

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen  
**Band:** 23 (1963)

**Artikel:** Résistance limite d'une poutre courbe à parois minces soumise à flexion  
**Autor:** Massonnet, Ch. / Save, M.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-19405>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 02.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Résistance limite d'une poutre courbe à parois minces soumise à flexion

*Grenztragfähigkeit eines aus dünnen Scheiben zusammengesetzten, auf reine Biegung beanspruchten gekrümmten Trägers*

*Ultimate Strength of a Thin-walled, Curved Beam Subjected to Bending*

CH. MASSONNET

Professeur à l'Université de Liège

M. SAVE

Chargé de Cours à la Faculté Polytechnique de Mons

## 1. Introduction

Lors de la construction de l'Atomium à l'Exposition Universelle de Bruxelles 1958 s'est posé le problème du dimensionnement des poutres circulaires à section en caisson qui forment l'ossature portante des sphères de l'Atomium. On sait que les tensions longitudinales dues à la flexion agissant sur un élément de poutre courbe d'ouverture  $d\varphi$  (Fig. 1) provoquent des efforts transversaux qui ont pour effet de déformer la section droite et de provoquer d'importantes tensions de flexion transversale. Dans l'hypothèse élastique classique, le dimensionnement de la pièce se fait suivant les règles établies par STEINHARDT (1938) et ANDERSON (1950), et perfectionnées récemment par CORNÉLIS et CARTILIER (1960). L'existence des tensions transversales a pour effet d'augmenter considérablement la valeur de la tension de comparaison  $\sigma_c$  maximum et par conséquent de diminuer fortement le moment fléchissant admissible de la poutre courbe par rapport à la poutre de même section droite mais à axe rectiligne.

Cependant, une violation locale du critère de ruine classique  $\sigma_c = R_e$  à la jonction âme-semelle ne peut produire que des zones plastiques limitées (zones A de la fig. 1) qui n'entraînent pas l'effondrement de la poutre.

On peut dès lors se poser le problème de l'analyse limite des poutres courbes à parois minces et voir quel est le gain de résistance que la conception plastique nouvelle entraîne par rapport à la conception élastique traditionnelle.

On verra ci-après que ce gain est en moyenne de l'ordre de 100 pour cent; il est donc considérablement plus élevé que dans le cas de la poutre rectiligne correspondante, où il est de l'ordre de 15 pour cent. Cela provient de ce que

la poutre courbe à parois minces est en fait un système intérieurement hyperstatique.

Dans le présent mémoire, on étudie uniquement la poutre à section en double té. Les bornes inférieure et supérieure obtenues par la théorie de l'analyse limite sont très voisines et trouvées en excellent accord avec l'expérience.

Le problème de la poutre en caisson sera traité dans un mémoire ultérieur.

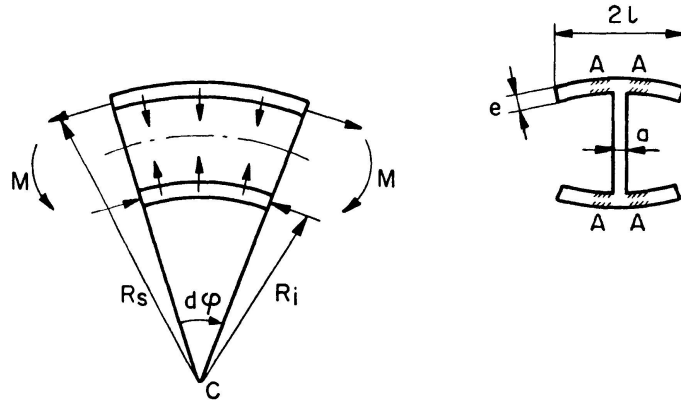


Fig. 1.

## Chapitre 1

### Recherche d'une borne inférieure du moment limite

#### 1. Etat limite plastique d'une semelle

Nous allons d'abord rechercher une valeur par défaut du moment fléchissant limite en appliquant le théorème statique qui dit que: Tout moment  $M_-$  qui est en équilibre avec une distribution de tensions statiquement admissible dans la poutre est inférieur ou égal au moment plastique réel  $M_p$ .

Le moment fléchissant dans la poutre étant constant, toutes les sections droites sont dans une situation identique et par conséquent la déformation a la symétrie de révolution.

Intéressons-nous tout d'abord à la plastification des semelles, par exemple de la semelle supérieure qui est tendue. Elle se comporte en fait comme une coque cylindrique que, par raison de symétrie, on peut considérer comme encastrée sur l'âme et dont il suffit ainsi d'étudier une moitié.

Les éléments de réduction qui sollicitent cette semelle sont représentés à la fig. 2. Dans notre cas  $N_x = 0$  et  $M_\theta$ , ainsi que  $T$ , sont des «réactions» au sens de Prager.

Le moment  $M_x$  engendré par l'effort  $N_\theta$  est lié à celui-ci par l'équation d'équilibre radial

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} + \frac{N_\theta}{R} = 0. \quad (1.1)$$

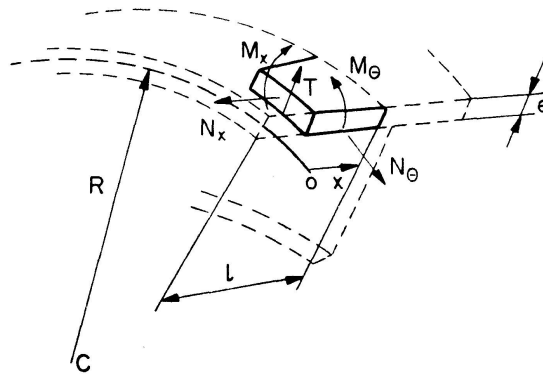


Fig. 2.

Les deux autres équations d'équilibre sont

$$\frac{dT}{dx} + \frac{N_\theta}{R} = 0, \tag{1.2}$$

$$\frac{dM_x}{dx} = T. \tag{1.3}$$

Introduisons maintenant le moment plastique unitaire  $M_p = \frac{e^2}{4} R_e$  est l'effort normal plastique unitaire  $N_p = e R_e$ .

