

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen  
**Band:** 23 (1963)

**Artikel:** Über ein allgemeines asymptotisches Verfahren zur Berechnung von Rotationsschalen  
**Autor:** Gravina, Pedro B.J.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-19401>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 31.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Über ein allgemeines asymptotisches Verfahren zur Berechnung von Rotationsschalen

*General Asymptotic Method for the Calculation of Shells of Rotation*

*D'un procédé asymptotique général pour le calcul des voiles de rotation*

PEDRO B. J. GRAVINA  
Prof. Dr., Universidade de São Paulo

## 1. Einleitung

Die Anwendung asymptotischer Berechnungsverfahren bei der Untersuchung von Schalenproblemen ist nicht neu. Es genüge, auf die Arbeiten von BLUMENTHAL, 1912, und von GECKELER, 1926, hinzuweisen, durch die eine erste Untersuchung kugelförmiger Kuppeln möglich wurde. In letzter Zeit wurden verschiedene andere Probleme der Schalentheorie durch die Verwendung asymptotischer Methoden gelöst, welche normalerweise sehr gute Annäherungswerte liefern und leichter aufgestellt werden können als genaue Lösungen.

In diesem Rahmen wird in der vorliegenden Arbeit ein allgemeines asymptotisches Verfahren zur Berechnung der Randstörungen angegeben, das, sofern einige Bedingungen erfüllt sind, auf Rotationsschalen beliebiger Form mit veränderlicher Wandstärke unter radialsymmetrischen Belastungen anwendbar ist. Zunächst werden die allgemeinen Ausdrücke der asymptotischen Reihen wie der Koeffizienten ihrer Glieder für die verschiedenen Kräfte, für die Verschiebung und für die Drehung abgeleitet. Wird die Untersuchung dann anschließend auf die Betrachtung des ersten Gliedes dieser Reihe begrenzt, so ergeben sich angenäherte Ausdrücke für die Berechnung der Randstörungen, die Ergebnisse liefern, die im Hinblick auf die konstruktiven Merkmale der heute verwendeten Rotationsschalen durchaus annehmbar sind. Darauf wird gezeigt, wie die Theorie der abgeflachten Schalen als Sonderfall der allgemeinen Theorie behandelt werden kann. Anschließend werden einige Anwendungen untersucht, indem die entsprechenden Ausdrücke für Kugelschalen von ver-

änderlicher oder konstanter Wandstärke wie auch für Schalen, deren geometrische Merkmale bestimmten Variationsgesetzen genügen, abgeleitet werden. Die Arbeit schließt mit der Untersuchung von Schalen, deren Mittelfläche durch die Rotation einer Kurve zweiten Grades um die Symmetriearchse erzeugt wird.

## 2. Grundlagen der strengen Theorie

Die Rotationsschalen sind gekennzeichnet durch die Mittelfläche  $\Sigma$ , die durch eine ebene Kurve  $c$  durch Drehung um eine feste Achse  $r$  erzeugt wird. Die Normale zur Mittelfläche in einem bestimmten Punkt bildet mit der Drehachse  $r$  einen Winkel, den wir allgemein mit  $\varphi$  bezeichnen, Fig. 1.

Bei der Untersuchung von Rotationsschalen unter radialsymmetrischer Belastung ist es besonders bequem, an Stelle der Verschiebungen  $v$  und  $w$  in Richtung der Tangente und der Normalen zum Meridian im Schnitt  $\varphi = \text{konstant}$  (Fig. 2) die Unbekannten  $U$  und  $V$  von H. REISSNER einzuführen. Dabei ist

$$U = R_2 Q_\varphi, \quad (1)$$

wobei, nach Fig. 1,  $Q_\varphi$  die Einheitsquerkraft im Schnitt  $\varphi = \text{konstant}$  des Meridians ist und  $R_2$  der Krümmungsradius des Normalschnittes in der zum Meridian senkrechten Ebene des gleichen Querschnittes ist und

$$V = \frac{1}{R_1} \left( v + \frac{dw}{d\varphi} \right) \quad (2)$$

ist die Drehung der Tangente zum Meridian (Fig. 2), wobei  $R_1$  den Krümmungsradius des Meridians an der gleichen Stelle bedeutet.

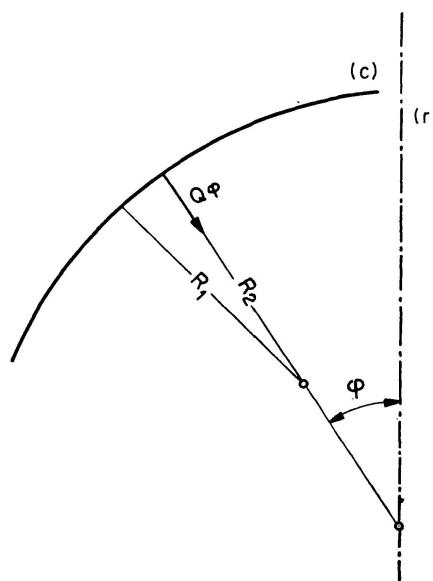


Fig. 1.

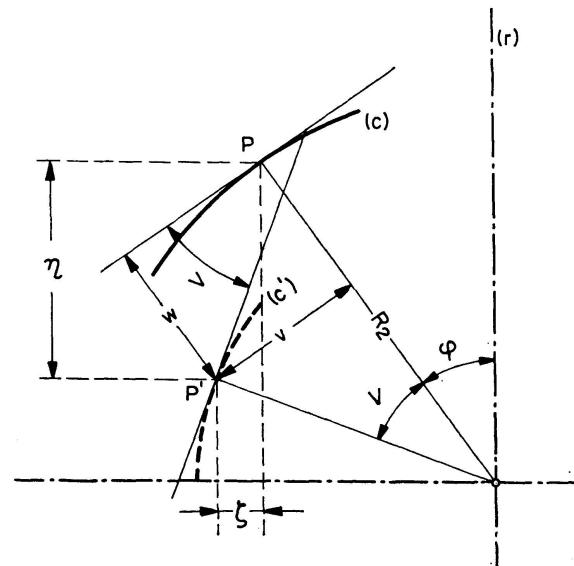


Fig. 2.

Unter diesen Bedingungen ergeben sich die Grundgleichungen von E. MEISSNER, die für den allgemeinen Fall einer Rotationsschale beliebiger Form und veränderlicher Stärke  $h = h(\varphi)$  gültig sind:

$$L(U) + \nu U + \frac{1}{h} \frac{d h}{d \varphi} \left( \nu \operatorname{ctg} \varphi U + \frac{R_2}{R_1} \frac{d U}{d \varphi} \right) = E h R_1 V + Q(\varphi), \quad (3)$$

$$L(V) - \nu V + \frac{3}{h} \frac{d h}{d \varphi} \left( \nu \operatorname{ctg} \varphi V + \frac{R_2}{R_1} \frac{d V}{d \varphi} \right) = - \frac{R_1 U}{D}, \quad (4)$$

wobei  $L(\ ) = \frac{R_2}{R_1} \frac{d^2(\ )}{d \varphi^2} + \left[ \frac{R_2}{R_1} \operatorname{ctg} \varphi + \frac{d}{d \varphi} \left( \frac{R_2}{R_1} \right) \right] \frac{d(\ )}{d \varphi} - \frac{R_1}{R_2} \operatorname{ctg}^2 \varphi (\ )$  (5)

und

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}. \quad (6)$$

$E$  ist der normale Elastizitätsmodul und  $\nu$  die Poissonsche Querdehnungszahl des Materials.  $Q(\varphi)$  ist das Belastungsglied, abhängig vom System der symmetrischen äußeren Lasten;  $D$  bedeutet die Biegssteifigkeit der Schale. Da wir in der vorliegenden Untersuchung nur die Randstörungen untersuchen wollen, die sich bekanntlich dem Membranzustand überlagern, führen wir im folgenden das Belastungsglied mit

$$Q(\varphi) = 0, \quad (7)$$

ein. Unter diesen Bedingungen erlaubt das System der angegebenen Differentialgleichungen, die zusammen mit den Membranlösungen die Randbedingungen erfüllen, die Wirkungen der Randstörungen zu berechnen:

$$Q_\varphi = - \frac{U}{R_2}, \quad (8)$$

$$N_\varphi = - \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{R_2} U, \quad (9)$$

$$N_\vartheta = - \frac{1}{R_1} \frac{d U}{d \varphi}, \quad (10)$$

$$M_\varphi = - D \left( \frac{1}{R_1} \frac{d V}{d \varphi} + \nu \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{R_2} V \right), \quad (11)$$

$$M_\vartheta = - D \left( \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{R_2} V + \nu \frac{1}{R_1} \frac{d V}{d \varphi} \right), \quad (12)$$

wobei  $N_\varphi$  und  $N_\vartheta$  die Einheitsnormalkräfte in Richtung der Meridiane und der Parallelkreise und  $M_\varphi$  und  $M_\vartheta$  die entsprechenden Momente bedeuten (Fig. 3).

Gleicherweise ergibt sich die Verschiebung  $\xi$  normal zur Rotationsachse  $r$ , positiv angenommen in Richtung auf die Achse  $r$  (Fig. 2):

$$\xi = \frac{R_2 \sin \varphi}{E h} (N_\vartheta - \nu N_\varphi). \quad (13)$$

Die Drehung  $V$  der Meridiantangente sei positiv angenommen, wenn die Drehung die Meridiantangente in die Achse  $z$  überführt (Fig. 2 und Fig. 3).

