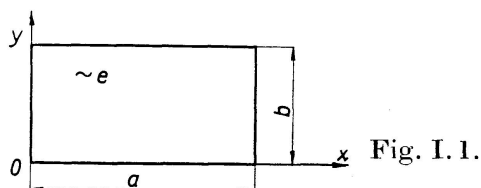
Ces équations une fois complétées, nous avons montré que la présence, souvent néfaste, des tensions résiduelles pouvait en certains cas, constituer une réelle précontrainte de l'âme en augmentant de façon sensible sa charge critique.

La note se termine par l'examen du comportement hypercritique d'une âme carrée sollicitée par des tensions résiduelles correspondant à un cas pratique. Ceci nous permettra de confronter dans une publication ultérieure les présents résultats avec ceux que fournira une campagne d'essais actuellement en cours d'exécution au Laboratoire de Résistance des Matériaux de l'Université de Liège.

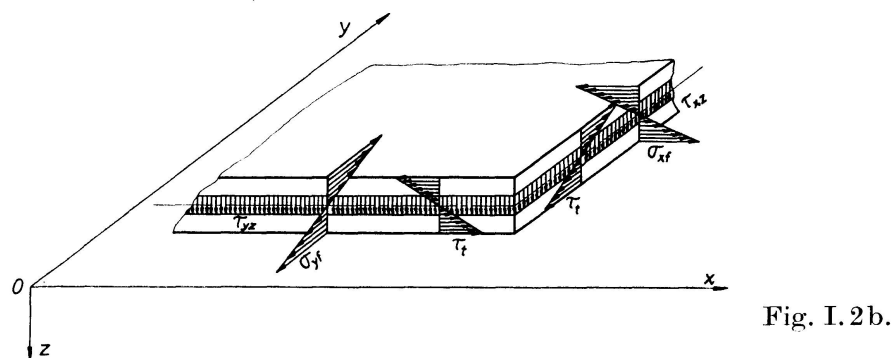
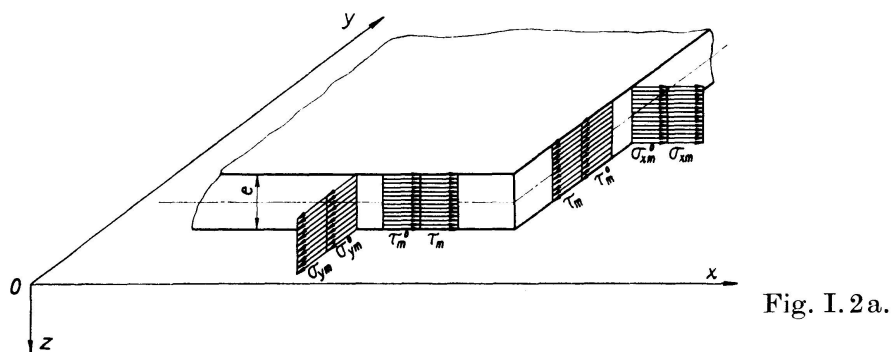
**Chapitre I: Etablissement des équations différentielles de la théorie non-linéaire des grandes déformations des âmes à tensions résiduelles**

**I.1. Ames parfaitement planes**

Soit une âme rectangulaire parfaitement plane (fig. I.1.) sollicitée dans son feuillet moyen par des tensions  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau$ , des tensions résiduelles  $\sigma_{xm}^0$ ,  $\sigma_{ym}^0$ ,  $\tau_m^0$  uniformément réparties sur l'épaisseur de l'âme ainsi que par une charge transversale d'intensité  $q$  par unité d'aire.



Rapportons l'âme aux axes coordonnés  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et découpons y un parallélépipède élémentaire par deux paires de plans parallèles aux plans coordonnés  $0xz$  et  $0yz$  respectivement. Les fig. (I.2) font apparaître les tensions agissant sur l'élément ainsi extrait de l'âme.



*I.1.1. Equations d'équilibre intérieur*

Exprimons que le parallélépipède élémentaire est en équilibre sous l'effet des forces et moments qui le sollicitent.

Introduisant les résultantes par unité de longueur, nous écrivons:

$$\begin{aligned}
 N_x^0 &= \int_{-e/2}^{+e/2} \sigma_{xm}^0 dz; & N_y^0 &= \int_{-e/2}^{+e/2} \sigma_{ym}^0 dz; & T^0 &= \int_{-e/2}^{+e/2} \tau_m^0 dz; \\
 N_x &= \int_{-e/2}^{+e/2} \sigma_{xm} dz; & N_y &= \int_{-e/2}^{+e/2} \sigma_{ym} dz; & T &= \int_{-e/2}^{+e/2} \tau_m dz; \\
 M_x &= \int_{-e/2}^{+e/2} \sigma_{xf} z dz; & M_y &= \int_{-e/2}^{+e/2} \sigma_{yf} z dz; & M_{xy} &= \int_{-e/2}^{+e/2} \tau_f z dz; \\
 Q_x &= \int_{-e/2}^{+e/2} \tau_{xz} dz; & Q_y &= \int_{-e/2}^{+e/2} \tau_{yz} dz.
 \end{aligned} \tag{I.1}$$

Négligeant les infiniments petits d'ordre supérieur et désignant par  $w$  la déformée de l'âme, nous obtenons les équations de projection de ces forces intérieures sur les axes  $0x$ ,  $0y$  et  $0z$  sous la forme

$$\frac{\partial (\sigma_{xm}^0 + \sigma_{xm})}{\partial x} + \frac{\partial (\tau_m^0 + \tau_m)}{\partial y} = 0, \tag{I.2a}$$

$$\frac{\partial (\sigma_{ym}^0 + \sigma_{ym})}{\partial y} + \frac{\partial (\tau_m^0 + \tau_m)}{\partial x} = 0, \tag{I.2b}$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + (\sigma_{xm}^0 + \sigma_{xm}) e \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\sigma_{ym}^0 + \sigma_{ym}) e \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(\tau_m^0 + \tau_m) e \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + q = 0. \tag{I.2c}$$

Les conditions d'équilibre des moments se traduisent par les relations:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0, \tag{I.3a}$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0. \tag{I.3b}$$

### 1.1.2. Déformations unitaires

Les déformations unitaires supplémentaires du feuillet moyen  $\epsilon_{xm}$ ,  $\epsilon_{ym}$ ,  $\gamma_m$  sont données par les relations

$$\epsilon_{xm} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \tag{I.4a}$$

$$\epsilon_{ym} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \tag{I.4b}$$

$$\gamma_m = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \tag{I.4c}$$

tandis que les déformations unitaires de flexion s'écrivent

$$\epsilon_{xf} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{I.5a}$$

$$\epsilon_{yf} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \tag{I.5b}$$

$$\gamma_f = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (\text{I.5 c})$$

La condition habituelle de compatibilité des déformations reste valable:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xm}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{ym}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_m}{\partial x \partial y} = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (\text{I.6})$$

### I.1.3. Relations tensions-déformations

Si l'on admet que toutes les déformations sont parfaitement élastiques et qu'il n'existe pas de contraintes normales parallèles à l'axe  $z$ , les déformations sont liées aux tensions par les relations traditionnelles:

$$\epsilon_{xm} = \frac{\sigma_{xm}}{E} - \nu \frac{\sigma_{ym}}{E}; \quad \epsilon_{ym} = \frac{\sigma_{ym}}{E} - \nu \frac{\sigma_{xm}}{E}; \quad \gamma_m = \frac{\tau_m}{G}, \quad (\text{I.7 a})$$

$$\epsilon_{xf} = \frac{\sigma_{xf}}{E} - \nu \frac{\sigma_{yf}}{E}; \quad \epsilon_{yf} = \frac{\sigma_{yf}}{E} - \nu \frac{\sigma_{xf}}{E}; \quad \gamma_f = \frac{\tau_f}{G}. \quad (\text{I.7 b})$$

$E$  est le module de Young,  $G$  le module de Coulomb et  $\nu$  le coefficient de Poisson.

Compte tenu des relations (I.1), (I.5) et (I.7b), on déduit pour les moments les expressions:

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (\text{I.8 a})$$

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (\text{I.8 b})$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (\text{I.8 c})$$

où  $D = \frac{E e^3}{12(1-\nu^2)}$  est la rigidité de l'âme.

Les expressions des efforts tranchants  $Q_x$ ,  $Q_y$  s'obtiennent à partir des équations (I.3) et (I.8):

$$Q_x = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right), \quad (\text{I.9 a})$$

$$Q_y = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right). \quad (\text{I.9 b})$$

## I.1.4. Equations différentielles de la déformée de l'âme

Les expressions (I.9) permettent d'écrire la condition d'équilibre (I.2c) sous la forme:

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) =$$

$$e (\sigma_{xm}^0 + \sigma_{xm}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + e (\sigma_{ym}^0 + \sigma_{ym}) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 e (\tau_m^0 + \tau_m) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + q. \quad (\text{I.10})$$

De l'introduction des expressions (I.7a) dans la condition de compatibilité (I.6) résulte l'équation

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xm}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \tau_m}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_{ym}}{\partial x^2} - \nu \left( \frac{\partial^2 \sigma_{xm}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \tau_m}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_{ym}}{\partial y^2} \right) =$$

$$E \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]. \quad (\text{I.11})$$

Comme les tensions résiduelles forment un système en équilibre, les équations (I.2) fournissent la relation

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xm}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \tau_m}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_{ym}}{\partial y^2} = 0. \quad (\text{I.12})$$

Si bien que l'équation (I.11) prend la forme plus simple

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xm}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \tau_m}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_{ym}}{\partial x^2} = E \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]. \quad (\text{I.13})$$

Finalement, si l'on définit les fonctions d'Airy  $\Phi_0$  et  $\Phi$  par

$$\sigma_{xm}^0 = \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2}; \quad \sigma_{ym}^0 = \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2}; \quad \tau_m^0 = -\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial y}, \quad (\text{I.14a})$$

$$\sigma_{xm} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad \sigma_{ym} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad \tau_m = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \quad (\text{I.14b})$$

la déformée de l'âme résultera du système d'équations différentielles

$$\frac{D}{e} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) =$$

$$\frac{\partial^2 (\Phi_0 + \Phi)}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\Phi_0 + \Phi)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 (\Phi_0 + \Phi)}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{q}{e}, \quad (\text{I.15a})$$

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = E \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (\text{I.15b})$$

## I.2. Ames à courbure initiale

Désignons par  $w_0$  la courbure initiale résultant du processus de fabrication de l'âme et de l'effet des tensions résiduelles.