En admettant la condition de plasticité de TRESCA, la courbe d'interaction entre les moments et effort normal réduits:

$$m_x \equiv \frac{M_x}{M_p} \quad \text{et} \quad n_\theta \equiv \frac{N_\theta}{N_p} \tag{1.4}$$

est celle valable pour une coque cylindrique sans effort axial. Cette courbe a été établie par HODGE (1959).

Tant que  $n_\theta \leq \frac{1}{2}$  (fig. 3 a), on a

$$m_x = 1. \tag{1.5}$$

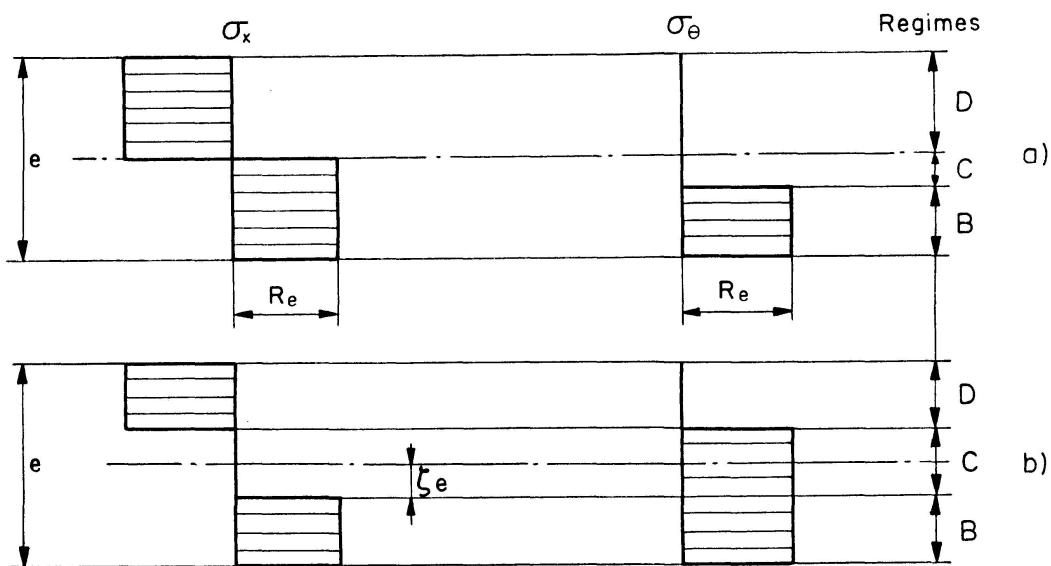


Fig. 3.

Pour  $\frac{1}{2} \leq n_\theta \leq 1$ , la distribution des  $\sigma$  de la fig. 3 b donne la valeur maximum de  $m_x$  pour chaque  $n_\theta$ ;  $m_x$  et  $n_\theta$  y sont liés par les relations:

$$m_x = 1 - 4\zeta^2, \quad n_\theta = \frac{1}{2} + \zeta. \quad (1.6)$$

Les équations (1.5) et (1.6) définissent la courbe d'interaction de la fig. 4.

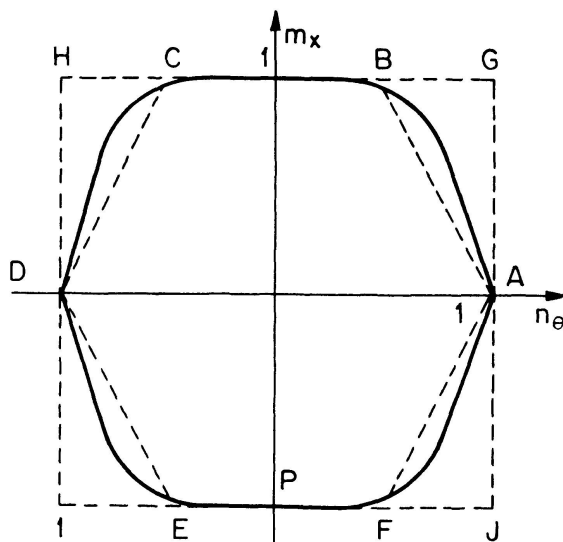


Fig. 4.

Nous nous contenterons de son approximation linéarisée  $ABCDEF$ . A l'extrémité libre de la demi-semelle,  $M_x = 0$  et l'on se trouve donc en régime A.

Un  $N_\theta > 0$  donne visiblement un  $M_x < 0$ , ce qui fait que, pour  $x > 0$  le régime sera d'abord celui du côté  $AF$  d'équation

$$m_x - 2n_\theta = -2 \quad (1.7)$$

c'est-à-dire 
$$M_x = \left( -2 + 2\frac{N_\theta}{N_p} \right) M_p \quad (1.8)$$

on a donc 
$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} = 2\frac{M_p}{N_p} \frac{d^2 N_\theta}{dx^2} = \frac{e}{2} \frac{d^2 N_\theta}{dx^2}. \quad (1.9)$$

L'équation (1.1) devient ainsi

$$\frac{d^2 N_\theta}{dx^2} + 2\frac{N_\theta}{eR} = 0 \quad (1.10)$$

d'où 
$$N_\theta = A \sin \sqrt{\frac{2}{eR}} x + B \cos \sqrt{\frac{2}{eR}} x. \quad (1.11)$$

Les constantes d'intégration  $A$  et  $B$  s'obtiennent par les conditions:

$$\text{pour } x = 0 \left\{ \begin{array}{l} N_\theta = N_p \quad (\text{Régime A}) \\ T = 0 \text{ donc d'après (1.3)} \quad \frac{dM_x}{dx} = 0, \\ \text{ce qui donne par (1.7),} \quad \frac{dN_\theta}{dx} = 0. \end{array} \right.$$

Il vient ainsi 
$$N_\theta = N_p \cos \sqrt{\frac{2}{eR}} x. \quad (1.12)$$

Cette relation n'est valable que tant que  $\frac{N_p}{2} \leq N_\theta \leq N_p$  c'est-à-dire pour

$$1 \geq \cos \sqrt{\frac{2}{eR}} x \geq \frac{1}{2}$$

ou 
$$x \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{eR}} \leq 1,0472 \text{ radians}$$

c'est-à-dire 
$$x^2 \leq 0,548 e R. \quad (1.13)$$

Des valeurs plus grandes de  $x$  imposent un  $n_\theta < \frac{1}{2}$  et  $m_x = 1$ . La constance de  $m_x$  impose à son tour, d'après l'équation d'équilibre (1.1), que l'on ait  $n_\theta = 0$  c'est-à-dire le régime

$$m_x = -1, \quad n_\theta = 0$$

pour tout  $x$  supérieur à  $x_{critique} = \sqrt{0,548 e R}$ .

