

Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 23 (1963)

Artikel: Lösung des nichtlinearen Problems bei Wanddeformationen
Autor: Djubek, Jozef
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-19396>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 31.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Lösung des nichtlinearen Problems bei Wanddeformationen

Solution of the Non-linear Problem of the Deformation of Webs

Solution des problèmes non-linéaires concernant les déformations des âmes de poutres

JOZEF DJUBEK

Doz.-Ing., C. Sc., wissenschaftlicher Mitarbeiter der Slowakischen Akademie der Wissenschaften, Bratislava

1. Einleitung

Umfangreiche Tragversuche an großen dünnwandigen Vollwandträgern [1] haben bewiesen, daß die Tragfähigkeit der Stege vollwandiger Elemente nach der linearen Beultheorie nicht bestimmt werden kann. Anstatt der linearen Stabilitätstheorie, die nur kleine Waddurchbiegungen im Vergleich zur Wanddicke voraussetzt, müssen wir die als die statische Theorie Kármáns bekannte Theorie der großen Durchbiegungen anwenden. An Hand dieser Theorie wurden bisher auch zahlreiche Randaufgaben gelöst, insbesondere bei einigen Konstruktionen im Schiffsbau und beim Bau von Flugzeugen [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13].

Eine besondere Funktion fällt dem die dünne Wand aussteifenden Gerüst zu (bei Trägern, den Flanschen und Queraussteifungen). Damit die Querschnittsform des verformten Elementes erhalten bleibt, ist es notwendig, daß die Versteifungen eine solche Biegesteifigkeit besitzen, damit sie praktisch auch im überkritischen Bereich als steife Stützen wirken¹⁾. Außerdem müssen die Flanschen genügend biegesteif in Richtung der Wandebene sein, damit sie den Membranwirkungen widerstehen können. Die laufend entworfenen Träger entsprechen dieser Forderung²⁾.

¹⁾ Die Werte der auf diese Art definierten optimalen Versteifungen wurden experimentell ermittelt [2].

²⁾ Auf Grund der Prüfuntersuchungen des Verfassers kann für ein Seitenverhältnis $\alpha = 1,0$ als minimale Gurtsteifigkeit $\frac{J_1}{a^3 t} = 0,00002$ empfohlen werden, wo J_1 das Trägheitsmoment des Flansches zu der senkrecht zur Wandebene liegenden Schwerachse bezeichnet [3].

Bei der Erfüllung dieser Bedingungen werden die Wandverformungen in hohem Maße von der Normalsteifigkeit des Gerüsts, das ein weiteres Anwachsen der Durchbiegungen der gebeulten Wand stabilisiert, gleichzeitig jedoch selbst durch Zusatzdruckkräfte beansprucht ist, abhängen.

Im vorliegenden Beitrag wird der Verformungszustand dünner Wände, die in der Mittelfläche durch eine Kombination von Druck, Biegung und Schub beansprucht und die am Rand mit elastisch druckfesten Versteifungen versehen sind, beschrieben (Fig. 1). Das formulierte Problem wird mit Hilfe der

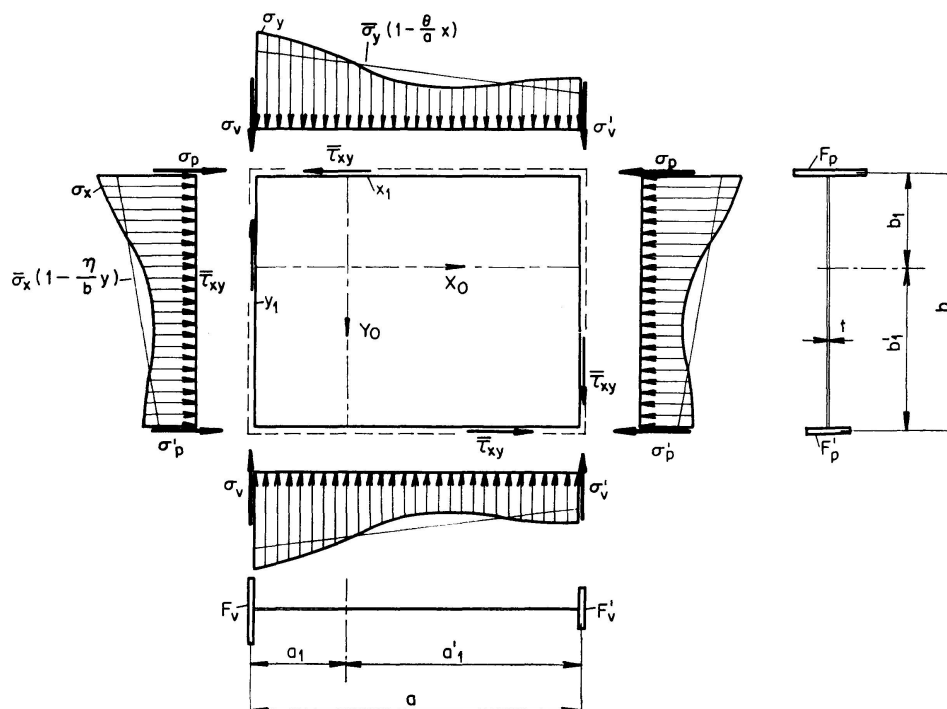


Fig. 1. Ausmaße und das Belastungsschema der versteiften Wand.

Galerkinschen Methode gelöst. Das System der kubischen Gleichungen, zu dem diese Lösung führt, wird mittels der Newton-Raphson-Methode, die sich bei der Anwendung automatischer Rechengерäte als die geeignetste erwiesen hat, berechnet.

Mit Rücksicht auf den weiten Bereich dieser Aufgabe wollen wir uns hier auf die theoretische Lösung eines Falles von Auflagerbedingungen (eines an den Rändern einfach gelagerten Steges), unter Anführung einiger numerischer Ergebnisse, beschränken. Die Lösung dieses Problems wird in der vorbereiteten Publikation ausführlicher behandelt werden.

2. Die Grundgleichungen

Wir betrachten eine in der Mittelfläche beanspruchte, anfangs gekrümmte, dünne Wand. Der Verformungszustand der Wand kann mittels eines Systems nichtlinearer partieller Differentialgleichungen beschrieben werden:

$$\Delta \Delta w = \frac{t}{D} [\Phi_{yy}(w+w_0)_{xx} + \Phi_{xx}(w+w_0)_{yy} - 2\Phi_{xy}(w+w_0)_{xy}], \quad (2.1)$$

$$\Delta \Delta \Phi = E [w_{xy}^2 - w_{xx} w_{yy} + 2 w_{xy} w_{0xy} - w_{0xx} w_{yy} - w_{xx} w_{0yy}]. \quad (2.2)$$

Die Lastbedingungen werden in der folgenden Form definiert:

$$\int_0^a \frac{\partial u}{\partial x} dx = C_1 y + C_2, \quad (2.3)$$

$$\int_0^b \frac{\partial v}{\partial y} dy = C_3 x + C_4, \quad (2.4)$$

$$\Phi_{xy} \Big|_{\substack{x=0, a \\ y=0, b}} = -\bar{\tau}, \quad (2.5)$$

wo C_1, C_2, C_3, C_4 Konstanten sind, deren Werte vom Maß der Zusammendrückbarkeit des Versteifungsgerüsts abhängig sind.

Die Gleichungen (2.2) und (2.3) drücken die integrale Bedingung der Erhaltung der Ebene des Wandquerschnitts bei einer gegenseitigen Verschiebung der Ränder in der Richtung x , bzw. y aus.

Wir setzen voraus, daß die Wand an den Rändern einfach gelagert ist.