### I.2.1. Relations d'équilibre

La seule modification à apporter aux relations d'équilibre (I.2) est le remplacement dans l'équation (I.2c) de la déformée  $w$  par la déformée totale  $w_t = w_0 + w$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + (\sigma_{xm}^0 + \sigma_{xm}) e^{-\frac{\partial^2(w_0+w)}{\partial x^2}} + (\sigma_{ym}^0 + \sigma_{ym}) e^{-\frac{\partial^2(w_0+w)}{\partial y^2}} \\ + 2(\tau_m^0 + \tau_m) e^{-\frac{\partial^2(w_0+w)}{\partial x \partial y}} + q = 0. \end{aligned} \quad (\text{I.16})$$

### I.2.2. Déformations unitaires

De manière analogue, la condition de compatibilité relative aux âmes à tensions résiduelles et à courbure initiale s'écrit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \epsilon_{xm}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{ym}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_m}{\partial x \partial y} = \\ \left[ \frac{\partial^2(w_0+w)}{\partial x \partial y} \right]^2 - \frac{\partial^2(w_0+w)}{\partial x^2} \frac{\partial^2(w_0+w)}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (\text{I.17})$$

### I.2.3. Les relations tensions — déformations

Les relations restent identiques à celles du paragraphe I.1.3.

### I.2.4. Equations différentielles de la déformée de l'âme

Une analyse similaire à celle du paragraphe I.1.4 fournit les équations différentielles de la déformée de l'âme.

$$\begin{aligned} \frac{D}{e} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = \\ \frac{\partial^2(\Phi_0 + \Phi)}{\partial y^2} \frac{\partial^2(w_0+w)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\Phi_0 + \Phi)}{\partial x^2} \frac{\partial^2(w_0+w)}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2(\Phi_0 + \Phi)}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2(w_0+w)}{\partial x \partial y} + \frac{q}{e}, \end{aligned} \quad (\text{I.18 a})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = \\ E \left\{ \left[ \frac{\partial^2(w_0+w)}{\partial x \partial y} \right]^2 - \frac{\partial^2(w_0+w)}{\partial x^2} \frac{\partial^2(w_0+w)}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{I.18 b})$$

**Chapitre II: Comportement post-critique d'une âme carrée à tensions résiduelles sollicitée par une compression uniformément répartie**

**II.1. Comportement post-critique d'une âme carrée comprimée uniformément et sollicitée par des tensions résiduelles d'allure parabolique**

*II.1.1. Définition du problème*

Nous allons étudier le comportement post-critique d'une âme carrée parfaitement plane, simplement appuyée sur son contour, sollicitée dans son feuillet moyen par une compression  $\sigma$  uniformément répartie sur les bords  $x = \frac{a}{2}$ ;  $x = -\frac{a}{2}$  ainsi que par des tensions résiduelles  $\sigma_{xm}^0$ ,  $\sigma_{ym}^0$ ,  $\tau_m^0$  (fig. II.1). Une fonction d'Airy  $\Phi_0$  engendrera les tensions résiduelles par les relations (I.14a).

Nous admettons dans ce chapitre une répartition simple de ces tensions répondant à une loi parabolique; aussi nous poserons en séparant les variables

$$\Phi_0 = \frac{a^2 \sigma_0}{32} \left[ 1 - 8 \frac{x^2}{a^2} + 16 \frac{x^4}{a^4} \right] \left[ 1 - 8 \frac{y^2}{a^2} + 16 \frac{y^4}{a^4} \right], \quad (\text{II.1})$$

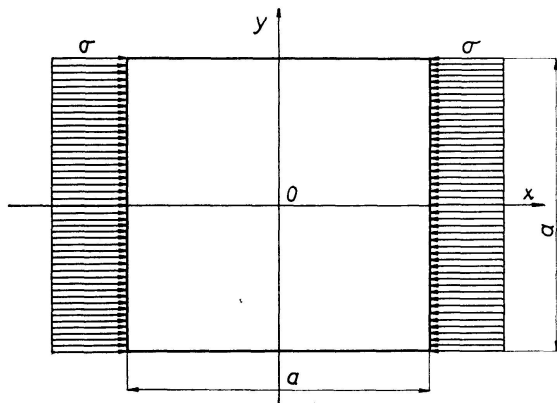


Fig. II.1a.

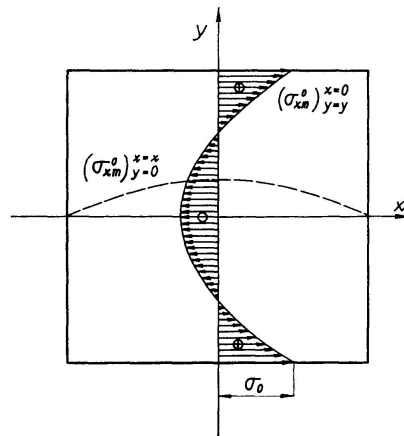


Fig. II.1b.

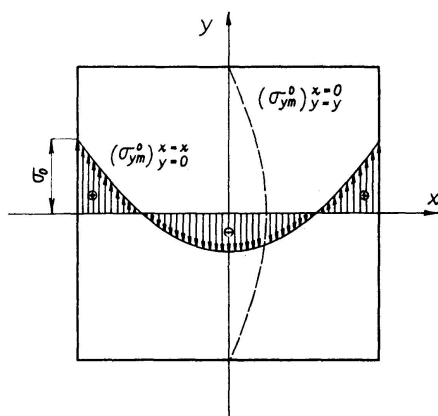


Fig. II.1c.

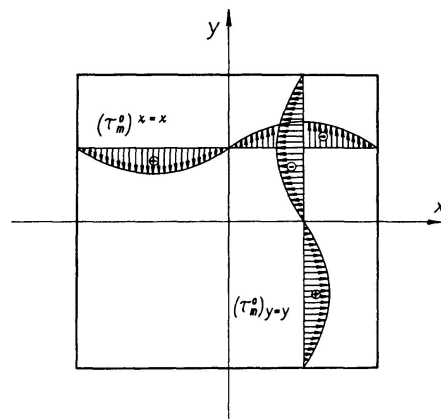


Fig. II.1d.

ce qui donne le champ de tensions résiduelles:

$$\sigma_{xm}^0 = \sigma_0 \left[ 1 - 8 \frac{x^2}{a^2} + 16 \frac{x^4}{a^4} \right] \left[ -\frac{1}{2} + 6 \frac{y^2}{a^2} \right], \quad (\text{II.2 a})$$

$$\sigma_{ym}^0 = \sigma_0 \left[ -\frac{1}{2} + 6 \frac{x^2}{a^2} \right] \left[ 1 - 8 \frac{y^2}{a^2} + 16 \frac{y^4}{a^4} \right], \quad (\text{II.2 b})$$

$$\tau_m^0 = \sigma_0 \left[ 4 \frac{x}{a} - 16 \frac{x^3}{a^3} \right] \left[ -2 \frac{y}{a} + 8 \frac{y^3}{a^3} \right]. \quad (\text{II.2 c})$$

La tension de référence  $\sigma_0$  est définie aux fig. 1 qui illustrent la répartition des tensions résiduelles.

### II.1.2. Equations différentielles et conditions aux limites

La fonction de tension de membrane  $\Phi$  et la déformée de l'âme  $w$  satisfont aux équations (I.15) avec les conditions aux limites suivantes:

*Fonction  $w$*

$$\text{a) pour } x = -\frac{a}{2}, \quad x = +\frac{a}{2}, \quad w = 0, \quad (\text{II.3 a})$$

$$y = -\frac{a}{2}, \quad y = +\frac{a}{2}, \quad w = 0. \quad (\text{II.3 b})$$

$$\text{b) pour } x = -\frac{a}{2}, \quad x = +\frac{a}{2}, \quad M_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad (\text{II.4 a})$$

$$y = -\frac{a}{2}, \quad y = +\frac{a}{2}, \quad M_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (\text{II.4 b})$$

*Fonction  $\Phi$*

$$\text{a) pour } x = -\frac{a}{2}, \quad x = +\frac{a}{2}, \quad \tau_m = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0, \quad (\text{II.5 a})$$

$$y = -\frac{a}{2}, \quad y = +\frac{a}{2}, \quad \tau_m = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0. \quad (\text{II.5 b})$$

b) Supposons que la rigidité flexionnelle des pièces de support de l'âme soit telle que les bords de celle-ci restent rectilignes.