Appelons maintenant «rendement»  $\rho_s$  de la semelle le rapport

$$\rho_s = \frac{\int_0^l N_\theta dx}{N_p l} \quad (1.14)$$

de l'effort total qu'elle peut supporter à celui qu'elle pourrait supporter si la poutre était rectiligne.

Deux cas se présentent ainsi

1.  $l^2 < 0,548 e R$

Alors 
$$\rho_s = \frac{1}{l N_p} \int_0^l N_p \cos \sqrt{\frac{2}{eR}} dx = \frac{\sqrt{eR}}{l \sqrt{2}} \sin \sqrt{\frac{2}{eR}} l.$$

En posant 
$$\alpha = l \sqrt{\frac{2}{eR}} \quad (1.15)$$

on obtient 
$$\boxed{\rho_s = \frac{\sin \alpha}{\alpha}} \quad (\alpha < 1,045). \quad (1.16)$$

2.  $l^2 > 0,548 e R$

$$\rho_s = \frac{1}{l N_p} \int_0^{\sqrt{0,548 e R}} N_p \cos \sqrt{\frac{2}{eR}} dx = \frac{0,8659}{\alpha} \quad (\alpha > 1,045). \quad (1.17)$$

2. *Etat limite de l'âme*

A l'aide des formules (1.16) ou (1.17), on peut déterminer le rendement des semelles supérieure et inférieure en utilisant le rayon moyen correspondant  $R_s$  ou  $R_i$  (fig. 1), puis calculer les efforts dans ces semelles, à savoir:

$$N_s = \rho_s 2le R_e, \quad N_i = -\rho_i 2le R_e. \quad (2.1)$$

On en déduit directement les tensions radiales appliquées par les semelles sur l'âme (fig. 5)

$$\sigma_{0s} = \frac{-N_s}{R_s a}; \quad \sigma_{0i} = \frac{+N_i}{R_i a}. \quad (2.2)$$

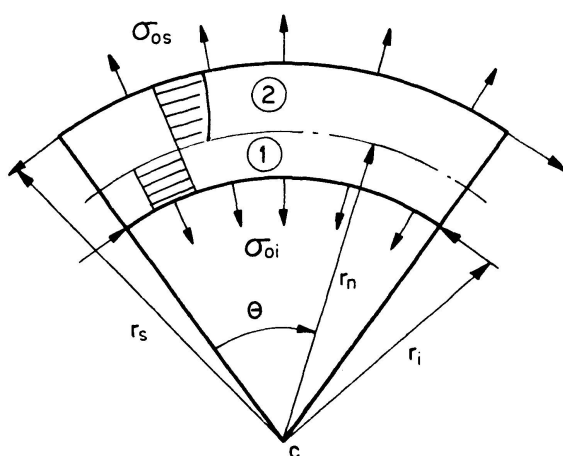


Fig. 5.

Ces tensions interviennent dans les conditions au contour lors de l'étude de l'âme. Comme  $R_s$  et  $R_i$  sont supérieurs à  $2l$  et  $a$  peu différent de  $e$ , on aura

$$|\sigma_{0s}| \ll R_e, \quad |\sigma_{0i}| \ll R_e.$$

Soient  $r_i = R_i + \frac{e}{2}$ ,  $r_n$ ,  $r_s = R_s - \frac{e}{2}$  les valeurs des rayons définissant (fig. 5) le bord inférieur de l'âme, son axe neutre et son bord supérieur.

Dans la région (1), on a  $\sigma_\theta < 0$  et comme, pour  $r = r_i$ ,  $\sigma_r$  doit valoir  $\sigma_{0i} < 0$ , on y a  $\sigma_r \leq 0$ .

Dans la région (2), on a  $\sigma_\theta > 0$  et  $\sigma_r \leq 0$ .

Par conséquent, la condition de plasticité de Tresca sera remplie dans la région (1) par

$$\sigma_\theta = -R_e, \quad -R_e \leq \sigma_r \leq 0 \quad (2.3)$$

dans la région (2) par

$$\sigma_\theta - \sigma_r = R_e. \quad (2.4)$$

L'équilibre de translation d'un élément d'âme selon la direction radiale fournit l'équation

$$\sigma_\theta - \sigma_r - r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0. \quad (2.5)$$

En utilisant les relations (2.3) et (2.4), ainsi que les conditions au contour

$$(\sigma_r)_{r=r_i} = \sigma_{0i}; \quad (\sigma_r)_{r=r_s} = \sigma_{0s}, \quad (2.6)$$

l'intégration de (2.5) nous donne:

dans la région (1):

$$\sigma_\theta = -R_e; \quad \sigma_r = \frac{1}{r} [-R_e r + r_i (\sigma_{0i} + R_e)], \quad (2.7)$$

dans la région (2):

$$\sigma_r = R_e \log \frac{r}{r_s} + \sigma_{0s}; \quad \sigma_\theta = R_e \left(1 + \log \frac{r}{r_s}\right) + \sigma_{0s}. \quad (2.8)$$

La position de la fibre neutre s'obtient en exprimant que la résultante des efforts intérieurs sur la section entière du double té est nulle, ce qui s'écrit:

$$N_s + N_i - R_e a \int_{r_i}^{r_n} dr + R_e a \int_{r_n}^{r_s} \left(1 + \log \frac{r}{r_s}\right) dr + \sigma_{0s} a \int_{r_n}^{r_s} dr = 0.$$

Tous calculs faits, on trouve pour déterminer  $r_n$  la condition:

$$r_n \log \frac{r_s}{r_n} - (r_n - r_i) + \frac{2le}{a} \left[ \rho_s \left(1 - \frac{r_s - r_n}{R_s}\right) - \rho_i \right] = 0. \quad (2.9)$$