Die Durchbiegungsfunktion $w(x, y)$ und die Funktion der Anfangskrümmung $w_0(x, y)$ werden so gewählt, damit sie die Auflagerbedingungen der Wand erfüllen.

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \sum_m \sum_n w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\ w_0(x, y) &= \sum_m \sum_n w_{0mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Dann kann die Spannungsfunktion Φ sofort bestimmt werden. Wir setzen (2.6) in die Gleichung (2.2) ein, und diese nimmt dann die folgende Form an:

$$\begin{aligned} \Delta \Delta \Phi &= \frac{E\pi^4}{4a^2b^2} \sum_m \sum_n \sum_r \sum_s (w_{mn} w_{rs} + w_{mn} w_{0rs} + w_{rs} w_{0mn}) \\ &\cdot \left[m s (n r - m s) \cos \frac{m+r}{a} \pi x \cos \frac{n+s}{b} \pi y \right. \\ &+ m s (n r - m s) \cos \frac{m-r}{a} \pi x \cos \frac{n-s}{b} \pi y \\ &+ m s (n r + m s) \cos \frac{m+r}{a} \pi x \cos \frac{n-s}{b} \pi y \\ &\left. + m s (n r + m s) \cos \frac{m-r}{a} \pi x \cos \frac{n+s}{b} \pi y \right]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Als partikuläre Lösung der Gleichung bekommen wir:

$$\Phi_1 = \frac{E \alpha^2}{4} \sum_m \sum_n \sum_r \sum_s (w_{mn} w_{rs} + w_{mn} w_{0rs} + w_{rs} w_{0mn}) \sum_{i=1}^4 g_i \cos \frac{m \pm r}{a} \pi x \cos \frac{n \pm s}{b} \pi y$$

$$(i = 1, 2, 3, 4),$$

$$\text{wo} \quad g_1 = \frac{m s (n r - m s)}{[(m+r)^2 + \alpha^2 (n+s)^2]^2}, \quad g_2 = \frac{m s (n r - m s)}{[(m-r)^2 + \alpha^2 (n-s)^2]^2},$$

$$g_3 = \frac{m s (n r + m s)}{[(m+r)^2 + \alpha^2 (n-s)^2]^2}, \quad g_4 = \frac{m s (n r + m s)}{[(m-r)^2 + \alpha^2 (n+s)^2]^2}. \quad (2.8)$$

Die Parameter $m \pm r$, $n \pm s$ sind entweder die Summen oder die Differenzen wie in den Nennern der dazugehörigen g_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

Wenn wir die Spannungsfunktion in der Form

$$\Phi = \Phi_1 - \frac{\bar{\sigma}_y}{2} x^2 \left(1 - \frac{\theta}{3a} x\right) - \frac{\bar{\sigma}_x}{2} y^2 \left(1 - \frac{\eta}{3b} y\right) - \tau x y \quad (2.9)$$

betrachten, können wir uns leicht überzeugen, daß diese Funktion die gegebenen Randbedingungen erfüllt und eine vollkommene Lösung der Gleichung (2.7) darstellt.

3. Lösung der Gleichung (2.1)

Da die Funktionen $w(x, y)$, $w_0(x, y)$ wie auch die Funktion der Spannungen Φ die betrachteten Auflager- und Lastbedingungen erfüllen, wird die Methode, mittels welcher die übriggebliebene erste Gleichung des Systems partieller Differentialgleichungen integriert wird, die Methode Galerkins sein. Bei der gegebenen Aufgabe wird die Galerkinsche Gleichung die folgende Form annehmen:

$$\int_0^a \int_0^b X \sin \frac{p \pi x}{a} \sin \frac{q \pi y}{b} dx dy = 0, \quad (p = 1, 2, 3 \dots, q = 1, 2, 3 \dots), \quad (3.1)$$

$$\text{wo} \quad X = \frac{D}{t} \Delta \Delta w - \Phi_{yy} (w + w_0)_{xx} - \Phi_{xx} (w + w_0)_{yy} + 2 \Phi_{xy} (w + w_0)_{xy}.$$

Nach der Substitution der erforderlichen Derivationen der Funktionen $w(x, y)$, $w_0(x, y)$, Φ und nach Integration geht die Gleichung (3.1) in das System algebraischer kubischer Gleichungen für w_{mn}^* von der Form

$$\sum_m \sum_n \sum_r \sum_s \sum_k \sum_l (w_{mn}^* w_{rs}^* + w_{mn}^* w_{0rs}^* + w_{rs}^* w_{0mn}^*) (w_{kl}^* + w_{0kl}^*)$$

$$\cdot \sum_{i=1}^4 g_i \{ [k^2 (n \pm s)^2 + l^2 (m \pm r)^2] J_p(m \pm r, k) K_q(n \pm s, l)$$

$$- 2 k l [(m \pm r)(n \pm s) J_p(k, m \pm r) K_q(l, n \pm s)] \} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{12 \alpha^2 (1 - \mu^2)} \left\{ - (p^2 + \alpha^2 q^2)^2 w_{pq}^* + k_x \left(1 - \frac{\eta}{2} \right) \alpha^2 p^2 (w_{pq}^* + w_{0pq}^*) \right. \\
& \quad \left. + k_y \left(1 - \frac{\theta}{2} \right) \alpha^4 q^2 (w_{pq}^* + w_{0pq}^*) \right. \\
& \quad - 4 k_x \eta \left(\frac{\alpha p}{\pi} \right)^2 \sum_l (w_{pl}^* + w_{0pl}^*) \frac{l q}{(l^2 - q^2)^2} [(-1)^{l+q} - 1] \\
& \quad - 4 k_y \theta \left(\frac{\alpha^2 q}{\pi} \right)^2 \sum_k (w_{kq}^* + w_{0kq}^*) \frac{k p}{(k^2 - p^2)^2} [(-1)^{k+p} - 1] \\
& \quad \left. + 8 k_{xy} \frac{\alpha^3}{\pi^2} \sum_k \sum_l (w_{kl}^* + w_{0kl}^*) \frac{k l p q}{(p^2 - k^2)(q^2 - l^2)} [(-1)^{k+p} - 1] [(-1)^{l+q} - 1] \right\} = 0
\end{aligned} \tag{3.2}$$

über, wo (r, s) , (k, l) , (p, q) dieselbe Zahlenmenge wie (m, n) durchlaufen. Als k_x , k_y , k_{xy} werden die Koeffizienten der äußeren Wandbelastung bezeichnet, d. h.

$$k_x = \frac{\bar{\sigma}_x}{\sigma_e}, \quad k_y = \frac{\bar{\sigma}_y}{\sigma_e}, \quad k_{xy} = \frac{\bar{\tau}}{\sigma_e}, \quad \text{wo} \quad \sigma_e = \frac{\pi^2 E t^2}{12 (1 - \mu^2) b^2}.$$

Die in Klammern angeführten Parameter $m \pm r$, $n \pm s$ sind wieder die Summen oder die Differenzen wie in den Nennern der dazugehörigen g_i (Gleichung (2.8)).