Si  $\Delta x$  et  $\Delta y$  représentent les déplacements relatifs des bords de l'âme, les relations (I.4) et (I.7a) permettent d'écrire

pour les bords  $x = -\frac{a}{2}$ ,  $x = +\frac{a}{2}$ ,

$$\Delta_x = \int_{-a/2}^{a/2} \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int_{-a/2}^{a/2} \left[ \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx = \text{constante}, \quad (\text{II.6 a})$$

pour les bords  $y = -\frac{a}{2}$ ,  $y = +\frac{a}{2}$ ,

$$\Delta_y = \int_{-a/2}^{a/2} \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int_{-a/2}^{a/2} \left[ \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy = \text{constante.} \quad (\text{II.6 b})$$

Il faut considérer deux cas:

A. Les bords rectilignes ne se rapprochent pas:

$$\text{pour } x = -\frac{a}{2}, \quad x = +\frac{a}{2}, \quad \Delta_x = 0, \quad (\text{II.7 a})$$

ou

$$\text{pour } y = -\frac{a}{2}, \quad y = +\frac{a}{2}, \quad \Delta_y = 0. \quad (\text{II.7 b})$$

B. Les bords rectilignes se rapprochent librement:

$$\text{pour } x = -\frac{a}{2}, \quad x = +\frac{a}{2}, \quad p_x = -\sigma, \quad (\text{II.8 a})$$

$$y = -\frac{a}{2}, \quad y = +\frac{a}{2}, \quad p_y = 0. \quad (\text{II.8 b})$$

$-p_x$ ,  $-p_y$  désignent les valeurs moyennes des sollicitations aux bords de l'âme (voir plus loin).

### II.1.3. Solution des équations des grandes déformations

#### II.1.3.1. Supposition relative à la déformée de l'âme

Parmi les fonctions admissibles  $\bar{w}_i$  satisfaisant aux conditions aux limites (II.3) (II.4) et dont les dérivées partielles sont continues jusqu'au quatrième ordre, nous faisons choix des fonctions particulières

$$\bar{w}_i = \cos \frac{i \pi x}{a} \cos \frac{j \pi y}{a} \quad \text{pour } i, j = 1, 3, \dots \quad (\text{II.9})$$

La déformée de l'âme peut donc s'écrire

$$w = \sum_{i=1}^n f_i \bar{w}_i. \quad (\text{II.10})$$

Pour une âme carrée comprimée uniformément, on peut se contenter du premier terme de la série (II.10)

$$w = f \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a}. \quad (\text{II.11})$$

#### II.1.3.2. Etablissement de l'équation différentielle satisfaite par la fonction de tension $\Phi$

Après calcul des dérivées partielles figurant dans le second membre de l'équation (I.15b), il apparaît que la fonction de tension  $\Phi$  satisfait l'équation biharmonique

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = -\frac{1}{2} E f^2 \frac{\pi^4}{a^4} \left( \cos \frac{2\pi x}{a} + \cos \frac{2\pi y}{a} \right). \quad (\text{II.12})$$

Les relations (II.5) à (II.8) donnent les conditions aux limites correspondantes.

### II.1.3.3. Recherche de la fonction de tension $\Phi$

$$\text{L'équation homogène } \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial y^4} = 0 \quad (\text{II.13})$$

correspondant à l'équation (II.12) admet comme solution un polynôme du second degré de la forme

$$\Phi_1 = -\frac{p_x y^2}{2} - \frac{p_y x^2}{2}, \quad (\text{II.14})$$

où  $-p_x$ ,  $-p_y$  sont les valeurs moyennes des sollicitations aux limites. Comme la fonction (II.14) est un polynôme biharmonique, l'équation (II.13) est satisfaite.

On peut adopter comme intégrale particulière de l'équation non-homogène (II.12), l'expression

$$\Phi_2 = E f^2 \left( C_1 \cos \frac{2\pi x}{a} + C_2 \cos \frac{2\pi y}{a} \right). \quad (\text{II.15})$$

On en déduit par identification avec (II.12) les valeurs des constantes

$$C_1 = C_2 = -\frac{1}{32}. \quad (\text{II.16})$$

$$\text{En tenant compte de ce que } \Phi = \Phi_1 + \Phi_2, \quad (\text{II.17})$$

la fonction d'Airy s'écrit

$$\Phi = -\frac{1}{32} E f^2 \left( \cos \frac{2\pi x}{a} + \cos \frac{2\pi y}{a} \right) - \frac{p_x y^2}{2} - \frac{p_y x^2}{2}. \quad (\text{II.18})$$

### II.1.3.4. Tensions de membrane et déplacements des bords

On peut déterminer facilement les tensions de membrane

$$\sigma_{xm} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{1}{8} \frac{\pi^2}{a^2} E f^2 \cos \frac{2\pi y}{a} - p_x, \quad (\text{II.19a})$$

$$\sigma_{ym} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{8} \frac{\pi^2}{a^2} E f^2 \cos \frac{2\pi x}{a} - p_y, \quad (\text{II.19b})$$

$$\tau_m = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0. \quad (\text{II.19c})$$

La condition aux limites (II.5) est alors satisfaite sur tout le contour.

Les déplacements  $\Delta_x$ ,  $\Delta_y$  des bords de l'âme s'obtiennent facilement en remplaçant dans les expressions (II.6) les tensions de membrane par leurs valeurs (II.19), on trouve de cette manière

$$\Delta_x = -\frac{1}{8} \frac{\pi^2}{a} f^2 - \frac{p_x - \nu p_y}{E} a, \quad (\text{II.20 a})$$

$$\Delta_y = -\frac{1}{8} \frac{\pi^2}{a} f^2 - \frac{p_y - \nu p_x}{E} a. \quad (\text{II.20 b})$$

Les déplacements moyens des bords s'écrivent dès lors

$$e_x = \frac{\Delta x}{a} = -\frac{1}{8} f^2 \frac{\pi^2}{a^2} - \frac{p_x - \nu p_y}{E}, \quad (\text{II.21 a})$$

$$e_y = \frac{\Delta y}{a} = -\frac{1}{8} f^2 \frac{\pi^2}{a^2} - \frac{p_y - \nu p_x}{E}. \quad (\text{II.21 b})$$

Il en résulte que la supposition des bords rectilignes est effectivement satisfaite.

### II.1.3.5. Détermination du paramètre $f$

Plusieurs méthodes, notamment la méthode énergétique de Rayleigh-Ritz, permettent de déterminer le paramètre  $f$  caractérisant la déformée de l'âme.

Nous ferons choix de la méthode de Galerkin qui s'avère la plus simple, dans notre cas.

Cette méthode fournit le paramètre  $f$  comme solution de l'équation suivante:

$$\int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} \left\{ \left[ D \nabla^2 \nabla^2 w - e \left( \frac{\partial^2 (\Phi_0 + \Phi)}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\Phi_0 + \Phi)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 (\Phi_0 + \Phi)}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] \bar{w}_1 \right\} dx dy = 0. \quad (\text{II.22})$$

$\nabla^2$  est l'opérateur Laplacien.

$w$  (formule II.11) est fonction du paramètre  $f$  tandis que la formule (II.9) prend pour  $i=1$  la forme

$$\bar{w}_1 = \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a}. \quad (\text{II.23})$$

Remplaçant les dérivées figurant dans l'équation (II.22) par leurs valeurs, nous obtenons l'équation algébrique déterminant le paramètre  $f$ :

$$\frac{1}{32} \frac{\pi^4}{a^2} E f^2 + \frac{\pi^4 D}{e a^2} - \frac{\pi^2}{4} (p_x + p_y) - 0,932 \frac{\pi^2}{4} \sigma_0 = 0. \quad (\text{II.24})$$

En l'absence des tensions résiduelles, l'équation (II.24) prend la forme particulière

$$\frac{1}{32} \frac{\pi^2}{a^2} E e f^2 + \frac{\pi^2 D}{a^2} - \frac{1}{4} e (p_x + p_y) = 0,$$

qui a été établie par WOLMIR (voir [2]).

### II.1.3.6. Conditions aux limites relatives à la fonction $\Phi$

Nous supposons que les éléments aux limites  $x = \pm \frac{a}{2}$  peuvent se rapprocher librement ce qui, d'après (II.8a) donne

$$p_x = -\sigma. \quad (\text{II.25})$$

En ce qui concerne les bords  $y = \pm \frac{a}{2}$ , nous allons étudier deux cas d'appuis.

A. Les éléments aux limites  $y = \pm \frac{a}{2}$  ne se rapprochent pas.

D'après (II.7b),  $\Delta_y = e_y = 0$ , soit, en tenant compte de (II.20b)

$$p_y = -\nu\sigma - \frac{1}{8}\pi^2 E \frac{f^2}{a^2}. \quad (\text{II.26})$$

B. Les éléments aux limites  $y = \pm \frac{a}{2}$  se rapprochent librement.

Il résulte de (II.8b) que 
$$p_y = 0. \quad (\text{II.27})$$

On sait d'autre part que la condition (II.5) est satisfaite sur tout le contour de l'âme vu que  $\tau_m = 0$ .

### II.1.4. Tension critique d'une âme carrée comprimée uniformément et soumise à l'effet des tensions résiduelles

Posant  $f = 0$  dans la relation (II.24), nous obtenons l'équation déterminant la tension critique de l'âme:

$$\frac{\pi^2 D}{e a^2} - \frac{1}{4}(p_x + p_y) - 0,233 \sigma_0 = 0. \quad (\text{II.28})$$

Les valeurs moyennes  $-p_x$ ,  $-p_y$  des sollicitations aux bords de l'âme sont fonctions des conditions aux limites (II.25/26/27) où l'on aura posé  $f^2 = 0$ .

Introduisant dans l'équation (II.28) les valeurs des sollicitations aux limites, nous obtenons pour les deux cas d'appuis (II.26 et 27), les équations fournissant la tension critique de l'âme à tensions résiduelles.