### 3. Rendement global de la poutre entière

Une fois  $r_n$  déterminé par la solution de cette équation transcendante, on peut calculer le moment  $M$  du couple pur auquel résiste la poutre en calculant la somme des moments des forces intérieures par rapport à n'importe quel point du plan et en particulier par rapport au centre de courbure  $C$ . On trouve ainsi:

$$M_p = N_s R_s + N_i R_i - R_e a \int_{r_i}^{r_n} r dr + R_e a \int_{r_n}^{r_s} r \left(1 + \log \frac{r}{r_s}\right) dr + \sigma_{0s} a \int_{r_n}^{r_s} r dr.$$

Tous calculs faits, on trouve:

$$\frac{M_p}{R_e} = 2el(\rho_s R_s - \rho_i R_i) - \frac{a}{2}(r_n^2 - r_i^2) + \left(\frac{a}{4} - \frac{el\rho_s}{R_s}\right)(r_s^2 - r_n^2) + \frac{a}{2}r_n^2 \log \frac{r_s}{r_n}. \quad (3.1)$$

Si la poutre était rectiligne, son moment limite serait (fig. 6)

$$M_{p\text{rect}} = 2lehR_e + \frac{ah_a^2}{4}R_e.$$

Le rendement global de la poutre courbe est défini par la relation

$$\rho \equiv \frac{M_p}{M_{p\text{rect}}}. \quad (3.2)$$

Si la poutre est à faible courbure, on ne commet pas d'erreur sensible en supposant que les deux semelles ont le même rendement  $\rho_s$  qui serait celui d'une semelle fictive de rayon  $\frac{R_s + R_i}{2}$  et en négligeant l'effet des tensions transversales  $\sigma_{0s}, \sigma_{0i}$  appliquées aux bords de l'âme. On trouve alors pour le rendement de l'âme seule, l'expression

$$\rho_a = \frac{2 - 2 \frac{r_n}{r_i} - \left(\frac{r_n}{r_i}\right)^2 + \left(\frac{r_s}{r_i}\right)^2}{\left(\frac{r_s}{r_i} - 1\right)^2} \tag{3.3}$$

et pour la poutre entière, le rendement global approché

$$\rho \equiv \frac{M_p}{M_{p\text{rect}}} = \frac{8le h \rho_s + a h_a^2 \rho_a}{8le h + a h_a^2} \tag{3.4}$$

*Remarques:* 1. Il y a dans les semelles des «réactions»  $M_\theta$  dont la distribution est légèrement différente d'une semelle à l'autre (fig. 7) comme le sont

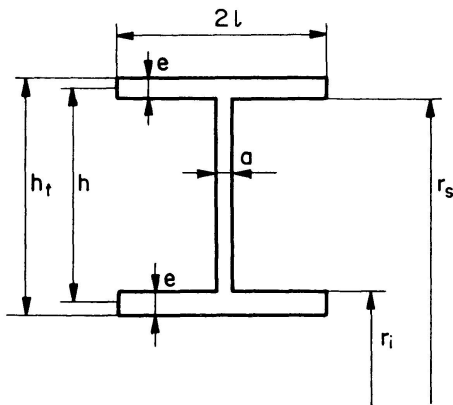


Fig. 6.

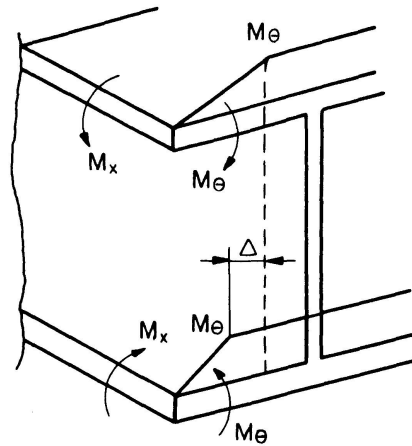


Fig. 7.

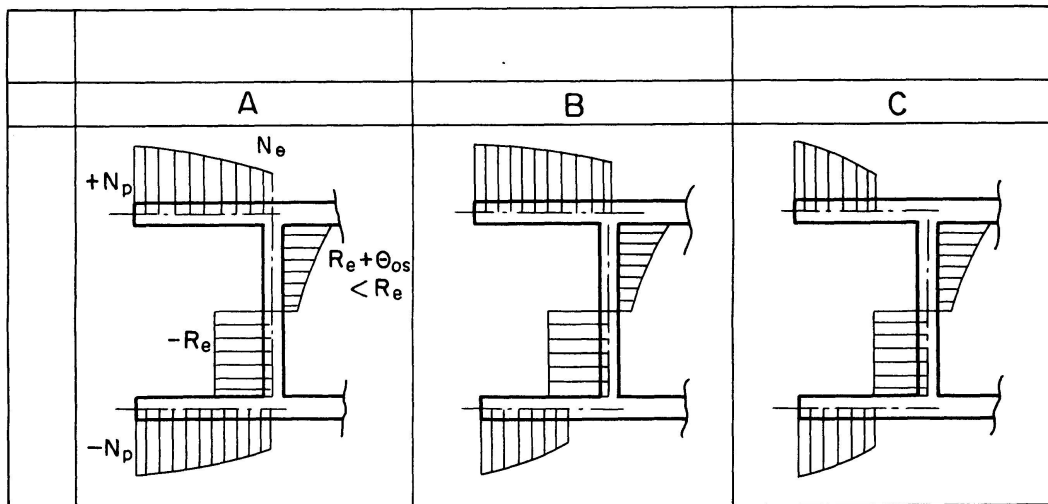


Fig. 8.

les deux distributions de  $M_x$  (on peut admettre  $M_\theta = M_x/2$ ). Ces  $M_\theta$  ont des sens opposés. Leur contribution nette au moment total  $M_p$  ne peut provenir que de leurs différences dans la zone  $\Delta$ , qui est très petite, vu que  $|M_\theta| < |M_x| \leq \leq R_e \frac{a^2}{4}$ . On peut donc la négliger.

2. Selon la valeur du rapport  $\frac{l^2}{e}$ , on obtient à la ruine l'un ou l'autre des trois champs de tension représentés à la fig. 8.

## Chapitre 2

### Recherche d'une borne supérieure du moment limite

Nous allons à présent chercher une valeur par excès du moment limite en appliquant le théorème cinématique de l'analyse limite, selon lequel:

Tout moment  $M_+$  qui correspond à un mécanisme d'écoulement de la pièce cinématiquement admissible est une borne supérieure du moment limite réel.