Durch J_p , K_q sind folgende Integrale bezeichnet:

$$\begin{aligned}
J_p &= \frac{1}{4a} \int_0^a \left[\cos(m^* + k^* - p) \frac{\pi x}{a} - \cos(m^* + k^* + p) \frac{\pi x}{a} \right. \\
&\quad \left. + \cos(k^* - m^* - p) \frac{\pi x}{a} - \cos(k^* - m^* + p) \frac{\pi x}{a} \right] dx, \\
K_q &= \frac{1}{4b} \int_0^b \left[\cos(m^* + k^* - q) \frac{\pi y}{b} - \cos(m^* + k^* + q) \frac{\pi y}{b} \right. \\
&\quad \left. + \cos(k^* - m^* - q) \frac{\pi y}{b} - \cos(k^* - m^* + q) \frac{\pi y}{b} \right] dy,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

wobei m^* der erste Parameter des Integrals, k^* der zweite Parameter des Integrals sind. Z. B. im ersten Summanden in den Klammern $\{\dots\}$ befinden sich die Integrale $J_p(m+r, k)$, $K_q(n+s, l)$. Für diesen Summanden gilt im Integral J_p $m^* = m+r$, $k^* = k$ und im Integral K_q $m^* = n+s$, $k^* = l$. Im letzten Summanden in den Klammern befinden sich die Integrale $J_p(k, m-r)$, $K_q(l, n+s)$. In diesem Fall wird im Integral J_p $m^* = k$, $k^* = m-r$ und im Integral K_q $m^* = l$, $k^* = n+s$.

Das Integral J_p oder K_q (3.3) ist verschieden von Null, wenn wenigstens eines der Argumente der Kosinusfunktionen Null ist, und kann nur drei Formen annehmen:

$$0, \quad \pm \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{2}.$$

Die Berechnung des Ausdrucks $\sum_{i=1}^4 g_i \{ \dots \}$ der Gleichung (3.2) kann mit Hilfe eines automatischen Rechengertes gut durchgeführt werden. Wir haben dabei die Maschine Ural I. verwendet. Diesen Ergebnissen nach wurden durch das Summieren der gleichen Glieder die Koeffizienten der nichtlinearen Teile der kubischen Gleichungen (3.2) zusammengestellt. Die Gesamtform der algebraischen kubischen Gleichungen, wenn acht Glieder der Reihe $w_{11}, w_{12}, w_{13}, w_{21}, w_{22}, w_{23}, w_{31}, w_{33}$ in Betracht gezogen werden (bei $\alpha = 1$ und $w_0 = 0$), sind auf der Tafel I angeführt.

Bei einem Vergleich der Koeffizienten der algebraischen Gleichungen kann man sehen, daß eine beliebige Gleichung als

$$\frac{\partial L}{\partial w_{mn}} = 0$$

geschrieben werden kann, d. h. sie minimalisiert das Funktional L , dessen Form leicht zu ermitteln ist.

Es kann bewiesen werden, daß die Methoden von Galerkin und Ritz in diesem Falle äquivalent sind.

In Übereinstimmung mit Fig. 1 enthält jede Gleichung Belastungsglieder

$$\begin{aligned} & k_x \left(1 - \frac{\eta}{2}\right), \quad k_x \eta, \quad k_y \left(1 - \frac{\theta}{2}\right), \quad k_y \theta, \\ \text{in denen} \quad & \eta = \frac{k_x - k'_x}{k_x} = \frac{\bar{\sigma}_x - \bar{\sigma}'_x}{\bar{\sigma}_x}, \quad \theta = \frac{k_y - k'_y}{k_y} = \frac{\bar{\sigma}_y - \bar{\sigma}'_y}{\bar{\sigma}_y} \end{aligned} \quad (3.3)$$

bezeichnen.

Nur in dem Falle, wenn die Randversteifungen eine Null-Fläche haben, drücken die Belastungsglieder direkt die Außenbeanspruchung des Querschnitts aus.

In einem allgemeinen Fall, wo die Wand an den Rändern versteift ist, wird ihre äußere Beanspruchung $\bar{\sigma}_x (1 - \frac{\eta}{b} y)$, $\bar{\sigma}_y (1 - \frac{\theta}{a} x)$ im überkritischen Bereich auch von dem Maß der Zusammendrückbarkeit der Versteifungen abhängig. Dabei ändern sich im Verhältnis zur Wandbelastung nicht nur die Spannungen $\bar{\sigma}_x$ und $\bar{\sigma}_y$, sondern auch die Parameter η und θ .

4. Beziehungen zwischen den Kräften in der Mittelfläche und den axialen Kräften in den Flanschen und Quersteifen

Die Gesamtverschiebung einer beliebigen Wandfaser in der Richtung der Achse x , wenn wir auch die Anfangskrümmung der Wand in Betracht ziehen, ist

$$\int_0^a \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int_0^a \frac{1}{E} \left[\Phi_{yy} - \mu \Phi_{xx} - \frac{E}{2} (w + w_0)_x^2 + \frac{E}{2} w_{0x}^2 \right] dx. \quad (4.1)$$

Analog ist dann die gegenseitige Verschiebung für eine beliebige Wandfaser in der Richtung der Achse y

$$\int_0^b \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int_0^b \frac{1}{E} \left[\Phi_{xx} - \mu \Phi_{yy} - \frac{E}{2} (w + w_0)_y^2 + \frac{E}{2} w_0^2{}_y \right] dy. \quad (4.2)$$

Nach dem Einsetzen der erforderlichen Ableitungen der Funktionen $w(x, y)$, $w_0(x, y)$, Φ und nach der Integration nehmen die Ausdrücke (4.1) und (4.2) die folgenden Formen an:

$$\int_0^a \frac{\partial u}{\partial x} dx = -\frac{a}{E} \left[\bar{\sigma}_x \left(1 - \frac{\eta}{b} y \right) - \mu \bar{\sigma}_y \left(1 - \frac{\theta}{2} \right) + A_{mn} \right], \quad (4.3)$$

$$\int_0^b \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\frac{b}{E} \left[\bar{\sigma}_y \left(1 - \frac{\theta}{a} x \right) - \mu \bar{\sigma}_x \left(1 - \frac{\eta}{2} \right) + B_{mn} \right], \quad (4.4)$$

wo

$$A_{mn} = \frac{\pi^2 E}{8 a^2} \sum_m \sum_n m^2 w_{mn} (w_{mn} + 2 w_{0mn}),$$

$$B_{mn} = \frac{\pi^2 E}{8 b^2} \sum_m \sum_n n^2 w_{mn} (w_{mn} + 2 w_{0mn}). \quad (4.4)$$

Für die Ränder einer rechteckigen Wand können wir dann die folgenden 4 Deformationsbedingungen anführen:

$$\begin{aligned} \frac{a}{E} \bar{\sigma}_p &= - \int_0^a \frac{\partial u}{\partial x} dx \Big|_{y=0}, & \frac{a}{E} \bar{\sigma}'_p &= - \int_0^a \frac{\partial u}{\partial x} dx \Big|_{y=b}, \\ \frac{b}{E} \bar{\sigma}_v &= - \int_0^b \frac{\partial v}{\partial y} dy \Big|_{x=0}, & \frac{b}{E} \bar{\sigma}'_v &= - \int_0^b \frac{\partial v}{\partial y} dy \Big|_{x=a}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

wo

$$\bar{\sigma}_p = \frac{1}{a} \int_0^a \sigma_p dx, \quad \bar{\sigma}'_p = \frac{1}{a} \int_0^a \sigma'_p dx, \quad \bar{\sigma}_v = \frac{1}{b} \int_0^b \sigma_v dy, \quad \bar{\sigma}'_v = \frac{1}{b} \int_0^b \sigma'_v dy$$

die durchschnittlichen Axialspannungen in den Flanschen und Queraussteifungen bezeichnen.

In den Gleichungen (4.5) wird nicht nur die axiale Spannung in den Versteifungen $\sigma_p, \sigma'_p, \sigma_v, \sigma'_v$ als unbekannt betrachtet, sondern auch die Spannungen in der Wand $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}'_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}'_y$, die für die gegebene äußere Beanspruchung des Querschnitts bestimmt werden müssen.