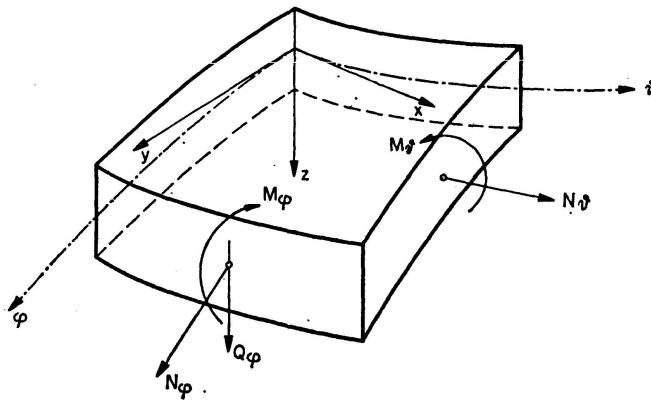


Fig. 3.

### 3. Vereinfachte Grundgleichungen

Wir betrachten Rotationsschalen, die durch eine Mittelfläche mit positiver Gaußscher Krümmung charakterisiert sind. Wenn wir annehmen, daß die Schalenstärke sich so ändert, daß

$$\frac{dh}{d\varphi} \approx 0 \quad (14)$$

gesetzt werden kann, so erhalten wir an Stelle der Gleichungen (3) und (4) und mit Beachtung von Gleichung (7) die Gleichungen

$$L(U) + \nu U = Eh R_1 V, \quad (15)$$

$$L(V) - \nu V = -\frac{R_1 U}{D}, \quad (16)$$

dies ist  $L\left[\frac{1}{R_1} L(U)\right] + \nu L\left(\frac{U}{R_1}\right) - \nu \frac{1}{R_1} L(U) + \left[\frac{Eh R_1}{D} - \nu^2 \frac{1}{R_1}\right] U = 0, \quad (17)$

$$L\left[\frac{1}{R_1} L(V)\right] - \nu L\left(\frac{V}{R_1}\right) + \nu \frac{1}{R_1} L(V) + \left[\frac{Eh R_1}{D} - \nu^2 \frac{1}{R_1}\right] V = 0. \quad (18)$$

Um dieses Gleichungssystem zu vereinfachen, beachten wir, daß

$$\begin{aligned} \nu L\left(\frac{U}{R_1}\right) - \nu \frac{1}{R_1} L(U) &= -\nu \frac{1}{R_1^3} \left\{ 2 R'_1 R_2 U' \right. \\ &\quad \left. + \left[ R''_1 R_2 - 3 \frac{R_2}{R_1} (R'_1)^2 + R'_1 R_2 \operatorname{ctg} \varphi + R'_1 R'_2 \right] U \right\}, \end{aligned} \quad (19)$$

wobei mit  $(\cdot)'$  und  $(\cdot)''$  die Ableitungen nach  $\varphi$  bezeichnet sind. Es ist zu beach-

ten, daß in diesem Ausdruck  $U''$  nicht vorkommt, sondern nur  $U'$  und  $U$ , während der Ausdruck

$$L \left[ \frac{1}{R_1} L(U) \right] \quad (20)$$

die Ableitungen  $U''$  und  $U'''$  und  $U''''$  enthält. Wir wissen jedoch, daß, im Falle von Rotationsschalen mit positiver Gaußscher Krümmung,  $U$  eine Funktion ist, deren Werte mit Abnahme der Schalenstärke  $h$  und Zunahme des Krümmungsradius  $R_1$  von den Rändern sehr rasch abklingen, woraus

$$U \ll U'; \quad U' \ll U''; \quad \dots \quad U^{(i-1)} \ll U^i. \quad (21)$$

Beachten wir andererseits, daß in den Rotationsschalen, die gegenwärtig ausgeführt werden, diese Bedingungen für  $h$  und  $R_1$  normalerweise erfüllt sind und daß die Querdehnungszahl  $\nu$  klein ist, so können wir in Gleichung (17) den Ausdruck (19) gegenüber (20) vernachlässigen. Zu beachten ist noch

$$\frac{\nu^2}{R_1} \ll \frac{12(1-\nu^2)R_1}{h^2}. \quad (22)$$

Dies heißt

$$\frac{\nu^2}{R_1} \ll \frac{EhR_1}{D}. \quad (23)$$

Wir können somit an Stelle von (17) schreiben:

$$L \left[ \frac{1}{R_1} L(U) \right] + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2} R_1 U = 0. \quad (24)$$

Mit den gleichen Überlegungen erhalten wir an Stelle von (18):

$$L \left[ \frac{1}{R_1} L(V) \right] + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2} R_1 V = 0. \quad (25)$$

An Stelle der Gleichungen (17) und (18) haben wir nun zwei Gleichungen erhalten, von denen jede nur eine der unbekannten Funktionen  $U$  und  $V$  enthält. Setzen wir

$$m^4 = 12(1-\nu^2), \quad (26)$$

so ergibt sich

$$L \left[ \frac{1}{R_1} L(U) \right] + m^4 \frac{R_1}{h^2} U = 0 \quad (27)$$

und

$$L \left[ \frac{1}{R_1} L(V) \right] + m^4 \frac{R_1}{h^2} V = 0. \quad (28)$$

Betrachten wir im besondern Gleichung (27), so können wir sie auch wie folgt schreiben

$$L_1 [L_1(U)] + \frac{m^4}{h^2} U = 0, \quad (29)$$

wobei

$$L_1(\quad) = \frac{1}{R_1} L(\quad). \quad (30)$$

Wir beachten, daß

$$L_1 \left[ L_1(U) + i \frac{m^2}{h} U \right] - i m^2 \left[ L_1 \left( \frac{U}{h} \right) + i m^2 \frac{U}{h^2} \right] = 0. \quad (31)$$

Damit wird wegen Gleichung (14)

$$L_1 \left( \frac{U}{h} \right) \approx \frac{1}{h} L_1(U) \quad (32)$$

und damit  $L_1 \left[ L_1(U) + i \frac{m^2}{h} U \right] - i \frac{m^2}{h} \left[ L_1(U) + i m^2 \frac{U}{h} \right] = 0. \quad (33)$

Dies ist  $L_1 \left[ L_1(U) - i \frac{m^2}{h} U \right] + i \frac{m^2}{h} \left[ L_1(U) - i \frac{m^2}{h} U \right] = 0. \quad (34)$

Schließlich ergibt sich, unter Berücksichtigung von (30), daß die Lösungen  $U_1, U_2$  und  $U_3, U_4$  der Gleichungen

$$L(U) + i m^2 \frac{R_1}{h} U = 0, \quad (35)$$

$$L(U) - i m^2 \frac{R_1}{h} U = 0 \quad (36)$$

ebenfalls Lösungen der Gleichung (27) sind.

Das allgemeine Problem der Berechnung von Rotationsschalen unter radial-symmetrischer Belastung reduziert sich somit wie im Sonderfall der Kugelschale mit konstanter Stärke auf die Lösung der Gleichungen (35) und (36), deren Lösungen konjugiert komplex sind:

$$U_1 = I_1 + i I_2; \quad U_2 = I_3 + i I_4, \quad (37)$$

$$U_3 = I_1 - i I_2; \quad U_4 = I_3 - i I_4. \quad (38)$$

Wir haben somit  $U = c_1 I_1 + c_2 I_2 + c_3 I_3 + c_4 I_4, \quad (39)$

wobei  $c_i$  Integrationskonstanten bedeuten. Sobald die Funktion  $U$  einmal bekannt ist, erhalten wir aus Gleichung (15)

$$V = \frac{1}{E h R_1} [L(U) + \nu U]. \quad (40)$$

#### 4. Asymptotisches Verfahren

##### A. Asymptotische Lösungen der vereinfachten Grundgleichungen

Die moderne Entwicklung im Stahlbeton erlaubt die Ausbildung von Schalen großer Abmessungen, die charakterisiert sind durch hohe Werte des Verhältnisses  $R_1/h$ . Unter diesen Bedingungen mag nun interessant sein, asymptotische Lösungen der hergeleiteten Grundgleichungen zu besitzen, sind doch i. a. die genauen Lösungen schwierig zu berechnen.

Im folgenden wird gezeigt, wie der asymptotische Ausdruck der Funktion  $U$  und somit die Koeffizienten der Reihe abgeleitet werden, woraus dann die Koeffizienten bezüglich der Drehung  $V$ , den Kräften und der Verschiebung abgeleitet werden.