4. *Le champ de tensions est du type A ( $\frac{l^2}{e} \leq 0,548 R_i$ )*

Dans ce cas, la borne inférieure du rendement obtenue au paragraphe 1.3 par le champ de tension statiquement admissible est la *valeur exacte*, car on peut faire correspondre à ce champ de tension un champ de déformation cinématiquement admissible composé:

- a) d'une rotation de la section complète autour de son axe neutre plastique;
- b) de déplacements radiaux supplémentaires, dans le plan de la section, des points des axes des semelles.

Comme le point de tension est sur  $AF$  ou  $CD$  (fig. 4) dans les semelles, les déplacements totaux sont donnés par ([3], p. 277, tableau (11.1))

$$\dot{w} = C_1 \sin \omega X + C_2 \cos \omega X \quad (4.1)$$

avec

$$\omega^2 = \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2}{R_{semelle} \frac{e}{2}} \quad \text{et} \quad X = \frac{x}{\frac{l}{2}} \quad (4.2)$$

D'autre part, les allongements et raccourcissements des fibres de l'âme lors d'une rotation de la section sont compatibles avec la distribution des  $\sigma_\theta$  qui a été obtenue au paragraphe 1.2 et la loi du potentiel plastique appliquée à l'hexagone de Tresca.

5. *Le champ de tensions est du type B ou C ( $\frac{l^2}{e} > 0,548 R_i$ )*

Dans ce cas, à cause de  $(N_\theta)_{semelle} = 0$  à la jonction de l'âme, ce qui provient de  $M_x = M_p = \text{constante}$  et de l'équilibre, le point de tension en ces endroits

est en  $P$  sur la courbe d'interaction (fig. 4), c'est-à-dire que, pour ces fibres là, on a  $\epsilon_\theta = 0$ . Par conséquent, ces fibres restent élastiques et donc aussi l'âme et il n'y a pas de mécanisme correspondant aux champs admissibles  $B$  ou  $C$  représentés à la fig. 8.

Nous allons calculer une *borne supérieure* du rendement réel en adoptant un mécanisme de ruine qui nous a été inspiré par l'examen des sections droites déformées des pièces d'essai (cf. par. 6 ci-après et la photographie fig. 13).

Ce mécanisme se compose d'une rotation d'amplitude  $\Delta d\varphi$  de la section droite autour d'un axe neutre situé à la distance  $d$  sous l'axe de la pièce (fig. 9), accompagné de rotations d'amplitudes  $\theta_s$  et  $\theta_i$  respectivement des deux semelles autour de cercles d'articulation  $A$  de rayons  $R_s$  et  $R_i$  respectivement.

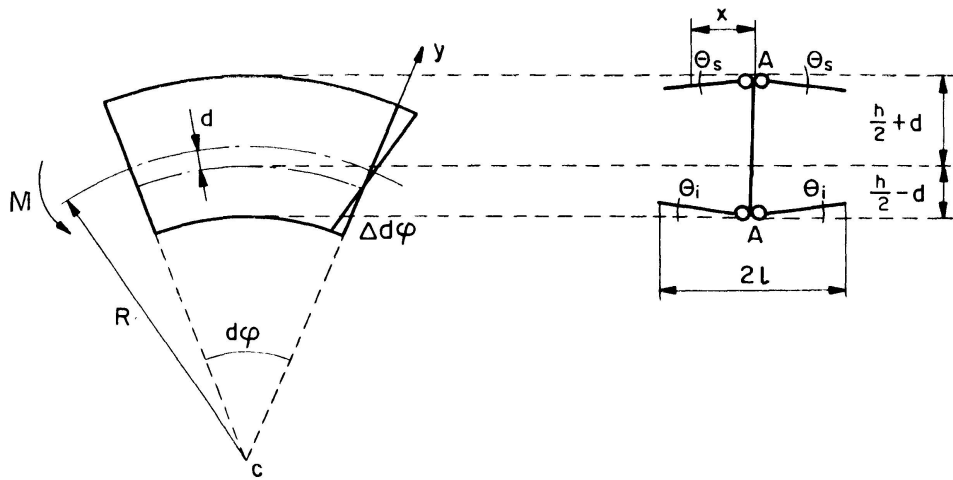


Fig. 9.

Il suffit alors, pour avoir une borne supérieure du moment limite, d'égaliser le travail  $M \Delta d\varphi$  du moment extérieur au travail interne dissipé.

Le travail dissipé dans l'âme vaut:

$$T_{\text{âme}} = \int_0^{\frac{h}{2}+d} a R_e y \Delta d\varphi dy + \int_0^{\frac{h}{2}+d} a R_e |y| \Delta d\varphi |dy| = a R_e \Delta d\varphi \left[ \frac{h^2}{4} + d^2 \right]. \quad (5.1)$$

Dans la semelle supérieure, l'allongement d'une fibre vaut

$$\delta_s = \left( \frac{h}{2} + d \right) \Delta d\varphi - \theta_s x d\varphi. \quad (5.2)$$

La déformation consiste uniquement en un étirage plastique des fibres ( $\epsilon_\theta \neq 0$ ,  $X_x = 0$ ) de sorte que  $N_\theta = N_p = R_e e$  partout et que le travail dissipé dans les fibres longitudinales vaut:

$$T_{ss}^1 = 2 \int_0^l \delta_s N_p dx = e R_e [\Delta d\varphi (h + 2d) l - \theta_s l^2 d\varphi].$$

Il faut y ajouter le travail dissipé dans les deux lignes d'articulation longitudinales  $A$

$$T_{ss}^2 = 2 M_p \theta_s R_s d \varphi = R_e \frac{e^2}{2} \theta_s R_s d \varphi.$$

Les quantités analogues pour la semelle inférieure valent:

$$T_{si}^1 = e R_e [\Delta d \varphi (h - 2d)l - \theta_i l^2 d \varphi],$$

$$T_{si}^2 = R_e \frac{e^2}{2} \theta_i R_i d \varphi.$$

En égalant le travail extérieur  $M \Delta d \varphi$  à la somme des travaux dissipés, on obtient l'égalité

$$M_+ \Delta d \varphi = a R_e \Delta d \varphi \left[ \frac{h^2}{4} + d^2 \right] + e R_e [2 h l \Delta d \varphi - l^2 d \varphi (\theta_s + \theta_i)] + R_e \frac{e^2}{2} d \varphi (\theta_s R_s + \theta_i R_i). \quad (5.3)$$