Es stehen uns noch die 4 Bedingungen des Gleichgewichts zur Verfügung, die wir für beliebige orthogonale Querschnitte $x=x_1, y=y_1$ in der folgenden Form zusammenstellen:

Tafel 1. Das System algebraischer kubischer Gleichungen für $\alpha=1$

	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{21}	w_{22}	w_{23}	w_{31}	w_{33}	
$p=1$ $q=1$	$-0,1250 w_{11}^2$ $+ [k_x (1 - \eta/2)$ $+ k_y (1 - \theta/2)$ $- 4,00] \cdot$ $\frac{1}{12(1-\mu^2)}$	$-0,7030 w_{11} w_{12}$ $-0,7440 w_{12} w_{13}$ $+0,8308 w_{12} w_{31}$ $+0,2024 w_{12} w_{33}$ $-2,5180 w_{21} w_{22}$ $-1,1850 w_{22} w_{23}$ $+ \frac{0,1801}{12(1-\mu^2)} k_x \eta$	$+0,1876 w_{11}^2$ $-1,0652 w_{11} w_{13}$ $+0,5805 w_{11} w_{33}$ $-0,2502 w_{11} w_{31}$ $+1,6250 w_{13} w_{31}$ $-4,0532 w_{21} w_{23}$ $-5,6650 w_{31} w_{33}$	$-0,7030 w_{11} w_{21}$ $+0,2816 w_{11} w_{23}$ $+0,8308 w_{13} w_{21}$ $-0,7502 w_{21} w_{31}$ $+0,2024 w_{21} w_{33}$ $+1,2052 w_{23} w_{31}$ $-1,9454 w_{23} w_{33}$ $+ \frac{0,1801}{12(1-\mu^2)} k_y \theta$	$-0,9082 w_{13} w_{22}$ $-0,3200 w_{11} w_{22}$ $-0,8900 w_{22} w_{31}$ $+ 1,4409$ $+ \frac{12(1-\mu^2)}{12(1-\mu^2)} k_{xy}$	$0,2818 w_{11} w_{21}$ $-0,3690 w_{11} w_{23}$ $-1,3392 w_{23} w_{31}$	$-1,0652 w_{11} w_{31}$ $+0,5850 w_{11} w_{33}$ $-0,2502 w_{11} w_{33}$ $+1,6250 w_{13} w_{31}$ $+0,1876 w_{11}^2$	$0,5852 w_{11} w_{13}$ $+0,5852 w_{11} w_{31}$ $-0,4052 w_{11} w_{33}$	$=0$
$p=1$ $q=2$	$-0,7030 w_{11} w_{12}$ $-0,7440 w_{12} w_{13}$ $+0,8308 w_{12} w_{31}$ $+0,2024 w_{12} w_{33}$ $-2,5176 w_{21} w_{22}$ $-1,1850 w_{22} w_{23}$ $+ \frac{0,1801}{12(1-\mu^2)} k_x \eta$	$-1,0626 w_{12}^2$ $+ [k_x (1 - \eta/2)$ $+ 4 k_y (1 - \theta/2)$ $- 25,00] \cdot$ $\frac{1}{12(1-\mu^2)}$	$-0,7446 w_{11} w_{12}$ $-4,0626 w_{12} w_{13}$ $+1,5624 w_{12} w_{31}$ $+2,8186 w_{12} w_{33}$ $-4,1150 w_{21} w_{22}$ $-12,5298 w_{22} w_{23}$ $+ \frac{0,1945}{12(1-\mu^2)} k_x \eta$	$-2,0626 w_{21} w_{12}$ $-1,1692 w_{12} w_{23}$ $-4,1414 w_{22} w_{31}$ $-1,3048 w_{22} w_{33}$ $+ 1,4409$ $- \frac{12(1-\mu^2)}{12(1-\mu^2)} k_{xy}$	$-4,5318 w_{12} w_{22}$ $-2,2354 w_{23} w_{31}$ $-6,9056 w_{23} w_{33}$ $+ \frac{0,7205}{12(1-\mu^2)} k_y \theta$	$-1,7384 w_{23} w_{12}$ $-1,1692 w_{12} w_{21}$ $+ 2,5937$ $+ \frac{12(1-\mu^2)}{12(1-\mu^2)} k_{xy}$	$0,8308 w_{12} w_{11}$ $-3,0322 w_{31} w_{12}$ $+1,5686 w_{12} w_{13}$ $-1,9834 w_{12} w_{31}$	$0,2024 w_{12} w_{11}$ $-2,1120 w_{33} w_{12}$ $+2,8186 w_{12} w_{13}$ $-1,9834 w_{12} w_{31}$	$=0$
$p=1$ $q=3$	$0,0626 w_{11}^2$ $-1,0652 w_{11} w_{13}$ $+0,5850 w_{11} w_{33}$ $-0,2502 w_{11} w_{31}$ $+1,6250 w_{13} w_{31}$ $-4,0596 w_{21} w_{23}$ $-5,6652 w_{31} w_{33}$	$-0,7446 w_{11} w_{12}$ $-4,0626 w_{12} w_{13}$ $+1,5624 w_{12} w_{31}$ $+2,8186 w_{12} w_{33}$ $-4,1150 w_{21} w_{22}$ $-12,5296 w_{22} w_{23}$ $+ \frac{0,1945}{12(1-\mu^2)} k_x \eta$	$-5,1248 w_{13}^2$ $+ [k_x (1 - \eta/2)$ $+ 9 k_y (1 - \theta/2)$ $- 100,00] \cdot$ $\frac{1}{12(1-\mu^2)}$	$0,8306 w_{21} w_{11}$ $-3,0322 w_{21} w_{13}$ $+1,5626 w_{21} w_{31}$ $-1,9834 w_{21} w_{33}$ $-6,5322 w_{23} w_{31}$	$-0,9080 w_{22} w_{11}$ $-6,9526 w_{22} w_{13}$ $-3,9998 w_{22} w_{31}$ $-3,1022 w_{22} w_{33}$ $+ \frac{2,5937}{12(1-\mu^2)} k_{xy}$	$-20,8020 w_{23} w_{13}$ $-16,0194 w_{23} w_{33}$ $+ \frac{1,6211}{12(1-\mu^2)} k_y \theta$	$1,6250 w_{11} w_{13}$ $+1,6252 w_{11} w_{31}$ $-7,3748 w_{13} w_{31}$	$15,1874 w_{13}^2$ $-21,6526 w_{13} w_{33}$	$=0$