A. Si les éléments aux limites  $y = \pm \frac{a}{2}$  ne se rapprochent pas

$$\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{cr}^*} = 0,769231 + 0,717 \frac{\sigma_0}{\sigma_{cr}^*}. \quad (\text{II.29 a})$$

B. Si les éléments aux limites  $y = \pm \frac{a}{2}$  se rapprochent librement

$$\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{cr}^*} = 1 + 0,932 \frac{\sigma_0}{\sigma_{cr}^*}. \quad (\text{II.29 b})$$

$\sigma_{cr}^*$  désigne la tension critique élastique d'une âme libre de toutes tensions résiduelles et dont les bords peuvent se rapprocher librement.

Cette tension est bien connue par la théorie linéaire et a pour valeur

$$\sigma_{cr}^* = -\frac{\pi^2 E}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{e}{a}\right)^2. \quad (\text{II.30})$$

Les valeurs du rapport  $\sigma_{cr}/\sigma_{cr}^*$  sont données aux tableaux 1 et 2, les valeurs calculées par l'équation (II.29a) au tableau 1, celles calculées par l'équation (II.29b) au tableau 2.

*Contraintes critiques des âmes de petites et moyennes minceurs soumises à l'effet des tensions résiduelles<sup>1)</sup>*

Tableau 1

a)	$\sigma_0/\sigma_{cr}^*$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
	$\sigma_{cr}/\sigma_{cr}^*$	0,769	0,913	1,056	1,199	1,343	1,486
b)	$\sigma_0/\sigma_{cr}^*$	-0,2	-0,4	-0,6	-0,8	-1	
	$\sigma_{cr}/\sigma_{cr}^*$	0,626	0,482	0,339	0,196	0,052	

Tableau 2

a)	$\sigma_0/\sigma_{cr}^*$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
	$\sigma_{cr}/\sigma_{cr}^*$	1	1,186	1,373	1,559	1,746	1,932
b)	$\sigma_0/\sigma_{cr}^*$	-0,2	-0,4	-0,6	-0,8	-1	
	$\sigma_{cr}/\sigma_{cr}^*$	0,814	0,627	0,441	0,254	0,068	

La théorie linéaire du voilement des âmes ne tient compte que des conditions aux limites pour la flèche  $w$  et néglige en général l'effet de la contraction transversale de l'âme. Dans ce cas, les conditions aux limites pour les déplacements des bords dans la direction du feuillet moyen n'influencent pas la valeur de la tension critique si bien que l'équation (II.29b) et le tableau 2 seraient valables pour les deux conditions aux limites.

Par contre, la théorie non-linéaire du comportement post-critique tient compte des conditions aux limites à la fois pour la flèche  $w$  et pour les déplacements des bords. C'est pourquoi on n'obtient pas en linéarisant les équations non-linéaires la même tension critique pour les deux conditions aux limites

<sup>1)</sup> Il faut rappeler que la validité des tableaux 1 et 2 est limitée au domaine élastique des tensions critiques.

relatives aux déplacements des bords. Dans le cas de bords ne pouvant se rapprocher, il naît même dans le comportement linéaire un effet «membranaire» dû à la contraction transversale qui change la valeur de la tension critique.

A titre d'exemple, la tension critique d'une âme carrée, comprimée uniformément, dont les bords longitudinaux ne se rapprochent pas vaut, en l'absence de toute tension résiduelle,

$$\sigma_{cr} = 0,769231 \sigma_{cr}^*.$$

Cette valeur est inférieure de 23% à celle fournie par la théorie linéaire.

Les valeurs du rapport  $\sigma_{cr}/\sigma_{cr}^*$  ont été calculées dans le domaine

$$-1 \leq \frac{\sigma_0}{\sigma_{cr}^*} \leq 1.$$

Les valeurs mentionnées aux tableaux 1a et 2a correspondent à un effet favorable des tensions résiduelles (soit une espèce de précontrainte de l'âme), les valeurs reprises aux tableaux 1b et 2b à un effet défavorable.

Il en résulte que la présence des tensions résiduelles change considérablement la valeur de la tension critique.

### *II.1.5. Comportement post-critique d'une âme carrée, comprimée uniformément en présence de tensions résiduelles*

#### *II.1.5.1. Détermination des valeurs du paramètre $f$*

Après simplification de l'équation (II.24), nous obtenons les équations déterminant le paramètre  $f$ .

A. Les éléments aux limites  $y = \pm \frac{a}{2}$  ne se rapprochent pas:

$$\frac{\sigma}{\sigma_{cr}^*} = 0,769231 + 0,5250 f'^2 + 0,717 \frac{\sigma_0}{\sigma_{cr}^*}. \quad (\text{II.31 a})$$

B. Les éléments aux limites  $y = \pm \frac{a}{2}$  se rapprochent librement:

$$\frac{\sigma}{\sigma_{cr}^*} = 1 + 0,34125 f'^2 + 0,932 \frac{\sigma_0}{\sigma_{cr}^*} \quad (\text{II.31 b})$$

où  $f' = \frac{f}{e}$  ( $e$  est l'épaisseur de l'âme).

$\sigma_{cr}^*$  désigne à nouveau la tension critique de l'âme sans tensions résiduelles et dont les bords peuvent se rapprocher librement.

Les valeurs du paramètre  $f'$  sont présentées sous forme de diagrammes aux fig. II.2; la fig. II.2a se rapporte à la condition aux limites A, la fig. II.2b à la condition aux limites B.

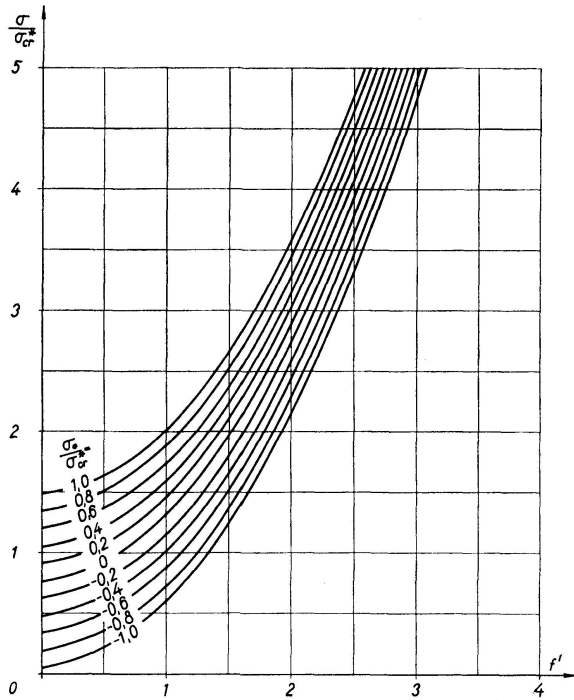


Fig. II. 2a.

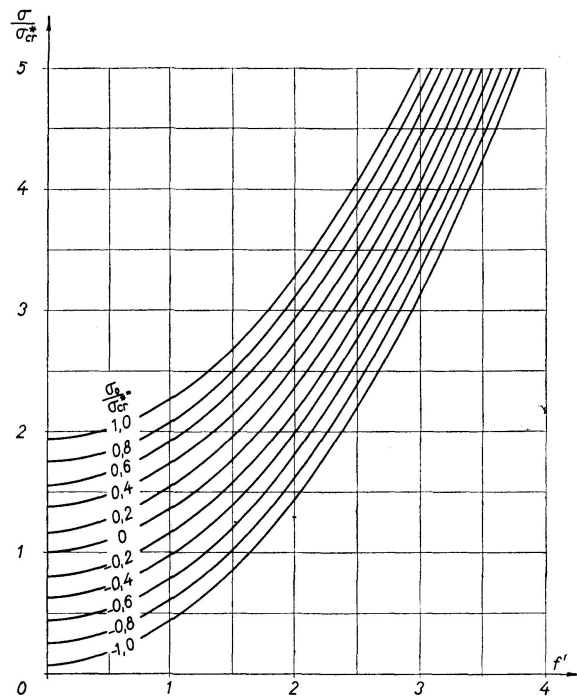


Fig. II. 2b.

### II.1.5.2. Déformée de l'âme

La flèche maximum se produit au milieu de l'âme ( $x = y = 0$ ):

$$w_{max} = f. \quad (\text{II.32})$$

Le rapport de la flèche maximum à l'épaisseur de l'âme vaut

$$\frac{w_{max}}{e} = \frac{f}{e} = f'. \quad (\text{II.33})$$

Les courbes présentées aux fig. II.2 déterminent également la valeur relative de la flèche maximum de l'âme.

### II.1.5.3. Etat de tension de l'âme

**II.1.5.3.1. Tension de membrane.** Les tensions de membrane sont données par les formules (II.19).

C'est la tension  $\sigma_{xm}$ , travaillant dans la direction de la charge  $\sigma$ , qui joue le rôle décisif pour l'état limite de l'âme comprimée (voir [3, 4]).

Sa valeur maximum se produit dans les fibres voisines des bords longitudinaux  $y = \pm a/2$  et s'écrit sous la même forme

$$\sigma_{xmmax} = \sigma - \frac{1}{8} \pi^2 E \frac{f^2}{a^2}$$

quelle que soit la condition aux limites envisagée<sup>2)</sup>.

<sup>2)</sup> Cependant, comme les valeurs du paramètre  $f$  sont différentes pour chacune des conditions aux limites, il est clair que les valeurs  $\sigma_{xm}$  le sont aussi.