Betrachten wir nun die Gleichung (35). Um die asymptotische Lösung dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung herzuleiten, transformieren wir sie so, daß die erste Ableitung verschwindet. Setzen wir nun

$$U = \frac{Th}{\sqrt{\alpha \sin \varphi}}, \quad (41)$$

wobei

$$\alpha = \frac{R_2}{R_1}. \quad (42)$$

Die Gleichung (35) wird unter Beachtung der Gleichung (5) und der Bedingung (14) zu:

$$T'' + \left\{ \frac{1}{4\alpha^2} [\alpha' + \alpha \operatorname{ctg} \varphi]^2 - \frac{1}{2\alpha} [\alpha'' + 2\alpha' \operatorname{ctg} \varphi - \alpha] - \frac{\operatorname{ctg}^2 \varphi}{\alpha^2} \right\} T + i m^2 \frac{R_1}{\alpha h} = 0. \quad (43)$$

Setzen wir

$$i m^2 \frac{R_1}{\alpha h} = -\beta^2 \frac{R_1}{R_1^0} \frac{h^0}{h} \frac{\alpha^0}{\alpha} \quad (44)$$

mit

$$\beta^2 = -i m^2 \frac{R_1^0}{\alpha^0 h^0}, \quad (45)$$

wobei  $R_1^0, \alpha^0, h^0$  Bezugsgrößen für  $\varphi = \varphi^0$  sind.

$$\text{Mit} \quad \frac{R_1}{R_1^0} \frac{h^0}{h} \frac{\alpha^0}{\alpha} = \frac{R_1^*}{\alpha^* h^*} \quad (46)$$

$$\text{und} \quad \vartheta_{(\varphi)} = \frac{1}{4\alpha^2} [\alpha' + \alpha \operatorname{ctg} \varphi]^2 - \frac{1}{2\alpha} [\alpha'' + 2\alpha' \operatorname{ctg} \varphi - \alpha] - \frac{\operatorname{ctg}^2 \varphi}{\alpha^2}, \quad (47)$$

$$\text{wobei} \quad R_1^* = \frac{R_1}{R_1^0}; \quad \alpha^* = \frac{\alpha}{\alpha_0}; \quad h^* = \frac{h}{h_0} \quad (48)$$

$$\text{erhalten wir} \quad T'' + \vartheta(\varphi) T - \beta^2 \frac{R_1^*}{\alpha^* h^*} = 0. \quad (49)$$

Der Parameter  $\beta^2$  erreicht i. a., wie schon dargelegt, sehr hohe Werte, so daß möglich wird, die asymptotische Lösung dieser Gleichung nach HORN herzuleiten. Schreiben wir nämlich die Lösung so an

$$T = \Phi e^{\beta \omega} \left[ 1 + \frac{T_1}{\beta} + \frac{T_2}{\beta^2} + \dots \right], \quad (50)$$

wobei  $\Phi, \omega, T_1, T_2, \dots$  nur Funktionen von  $\varphi$  sind, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} T'' &= e^{\beta \omega} [\beta^2 (\Phi \omega'^2) + \beta (2\Phi' \omega' + \Phi \omega'' + \Phi \omega'^2 T_1) \\ &\quad + \beta^0 (\Phi'' + 2\Phi' \omega' T_1 + \Phi \omega'' T_1 + \Phi \omega' T_2 + 2\Phi \omega' T_1')] \\ &\quad + \beta^{-1} (\Phi'' T_1 + 2\Phi' \omega' T_2 + \Phi \omega'' T_2 + \Phi \omega'^2 T_3 + 2\Phi' T_1' + 2\Phi \omega' T_2' + \Phi T_1'') + \dots \end{aligned} \quad (51)$$

Ersetzen wir diese Ausdrücke in der Gleichung (49) und setzen die Koeffizienten von  $\beta^2, \beta, \beta^0, \beta^{-1} \dots \beta^{-(n+1)}$  gleich Null, so erhalten wir:

woraus zu ersehen ist, daß  $T_{-i} = 0$ ;  $T_0 = 1$ . (53)

Aus der ersten der Gleichungen (52) erhalten wir:

$$\omega' = \left( \frac{R_1^*}{\alpha^* h^*} \right)^{1/2}. \quad (54)$$

$$\ln \Phi = -\frac{1}{2} \ln \omega', \quad (55)$$

woraus 
$$\Phi = \left( \frac{\alpha^* h^*}{R_1^*} \right)^{1/4} \quad (56)$$

und somit durch Gleichung (54) zu:

$$\omega' = \Phi^{-2}. \quad (57)$$

Die dritte der Gleichungen (52) läßt sich unter Berücksichtigung der ersten zwei Gleichungen folgendermaßen anschreiben:

$$\Phi'' + 2\Phi\omega' T_1' + \vartheta(\varphi)\Phi = 0, \quad (58)$$

$$\text{wobei } T_1' = -\frac{\Phi'' + \vartheta(\varphi)\Phi}{2\Phi\omega'} = -\frac{f(\varphi)}{2} \quad (59)$$

$$\text{oder} \quad T_1 = -\frac{1}{2} \int f(\varphi) d\varphi + C_1 \quad (60)$$

wobei  $C_1$  eine Integrationskonstante bedeutet.

Mit den gleichen Überlegungen lässt sich auch der allgemeine Ausdruck der Gleichungen (52) folgendermaßen vereinfachen:

$$\Phi'' T_{n-1} + 2\Phi' T'_{n-1} + 2\Phi \omega' T'_n + \Phi T''_{n-1} + \vartheta(\varphi) \Phi T_{n-1} = 0 \quad (61)$$

und unter Berücksichtigung von Gleichung (58)

$$T'_n = T'_1 T_{n-1} - \frac{\Phi'}{\Phi_{\omega'}'} T'_{n-1} - \frac{1}{2\omega'} T''_{n-1} \quad (62)$$

oder  $T_n = \int T'_1 T_{n-1} d\varphi - \int \frac{\Phi'}{\Phi} T'_{n-1} d\varphi - \int \frac{T''_{n-1}}{2\omega'} d\varphi + C_n$  (63)

mit  $C_n$  als Integrationskonstante.

Beachten wir nun, daß durch Gleichung (57)

$$\frac{\Phi'}{\Phi} = -\frac{1}{2} \frac{\omega''}{\omega'} \quad (64)$$

wird und daß  $\frac{T''_{n-1}}{\omega'} - \frac{\omega'' T'_{n-1}}{\omega'^2} = \left( \frac{T'_{n-1}}{\omega'} \right)',$  (65)

so ergibt sich, mit Rücksicht auf Gleichung (59), der allgemeine Ausdruck für die Koeffizienten der asymptotischen Lösung zu:

$$T_n = -\frac{1}{2} \left( \frac{T'_{n-1}}{\omega'} + \int f(\varphi) T_{n-1} d\varphi \right) + C_n. \quad (66)$$

Die unter (53) angegebenen Ausdrücke bleiben dabei gültig.

Sind diese Koeffizienten einmal bekannt, so erhalten wir durch Gleichung (41)

$$U = \frac{\Phi \sqrt{h}}{\sqrt{\alpha} \sin \varphi} e^{\beta \omega} \left[ 1 + \frac{T_1}{\beta} + \frac{T_2}{\beta^2} + \dots \right], \quad (67)$$

d. h. die gesuchte asymptotische Lösung, wobei wir noch durch Gleichung (40) unter Beachtung von Gleichung (35) erhalten:

$$V = \frac{1}{E h R_1} \left[ -i m^2 \frac{R_1}{h} + \nu \right] U \quad (68)$$

oder mit Gleichung (45)  $V = \frac{1}{E h^2} \left[ \beta^2 \chi^0 + \frac{\nu h}{R_1} \right] U,$  (69)

wobei  $\chi^0 = \frac{\alpha^0 h^0}{R_1^0}$  (70)

und aus Gleichung (67) ergibt sich nun noch:

$$V = \frac{\Phi \sqrt{h}}{E h^2 \sqrt{\alpha} \sin \varphi} e^{\beta \omega} \left[ \beta^2 \chi^0 + \beta \chi^0 T_1 + \beta^0 \left( \chi^0 T_2 + \nu \frac{h}{R_1} \right) + \beta^{-1} \left( \chi^0 T_3 + \nu \frac{h}{R_1} T_1 \right) + \beta^{-2} \left( \chi^0 T_4 + \nu \frac{h}{R_1} T_2 \right) + \dots \right]. \quad (71)$$

### B. Kräfte

Sind die Ausdrücke (67) und (71) der unbekannten Funktionen  $U$  und  $V$  einmal bekannt, so können die Ausdrücke für die Kräfte hergeleitet werden.

Durch Gleichung (8) erhalten wir

$$Q_\varphi = \frac{\Phi \sqrt{h}}{R_2 \sqrt{\alpha} \sin \varphi} e^{\beta \omega} \left[ 1 + \frac{T_1}{\beta} + \frac{T_2}{\beta^2} + \dots \right]. \quad (72)$$

Gleicherweise wird durch Gleichung (9)

$$N_\varphi = -\frac{\operatorname{ctg} \varphi}{R_2} \frac{\Phi \sqrt{h}}{\sqrt{\alpha \sin \varphi}} e^{\beta \omega} \left[ 1 + \frac{T_1}{\beta} + \frac{T_2}{\beta^2} + \dots \right]. \quad (73)$$

Unter Beachtung von Gleichung (67) sowie der Gleichungen (14) und (56) wird

$$U' = \frac{\Phi \sqrt{h}}{\sqrt{\alpha \sin \varphi}} e^{\beta \omega} \left[ \frac{\beta}{\Phi^2} + \left( \frac{T_1}{\Phi^2} + \psi \right) + \left( \frac{T_2}{\Phi^2} + T_1 \psi + T_1' \right) \frac{1}{\beta} + \dots \right], \quad (74)$$

$$\text{wobei } \psi = \frac{\Phi'}{\Phi} - \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha'}{\alpha} + \operatorname{ctg} \varphi \right). \quad (75)$$