$p = 2$ $q = 1$	$-0,7030 w_{11} w_{21}$ $+0,2816 w_{11} w_{23}$ $+0,8306 w_{13} w_{21}$ $-0,7502 w_{21} w_{31}$ $+0,2024 w_{21} w_{33}$ $+1,2052 w_{23} w_{31}$ $-1,9454 w_{23} w_{33}$ $+0,1801$ $+ \frac{12(1-\mu^2)}{12(1-\mu^2)} k_y \theta$	$-2,0626 w_{12} w_{21}$ $-1,1692 w_{12} w_{23}$ $-4,1416 w_{22} w_{31}$ $-1,3048 w_{22} w_{33}$ $+1,4409$ $- \frac{12(1-\mu^2)}{12(1-\mu^2)} k_{xy}$	$-3,0321 w_{13} w_{21}$ $+0,8306 w_{21} w_{11}$ $+1,5626 w_{21} w_{31}$ $-1,9834 w_{21} w_{33}$ $-6,5322 w_{23} w_{31}$	$-1,0626 w_{21}^2$ $+ [4 k_x (1-\eta/2)$ $+ k_y (1-\theta/2)$ $-25,00]$ $+ \frac{1}{12(1-\mu^2)}$ $\frac{k_x \eta}{12(1-\mu^2)}$	$-2,5096 w_{11} w_{12}$ $-4,5318 w_{21} w_{23}$ $-3,7500 w_{22} w_{23}$ $-4,1153 w_{12} w_{13}$ $+ \frac{0,7205}{12(1-\mu^2)}$ $\frac{k_x \eta}{12(1-\mu^2)}$	$3,0000 w_{21}^2$ $-5,2184 w_{21} w_{23}$ $-4,0429 w_{11} w_{13}$ $-15,2258 w_{31} w_{33}$	$-4,0626 w_{21} w_{31}$ $+5,3214 w_{23} w_{31}$ $-0,7502 w_{11} w_{21}$ $+1,5624 w_{13} w_{21}$ $+2,8186 w_{21} w_{31}$ $+0,1945$ $+ \frac{12(1-\mu^2)}{12(1-\mu^2)} k_y \theta$	$-2,1120 w_{21} w_{33}$ $-1,9836 w_{13} w_{21}$ $+0,2026 w_{11} w_{21}$ $+2,8186 w_{21} w_{31}$ $-2,1120 w_{21} w_{33}$	$=0$	
$p = 2$ $q = 2$	$-0,3200 w_{11} w_{22}$ $-0,9082 w_{13} w_{22}$ $-0,8900 w_{22} w_{31}$ $+1,4409$ $+ \frac{12(1-\mu^2)}{12(1-\mu^2)} k_{xy}$	$-4,5318 w_{12} w_{22}$ $-2,2354 w_{23} w_{31}$ $-6,9056 w_{23} w_{33}$ $+ \frac{0,7205}{12(1-\mu^2)}$ $\frac{k_y \theta}{12(1-\mu^2)}$	$-6,9526 w_{13} w_{22}$ $-0,9080 w_{22} w_{11}$ $-4,0000 w_{22} w_{31}$ $-3,1022 w_{22} w_{33}$ $-2,5937$ $- \frac{12(1-\mu^2)}{12(1-\mu^2)} k_{xy}$	$-2,5090 w_{11} w_{12}$ $-4,5318 w_{21} w_{22}$ $-3,7500 w_{22} w_{23}$ $-4,1104 w_{12} w_{13}$ $+ \frac{0,7205}{12(1-\mu^2)}$ $\frac{k_x \eta}{12(1-\mu^2)}$	$-2,0000 w_{22}^2$ $+ [4 k_x (1-\eta/2)$ $+ 4 k_y (1-\theta/2)$ $-64,00]$ $+ \frac{1}{12(1-\mu^2)}$ $\frac{k_x \eta}{12(1-\mu^2)}$	$-1,1802 w_{11} w_{12}$ $-8,4130 w_{22} w_{23}$ $-3,7520 w_{21} w_{22}$ $-12,5296 w_{12} w_{13}$ $+ \frac{0,7781}{12(1-\mu^2)}$ $\frac{k_x \eta}{12(1-\mu^2)}$	$-6,9526 w_{22} w_{31}$ $-0,8900 w_{11} w_{22}$ $-4,0000 w_{13} w_{22}$ $-3,1024 w_{22} w_{33}$ $-4,1416 w_{12} w_{21}$ $-2,5937$ $- \frac{12(1-\mu^2)}{12(1-\mu^2)} k_{xy}$	$-3,8344 w_{22} w_{33}$ $-3,1022 w_{13} w_{22}$ $-3,1078 w_{22} w_{31}$ $-1,3046 w_{12} w_{21}$ $+4,6687$ $+ \frac{12(1-\mu^2)}{12(1-\mu^2)} k_{xy}$	$=0$	
$p = 2$ $q = 3$	$0,2818 w_{11} w_{21}$ $-0,3690 w_{11} w_{23}$ $-1,3392 w_{23} w_{31}$	$-1,1692 w_{12} w_{21}$ $-1,7384 w_{12} w_{23}$ $+2,5937$ $+ \frac{12(1-\mu^2)}{12(1-\mu^2)} k_{xy}$	$-20,8020 w_{13} w_{23}$ $-16,0194 w_{23} w_{33}$ $+1,6211$ $+ \frac{12(1-\mu^2)}{12(1-\mu^2)} k_y \theta$	$1,0000 w_{21}^2$ $-5,2184 w_{21} w_{23}$ $-4,0464 w_{11} w_{13}$ $-15,2258 w_{31} w_{33}$	$-1,1852 w_{11} w_{12}$ $-3,7520 w_{21} w_{22}$ $-8,4130 w_{22} w_{23}$ $-12,5296 w_{12} w_{13}$ $+ \frac{0,7781}{12(1-\mu^2)}$ $\frac{k_x \eta}{12(1-\mu^2)}$	$-6,0626 w_{23}^2$ $+ [4 k_x (1-\eta/2)$ $+ 9 k_y (1-\theta/2)$ $-169,00]$ $+ \frac{1}{12(1-\mu^2)}$	$-24,8126 w_{23} w_{33}$ $-16,0194 w_{13} w_{23}$ $-1,9456 w_{11} w_{21}$ $-6,9054 w_{12} w_{22}$ $+1,7508$ $+ \frac{12(1-\mu^2)}{12(1-\mu^2)} k_y \theta$	$5,3216 w_{21} w_{31}$ $-10,3462 w_{23} w_{31}$ $-1,3392 w_{11} w_{23}$ $+1,2052 w_{11} w_{21}$ $-2,2354 w_{12} w_{22}$ $-6,5322 w_{13} w_{21}$	$-24,8126 w_{23} w_{33}$ $-16,0194 w_{13} w_{23}$ $-1,9456 w_{11} w_{21}$ $-6,9054 w_{12} w_{22}$ $+1,7508$ $+ \frac{12(1-\mu^2)}{12(1-\mu^2)} k_y \theta$	$=0$
$p = 3$ $q = 1$	$-1,0652 w_{11} w_{31}$ $+0,5850 w_{11} w_{33}$ $-0,2502 w_{11} w_{13}$ $+0,0626 w_{11}^2$ $+1,6250 w_{13} w_{31}$	$0,8308 w_{12} w_{11}$ $+1,5686 w_{12} w_{13}$ $-3,0278 w_{12} w_{31}$ $-1,9834 w_{12} w_{33}$	$1,6250 w_{11} w_{13}$ $-7,3748 w_{13} w_{31}$ $+1,6252 w_{11} w_{31}$	$-0,7502 w_{11} w_{21}$ $+1,5624 w_{13} w_{21}$ $-4,0626 w_{21} w_{31}$ $+2,8186 w_{21} w_{33}$ $+5,3214 w_{23} w_{31}$ $+0,1945$ $+ \frac{12(1-\mu^2)}{12(1-\mu^2)} k_y \theta$	$-0,8900 w_{11} w_{22}$ $-3,9998 w_{13} w_{22}$ $-6,9526 w_{22} w_{31}$ $-3,1024 w_{22} w_{33}$ $-4,1414 w_{12} w_{21}$ $-2,5937$ $- \frac{12(1-\mu^2)}{12(1-\mu^2)} k_{xy}$	$-1,3392 w_{11} w_{23}$ $+5,3216 w_{21} w_{31}$ $-10,3460 w_{23} w_{31}$ $+1,2052 w_{11} w_{21}$ $-2,2354 w_{12} w_{22}$ $-6,5322 w_{13} w_{21}$	$15,1874 w_{31}^2$ $-21,6526 w_{31} w_{33}$ $-5,6652 w_{11} w_{13}$ $-15,2256 w_{21} w_{23}$	$-5,1248 w_{31}^2$ $+9 k_x (1-\eta/2)$ $+k_y (1-\theta/2)$ $-100,00]$ $+ \frac{1}{12(1-\mu^2)}$	$15,1874 w_{31}^2$ $-21,6526 w_{31} w_{33}$ $-5,6652 w_{11} w_{13}$ $-15,2256 w_{21} w_{23}$	$=0$
$p = 3$ $q = 3$	$0,5852 w_{11} w_{13}$ $+0,5852 w_{11} w_{31}$ $-0,4052 w_{11} w_{33}$	$0,2024 w_{11} w_{12}$ $+2,8186 w_{12} w_{13}$ $-1,9834 w_{12} w_{31}$ $-2,1120 w_{23} w_{12}$	$5,0624 w_{13}^2$ $-21,6526 w_{13} w_{33}$	$-1,9836 w_{13} w_{31}$ $+0,2026 w_{11} w_{21}$ $+2,8186 w_{21} w_{31}$ $-2,1120 w_{21} w_{33}$	$-24,8126 w_{23} w_{33}$ $-16,0194 w_{13} w_{23}$ $-1,9456 w_{11} w_{21}$ $-6,9056 w_{12} w_{22}$ $+1,7508$ $+ \frac{12(1-\mu^2)}{12(1-\mu^2)} k_y \theta$	$-24,8126 w_{23} w_{33}$ $-16,0194 w_{13} w_{23}$ $-1,9456 w_{11} w_{21}$ $-6,9056 w_{12} w_{22}$ $+1,7508$ $+ \frac{12(1-\mu^2)}{12(1-\mu^2)} k_y \theta$	$5,0624 w_{31}^2$ $-21,6526 w_{31} w_{33}$ $-5,6652 w_{11} w_{13}$ $-15,2256 w_{21} w_{23}$	$10,1248 w_{33}^2$ $+ [9 k_x (1-\eta/2)$ $+ 9 k_y (1-\theta/2)$ $-324,00]$ $+ \frac{1}{12(1-\mu^2)}$	$10,1248 w_{33}^2$ $+ [9 k_x (1-\eta/2)$ $+ 9 k_y (1-\theta/2)$ $-324,00]$ $+ \frac{1}{12(1-\mu^2)}$	$=0$