Introduisons dans cette expression le rapport de la tension membranaire  $\sigma_{xm\ max}$  à la tension critique  $\sigma_{cr}^*$ ; nous obtenons, en posant  $f' = f/e$ ,

$$\frac{\sigma_{xm\ max}}{\sigma_{cr}^*} = \frac{\sigma}{\sigma_{cr}^*} + \frac{3(1-\nu^2)}{8} f'^2.$$

Pour l'acier ( $\nu = 0,3$ ), la formule précédente prend la forme

$$\frac{\sigma_{xm\ max}}{\sigma_{cr}^*} = \frac{\sigma}{\sigma_{cr}^*} + 0,34125 f'^2. \quad (\text{II.35})$$

Les valeurs du rapport  $\frac{\sigma_{xm\ max}}{\sigma_{cr}^*}$  sont données aux figs. II.3.

La fig. II.3a est relative à la condition aux limites A, la fig. II.3b se rapporte à la condition B.

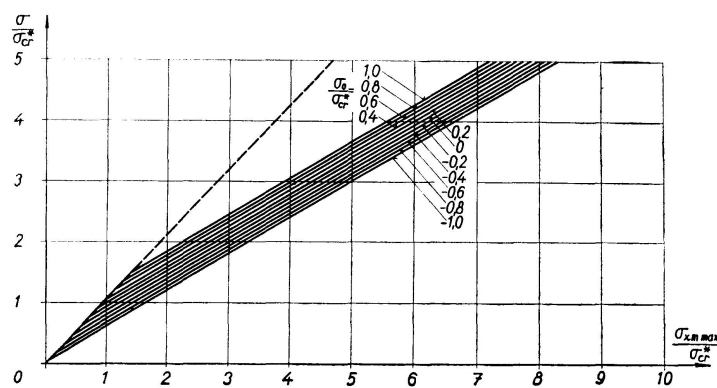


Fig. II.3a.

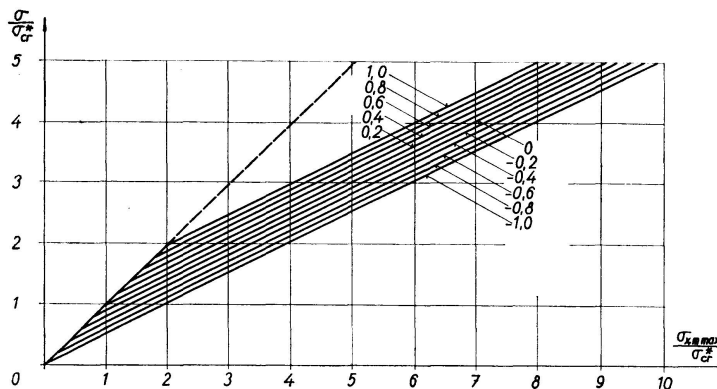


Fig. II.3b.

II.1.5.3.2. *Tensions de flexion.* Les tensions de flexion s'écrivent respectivement:

$$\sigma_{xf} = \mp \frac{Ee}{2(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (\text{II.36a})$$

$$\sigma_{yf} = \mp \frac{Ee}{2(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \quad (\text{II.36b})$$

En substituant les valeurs des dérivées  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$  aux formules précédentes, on obtient

$$\sigma_{xf} = \sigma_{yf} = \mp \frac{Ee}{2(1-\nu)} \frac{\pi^2}{a^2} f \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a}. \quad (\text{II.37})$$

La valeur maximum est atteinte au milieu de l'âme et vaut

$$\sigma_{xfmax} = \sigma_{yfmax} = \mp \frac{E e}{2(1-\nu)} \frac{\pi^2}{a^2} f. \quad (\text{II.38})$$

En introduisant les rapports  $\sigma_{xfmax}/\sigma_{cr}^*$ ,  $\sigma_{yfmax}/\sigma_{cr}^*$  et la valeur  $f' = f/e$ , on peut écrire

$$\frac{\sigma_{xfmax}}{\sigma_{cr}^*} = \frac{\sigma_{yfmax}}{\sigma_{cr}^*} = \mp 1,95 f'. \quad (\text{II.39})$$

Les valeurs des rapports (II.39) s'obtiendront donc par simple multiplication des valeurs données aux fig. II.2.

## II.2. Comportement post-critique d'une âme carrée comprimée uniformément et soumise à des tensions résiduelles d'origine thermique

### II.2.1. Définition du problème

Nous considérons à nouveau le comportement post-critique d'une âme carrée en acier simplement appuyée sur son contour et comprimée uniformément suivant deux bords opposés

$$x = \frac{a}{2}; \quad x = -\frac{a}{2}, \quad (\text{Fig. II.1a}).$$

Comme au chapitre précédent, l'âme est sollicitée par les tensions résiduelles (I.14a). En effet, nous soumettons l'âme à une distribution non uniforme de température de nature à introduire dans les zones les plus chaudes des déformations plastiques. Pendant le refroidissement et par le jeu des liaisons entre les divers éléments de l'âme, les déformations s'accompagnent de tensions. Pour permettre le calcul de ces tensions résiduelles d'origine thermique, nous ferons les hypothèses suivantes (voir [5]):

- a) Les températures et les contraintes sont réparties uniformément sur l'épaisseur de l'âme.
- b) Le module d'Young  $E$  reste invariable et égal à  $0,75 E_{max}$ .
- c) Le coefficient de dilatation  $\alpha$  est constant et vaut  $11 \cdot 10^{-6}$ .

### II.2.2. Calcul des tensions résiduelles d'origine thermique

#### II.2.2.1. Fonction d'Airy des tensions résiduelles

Supposons qu'un champ de température

$$T = T_0 + X(x) Y(y) \quad (\text{II.40})$$

règne dans l'âme en cours de refroidissement.

La fonction de tensions résiduelles  $\Phi_0$  est solution de l'équation biharmonique généralisée

$$\nabla^4 \Phi_0 - \alpha E \nabla^2 T = 0. \quad (\text{II.41})$$

$T$  est la température au point envisagé, le signe — est prévu devant le terme  $\alpha E \nabla^2 T$  car il s'agit d'un refroidissement.

Appliquant la méthode de séparation des variables, nous écrivons

$$\Phi_0 = f(x) g(y), \quad (\text{II.42})$$

soit

$$\sigma_{xm}^0 = f g'', \quad (\text{II.43a})$$

$$\sigma_{ym}^0 = f'' g, \quad (\text{II.43b})$$

$$\tau_m^0 = -f' g'. \quad (\text{II.43c})$$

Le problème consiste à déterminer  $\Phi_0$  soit en définitive les fonctions  $f(x)$  et  $g(y)$ .

#### II.2.2.2. Solution de l'équation aux tensions thermiques par la méthode variationnelle

Eu égard à la difficulté de l'équation (II.41), nous recherchons la fonction  $\Phi_0$  par une analyse approchée (voir [6]).

Après avoir adopté comme fonction  $g(y)$  la solution du problème unidimensionnel de tensions résiduelles sous l'effet d'un champ de température  $T = Y(y)$ , nous déterminerons la fonction  $f(x)$  de manière à satisfaire le théorème du minimum de l'énergie complémentaire.

Comme l'âme est, au moment de l'introduction des tensions résiduelles, libre de toute liaison extérieure, son énergie complémentaire est donnée par

$$V = \iint V_0 dx dy, \quad (\text{II.44a})$$

où l'énergie unitaire  $V_0$  a pour expression

$$V_0 = \frac{1}{2E} (\sigma_{xm}^0)^2 + \sigma_{ym}^0)^2 - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xm}^0 \sigma_{ym}^0) + \frac{1+\nu}{E} \tau_m^0)^2 - \alpha T (\sigma_{xm}^0 + \sigma_{ym}^0). \quad (\text{II.44b})$$

Les relations (II.40) et (II.43) permettent d'écrire

$$2EV = \int_{-a/2}^{a/2} \{A_1 f^2 + A_2 (f'')^2 - 2\nu A_3 f f'' + 2(1+\nu) A_4 (f')^2 - 2\alpha E [(A_5 + A_6 X) f + (A_7 + A_8 X) f']\} dx \quad (\text{II.45})$$

$$\text{où } A_1 = \int_{-a/2}^{a/2} (g'')^2 dy;$$

$$A_5 = T_0 [g']_{-a/2}^{+a/2};$$

$$A_2 = \int_{-a/2}^{a/2} g^2 dy;$$

$$A_6 = \int_{-a/2}^{a/2} Y g'' dy;$$

$$A_3 = \int_{-a/2}^{a/2} g g'' dy = [g g']_{-a/2}^{+a/2} - A_4;$$

$$A_7 = T_0 \int_{-a/2}^{a/2} g dy;$$

$$A_4 = \int_{-a/2}^{a/2} (g')^2 dy;$$

$$A_8 = \int_{-a/2}^{a/2} Y g dy. \quad (\text{II.46})$$

Si la fonction  $f$  rend minimum l'énergie (II.45), elle satisfait d'après la théorie du calcul des variations l'équation

$$A_2 f'''' - 2[A_4 + \nu(A_3 + A_4)] f'' + A_1 f = \alpha E (A_5 + A_6 X + A_8 X''). \quad (\text{II.47})$$

Les conditions aux limites sont

$$\sigma_{xm}^0 = f g'' = 0, \quad \tau_m^0 = -f' g' = 0 \quad \text{pour } x = \pm \frac{a}{2}, \quad (\text{II.48 a})$$

$$\sigma_{ym}^0 = f'' g = 0, \quad \tau_m^0 = -f' g' = 0 \quad \text{pour } y = \pm \frac{a}{2}, \quad (\text{II.48 b})$$

par conséquent

$$\left\{ \begin{array}{l} f = f' = 0 \text{ en } x = \pm \frac{a}{2}, \\ A_3 = -A_4 \text{ puisque } [g g']_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} = 0, \\ A_5 = 0, \end{array} \right. \quad (\text{II.48 c})$$

si bien que l'équation (II.47) se simplifie et prend la forme

$$A_2 f'''' - 2 A_4 f'' + A_1 f = \alpha E (A_6 X + A_8 X''). \quad (\text{II.49})$$

Nous allons appliquer l'analyse précédente à une distribution particulière de température.