Admettons d'abord que les angles  $\theta_s$  et  $\theta_i$  soient tels que les allongements  $\delta_s$  et  $\delta_i$  soient nuls aux extrémités des semelles ( $x=l$ ). Appelons  $\theta_s^0$  et  $\theta_i^0$  ces angles. On a alors par la formule (5.2) et la formule analogue pour la semelle inférieure:

$$l \theta_s^0 d \varphi = \left( \frac{h}{2} + d \right) \Delta d \varphi; \quad l \theta_i^0 d \varphi = \left( \frac{h}{2} - d \right) \Delta d \varphi. \quad (5.4)$$

Remplaçant dans l'égalité (5.3) et divisant les deux membres par  $R_e \Delta d \varphi$ , il vient

$$\frac{M_+}{R_e} = a \left[ \frac{h^2}{4} + d^2 \right] + h l e + \frac{e^2 h}{2l} \left( \frac{R_s + R_i}{2} \right) + \frac{e^2 d}{2l} (R_s - R_i). \quad (5.5)$$

Cette expression est minimum quand  $d=0$ , c'est-à-dire quand l'axe neutre est à mi-hauteur du profil.

Le minimum de la borne supérieure  $M_+$  du moment limite vaut donc

$$M_+ = \frac{a R_e h^2}{4} + R_e \left( \frac{e^2 h R}{2l} + h l e \right). \quad (5.6)$$

La poutre rectiligne a comme moment limite

$$M_{rect} = \frac{a R_e h^2}{4} + 2 e h l R_e. \quad (5.7)$$

En divisant ces expressions l'une par l'autre, on obtient la borne supérieure du rendement

$$\rho_+ = \frac{a h l + 2 e^2 R + 4 l^2 e}{a h l + 8 l^2 e}. \quad (5.8)$$

\* \* \*

L'hypothèse faite ci-dessus pour déterminer les angles  $\theta_s$  et  $\theta_i$  est, en fait, arbitraire. Rien n'empêche ces angles de dépasser les valeurs  $\theta_s^0$  et  $\theta_i^0$  données par (5.4).

Pour simplifier, nous supposons que l'axe neutre autour duquel tourne la section droite est à mi-hauteur ( $d=0$ ). Dans ce cas, les semelles sont sans réaction l'une sur l'autre et il nous suffira d'étudier la semelle supérieure.

Si  $\theta_s > \theta_s^0$ , l'allongement  $\delta$  des fibres de la semelle s'annule pour une abscisse  $x_s < l$  (fig. 10).

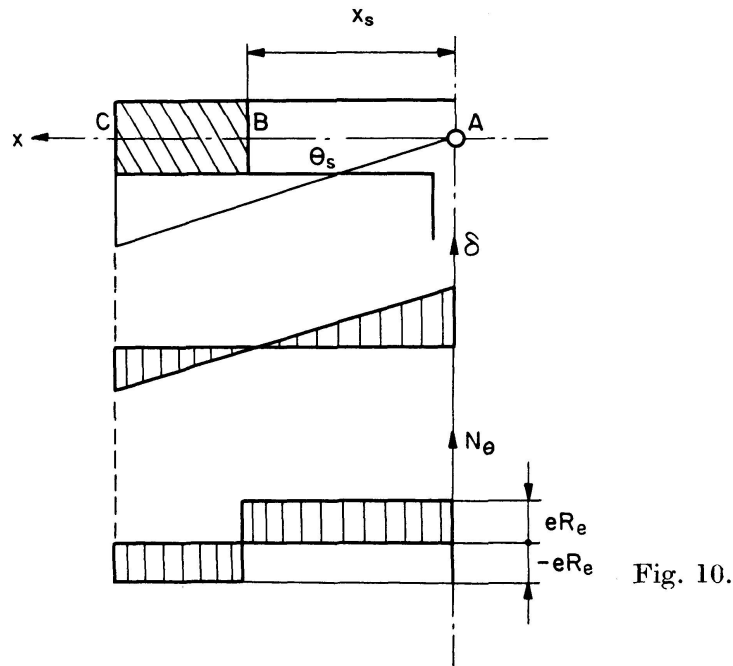
Cette abscisse s'obtient en annulant l'expression (5.2) de  $\delta_s$  (avec  $d=0$ ), ce qui donne

$$x_s = \frac{h \Delta d \varphi}{2 \theta_s d \varphi}. \tag{5.9}$$

Pour  $x < x_s$ , les fibres sont tendues et  $N_\theta = e R_e$ .

Pour  $x > x_s$ , elles sont comprimées et  $N_\theta = -e R_e$ .

Les diagrammes des  $N_\theta$  et des vitesses de déformation  $\epsilon_\theta$  subissent donc pour  $x = x_s$  des discontinuités qui sont acceptées en théorie de la plasticité quand elles ne violent aucune condition d'équilibre, comme c'est le cas ici.



Reprenons le calcul du travail dissipé dans la semelle. On trouve, avec les mêmes notations que plus haut

$$T_{ss}^1 = 2 \int_0^l \delta_s N_\theta dx = 2 \left\{ \frac{e h}{2} \Delta d \varphi \left[ R_e \int_0^{x_s} dx - R_e \int_{x_s}^l dx \right] - \theta_s d \varphi \left[ R_e \int_0^{x_s} x dx - R_e \int_{x_s}^l x dx \right] \right\}$$

$$= e R_e \left[ h \Delta d \varphi (2 x_s - l) - \theta_s d \varphi (2 x_s^2 - l^2) \right],$$

$$T_{ss}^2 = \frac{R_e e^2 R_s}{2} \theta_s d \varphi.$$

Ajoutons ces travaux, et éliminons  $\theta_s$  en remplaçant  $\theta_s d\varphi$  par sa valeur  $h \Delta d\varphi / 2x_s$ , tirée de (5.9). Il vient

$$\frac{T_{ss}}{e h R_e \Delta d\varphi} = x_s - l + \frac{l^2}{2x_s} + \frac{R_s e}{4x_s}. \quad (5.10)$$