$$\begin{aligned}
\sigma_p F_p + \sigma'_p F'_p + t b \frac{\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}'_x}{2} &= N_x, \\
\sigma_v F_v + \sigma'_v F'_v + t a \frac{\bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}'_y}{2} &= N_y, \\
-\sigma'_p F'_p b + M_{s,x} &= M_x - N_x b_1, \\
-\sigma'_v F'_v a + M_{s,y} &= M_y - N_y a_1.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

In den Momentbedingungen (die letzten zwei Gleichungen aus dem System (4.6)), welche für die Punkte $x = x_1$, $y = 0$, bzw. $x = 0$, $y = y_1$ angegeben werden, bedeutet

$$M_{s,x} = t \int_0^b y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} dy, \quad M_{s,y} = t \int_0^a x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dx. \tag{4.7}$$

Wir bezeichnen nun die Spannungen in den Randfasern eines durch Druck und Biegung beanspruchten Querschnitts,

$$\begin{aligned}
\sigma_{1,x} &= \frac{N_x}{F_x} + \frac{M_x}{W_{x0}}, & \sigma_{1,y} &= \frac{N_y}{F_y} + \frac{M_y}{W_{y0}}, \\
\sigma'_{1,x} &= \frac{N_x}{F_x} - \frac{M_x}{W'_{x0}}, & \sigma'_{1,y} &= \frac{N_y}{F_y} - \frac{M_y}{W'_{y0}},
\end{aligned} \tag{4.8}$$

wo
$$W_{x0} = \frac{J_{x0}}{b_1}, \quad W'_{x0} = \frac{J_{x0}}{b'_1}, \quad W_{y0} = \frac{J_{y0}}{a_1}, \quad W'_{y0} = \frac{J_{y0}}{a'_1}.$$

Selbstverständlich kommen diese Spannungen in Wirklichkeit im Querschnitt nur solange vor, als die Wand keine Beulung erfährt. Bei einer überkritischen Wandbelastung werden dann die Spannungen σ_1 , σ'_1 nur als Hilfszahlen dienen, wenn wir die Wirkung der äußeren Kräfte ausdrücken wollen.

Die Trägheitsmomente J_{x0} , J_{y0} werden für den ganzen Querschnitt in der Fläche von $F_x = F_p + F'_p + b t$ bzw. $F_y = F_v + F'_v + a t$ berechnet.

Ähnlich wie in den Gleichungen (3.2) schreiben wir dann die Beziehungen für die Koeffizienten der äußeren Querschnittsbeanspruchung

$$k_{1,x} = \frac{\sigma_{1,x}}{\sigma_e}, \quad k_{1,y} = \frac{\sigma_{1,y}}{\sigma_e}$$

und die Parameter
$$\eta_1 = \frac{\sigma_{1,x} - \sigma'_{1,x}}{\sigma_{1,x}}, \quad \theta_1 = \frac{\sigma_{1,y} - \sigma'_{1,y}}{\sigma_{1,y}}.$$

Wenn wir dann (4.5) in das System (4.6) einsetzen, erhalten wir als Endresultat

$$\begin{aligned}
k_x \left(1 - \frac{\eta}{2}\right) &= \frac{1}{1 - \mu^2 \epsilon_1 \epsilon_2} (\gamma_1 - \epsilon_1 \gamma_2), \\
k_y \left(1 - \frac{\theta}{2}\right) &= \frac{1}{1 - \mu^2 \epsilon_1 \epsilon_2} (\gamma_3 - \epsilon_2 \gamma_4),
\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
k_x \eta &= k_{1,x} \eta_1 - \epsilon_5 m_x^* - \frac{\epsilon_7 (\gamma_2 - \mu^2 \epsilon_2 \gamma_1)}{1 - \mu^2 \epsilon_1 \epsilon_2}, \\
k_y \theta &= k_{1,y} \theta_1 - \epsilon_6 m_y^* - \frac{\epsilon_8 (\gamma_4 - \mu^2 \epsilon_1 \gamma_3)}{1 - \mu^2 \epsilon_1 \epsilon_2},
\end{aligned} \tag{4,9}$$