### II.2.2.3. Effet thermique localisé sur un axe de symétrie de l'âme

Admettons, conformément à la fig. II.4 qu'un champ de température

$$T = T_0 + T_1 \cos \frac{\pi y}{a}$$

règne dans l'âme en cours de refroidissement.

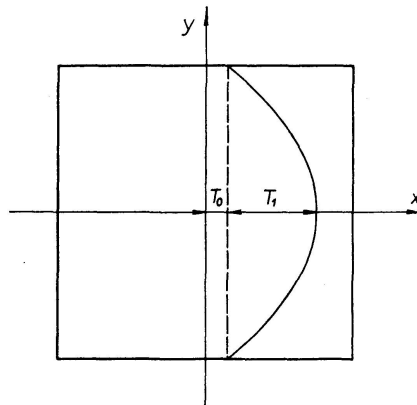


Fig. II.4.

Ce champ de température résulte d'un chauffage approprié de l'âme parallèlement à son axe de symétrie  $x$ .

Nous calculons en premier lieu la fonction  $g(y)$ .

On sait qu'après refroidissement dans un champ de température  $Y(y)$ , une plaque mince sans bridage subit une tension qui, loin des bords s'écrit

$$\sigma_{xm}^0 = \alpha E Y(y) - \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \alpha E Y(y) dy - \frac{12y}{a^3} \int_{-a/2}^{a/2} \alpha E Y(y) y dy, \quad (\text{II.50})$$

ce qui conduit, en posant

$$\frac{\sigma_{xm}^0}{f(x)} = g''(y)^3, \quad (\text{II.51})$$

à écrire successivement

$$g''(y) = \cos \frac{\pi y}{a} - \frac{2}{\pi}, \quad (\text{II.52a})$$

$$g'(y) = \frac{a}{\pi} \sin \frac{\pi y}{a} - \frac{2}{\pi} y + C_I, \quad (\text{II.52b})$$

$$g(y) = -\frac{a^2}{\pi^2} \cos \frac{\pi y}{a} - \frac{1}{\pi} y^2 + C_I y + C_{II}. \quad (\text{II.52c})$$

Les conditions aux limites (II.48) permettent le calcul des constantes

$$C_I = 0, \quad C_{II} = \frac{a^2}{4\pi},$$

moyennant quoi, la solution du problème unidimensionnel s'écrira

$$g(y) = -\frac{a^2}{\pi^2} \cos \frac{\pi y}{a} - \frac{1}{\pi} y^2 + \frac{a^2}{4\pi}. \quad (\text{II.53})$$

Le calcul des coefficients  $A_i$  figurant dans l'équation différentielle (II.49) donne

$$\begin{aligned} A_1 &= a \left( \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \right), & A_2 &= a^5 \left( -\frac{8}{\pi^6} + \frac{1}{2\pi^4} + \frac{1}{30\pi^2} \right), \\ A_4 &= a^3 \left( \frac{5}{6\pi^2} - \frac{8}{\pi^4} \right), & A_6 &= a \left( \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \right), \\ A_8 &= a^3 \left( \frac{4}{\pi^4} - \frac{1}{\pi^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{II.54})$$

Après remplacement des  $A_i$  par leurs valeurs (II.54), l'équation (II.49) prend la forme

$$0,000189 a^4 f''' - 0,004612 a^2 f'' + 0,094715 f = 0,094715 \alpha E T_1. \quad (\text{II.55})$$

La solution de l'équation homogène correspondant à l'équation (II.55) s'écrit:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= C_1'' \cos k_2 x \operatorname{ch} k_1 x + C_2'' \sin k_2 x \operatorname{sh} k_1 x \\ &+ C_3'' \sin k_2 x \operatorname{ch} k_1 x + C_4'' \cos k_2 x \operatorname{sh} k_1 x \end{aligned} \quad (\text{II.56})$$

$$\text{en posant} \quad k_1 = \frac{4,159}{a} \quad \text{et} \quad k_2 = \frac{2,257}{a}. \quad (\text{II.57})$$

---

<sup>3)</sup>  $g''(y)$  est sans dimension,  $f(x)$  ayant la dimension d'une tension.

Une solution particulière de l'équation complète (II.55) étant

$$f_2(x) = \alpha E T_1. \quad (\text{II.58})$$

La fonction  $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$  prendra la forme

$$f(x) = \alpha E T_1 (1 + C_1 \operatorname{ch} k_1 x \cos k_2 x + C_2 \operatorname{sh} k_1 x \sin k_2 x + C_3 \operatorname{ch} k_1 x \sin k_2 x + C_4 \operatorname{sh} k_1 x \cos k_2 x) \quad (\text{II.59})$$

les conditions aux limites (II.48) donnent

$$C_3 = C_4 = 0,$$

$$C_1 = \frac{-k_1 \operatorname{ch} \frac{k_1 a}{2} \sin \frac{k_2 a}{2} - k_2 \operatorname{sh} \frac{k_1 a}{2} \cos \frac{k_2 a}{2}}{k_1 \sin \frac{k_2 a}{2} \cos \frac{k_2 a}{2} + k_2 \operatorname{sh} \frac{k_1 a}{2} \operatorname{ch} \frac{k_1 a}{2}} = -0,50548,$$

$$C_2 = \frac{k_1 \operatorname{sh} \frac{k_1 a}{2} \cos \frac{k_2 a}{2} - k_2 \operatorname{ch} \frac{k_1 a}{2} \sin \frac{k_2 a}{2}}{k_1 \sin \frac{k_2 a}{2} \cos \frac{k_2 a}{2} + k_2 \operatorname{sh} \frac{k_1 a}{2} \operatorname{ch} \frac{k_1 a}{2}} = -0,03360$$

et par conséquent,

$$f(x) = \alpha E T_1 (1 - 0,50548 \operatorname{ch} k_1 x \cos k_2 x - 0,03360 \operatorname{sh} k_1 x \sin k_2 x). \quad (\text{II.60})$$

Les fonctions  $f(x)$ ,  $g(y)$  et leurs dérivées ont l'allure représentée aux fig. II.5.

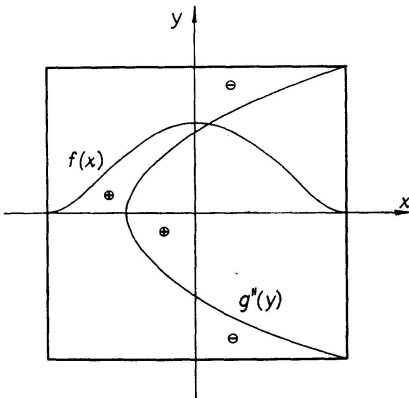


Fig. II.5a.

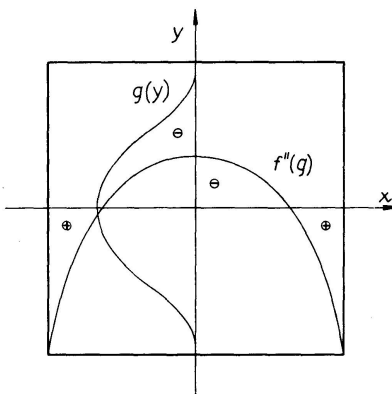


Fig. II.5b.

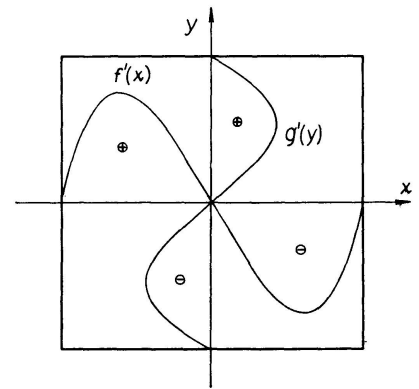


Fig. II.5c.

Combinant (II.53) et (II.60), nous obtenons la fonction de tensions recherchée:

$$\Phi_0 = \alpha E T_1 (1 - 0,50548 \operatorname{ch} k_1 x \cos k_2 x - 0,03360 \operatorname{sh} k_1 x \sin k_2 x) \cdot \left( \frac{a^2}{4\pi} - \frac{1}{\pi} y^2 - \frac{a^2}{\pi^2} \cos \frac{\pi y}{a} \right). \quad (\text{II.61})$$

Les équations (II.43) et (II.61) fournissent les tensions résiduelles:

$$\sigma_{xm}^0 = \alpha E T_1 [1 - 0,50548 \operatorname{ch} k_1 x \cos k_2 x - 0,03360 \operatorname{sh} k_1 x \sin k_2 x] \left[ \cos \frac{\pi y}{a} - \frac{2}{\pi} \right], \quad (\text{II.62a})$$

$$\sigma_{ym}^0 = \alpha E T_1 [-6,8 \operatorname{ch} k_1 x \cos k_2 x + 9,08 \operatorname{sh} k_1 x \sin k_2 x] \left[ -\frac{1}{\pi^2} \cos \frac{\pi y}{a} - \frac{1}{\pi} \frac{y^2}{a^2} + \frac{1}{4\pi} \right], \quad (\text{II.62 b})$$

$$\tau_m^0 = \alpha E T_1 [-2,18 \operatorname{sh} k_1 x \cos k_2 x + \operatorname{ch} k_1 x \sin k_2 x] \left[ \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi y}{a} - \frac{2}{\pi} \frac{y}{a} \right]. \quad (\text{II.62 c})$$

Ces tensions ont l'allure représentée aux fig. II.7 pour la répartition de température indiquée à la fig. II.6.