Damit wird durch Gleichung (10)

$$N_\vartheta = -\frac{1}{R_1} \frac{\Phi \sqrt{h}}{\sqrt{\alpha \sin \varphi}} e^{\beta \omega} \left[ \frac{\beta}{\Phi^2} + \left( \frac{T_1}{\Phi^2} + \psi \right) + \left( \frac{T_2}{\Phi^2} + T_1 \psi + T_1' \right) \frac{1}{\beta} + \dots \right]. \quad (76)$$

Für die Berechnung der Reihen der Momente vernachlässigen wir in der Gleichung (69) den zweiten Klammerausdruck, der sehr klein ist im Vergleich zum ersten Ausdruck; somit wird

$$V = \frac{\beta^2 \chi^0}{E h^2} U \quad (77)$$

und mit Berücksichtigung von Gleichung (14)

$$V' = \frac{\beta^2 \chi^0}{E h^2} U'. \quad (78)$$

Setzen wir diese Ausdrücke in Gleichung (11) ein, so erhalten wir nach einfacher Umrechnung

$$\begin{aligned} M_\varphi &= \frac{h}{\chi^0 R_1} \frac{\Phi \sqrt{h}}{\sqrt{\alpha \sin \varphi}} e^{\beta \omega} \left\{ \frac{1}{\Phi^2} \frac{1}{\beta} + \left[ \nu \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{\alpha} + \left( \frac{T_1}{\Phi^2} + \psi \right) \right] \frac{1}{\beta^2} \right. \\ &\quad \left. + \left[ \nu \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{\alpha} T_1 + \left( \frac{T_2}{\Phi^2} + T_1 \psi + T_1' \right) \right] \frac{1}{\beta^3} + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (79)$$

In gleicher Weise erhalten wir durch Gleichung (12)

$$\begin{aligned} M_\vartheta &= \frac{h}{\chi^0 R_1} \frac{\Phi \sqrt{h}}{\sqrt{\alpha \sin \varphi}} e^{\beta \omega} \left\{ \frac{\nu}{\Phi^2} \frac{1}{\beta} + \left[ \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{\alpha} + \nu \left( \frac{T_1}{\Phi^2} + \psi \right) \right] \frac{1}{\beta^2} \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{\alpha} T_1 + \nu \left( \frac{T_2}{\Phi^2} + T_1 \psi + T_1' \right) \right] \frac{1}{\beta^3} + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (80)$$

### C. Allgemeine Ausdrücke der asymptotischen Reihen

Betrachten wir nun die Gleichungen (67), (71), (72), (73), (76), (79) und (80), so können die Koeffizienten der verschiedenen asymptotischen Reihen sofort angeschrieben werden.

Für  $U$  erhalten wir

$$U_0 = 1; \quad U_1 = T_1; \quad U_2 = T_2; \dots \quad (81)$$

Für  $V$

$$V^{(2)} = \chi^0; \quad V^{(1)} = \chi^0 T_1; \quad V_0 = \chi^0 T_2 + \nu \frac{h}{R_1}; \quad V_1 = \chi^0 T_3 + \nu \frac{h}{R_1} T_1; \dots \quad (82)$$

Für  $Q_\varphi$   $Q_{\varphi 0} = 1; \quad Q_{\varphi 1} = T_1; \quad Q_{\varphi 2} = T_2; \dots \quad (83)$

Für  $N_\varphi$   $N_{\varphi 0} = 1; \quad N_{\varphi 1} = T_1; \quad N_{\varphi 2} = T_2; \dots \quad (84)$

Für  $N_\vartheta$   $N_\vartheta^{(1)} = \frac{1}{\Phi^2}; \quad N_{\vartheta 0} = \frac{T_1}{\Phi^2} + \psi; \quad N_{\vartheta 1} = \frac{T_2}{\Phi^2} + T_1 \psi + T_1'; \dots \quad (85)$

Für  $M_\varphi$

$$M_{\varphi 1} = \frac{1}{\Phi^2}; \quad M_{\varphi 2} = \nu \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{\alpha} + \left( \frac{T_1}{\Phi^2} + \psi \right); \quad M_{\varphi 3} = \nu \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{\alpha} T_1 + \left( \frac{T_2}{\Phi^2} + T_1 \psi + T_1' \right); \dots \quad (86)$$

Für  $M_\vartheta$

$$M_{\vartheta 1} = \frac{\nu}{\Phi^2}; \quad M_{\vartheta 2} = \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{\alpha} + \nu \left( \frac{T_1}{\Phi^2} + \psi \right); \quad M_{\vartheta 3} = \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{\alpha} T_1 + \nu \left( \frac{T_2}{\Phi^2} + T_1 \psi + T_1' \right); \dots \quad (87)$$

$$\text{Setzen wir } \lambda^2 = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{\chi^0}, \quad (88)$$

so erhalten wir durch die Gleichungen (26), (45) und (70)

$$\beta^2 = -2i\lambda^2 \quad (89)$$

$$\text{und somit } \beta = \sqrt[4]{-1} \lambda, \quad (90)$$

woraus sich die folgenden vier Wurzeln ergeben:

$$\beta_1 = (1+i)\lambda; \quad \beta_2 = (1-i)\lambda; \quad \beta_3 = -(1+i)\lambda; \quad \beta_4 = -(1-i)\lambda \quad (91)$$

wobei jede der Lösungen einer asymptotischen Reihe entspricht.

Bezeichnen wir allgemein mit  $X$  die Kraft, die Verschiebung oder die Drehung, so erhalten wir folgenden allgemeinen Ausdruck für die asymptotischen Reihen:

$$X = \frac{1}{\kappa_X} \sum_1^4 C_n'' \frac{\Phi \sqrt{h}}{\sqrt{\alpha \sin \varphi}} e^{\beta_n \omega} \left[ X^{(2)} \beta_n^2 + X^{(1)} \beta_n + X_0 + \frac{X_1}{\beta_n} + \frac{X_2}{\beta_n^2} + \dots \right], \quad (92)$$

wobei  $X^{(i)}$  bzw.  $X_i$  die Koeffizienten von  $\beta_n^i$  und  $\beta_n^{-i}$  der Größe  $X$  entsprechenden Reihe und  $C_n''$  Integrationskonstanten bedeuten. Der Parameter  $\kappa_X$  ist ein von der Art der Größe  $X$  abhängiger Faktor, der sich aus dem Vergleich von Gleichung (92) mit den Gleichungen (67), (71), (72), (73), (76), (79) und (80) ergibt zu:

$$\kappa_U = 1; \quad \kappa_V = E h^2; \quad \kappa_{Q_\varphi} = R_2; \quad \kappa_{N_\varphi} = -\frac{R_2}{\operatorname{ctg} \varphi}; \quad \kappa_{N_\vartheta} = -R_1; \quad (93)$$

$$\kappa_{M_\varphi} = \frac{\chi^0 R_1}{h}; \quad \kappa_{M_\vartheta} = \frac{\chi^0 R_1}{h}.$$

Ersetzen wir in Gleichung (92)  $\beta_n$  durch die in Gleichung (91) gegebenen Werte und beachten dabei noch, daß

$$e^{\pm i \lambda \omega} = \cos \lambda \omega \pm i \sin \lambda \omega, \quad (94)$$

so erhalten wir nach Umrechnung

$$\begin{aligned} X = & \frac{1}{\kappa_X} \frac{\Phi \sqrt{h}}{\sqrt{\alpha \sin \varphi}} e^{\lambda \omega} \{ (C'_1 X^{(II)} + C'_2 X^{(I)}) \cos \lambda \omega - (C'_2 X^{(II)} - C'_1 X^{(I)}) \sin \lambda \omega \} \\ & + \frac{1}{\kappa_X} \frac{\Phi \sqrt{h}}{\sqrt{\alpha \sin \varphi}} e^{-\lambda \omega} \{ (C'_3 X^{(IV)} + C'_4 X^{(III)}) \cos \lambda \omega + (C'_4 X^{(IV)} - C'_3 X^{(III)}) \sin \lambda \omega \}, \end{aligned} \quad (95)$$

wobei

$$C''_1 = C'_1 + C'_2; \quad C''_2 = C'_1 - i C'_2, \quad C''_3 = C'_3 + i C'_4; \quad C''_4 = C'_3 - i C'_4, \quad (96)$$

sowie  $X^{(I)} = -4 \lambda^2 X^{(2)} - 2 \lambda X^{(1)} + \frac{X_1}{\lambda} + \frac{X_2}{\lambda^2} + \frac{X_3}{2 \lambda^3} + \dots$ ,

$$X^{(II)} = 2 \lambda X^{(1)} + 2 X_0 + \frac{X_1}{\lambda} - \frac{X_3}{2 \lambda^3} + \dots, \quad (97)$$

$$X^{(III)} = -4 \lambda^2 X^{(2)} + 2 \lambda X^{(1)} - \frac{X_1}{\lambda} + \frac{X_2}{\lambda^2} - \frac{X_3}{2 \lambda^3} + \dots,$$

$$X^{(IV)} = -2 \lambda X^{(1)} + 2 X_0 - \frac{X_1}{\lambda} + \frac{X_3}{2 \lambda^3} + \dots$$

Wegen Gleichung (57) erhalten wir nun

$$\lambda \omega = \lambda \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Phi^2}, \quad (98)$$

wobei  $\varphi_0$  einen frei wählbaren Wert von  $\varphi$  bedeutet. Ist nun  $\varphi_i$  der Wert für den unteren Rand und setzen wir für

$$\psi_i = \int_{\varphi}^{\varphi_i} \frac{d\varphi}{\Phi^2} \quad (99)$$

ein, so ist wegen  $\lambda \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Phi^2} = \lambda \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} \frac{d\varphi}{\Phi^2} - \lambda \int_{\varphi_i}^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\Phi^2}$ , (100)

$$\lambda \omega = C'_i - \lambda \psi_i. \quad (101)$$

Ist  $\varphi_s$  der dem oberen Rand entsprechende Wert von  $\varphi$ , so wird mit

$$\psi_s = \int_{\varphi_s}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Phi^2}, \quad (102)$$

$$\lambda \omega = C'_s + \lambda \psi_s, \quad (103)$$

wobei  $C'_i$  und  $C'_s$  Integrationskonstanten bedeuten.