$$\begin{aligned}
\text{wo } \gamma_1 &= k_{1,x} \left(1 - \frac{\eta_1}{2}\right) - \epsilon_3 m_x^*, \\
\gamma_2 &= \frac{A_{mn}}{\sigma_e} - \mu \gamma_3 + \mu \epsilon_2 \frac{B_{mn}}{\sigma_e}, \\
\gamma_3 &= k_{1,y} \left(1 - \frac{\theta_1}{2}\right) - \epsilon_4 m_y^*, \\
\gamma_4 &= \frac{B_{mn}}{\sigma_e} - \mu \gamma_1 + \mu \epsilon_1 \frac{A_{mn}}{\sigma_e}, \\
m_x^* &= - \sum_m \sum_n \sum_s (w_{mn}^* w_{ms}^* + w_{mn}^* w_{0ms}^* + w_{ms}^* w_{0mn}^*) [(-1)^{n+s} - 1] (g_2 + g_4)_{m=r}, \\
m_y^* &= - \sum_m \sum_n \sum_r (w_{mn}^* w_{rn}^* + w_{mn}^* w_{0rn}^* + w_{rn}^* w_{0mn}^*) [(-1)^{m+r} - 1] (g_2 + g_3)_{n=s}, \\
\epsilon_1 &= \frac{1}{1 + \nu_p} + \frac{1}{2} \left(\frac{S_p}{W_{x0}} - \frac{S_p}{W'_{x0}} \right), \\
\epsilon_2 &= \frac{1}{1 + \nu_v} + \frac{1}{2} \left(\frac{S_v}{W_{y0}} - \frac{S_v}{W'_{y0}} \right), \\
\epsilon_3 &= \frac{9(1 - \mu^2)}{\pi^2} \alpha^2 \left(\frac{W_{s,x}}{W_{x0}} - \frac{W_{s,x}}{W'_{x0}} \right), \\
\epsilon_4 &= \frac{9(1 - \mu^2)}{\pi^2} \left(\frac{W_{s,y}}{W_{y0}} - \frac{W_{s,y}}{W'_{y0}} \right), \\
\epsilon_5 &= \frac{18(1 - \mu^2)}{\pi^2} \alpha^2 \left(\frac{W_{s,x}}{W_{x0}} + \frac{W_{s,x}}{W'_{x0}} \right), \\
\epsilon_6 &= \frac{18(1 - \mu^2)}{\pi^2} \left(\frac{W_{s,y}}{W_{y0}} + \frac{W_{s,y}}{W'_{y0}} \right), \\
\epsilon_7 &= \frac{S_p}{W_{x0}} + \frac{S_p}{W'_{x0}}, \\
\epsilon_8 &= \frac{S_v}{W_{y0}} + \frac{S_v}{W'_{y0}}.
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten ϵ_i ($i=1, 2, 3, \dots, 8$) geben uns die Querschnittskennwerte und dienen als Eingangsparameter bei der Berechnung der Durchbiegungen einer ausgesteiften dünnen Wand.

Bei diesen ist dann $\nu_p = \frac{bt}{F_p + F'_p}$, $\nu_v = \frac{at}{F_v + F'_v}$ und bezeichnet das Verhältnis zwischen der Wandfläche und der Fläche der Aussteifungen, $S_p = F_p b_1 - F'_p b'_1$, $S_v = F_v a_1 - F'_v a'_1$ bedeuten die statischen Momente der Gurten, bzw. der Queraussteifungen in bezug auf die Schwerachsen des Querschnitts, und $W_{s,x} = \frac{1}{6} b^2 t$, $W_{s,y} = \frac{1}{6} a^2 t$ sind die Widerstandsmomente der Wand.

Durch die Ausdrücke (4.9) sind die Belastungsglieder $k_x(1 - \frac{\theta}{2})$, $k_x \eta$, $k_y(1 - \frac{\eta}{2})$, $k_y \theta$ definiert. Anstatt diesen setzen wir dann in das System der algebraischen kubischen Gleichungen (3.2) die rechten Seiten der Gleichungen (4.9) ein.

In dieser Weise hängen dann die Wanddurchbiegungen und die Spannungen der Mittelfläche, die sich gegenseitig beeinflussen, ziemlich vom Maß der Wandversteifung ab.

Bei speziellen Fällen von Randbedingungen werden die Ausdrücke (4.9) ziemlich vereinfacht. Um dies anschaulich zu machen, wollen wir hier eine Aufgabe, die in der Literatur schon gelöst wurde, anführen.

Beispiel: Eine quadratische Wand mit nicht nachgiebigen Rändern, die einfach gelagert und schubbeansprucht ist.

In diesem Fall sind F_p, F'_p, F_r, F'_r unendlich groß; daraus folgt:

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1, \quad \epsilon_3 = \epsilon_4 = \epsilon_5 = \epsilon_6 = \epsilon_7 = \epsilon_8 = 0.$$

Dann wird im Hinblick auf die Art der Beanspruchung auch $\gamma_1 = \gamma_3 = 0$. Da die Wandausbeulung symmetrisch ist ($m+n$ ist gerade), wird $m_x^* = m_y^* = 0$ und $A_{mn} = B_{mn}$.

Aus den Gleichungen (4.9) erfolgt

$$k_x = k_y = -\frac{1}{1-\mu} \frac{A_{mn}}{\sigma_e}$$

und

$$\eta = \theta = 0;$$

wir sind also zu dem Resultat gekommen, das VOL'MIR erhalten hat [4], S. 162.

5. Die Lösung des Systems algebraischer kubischer Gleichungen

Durch die Anwendung der Variationsmethoden für die Integrierung partieller Differentialgleichungen (2.1), (2.2) geht das Problem in das System der nichtlinearen algebraischen Gleichungen über.

Die Lösung dieser Gleichungen bereitet immer ziemlich große Schwierigkeiten; darum bestand die Hauptbestrebung dann, das Problem zu vereinfachen, bzw. die Aufgabe zu linearisieren.

Bei der Lösung des Gleichungssystems, dessen Form wir in der Tafel I angeführt haben, wurde die Möglichkeit der Verwendung der Methode DAVIDENKOS [5], der klassischen Methode Newton-Raphson und der Methode der steilsten Gefälle (Method of Steepest Descents) nach Boothe geprüft. Die Methode DAVIDENKOS beruht darauf, daß das System algebraischer Gleichungen auf das System linearer Differentialgleichungen mit den Anfangsbedingungen, übertragen wird. Die Aufgabe der Lösung des Systems nichtlinearer algebraischer Gleichungen geht also in das Cauchy-Problem über. Es kann

vorläufig nicht behauptet werden, daß das oben formulierte Problem mittels dieser Methode erfolgreich gelöst werden könnte, da einige hinreichende Bedingungen für die Verwendung der Methode nicht erfüllt sind.

Wir haben die Methode Newton-Raphson und die Methode Bootthes unter Anwendung der Digitalrechner NE 803b und LGP-30 für die Systeme von 4 bzw. 5 Gleichungen geprüft. Inwiefern diese Methoden geeignet sind, kann folgendes angeführt werden:

1. Die Methode der steilsten Gefälle kann besonders in solchen Fällen gut angewendet werden, wenn die gesuchten Lösungen von derselben Ordnung sind. (In unserem Fall überwog die Wurzel $k_{1,x}$ in der Ordnung über die andern Wurzeln, was zur Folge hatte, daß der erste genäherte Wert so stabil war, daß die Lösung in der Nähe der größten Wurzel nicht vorwärts kam.)

2. Bei der Newton-Raphson-Methode muß der genäherte Wert der größten Wurzel (des Belastungskoeffizienten) ziemlich genau abgeschätzt werden. Wir bekommen so eine gute Konvergenz, und mit Hilfe von 3 bis 4 Iterationen gelangten wir zur vorgeschriebenen Näherung der Lösung.

Mittels dieser Methode haben wir die Lösung von 8 kubischen Gleichungen auf dem Digitalrechner NE 803b durchgeführt. Die Form der Gleichung für $\alpha=1$ wird in der Tafel I angegeben. Die Aufgabe wurde im symbolischen Kod A 2 vorgenommen, so daß die Zahl der Gleichungen mit Hilfe einer kleinen Änderung im Programm erhöht werden konnte. Es wird dabei nur die Anzahl der Teilprogramme und der Zyklen zur Bildung der Derivationen erhöht.

Es wurde ein Netz mit $w_{11}^* = 0,01; 0,25; 0,5; 0,75; 1,0 \dots$ aufgestellt, bis der Koeffizient $k_{1,x}$ das zehnfache des kritischen Wertes $k_{kr} = \frac{\sigma_{kr}}{\sigma_e}$ nicht mehr erreicht hat.

Die ersten genäherten Werte wurden nach den Ergebnissen der linearen Aufgabe vorgeschrieben. Im weiteren wurde die vorherige Lösung immer als die erste Iteration der nächsten Lösung betrachtet.