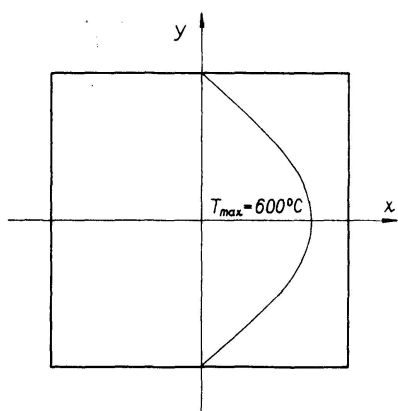


Fig. II. 6.

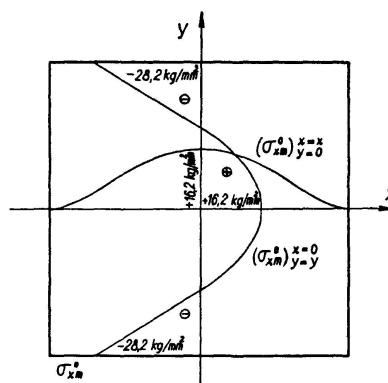


Fig. II. 7a.

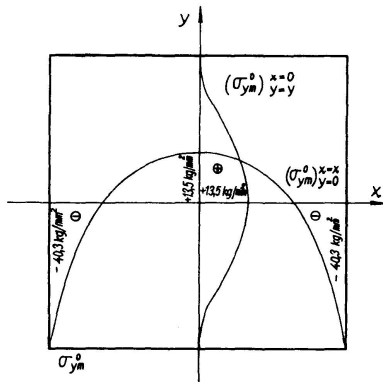


Fig. II. 7b.

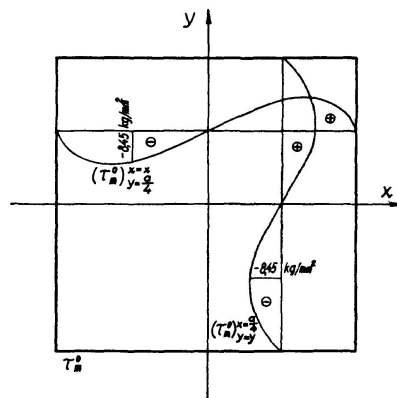


Fig. II. 7c.

### II.2.3. Solution des équations aux grandes déformations

#### II.2.3.1. Fonction d'Airy, tensions de membrane, déplacements des bords de l'âme

Les équations différentielles et les conditions aux limites du problème sont données au paragraphe II.1.2.

Nous supposons que la déformée de l'âme puisse encore s'écrire avec une précision suffisante sous la forme (II.11).

L'analyse de l'équation biharmonique satisfaite par la fonction d'Airy reste identique à celle présentée au paragraphe II.1.3.3.

La formule (II.18) donne la fonction  $\Phi$ , les formules (II.19) les tensions de membrane. Les déplacements moyens des bords auront la forme (II.21).

### II.2.3.2. Détermination du paramètre $f$ caractérisant la déformée

La méthode de Galerkin fournit pour le paramètre  $f$  l'équation

$$\int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} \left\{ \left[ D \nabla^2 \nabla^2 w - e \left( \frac{\partial^2 (\Phi_0 + \Phi)}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\Phi_0 + \Phi)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 (\Phi_0 + \Phi)}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] \bar{w}_1 \right\} dx dy = 0 \quad (\text{II.63})$$

ou comme précédemment,

$$\bar{w}_1 = \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a}.$$

Tous calculs faits, l'équation (II.63) déterminant le paramètre  $f$  prend la forme

$$\frac{4 \pi^2 D}{e a^2} + \frac{1}{8} \frac{\pi^2 E f^2}{a^2} - (p_x + p_y) + 0,10284 \alpha E T_1 = 0. \quad (\text{II.64})$$

Rappelons que les valeurs  $p_x$ ,  $p_y$  sont fonctions des conditions aux limites.

### II.2.4. Tension critique de l'âme

La tension critique de l'âme s'obtient en posant  $f = 0$  dans l'équation (II.64)

$$\frac{4 \pi^2 D}{e a^2} - (p_x + p_y) + 0,10284 \alpha E T_1 = 0. \quad (\text{II.65})$$

Posons à nouveau  $\sigma_{cr}^* = -4 \frac{\pi^2 D}{e a^2}$ .

A. Si les éléments aux limites  $y = \pm \frac{a}{2}$  ne se rapprochent pas (voir II.26), on obtient

$$\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{cr}^*} = 0,769231 - 0,07911 \frac{\alpha E T_1}{\sigma_{cr}^*}. \quad (\text{II.66 a})$$

B. Si les éléments aux limites  $y = \pm \frac{a}{2}$  se rapprochent librement (voir II.27), on obtient

$$\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{cr}^*} = 1 - 0,10284 \frac{\alpha E T_1}{\sigma_{cr}^*}. \quad (\text{II.66 b})$$

La tension critique de l'âme sous tensions résiduelles étant une compression, il résulte de (II.66) que la distribution de tensions résiduelles (II.62) constitue

une sorte de précontrainte de l'âme. Le tableau 3 donne la grandeur de cette précontrainte pour des âmes carrées d'éclancement  $\lambda^4$ ).

Tableau 3

$\lambda = \frac{a}{e}$	$\sigma_{cr}^*$ kg/mm <sup>2</sup>	$\left(\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{cr}^*}\right)_A$	$\left(\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{cr}^*}\right)_B$
100	7,6	1,85	2,4
150	3,38	3,20	4,2
200	1,9	5,1	6,6
250	1,22	7,5	9,8
300	0,844	10,5	13,7

### II.2.5. Comportement post-critique d'une âme carrée comprimée uniformément et soumise à des tensions résiduelles d'origine thermique

#### II.2.5.1. Détermination des valeurs du paramètre $f$

Après simplification de l'équation (II.64), nous obtenons les équations déterminant le paramètre  $f$  de la déformée:

A. Les éléments aux limites  $y = \pm \frac{a}{2}$  ne se rapprochent pas:

$$\frac{\sigma}{\sigma_{cr}^*} = 0,769231 + 0,5250 f'^2 - 0,07911 \frac{\alpha E T_1}{\sigma_{cr}^*}. \quad (\text{II.67 a})$$

B. Les éléments aux limites  $y = \pm \frac{a}{2}$  se rapprochent librement

$$\frac{\sigma}{\sigma_{cr}^*} = 1 + 0,34125 f'^2 - 0,10284 \frac{\alpha E T_1}{\sigma_{cr}^*}. \quad (\text{II.67 b})$$

Les valeurs du paramètre  $f' = f/e$  sont présentées sous forme de diagrammes aux fig. II.8.

La fig. II.8a est relative à la condition aux limites A, la fig. II.8b à la condition B.

#### II.2.5.2. Déformée de l'âme

La flèche maximum se produisant au milieu de l'âme:

$$w_{max} = f = e f'.$$

Les courbes de la fig. II.8 déterminent donc les valeurs relatives de la flèche maximum de l'âme. Il en résulte que l'effet bienfaisant des tensions résiduelles augmente avec la minceur  $\lambda^5$ ).

4) En admettant un comportement parfaitement élastique de celles-ci.

5) Voir la note 6.

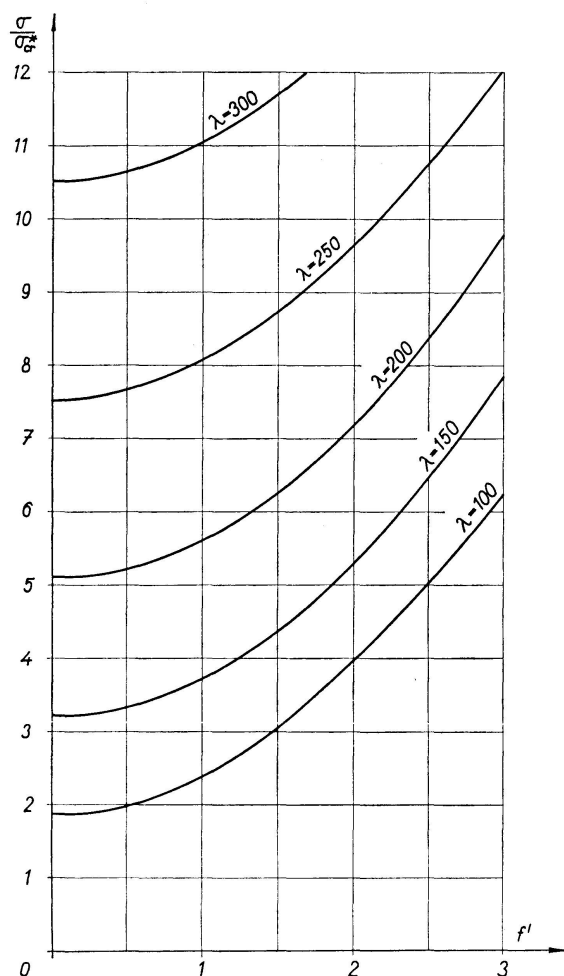


Fig. II. 8 a.