Ersetzen wir in Gleichung (89)  $\lambda \omega$  durch die Ausdrücke (101) und (103) in der ersten Gruppe der Glieder, in welcher die Konstanten  $C'_1$  und  $C'_2$  bzw. in der zweiten Gruppe, in welcher die Konstanten  $C'_3$  und  $C'_4$  vorkommen, so erhalten wir nach einfacher Umformung

$$X = \frac{1}{\kappa_X} \frac{\Phi \sqrt{h}}{\sqrt{\alpha \sin \varphi}} e^{-\lambda \psi_i} \{C_1 (X^{(I)} \cos \lambda \psi_i + X^{(II)} \sin \lambda \psi_i) + C_2 (X^{(II)} \cos \lambda \psi_i - X^{(I)} \sin \lambda \psi_i)\} + \frac{1}{\kappa_X} \frac{\Phi \sqrt{h}}{\sqrt{\alpha \sin \varphi}} e^{-\lambda \psi_s} \{C_3 (X^{(IV)} \cos \lambda \psi_s - X^{(III)} \sin \lambda \psi_s) + C_4 (X^{(III)} \cos \lambda \psi_s + X^{(IV)} \sin \lambda \psi_s)\}, \quad (104)$$

wobei die neuen Integrationskonstanten  $C_1, C_2, C_3, C_4$  durch die Randbedingungen zu bestimmen sind.

#### D. Näherungsformeln für Kräfte, Drehungen und Verschiebungen

Wenn wir für jede Größe  $X$  nur das erste Glied der Reihen, dessen Koeffizient wir bereits bestimmt haben, betrachten, so erhalten wir aus den Gleichungen (97) folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} U^{(I)} &= 0; & U^{(II)} &= 2; & U^{(III)} &= 0; & U^{(IV)} &= 2, \\ V^{(I)} &= -4\lambda^2 \chi^0; & V^{(II)} &= 0; & V^{(III)} &= -4\lambda^2 \chi^0; & V^{(IV)} &= 0, \\ N_\varphi^{(I)} &= 0; & N_\varphi^{(II)} &= 2; & N_\varphi^{(III)} &= 0; & N_\varphi^{(IV)} &= 2, \\ N_\vartheta^{(I)} &= -\frac{2\lambda}{\Phi^2}; & N_\vartheta^{(II)} &= \frac{2\lambda}{\Phi^2}; & N_\vartheta^{(III)} &= \frac{2\lambda}{\Phi^2}; & N_\vartheta^{(IV)} &= -\frac{2\lambda}{\Phi^2}, \\ M_\varphi^{(I)} &= \frac{1}{\lambda \Phi^2}; & M_\varphi^{(II)} &= \frac{1}{\lambda \Phi^2}; & M_\varphi^{(III)} &= -\frac{1}{\lambda \Phi^2}; & M_\varphi^{(IV)} &= -\frac{1}{\lambda \Phi^2}, \\ M_\vartheta^{(I)} &= \frac{\nu}{\lambda \Phi^2}; & M_\vartheta^{(II)} &= \frac{\nu}{\lambda \Phi^2}; & M_\vartheta^{(III)} &= -\frac{\nu}{\lambda \Phi^2}; & M_\vartheta^{(IV)} &= -\frac{\nu}{\lambda \Phi^2}, \end{aligned} \quad (105)$$

Ersetzen wir in Gleichung (104) diese Werte und berücksichtigen die durch die Gleichungen (87) gegebenen Ausdrücke für  $\kappa_X$  und führen folgende Abkürzungen ein

$$\begin{aligned} C_1 &= -C_i \sin \gamma_i; & C_2 &= C_i \cos \gamma_i, \\ C_3 &= C_s \cos \gamma_s; & C_4 &= -C_s \sin \gamma_s, \end{aligned} \quad (106)$$

wobei  $C_i, C_s, \gamma_i, \gamma_s$  neue Integrationskonstanten sind, so erhalten wir nach einfacher Umformung

$$U = \frac{2\Phi \sqrt{h}}{\sqrt{\alpha \sin \varphi}} [e^{-\lambda \psi_i} C_i \cos(\lambda \psi_i + \gamma_i) + e^{-\lambda \psi_s} C_s \cos(\lambda \psi_s + \gamma_s)], \quad (107)$$

$$V = 4\lambda^2 \chi^0 \frac{\Phi \sqrt{h}}{E h^2 \sqrt{\alpha \sin \varphi}} [e^{-\lambda \psi_i} C_i \sin(\lambda \psi_i + \gamma_i) + e^{-\lambda \psi_s} C_s \sin(\lambda \psi_s + \gamma_s)], \quad (108)$$

$$Q_\varphi = \frac{2\Phi\sqrt{h}}{R_2\sqrt{\alpha}\sin\varphi} [e^{-\lambda\psi_i}C_i \cos(\lambda\psi_i + \gamma_i) + e^{-\lambda\psi_s}C_s \cos(\lambda\psi_s + \gamma_s)], \quad (109)$$

$$N_\varphi = -\frac{2\operatorname{ctg}\varphi}{R_2} \frac{\Phi\sqrt{h}}{\sqrt{\alpha}\sin\varphi} [e^{-\lambda\psi_i}C_i \cos(\lambda\psi_i + \gamma_i) + e^{-\lambda\psi_s}C_s \cos(\lambda\psi_s + \gamma_s)], \quad (110)$$

$$N_\vartheta = -\frac{2\sqrt{2}\lambda}{R_1\Phi^2} \frac{\Phi\sqrt{h}}{\sqrt{\alpha}\sin\varphi} \left[ e^{-\lambda\psi_i}C_i \sin\left(\lambda\psi_i + \gamma_i + \frac{\pi}{4}\right) - e^{-\lambda\psi_s}C_s \sin\left(\lambda\psi_s + \gamma_s + \frac{\pi}{4}\right) \right], \quad (111)$$

$$M_\varphi = \frac{\sqrt{2}h}{\chi^0 R_1 \lambda \Phi^2} \frac{\Phi\sqrt{h}}{\sqrt{\alpha}\sin\varphi} \left[ e^{-\lambda\psi_i}C_i \cos\left(\lambda\psi_i + \gamma_i + \frac{\pi}{4}\right) - e^{-\lambda\psi_s}C_s \cos\left(\lambda\psi_s + \gamma_s + \frac{\pi}{4}\right) \right]. \quad (112)$$

Aus Gleichung (13) folgt noch

$$\xi = -\frac{R_2 \sin\varphi}{Eh} \frac{\Phi\sqrt{h}}{\sqrt{\alpha}\sin\varphi} \left\{ e^{-\lambda\psi_i}C_i \left[ \frac{2\sqrt{2}\lambda}{R_1\Phi^2} \sin\left(\lambda\psi_i + \gamma_i + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{2\nu\operatorname{ctg}\varphi}{R_2} \cos(\lambda\psi_i + \gamma_i) \right] - e^{-\lambda\psi_s}C_s \left[ \frac{2\sqrt{2}\lambda}{R_1\Phi^2} \sin\left(\lambda\psi_s + \gamma_s + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{2\nu\operatorname{ctg}\varphi}{R_2} \cos(\lambda\psi_s + \gamma_s) \right] \right\}. \quad (113)$$

Die hergeleiteten Formeln erlauben trotz stark vereinfachter Berechnung gute Näherungswerte für die heute angewandten Schalenformen.

### E. Abgeflachte Schalen

Für abgeflachte Schalen, d. h. für sehr kleine  $\varphi$ -Werte, können wir einsetzen

$$\sin\varphi \approx \varphi; \quad \cos\varphi \approx 1; \quad \operatorname{ctg}\varphi \approx \frac{1}{\varphi} \quad (114)$$

und erhalten an Stelle von Gleichung (41)

$$U = \frac{Th}{\sqrt{\alpha}\varphi} \quad (115)$$

und an Stelle von Gleichung (47)

$$\vartheta(\varphi) = \left[ \frac{\alpha'}{2\alpha} + \frac{1}{2\varphi} \right]^2 - \left[ \frac{\alpha''}{2\alpha} + \frac{\alpha'}{\alpha\varphi} - \frac{1}{2} \right] - \frac{1}{\alpha^2\varphi^2}. \quad (116)$$

Da dieser Ausdruck nur für sehr kleine  $\varphi$ -Werte gültig ist, kann die Konstante  $\frac{1}{2}$  im zweiten Klammerausdruck vernachlässigt werden und wir erhalten somit

$$\vartheta(\varphi) = \frac{1}{\varphi^2} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{\alpha^2} \right) - \frac{1}{\varphi} \frac{\alpha'}{2\alpha} + \left( \frac{1}{4} \frac{\alpha'^2}{\alpha^2} - \frac{\alpha''}{2\alpha} \right). \quad (117)$$

Alle bisher hergeleiteten Formeln haben weiterhin Gültigkeit; die Koeffizienten der asymptotischen Reihen müssen dabei berechnet werden unter Beachtung der Gleichungen (114) bis (117).