Cherchons la valeur de  $x_s$  qui rend  $T_{ss}$  minimum. La condition  $\frac{dT_{ss}}{dx_s} = 0$  donne

$$x_s = \sqrt{\frac{l^2}{2} + \frac{e R_s}{4}}. \quad (5.11)$$

Dans la semelle inférieure, on aurait de même le minimum de  $T_{si}$  pour

$$x_i = \sqrt{\frac{l^2}{2} + \frac{e R_i}{4}}. \quad (5.12)$$

Les énergies dissipées dans l'âme et les deux semelles valent alors

$$\begin{aligned} T_{\text{âme}} &= \Delta d\varphi a R_e \frac{h^2}{4}, \\ T_{ss} &= \Delta d\varphi e h R_e \left( x_s - l + \frac{l^2}{2x_s} + \frac{R_s e}{4x_s} \right), \\ T_{si} &= \Delta d\varphi e h R_e \left( x_i - l + \frac{l^2}{2x_i} + \frac{R_i e}{4x_i} \right). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Si l'on appelle  $K_s$  et  $K_i$  respectivement les expressions entre parenthèses, on obtient

$$\rho_+ = \frac{a h l + 4 l e (K_i + K_s)}{a h l + 8 e l^2} \quad (5.14)$$

au lieu de (5.8).

La valeur (5.14) est inférieure à (5.8), c'est donc la meilleure borne supérieure qu'il soit possible d'obtenir pour le mécanisme de ruine décrit au début du paragraphe 5.

### Chapitre 3

#### Contrôle expérimental de la théorie

##### 6. Pièces et montage d'essai

Des pièces d'essai, dont les dimensions en cm sont indiquées au tableau ci-dessous, ont été usinées au tour dans la masse d'une tôle d'acier doux de 4 cm d'épaisseur. Chaque pièce a été obtenue sous forme de cercle complet, puis a ensuite été coupée en deux demi-cercles qui ont été munis de plaques de fixation soudées. Tous les essais ont donc été faits en double.

Le dispositif d'essai réalisé par le Laboratoire de Résistance des Matériaux de l'Université de Liège est visible sur la photographie (fig. 11).

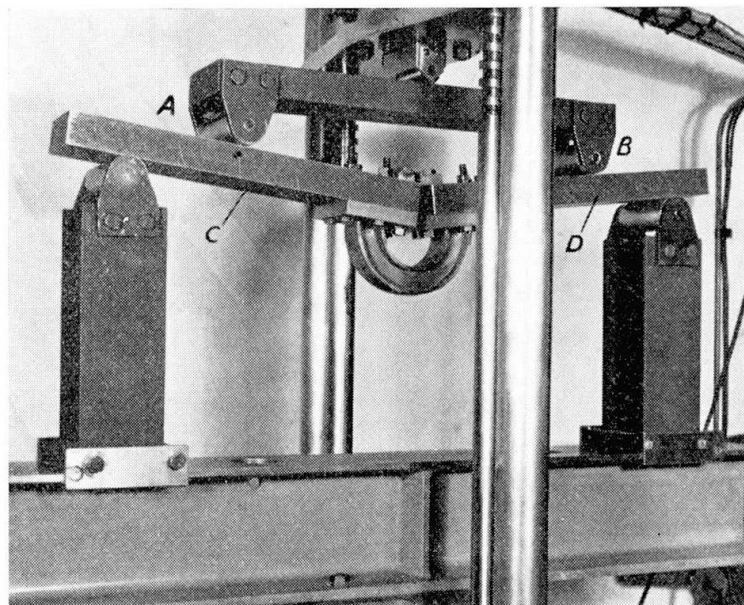


Fig. 11.

La poutre de répartition  $AB$  et les leviers horizontaux  $C$  et  $D$  ont pour effet de transformer la force  $P$  (appliquée par une machine AMSLER de 10 tonnes) en deux couples de moment  $M$  appliqués aux extrémités de l'arc semi-circulaire.

Dans chaque essai, on a relevé à l'aide d'un dispositif électronique Baldwin le diagramme force-flèche, qui est aussi — aux échelles près — le diagramme moment-rotation. La fig. 12 donne, à titre d'exemple, le diagramme relevé sur l'éprouvette N° 2.

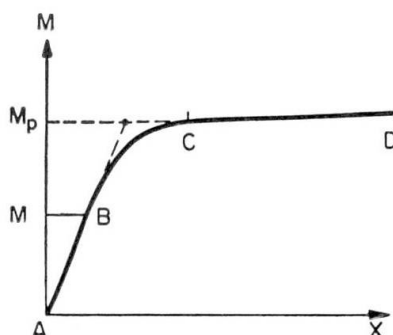


Fig. 12.

Conformément à la pratique courante, on a admis comme valeur du moment plastique l'ordonnée  $(M_p)_{exp}$  du point de rencontre des deux droites  $AB$ ,  $CD$ , prolongées (fig. 12). Ces valeurs figurent à la colonne 7 du tableau ci-dessous.

Six éprouvettes rectilignes ayant les mêmes dimensions que les pièces courbes ont été usinées hors de la tôle d'essai et soumises à flexion pure; elles ont donné des moments plastiques  $(M_p)_{exp}^{rect}$ , déterminés par la méthode graphique de la fig. 12, qui figurent à la colonne 5 du tableau.

Par ailleurs, on a calculé le moment plastique de ces éprouvettes rectilignes par la formule

$$(M_p)_{calc}^{rect} = Z R_e,$$

où  $Z$  est le module plastique déduit des dimensions de la section droite et  $R_e$  la limite apparente d'élasticité du métal mesurée par un essai de traction. Ces moments figurent à la colonne 6 du tableau et l'on constate qu'ils coïncident pratiquement avec les moments  $(M_p)_{exp}^{rect}$  de la colonne 5.

On a adopté comme valeur expérimentale du rendement d'une pièce courbe le rapport (colonne 9)

$$\rho_{exp} = \frac{(M_p)_{exp}}{(M_p)_{calc}^{rect}}$$

du moment limite de la pièce courbe à celui de la pièce rectiligne de même section.