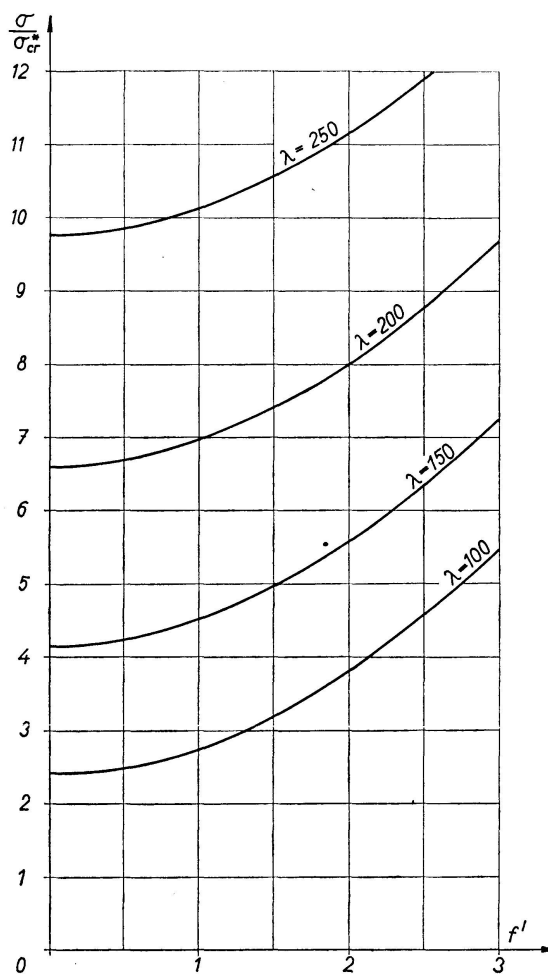


Fig. II. 8 b.

### II.2.5.3. Etat de tension de l'âme

II.2.5.3.1. Tensions de membrane. Suivant le raisonnement du paragraphe (II.1.5.3), nous écrivons le rapport de la tension de membrane maximum  $\sigma_{xm\ max}$  à la tension critique  $\sigma_{cr}^*$

$$\frac{\sigma_{xm\ max}}{\sigma_{cr}^*} = \frac{\sigma}{\sigma_{cr}^*} + 0,34125 f'^2.$$

Les valeurs de ce rapport sont données aux fig. II.9 indiquant l'augmentation de l'effet bienfaisant des tensions résiduelles avec  $\lambda$ <sup>6)</sup>.

La fig. II.9a est relative à la condition aux limites A, la fig. II.9b se rapporte à la condition B.

<sup>6)</sup> Les figures illustrent les rapports  $w_{max}/e$ ,  $\sigma_{xm\ max}/\sigma_{cr}^*$  en fonction de  $\sigma/\sigma_{cr}^*$ . Comme la valeur de  $\sigma_{cr}^*$  diminue très vite avec le rapport d'élanement  $\lambda$  (voir le tableau 3), il est évident que les valeurs absolues de  $w_{max}$  et  $\sigma_{xm\ max}$  en fonction de  $\sigma$  augmentent avec  $\lambda$ .

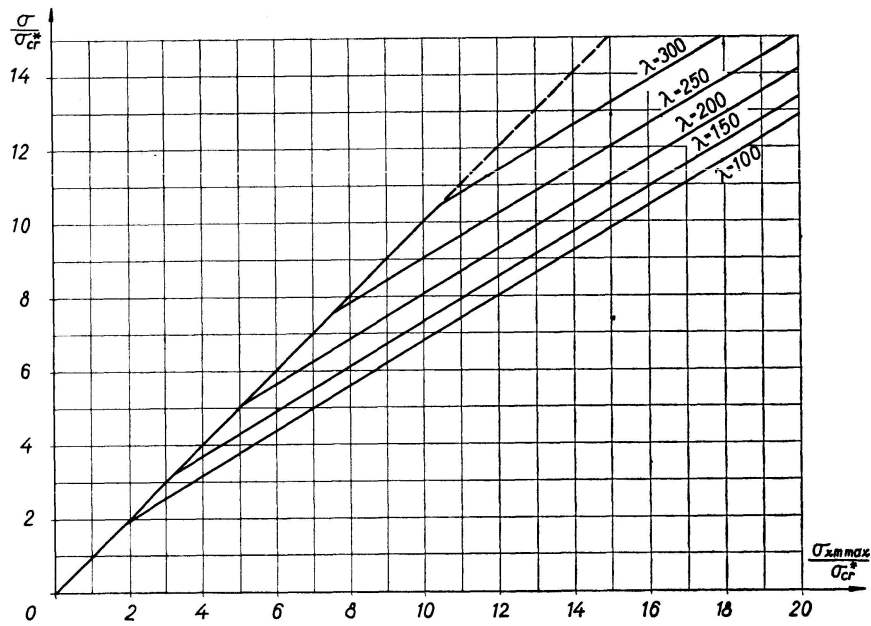


Fig. II. 9a.

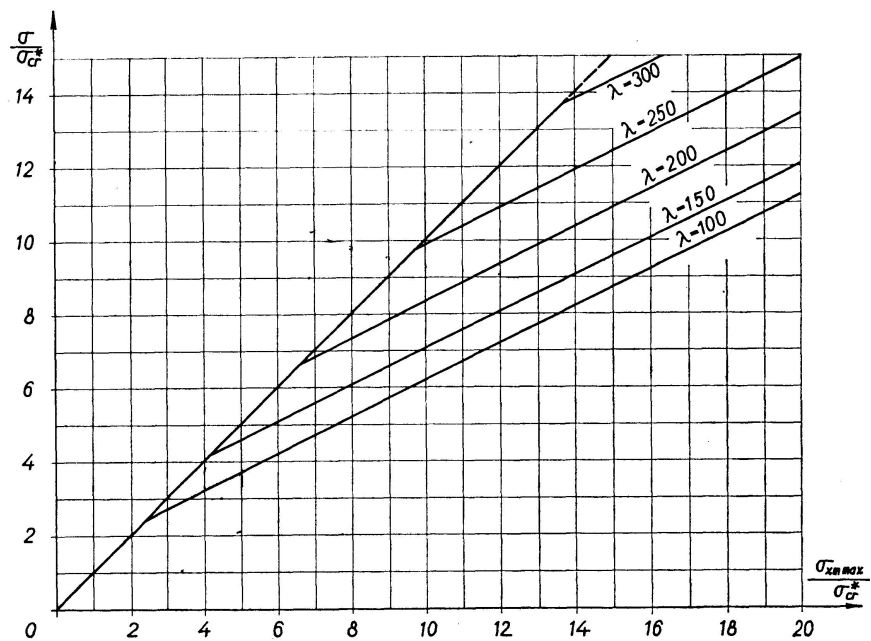


Fig. II. 9b.

II.2.5.3.2. *Tensions de flexion.* Comme au paragraphe II.1.5.3, le rapport de la tension maximum de flexion et de la tension critique s'écrit

$$\frac{\sigma_{xf max}}{\sigma_{cr}^*} = \frac{\sigma_{yf max}}{\sigma_{cr}^*} = \mp 1,95 f'.$$

Les valeurs de ces rapports se déduiront par conséquent des fig. II.8.

### II.2.6. Conclusions

Nous voudrions terminer cette note en soulignant l'aspect bienfaisant de la présence d'une distribution appropriée de tensions résiduelles dans une âme comprimée.

L'introduction par effet thermique d'un état membranaire résiduel pourrait ainsi constituer un mode particulier de raidissage des âmes.

### Remerciements

La présente étude a été réalisée lors d'un séjour de sept mois de l'un des auteurs dans le service de Résistance des Matériaux et de Stabilité des Constructions de l'Université de Liège.

Les auteurs voudraient exprimer leur gratitude au Professeur CH. MASSONNET, Directeur de ce Service, pour les conseils et l'aide qu'il a bien voulu leur apporter.

Leurs remerciements s'adressent également au Fonds National de la Recherche Scientifique qui, par l'octroi d'un mandat à l'un des auteurs, a facilité la réalisation de ce travail.

### Références

1. TH. KÁRMÁN: «Festigkeitsprobleme im Maschinenbau.» *Encyclo. der Math. Wissenschaften* IV (4), 348—351, 1910.
2. A. S. WOLMIR: «Biegsame Platten und Schalen.» VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1962, ou (en russe): *Gibkije plastinki i obločki*; G.I.T.T.L., Moscou 1956.
3. M. ŠKALOUD: «Comportement post-critique des âmes des poutres en acier.» Livre, (en tchèque avec un résumé détaillé en allemand), NCSAV, Prague 1962.
4. M. ŠKALOUD: «Critère de l'état limite des plaques et des systèmes de plaques.» (Rapport présenté au Colloque sur le Comportement post-critique des plaques, Liège 12—13 novembre 1962.)
5. H. LOUIS: «Technique de la Soudure.» Livre, Desoer, Liège 1954.
6. B. E. GATEWOOD: «Thermal Stresses». Book, Mac Graw Hill, 1957.

### Résumé

La note débute par l'établissement des équations non-linéaires régissant le comportement post-critique d'une plaque rectangulaire mince possédant une courbure initiale et soumise à l'effet d'un champ de tensions résiduelles.

On examine ensuite l'influence sur la tension critique et sur le comportement post-critique de la plaque d'un champ de tensions résiduelles. On montrera, en particulier, que les tensions résiduelles, généralement néfastes, peuvent dans certains cas constituer une réelle précontrainte de la plaque.

### Zusammenfassung

Zuerst werden die nichtlinearen Gleichungen für das überkritische Verhalten einer dünnen rechteckigen Platte, die eine Anfangsausbiegung besitzt und die durch Eigenspannungen beansprucht wird, aufgestellt.

Anschließend wird der Einfluß der Eigenspannungen auf die kritische Spannung und auf das überkritische Verhalten untersucht. Dabei zeigt sich, daß die Eigenspannungen, die im allgemeinen schädlich sind, in besonderen Fällen zu einer eigentlichen Vorspannung der Platte führen können.

### Summary

The paper begins by stating non linear equations, governing the post-critical behaviour of a thin rectangular plate having an initial deflection and submitted to the action of a residual stress field.

The influence of a residual stress field upon the critical stress and the post-critical behaviour of the plate is then examined. It will be shown, in particular, that the residual stresses, generally harmful, may in some cases, represent a real prestressing of the plate.