## 5. Anwendungen

### A. Kugelschalen

Die Ableitung der Koeffizienten der asymptotischen Reihen gestaltet sich besonders einfach für Kugelschalen. Wir betrachten eine Kugelschale mit dem Radius  $R$  und veränderlicher Schalenstärke

$$h^* = h^*(\varphi). \quad (118)$$

Wegen  $\alpha = 1$ ,  $\alpha' = \alpha'' = 0$  erhalten wir aus Gleichung (47)

$$\vartheta(\varphi) = \frac{2 - 3 \operatorname{ctg}^2 \varphi}{4}. \quad (119)$$

Wegen

$$\Phi = \sqrt[4]{h^*} \quad (120)$$

wird durch Gleichung (59) unter Beachtung der Gleichungen (14) und (57)

$$f(\varphi) = \vartheta(\varphi) \sqrt{h^*}. \quad (121)$$

Da nun

$$\chi^0 = \frac{h^0}{R}, \quad (122)$$

erhalten wir durch Gleichung (88)

$$\lambda = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \frac{\sqrt{R}}{\sqrt[4]{h^0}} = \lambda^0, \quad (123)$$

sowie durch die Gleichungen (99) und (102)

$$\lambda \psi_i = \lambda^0 \int_{\varphi}^{\varphi_i} \frac{d\varphi}{\sqrt[4]{h^*}}; \quad \lambda \psi_s = \lambda^0 \int_{\varphi_s}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt[4]{h^*}}. \quad (124)$$

Die Koeffizienten ergeben sich aus den Gleichungen (53) und (63) zu

$$\begin{aligned} T_0 &= 1, \\ T_1 &= -\frac{1}{2} \int \vartheta(\varphi) \sqrt{h^*} d\varphi + C_1 = -\gamma(\varphi), \\ T_2 &= \frac{\gamma'(\varphi) \sqrt{h^*}}{2} + \frac{1}{2} \int \vartheta(\varphi) \gamma(\varphi) \sqrt{h^*} d\varphi + C_2, \\ &\dots \end{aligned} \quad (125)$$

wobei  $C_i$  freie Konstanten bedeuten.

Ist die Funktion  $h^* = h^*(\varphi)$  bekannt, so können wir die Integration durchführen und die Ausdrücke für die Koeffizienten der asymptotischen Reihen bestimmen.

Betrachten wir zum Beispiel den Fall einer Kugelschale mit

$$\sqrt{h^*} = a + b\varphi, \quad (126)$$

wobei  $a$  und  $b$  Konstanten sind. Setzen wir noch voraus, daß  $b$  klein ist, so daß die Bedingung (14) erfüllt ist, so erhalten wir dann

$$\begin{aligned} T_0 &= 1, \\ T_1 &= -\frac{a}{8}(5\varphi + 3\operatorname{ctg}\varphi) - \frac{b}{8}\left(\frac{5}{2}\varphi^2 + 3\varphi\operatorname{ctg}\varphi - 3\ln\sin\varphi\right) = -\gamma(\varphi), \quad (127) \\ T_2 &= \frac{2-3\operatorname{ctg}^2\varphi}{16}(a+b\varphi)^2 + \frac{[\gamma(\varphi)]^2}{2} + C_2, \\ &\dots \end{aligned}$$

wobei  $C_1=0$  gewählt wurde. Aus den Gleichungen (124) ergibt sich noch

$$\lambda\psi_i = -\frac{\lambda^0}{b}\ln\frac{a+b\varphi}{a+b\varphi_i}; \quad \lambda\psi_s = \frac{\lambda^0}{b}\ln\frac{a+b\varphi}{a+b\varphi_s}, \quad (128)$$

$$\text{woraus} \quad e^{-\lambda\psi_i} = \frac{(a+b\varphi)^{\lambda^0/b}}{(a+b\varphi_i)^{\lambda^0/b}}; \quad e^{-\lambda\psi_s} = \frac{(a+b\varphi)^{-\lambda^0/b}}{(a+b\varphi_s)^{-\lambda^0/b}}. \quad (129)$$

$$\text{Falls die Bedingung} \quad \left| \frac{b}{a} \varphi \right| < 1 \quad (130)$$

erfüllt ist, so läßt sich durch eine Binomialentwicklung leicht feststellen, daß

$$\frac{(a+b\varphi)^{\lambda^0/b}}{(a+b\varphi_i)^{\lambda^0/b}} = e^{-\frac{\lambda^0(\varphi_i-\varphi)}{a}}; \quad \frac{(a+b\varphi)^{-\lambda^0/b}}{(a+b\varphi_s)^{-\lambda^0/b}} = e^{-\frac{\lambda^0(\varphi-\varphi_s)}{a}}. \quad (131)$$

Wegen Gleichung (104) erhalten wir nun

$$\begin{aligned} X &= \frac{\sqrt{h}}{\kappa_X} \frac{\sqrt{a+b\varphi}}{\sqrt{\sin\varphi}} e^{-\frac{\lambda^0(\varphi_i-\varphi)}{a}} \left\{ C_1 \left[ X^{(I)} \cos\left(\frac{\lambda^0}{b}\ln\frac{a+b\varphi}{a+b\varphi_i}\right) - X^{(II)} \sin\left(\frac{\lambda^0}{b}\ln\frac{a+b\varphi}{a+b\varphi_i}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + C_2 \left[ X^{(I)} \sin\left(\frac{\lambda^0}{b}\ln\frac{a+b\varphi}{a+b\varphi_i}\right) + X^{(II)} \cos\left(\frac{\lambda^0}{b}\ln\frac{a+b\varphi}{a+b\varphi_i}\right) \right] \right\} \quad (132) \\ &+ \frac{\sqrt{h}}{\kappa_X} \frac{\sqrt{a+b\varphi}}{\sqrt{\sin\varphi}} e^{-\frac{\lambda^0(\varphi-\varphi_s)}{a}} \left\{ C_3 \left[ X^{(IV)} \cos\left(\frac{\lambda^0}{b}\ln\frac{a+b\varphi}{a+b\varphi_s}\right) - X^{(III)} \sin\left(\frac{\lambda^0}{b}\ln\frac{a+b\varphi}{a+b\varphi_s}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + C_4 \left[ X^{(IV)} \sin\left(\frac{\lambda^0}{b}\ln\frac{a+b\varphi}{a+b\varphi_s}\right) + X^{(III)} \cos\left(\frac{\lambda^0}{b}\ln\frac{a+b\varphi}{a+b\varphi_s}\right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Falls die Schale konstante Stärke  $h$  besitzt, so ist  $h^*=1$  und somit  $a=1$ ,  $b=0$ . Für diesen Fall erhalten wir:

$$\begin{aligned} T_0 &= 1, \\ T_1 &= -\frac{5\varphi+3\operatorname{ctg}\varphi}{8} = -\gamma(\varphi), \quad (133) \\ T_2 &= \frac{[\gamma(\varphi)]^2}{2} - \frac{3}{16}\operatorname{ctg}^2\varphi \\ &\dots \end{aligned}$$

mit  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = -\frac{1}{8}$  und damit wird

$$\begin{aligned} X = & \frac{\sqrt{h}}{\kappa_X} \frac{e^{-\lambda^0(\varphi_i-\varphi)}}{\sqrt{\sin \varphi}} \{C_1[X^{(I)} \cos \lambda^0(\varphi_i-\varphi) + X^{(II)} \sin \lambda^0(\varphi_i-\varphi)] \\ & + C_2[X^{(II)} \cos \lambda^0(\varphi_i-\varphi) - X^{(I)} \sin \lambda^0(\varphi_i-\varphi)]\} \\ & + \frac{\sqrt{h}}{\kappa_X} \frac{e^{-\lambda^0(\varphi-\varphi_s)}}{\sqrt{\sin \varphi}} \{C_3[X^{(IV)} \cos \lambda^0(\varphi-\varphi_s) - X^{(III)} \sin \lambda^0(\varphi-\varphi_s)] \\ & + C_4[X^{(III)} \cos \lambda^0(\varphi-\varphi_s) + X^{(IV)} \sin \lambda^0(\varphi-\varphi_s)]\}. \end{aligned} \quad (134)$$

Für den Spezialfall einer abgeflachten Schale mit konstanter Stärke erhalten wir aus Gleichung (117)

$$\vartheta(\varphi) = -\frac{3}{4\varphi^2} \quad (135)$$

und wegen Gleichung (53) und (66)

$$\begin{aligned} T_0 &= 1, \\ T_1 &= \frac{3}{8} \int \frac{d\varphi}{\varphi^2} = -\frac{3}{8\varphi}, \\ T_2 &= -\frac{1}{2} \frac{3}{8\varphi^2} - \frac{1}{2} \int \frac{3}{4\varphi^2} \frac{3}{8\varphi} d\varphi = -\frac{15}{128\varphi^2}, \\ &\dots \end{aligned} \quad (136)$$

so daß nun die Werte für die Größen  $X^{(I)}$ ,  $X^{(II)}$ ,  $X^{(III)}$  und  $X^{(IV)}$  bestimmt werden können.