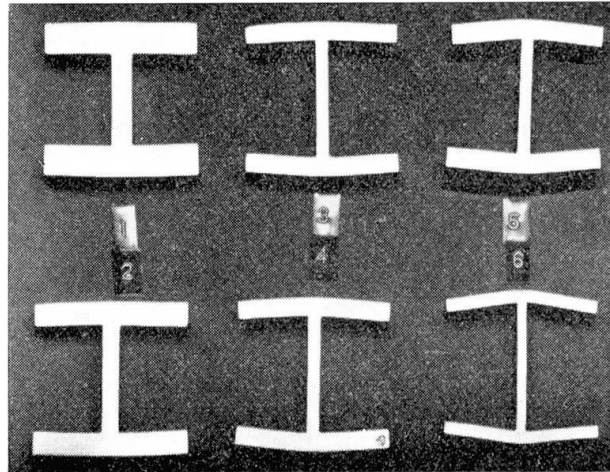


Fig. 13.

La fig. 13 montre des coupes faites après ruine plastique dans les six types d'arcs étudiés. La flexion transversale des semelles est remarquablement visible et marque une progression continue du N° 1 au N° 6, qui correspond à une chute croissante du rendement.

Pour toutes les éprouvettes,  $h + e = 4$  cm,  $2l = 4$  cm.

Le tableau ci-dessus donne encore:

*Colonne 8:* Le moment limite élastique  $M_{él}$  pour lequel la tension de comparaison  $\sigma_c$  atteint  $R_e$  au point le plus sollicité, selon la théorie élastique de CORNÉLIS et CARTILIER (1960).

*Colonne 10:* Le rayon  $r_n$  de l'axe neutre, calculé par la formule (2.9).

*Colonnes 11 et 12:* Les rendements  $\rho_-$  et  $\rho_+$ , calculés par les formules (3.2) et (5.14) respectivement:

*Colonne 13:* Le rendement élastique  $\rho_{él} = \frac{M_{él}}{(M_p)_{calc}^{rect}}$ .

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
N° de l'épr.	$e$ (cm)	$a$ (cm)	$R$ (rayon moyen) (cm)	$(M_p)_{exp}^{rect}$ kg cm	$(M_p)_{calc}^{rect}$ kg cm	$(M_p)_{exp}$ kg cm	$M_{el}$ kg cm	$\rho_{exp}$	$r_n$ (cm)	$\rho_-$	$\rho_+$	$\rho_{elast}$	gain plas- tique en %
1	0,78	0,50	17	—	28 675	25 580	13 100	0,892	16,8	0,89	0,89	0,512	74
2	0,59	0,40	17	23 585	23 514	20 190	10 210	0,858	16,8	0,843	0,843	0,506	69
3	0,61	0,40	12	23 585	24 046	19 370	9 347	0,805	11,86	0,797	0,797	0,483	67
4	0,46	0,30	12	19 270	19 205	15 000	5 786	0,781	11,84	0,768	0,860	0,385	103
5	0,48	0,30	7	19 270	19 817	13 045	4 353	0,658	6,93	0,622	0,725	0,334	97
6	0,30	0,20	7	13 500	13 353	7 800	1 600	0,584	6,94	0,518	0,646	0,205	185

*Colonne 14:* Le gain en pour cent obtenu sur le moment limite en adoptant la conception plastique.

On constate que les rendements plastiques théoriques sont en bon accord avec les rendements plastiques expérimentaux. De plus, le gain de résistance obtenu en prenant en compte la redistribution plastique des tensions est très considérable.

### Bibliographie

1. ANDERSON (1950), Proc. Inst. Mech. Engrs. Vol. 163, pp. 295—306 et 318—324.
2. CORNELIS A. et CARTILIER (1960), Bulletin du CERES, Liège. Tome XI, pp. 27—60.
3. HODGE P. G., Jr. (1959), Plastic Analysis of Structures, McGraw-Hill.
4. STEINHARDT O. (1938), Thèse Darmstadt.

### Résumé

Quand une poutre courbe à section en double té, à parois minces, faite d'un acier élastique — parfaitement plastique est soumise à flexion pure, il se produit des poussées au vide transversales qui tendent à déformer la section droite.

Les tensions transversales correspondantes ont pour effet de diminuer considérablement la valeur du moment fléchissant maximum que la poutre peut supporter *élastiquement*.

Le Mémoire établit des bornes inférieure et supérieure pour la valeur limite *plastique* du moment fléchissant dans la poutre.

Ces bornes théoriques sont en excellent accord avec les valeurs limites du moment fléchissant déterminées par des essais directs et sont supérieures de cent pour cent, en moyenne, à la valeur du moment fléchissant élastique maximum.

### Zusammenfassung

Die Arbeit behandelt das statische Verhalten eines gekrümmten I-Trägers aus dünnen Scheiben, dessen Material durch ein idealisiertes Spannungs-Dehnungsdiagramm gekennzeichnet ist. Bei reiner Biegebeanspruchung treten Ablenkungskräfte auf, die den Stabquerschnitt verformen.

Die entsprechenden Querspannungen bewirken eine beträchtliche Abminderung des Biegemomentes, das vom Träger *elastisch* aufgenommen werden kann.

Die Autoren ermitteln einen oberen und einen unteren Grenzwert für den *plastischen* Grenzwert des Biegemomentes im Träger.

Diese theoretisch bestimmten Grenzwerte zeigen eine ausgezeichnete Übereinstimmung mit den im direkten Versuch ermittelten maximalen Biegemomenten und sind im Mittel um 100% höher als der *elastisch* bestimmte Grenzwert des Biegemomentes.

### Summary

When a thin-walled, curved H-beam made of an elastic, perfectly plastic steel is subjected to pure bending, transverse bulges occur which tend to distort the section.

The effect of the corresponding transverse stresses is to reduce considerably the value of the maximum bending moment which the beam is capable of supporting elastically.

The paper establishes the upper and lower limits of the *plastic* limiting value of the bending moment in the beam.

These theoretical limits are in excellent agreement with the limiting values of the bending moment determined by direct tests and are greater by one hundred per cent, on an average, than the value of the maximum elastic bending moment.

Leere Seite  
Blank page  
Page vide