### B. Mit $\Phi = \Phi(\varphi)$ geometrisch definierte Schalen

Die Näherungsausdrücke der Gleichungen (107) bis (113) für die Kräfte, Drehungen und Verschiebungen sind hier besonders nützlich wegen ihrer einfachen Anwendung. Ist nämlich die Funktion

$$\Phi = \Phi(\varphi) \quad (137)$$

bekannt, erhalten wir aus Gleichung (124) sofort die Ausdrücke für  $\lambda\psi_i$  und  $\lambda\psi_s$ . Nun lassen sich die der betrachteten Funktion  $\Phi$  entsprechenden Ausdrücke für die Kräfte, Drehungen und Verschiebungen durch die Gleichungen (107) bis (124) leicht anschreiben.

Nehmen wir zum Beispiel an, daß

$$\Phi^2 = \frac{a+b\varphi}{\sqrt{\alpha^0}}, \quad (138)$$

wobei  $a$  und  $b$  Konstanten sind, so wird wegen Gleichung (56)

$$\sqrt{\frac{\alpha h^*}{R_1^*}} = a + b\varphi. \quad (139)$$

Aus den Gleichungen (124) folgt

$$\lambda \psi_i = -\frac{\lambda^0}{b} \ln \frac{a+b\varphi}{a+b\varphi_i}; \quad \lambda \psi_s = \frac{\lambda^0}{b} \ln \frac{a+b\varphi}{a+b\varphi_s} \quad (140)$$

mit

$$\lambda^0 = \lambda \sqrt{\alpha^0} = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \sqrt{R_1^0}}{\sqrt{h^0}}. \quad (141)$$

Falls die Bedingung

$$\left| \frac{b}{a} \varphi \right| < 1 \quad (142)$$

erfüllt ist, so erhalten wir

$$e^{-\lambda \psi_i} = e^{-\frac{\lambda^0(\varphi_i - \varphi)}{a}}; \quad e^{-\lambda \psi_s} = e^{-\frac{\lambda^0(\varphi - \varphi_s)}{a}}. \quad (143)$$

Bezeichnen wir noch, wie im vorhergehenden Fall, die Konstanten mit  $C_i$ ,  $C_s$ ,  $\gamma_i$ ,  $\gamma_s$ , so erhalten wir

$$U = \frac{2 \sqrt{a+b\varphi} \sqrt{h}}{\sqrt[4]{\alpha^0} \sqrt{\alpha \sin \varphi}} \left[ e^{-\frac{\lambda^0(\varphi_i - \varphi)}{a}} C_i \cos \left( \frac{\lambda^0}{b} \ln \frac{a+b\varphi}{a+b\varphi_i} + \gamma_i \right) + e^{-\frac{\lambda^0(\varphi - \varphi_s)}{a}} C_s \cos \left( \frac{\lambda^0}{b} \ln \frac{a+b\varphi}{a+b\varphi_s} + \gamma_s \right) \right], \quad (144)$$

$$V = -\frac{4 \lambda^{02} \alpha \sqrt{h} \sqrt{a+b\varphi}}{\sqrt[4]{\alpha^0} R_1 E h (a+b\varphi)^2 \sqrt{\alpha \sin \varphi}} \left[ e^{-\frac{\lambda^0(\varphi_i - \varphi)}{a}} C_i \sin \left( \frac{\lambda^0}{b} \ln \frac{a+b\varphi}{a+b\varphi_i} + \gamma_i \right) - e^{-\frac{\lambda^0(\varphi - \varphi_s)}{a}} C_s \sin \left( \frac{\lambda^0}{b} \ln \frac{a+b\varphi}{a+b\varphi_s} + \gamma_s \right) \right], \quad (145)$$

$$Q_\varphi = \frac{U}{R_2}, \quad (146)$$

$$N_\varphi = -Q_\varphi \operatorname{ctg} \varphi, \quad (147)$$

$$N_\vartheta = \frac{2 \sqrt{2} \lambda^0 \sqrt{h}}{\sqrt[4]{\alpha^0} R_1 \sqrt{a+b\varphi} \sqrt{\alpha \sin \varphi}} \left[ e^{-\frac{\lambda^0(\varphi_i - \varphi)}{a}} C_i \sin \left( \frac{\lambda^0}{b} \ln \frac{a+b\varphi}{a+b\varphi_i} + \gamma_i - \frac{\pi}{4} \right) + e^{-\frac{\lambda^0(\varphi - \varphi_s)}{a}} C_s \sin \left( \frac{\lambda^0}{b} \ln \frac{a+b\varphi}{a+b\varphi_s} + \gamma_s + \frac{\pi}{4} \right) \right], \quad (148)$$

$$M_\varphi = \frac{\sqrt{2} (a+b\varphi) \sqrt{a+b\varphi} \sqrt{h}}{\sqrt[4]{\alpha^0} \lambda^0 \alpha \sqrt{\alpha \sin \varphi}} \left[ e^{-\frac{\lambda^0(\varphi_i - \varphi)}{a}} C_i \cos \left( \frac{\lambda^0}{b} \ln \frac{a+b\varphi}{a+b\varphi_i} + \gamma_i - \frac{\pi}{4} \right) - e^{-\frac{\lambda^0(\varphi - \varphi_s)}{a}} C_s \cos \left( \frac{\lambda^0}{b} \ln \frac{a+b\varphi}{a+b\varphi_s} + \gamma_s + \frac{\pi}{4} \right) \right], \quad (149)$$

$$M = \nu M_\varphi. \quad (150)$$

Für den Fall  $\alpha = \alpha^0 = 1$ ,  $R_1^* = 1$ ,  $R_1 = R_2 = R$ , erhalten wir eine Kugelschale mit nach Gleichung (126) veränderlicher Stärke.

Für den Fall  $a = 1$ ,  $b = 0$  erhalten wir noch die Kugelschale mit konstanter Stärke. Die Ausdrücke, die wir dann erhalten, sind identisch mit den von GECKELER hergeleiteten.

*C. Schalen mit einer Mittelfläche zweiten Grades*

Im folgenden betrachten wir die Schalen, deren Mittelfläche durch die Drehung einer Kurve zweiten Grades um ihre eigene Symmetrieachse erzeugt werden. Für diesen Fall sind die Hauptkrümmungsradien

$$R_1 = \frac{R_0}{(1 + \gamma \sin^2 \varphi)^{3/2}}; \quad R_2 = \frac{R_0}{(1 + \gamma \sin^2 \varphi)^{1/2}} \quad (151)$$

mit

$\gamma = 0$  für Kugelschalen,

$\gamma = -1$  für parabolische Schalen,

$\gamma > -1$  für elliptische Schalen,

$\gamma < -1$  für hyperbolische Schalen.

Der Parameter  $R_0$  ist gleich dem Wert des Krümmungsradius  $R_1 = R_2$  im Zenith der Schale, d. h. für  $\varphi = 0$ .

Nehmen wir einfachheitshalber an, daß  $h$  konstant ist, dann wird

$$\frac{\Phi \sqrt{h}}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\sqrt[4]{\alpha R_1}}{\delta^0}, \quad (152)$$

wobei  $\delta^0$  eine Konstante bedeutet

$$\delta^0 = \sqrt[4]{\frac{\alpha^0 h^0}{R_1^0}} \frac{1}{\sqrt[4]{R_0 h^3}}. \quad (153)$$

Beachten wir noch, daß

$$\alpha = \frac{R_2}{R_1} = (1 + \gamma \sin^2 \varphi), \quad (154)$$

so wird

$$\alpha R_1 = \frac{R_0}{(1 + \gamma \sin^2 \varphi)^{1/2}} \quad (155)$$

und

$$\frac{R_1}{\alpha} = \frac{R_0}{(1 + \gamma \sin^2 \varphi)^2 (1 + \gamma \sin^2 \varphi)^{1/2}}. \quad (156)$$

Somit wird

$$\frac{\Phi \sqrt{h}}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\delta^0 (1 + \gamma \sin^2 \varphi)^{1/8}} \quad (157)$$

und

$$\frac{\Phi \sqrt{h}}{R_2 \sqrt{\alpha}} = \frac{(1 + \gamma \sin^2 \varphi)^{1/8} (1 + \gamma \sin^2 \varphi)^{1/4}}{\delta^0 R_0}. \quad (158)$$

Aus den Gleichungen (57), (54) und (70) ergibt sich noch

$$\frac{1}{\Phi^2} = \sqrt{\frac{\chi^0}{h}} \sqrt{\frac{R_1}{\alpha}} \quad (159)$$

und aus den Gleichungen (99) und (102)

$$\lambda \psi_i = \frac{\sqrt[4]{3(1 - \nu^2)} \sqrt{R_0}}{\sqrt{h}} \int_{\varphi}^{\varphi_i} \frac{d\varphi}{(1 + \gamma \sin^2 \varphi)^{5/4}}; \quad \lambda \psi_s = \frac{\sqrt[4]{3(1 - \nu^2)} \sqrt{R_0}}{\sqrt{h}} \int_{\varphi_s}^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + \gamma \sin^2 \varphi)^{5/4}}. \quad (160)$$

Setzen wir noch folgende Abkürzungen ein

$$\lambda^* = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \sqrt{R_0}}{\sqrt{h}}, \quad (161)$$

$$\psi_i^* = \int_{\varphi}^{\varphi_i} \frac{d\varphi}{(1+\gamma \sin^2 \varphi)^{5/4}}; \quad \psi_s^* = \int_{\varphi_s}^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+\gamma \sin^2 \varphi)^{5/4}}, \quad (162)$$

$$C_i^* = \frac{C_i}{\delta^0}; \quad C_s^* = \frac{C_s}{\delta^0}, \quad (163)$$

so erhalten wir aus den Gleichungen (107) bis (113) durch einfache Umformungen

$$U = \frac{2}{(1+\gamma \sin^2 \varphi)^{1/8} \sqrt{\sin \varphi}} [e^{-\lambda^* \psi_i^*} C_i^* \cos(\lambda^* \psi_i^* + \gamma_i) + e^{-\lambda^* \psi_s^*} C_s^* \cos(\lambda^* \psi_s^* + \gamma_s)], \quad (164)$$

$$V = \frac{4 \lambda^{*2}}{E h R_0} \frac{1}{(1+\gamma \sin^2 \varphi)^{1/8} \sqrt{\sin \varphi}} [e^{-\lambda^* \psi_i^*} C_i^* \sin(\lambda^* \psi_i^* + \gamma_i) + e^{-\lambda^* \psi_s^*} C_s^* \sin(\lambda^* \psi_s^* + \gamma_s)], \quad (165)$$

$$Q_\varphi = \frac{2}{R_0} \frac{(1+\gamma \sin^2 \varphi)^{1/8} (1+\gamma \sin^2 \varphi)^{1/4}}{\sqrt{\sin \varphi}} [e^{-\lambda^* \psi_i^*} C_i^* \cos(\lambda^* \psi_i^* + \gamma_i) + e^{-\lambda^* \psi_s^*} C_s^* \cos(\lambda^* \psi_s^* + \gamma_s)], \quad (166)$$

$$N_\varphi = -Q_\varphi \operatorname{ctg} \varphi \quad (167)$$

$$N_\vartheta = -\frac{2\sqrt{2}\lambda^*}{R_0} \frac{(1+\gamma \sin^2 \varphi)^{1/8}}{\sqrt{\sin \varphi}} \left[ e^{-\lambda^* \psi_i^*} C_i^* \sin\left(\lambda^* \psi_i^* + \gamma_i + \frac{\pi}{4}\right) - e^{-\lambda^* \psi_s^*} C_s^* \sin\left(\lambda^* \psi_s^* + \gamma_s + \frac{\pi}{4}\right) \right], \quad (168)$$

$$M_\varphi = \frac{\sqrt{2}}{\lambda^*} \frac{(1+\gamma \sin^2 \varphi)^{1/8}}{\sqrt{\sin \varphi}} \left[ e^{-\lambda^* \psi_i^*} C_i^* \cos\left(\lambda^* \psi_i^* + \gamma_i + \frac{\pi}{4}\right) - e^{-\lambda^* \psi_s^*} C_s^* \cos\left(\lambda^* \psi_s^* + \gamma_s + \frac{\pi}{4}\right) \right], \quad (169)$$

$$M_\vartheta = -\nu M_\varphi, \quad (170)$$

$$\xi = -\frac{\sin \varphi}{E h (1+\gamma \sin^2 \varphi)^{1/8} \sqrt{\sin \varphi}} \left\{ e^{-\lambda^* \psi_i^*} C_i^* \left[ \frac{2\sqrt{2}\lambda^*}{(1+\gamma \sin^2 \varphi)^{1/4}} \sin\left(\lambda^* \psi_i^* + \gamma_i + \frac{\pi}{4}\right) - 2\nu \operatorname{ctg} \varphi \cos(\lambda^* \psi_i^* + \gamma_i) \right] \right. \\ \left. - e^{-\lambda^* \psi_s^*} C_s^* \left[ \frac{2\sqrt{2}\lambda^*}{(1+\gamma \sin^2 \varphi)^{1/4}} \sin\left(\lambda^* \psi_s^* + \gamma_s + \frac{\pi}{4}\right) + 2\nu \operatorname{ctg} \varphi \cos(\lambda^* \psi_s^* + \gamma_s) \right] \right\}. \quad (171)$$

Sind einmal die Konstanten bestimmt, so erlauben diese Ausdrücke die Randstörungen zu bestimmen, die dem Membranspannungszustand zu überlagern sind. Um die Berechnung noch zu vereinfachen, können wir berücksichtigen, daß die Randstörung sich i. a. auf eine kleine Randzone  $\Delta\varphi$  beschränkt, so daß auch angenommen werden kann

$$\sin^2\varphi \approx \sin^2\varphi_i; \quad \sin^2\varphi \approx \sin^2\varphi_s. \quad (172)$$

Unter diesen Umständen ist zulässig, für den unteren Rand bzw. für den oberen Rand folgende Näherungen einzuführen

$$1 + \gamma \sin^2\varphi \approx 1 + \gamma \sin^2\varphi_i, \quad (173)$$

$$1 + \gamma \sin^2\varphi \approx 1 + \gamma \sin^2\varphi_s. \quad (174)$$

Somit wird

$$\lambda^* \psi_i^* = \lambda^* \frac{\varphi_i - \varphi}{(1 + \gamma \sin^2\varphi_i)^{5/4}}; \quad \lambda^* \psi_s^* = \lambda^* \frac{\varphi - \varphi_s}{(1 + \gamma \sin^2\varphi_s)^{5/4}}. \quad (175)$$

Mit diesen Annahmen gestaltet sich die Berechnung besonders einfach.

## Literatur

- BLUMENTHAL, O. Über die asymptotische Integration von Differentialgleichungen mit Anwendung auf die Berechnung von Spannungen in Kugelschalen, Proc. of the Fifth Int. Congress of Mathematicians, 1912.
- FLÜGGE, W. Stresses in shells, Berlin, 1960.
- GRAVINA, P. B. J. Theorie und Berechnung der Rotationsschalen, Berlin, 1961.
- GRAVINA, P. B. J. Sul calcolo della struttura di superficie sferica ribassata, Giornale del Genio Civile, Roma, 1962.
- HILDEBRAND, F. B. On asymptotic integration in shell theory, Proc. of symposia in ap. math., vol. III, New York, 1950.
- JEFFREYS, H. Asymptotic approximations, Oxford, 1962.
- REISSNER, E. On the theory of thin elastic shells, H. Reissner Anniversary Volume, Ann Arbor, 1949.

## Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit gibt ein allgemeines asymptotisches Verfahren zur Berechnung der Randstörungen von Rotationsschalen beliebiger Form mit veränderlicher Wandstärke unter radialsymmetrischen Belastungen an. Aus den Grundgleichungen von MEISSNER werden zwei vereinfachte Differentialgleichungen abgeleitet, die dank ihrer hohen Parameterwerte durch asymptotische Integrationsverfahren gelöst werden. Anschließend werden die allgemeinen Ausdrücke der Reihen wie der entsprechenden Koeffizienten für die verschiedenen Größen abgeleitet sowie geeignete Vereinfachungen für die Berechnung angegeben. Die Theorie der abgeflachten Schalen wird als Sonderfall der allgemeinen Theorie dargestellt. Anschließend werden die allgemeinen

Lösungen verwendet für die Untersuchung von Kugelschalen von veränderlicher und konstanter Wandstärke, von Schalen deren geometrische Merkmale bestimmten Variationsgesetzen genügen und von Schalen deren Mittelfläche durch die Rotation einer Kurve zweiten Grades um die Symmetriearchse erzeugt wird.

### Summary

The author presents a general asymptotic method for the calculation of the marginal disturbances of shells of rotation of any shape and of variable thickness, subjected to loads exhibiting radial symmetry. From the basic equations of MEISSNER, he derives two simplified differential equations which, owing to their high parametric values, are solved by methods of asymptotic integration. The author then obtains the general expressions of the series and those of the corresponding coefficients for the various cases and he indicates the appropriate simplifications for the calculation. The theory of shallow shells is derived, as a special case, from the general theory. The general solutions are finally applied to the analysis of spherical shells of variable and constant thickness, of shells whose geometrical characteristics obey certain laws of variation, and of shells whose median surface is generated by the rotation of a second-degree curve around the axis of symmetry.

### Résumé

L'auteur présente un procédé asymptotique général pour le calcul des perturbations marginales des voiles de rotation de forme quelconque et d'épaisseur variable, soumis à des charges présentant une symétrie radiale. Des équations fondamentales de MEISSNER, il déduit deux équations différentielles simplifiées qui, grâce à leurs valeurs paramétriques élevées, sont résolues par des procédés d'intégration asymptotique. L'auteur obtient ensuite les expressions générales des séries et celles des coefficients correspondants pour les différents cas et il indique les simplifications appropriées pour le calcul. La théorie des voiles de faible courbure est déduite comme un cas spécial de la théorie générale. Les solutions générales sont enfin appliquées à l'analyse des coques sphériques à épaisseur variable et constante, des voiles dont les caractéristiques géométriques obéissent à certaines lois de variation et des voiles dont la surface médiane est engendrée par la rotation d'une courbe du deuxième degré autour de l'axe de symétrie.