Auf der Fig. 2 werden als Beispiel die Ergebnisse der Lösung des Systems der algebraischen Gleichungen (Tafel I) für eine quadratische Wand, die durch Biegung und Schub beansprucht wird, angeführt. Die relative Gurtenfläche

$$f_p = \frac{F_p}{b t} = 1,0; \quad f'_p = \frac{F'_p}{b t} = 1,0,$$

die Queraussteifungen haben die Fläche null.

Für die Berechnung wurden folgende Eingangsparameter verwendet:

$$\epsilon_1 = 0,6666, \quad \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = 0, \quad \epsilon_5 = 0,4742, \quad \epsilon_6 = 3,3193, \quad \epsilon_7 = \epsilon_8 = 0, \\ \eta_1 = 2, \quad \theta_1 = 0, \quad \mu = 0,3, \quad k_{1,y} = 0, \quad k_{xy} = 0,4 k_{1,x}.$$

Auf der Abszisse ist der Belastungsgrad $n_x = \frac{k_{1,x}}{k_{kr}}$ (Koeffizient der kritischen Spannung $k_{kr} = 16,25$) angegeben.

Auf der Ordinate sind die relativen Werte der Koeffizienten der Wand-

durchbiegungsfläche $\frac{w_{mn}}{t}$, der Wandbeanspruchungen $\frac{k_x}{k_{1,x}}$, $\frac{k_y}{k_{1,x}}$ und der durchschnittlichen Spannungen (bzw. Deformationen) in den Gurten und Quersteifen $\frac{k_p}{k_{1,x}}$, $\frac{k'_p}{k_{1,x}}$, $\frac{k_v}{k_{1,x}}$, $\frac{k'_v}{k_{1,x}}$ aufgetragen.

Wegen einer besseren Übersicht wird bei den betreffenden Linien am Bild nur der Zähler dieser Koeffizienten angegeben.

Der vorherigen Bezeichnung entsprechend ist also

$$k_p = \frac{\bar{\sigma}_p}{\sigma_e}, \quad k'_p = \frac{\bar{\sigma}'_p}{\sigma_e}, \quad k_v = \frac{\bar{\sigma}_v}{\sigma_e}, \quad k'_v = \frac{\bar{\sigma}'_v}{\sigma_e}.$$

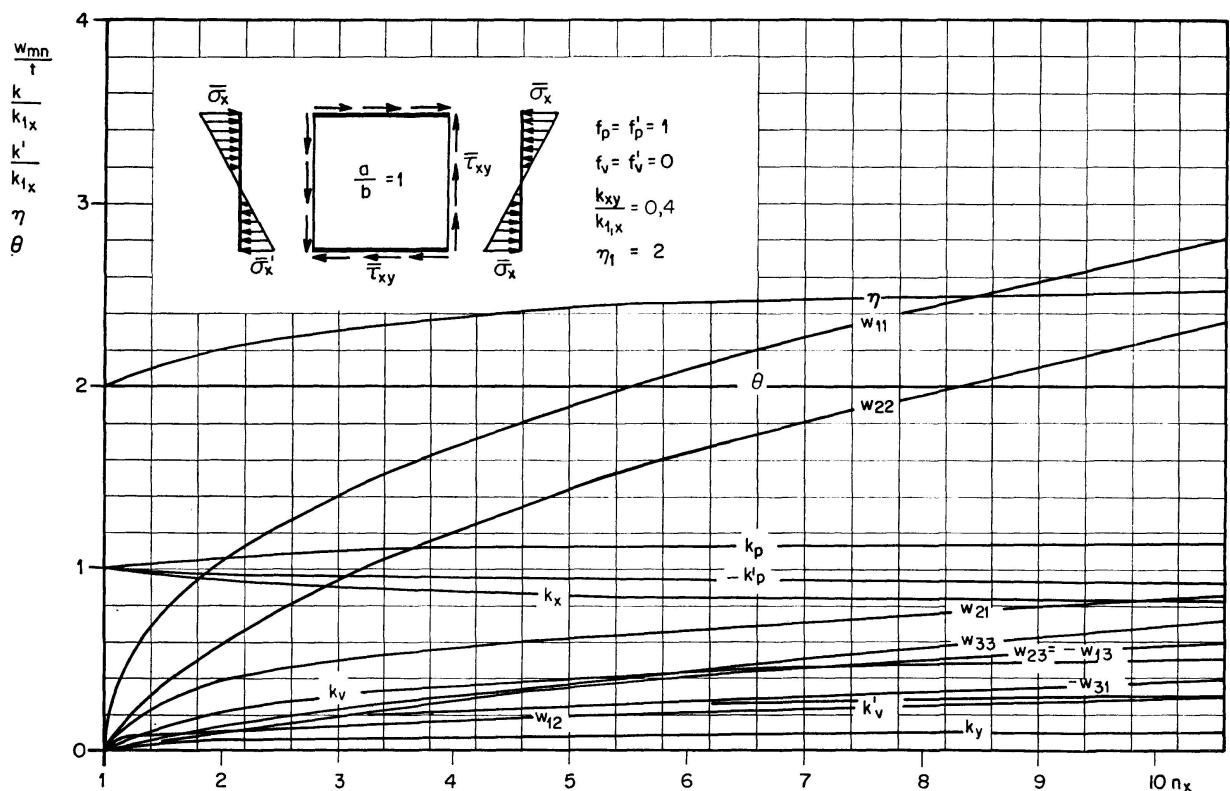


Fig. 2. Diagramme $\frac{w_{mn}}{t}$, $\frac{k_p}{k_{1,x}}$, $\frac{k'_p}{k_{1,x}}$, $\frac{k_v}{k_{1,x}}$, $\frac{k'_v}{k_{1,x}}$, η , θ einer versteiften biege- und schubbeanspruchten quadratischen Wand.

6. Die Biegespannungen und die Spannungen in der Mittelfläche

Nachdem die Koeffizienten der Biegefläche schon bekannt sind, wird der Verlauf der Spannungen in der dünnen Wand leicht bestimmt.

Die Biegespannungen auf der Wandoberfläche sind durch die Gleichungen (die zum Teil zur Verarbeitung auf der Rechenmaschine angepaßt wurden) ausgedrückt:

$$\begin{aligned}
\sigma_{x_0} &= \left(\frac{t}{b}\right)^2 \frac{E}{2(1-\mu^2)} \left[\frac{w_{xx}^*}{\alpha^2} + \mu w_{yy}^* \right], \\
\sigma_{y_0} &= \left(\frac{t}{b}\right)^2 \frac{E}{2(1-\mu^2)} \left[w_{yy}^* + \mu \frac{w_{xx}^*}{\alpha^2} \right], \\
\tau_0 &= \left(\frac{t}{b}\right)^2 \frac{E}{2(1+\mu)} \frac{w_{xy}^*}{\alpha},
\end{aligned} \tag{6}$$

wo

$$w_{xx}^* = \frac{a^2}{t} w_{xx}, \quad w_{yy}^* = \frac{b^2}{t} w_{yy}, \quad w_{xy}^* = \frac{ab}{t} w_{xy}.$$

Die Spannungen in der Mittelfläche haben wir aus der Funktion Φ (2.9) als

$$\sigma_x = \Phi_{yy}, \quad \sigma_y = \Phi_{xx}, \quad \tau = -\Phi_{xy}$$

berechnet.

Die Berechnung der Krümmungen und der Biegespannungen wurde auf dem LGP-30-Digitalrechner vorgenommen, wobei gleichzeitig auch die Durchbiegungsfunktionen $w(x, y)$ ermittelt wurden. Die Berechnung wurde für das folgende Netz durchgeführt:

$$\begin{aligned}
x/a: & 1/2, 2/8, 3/8, 4/8, 5/8, 6/8, 7/8, \\
y/b: & 1/6, 2/6, 3/6, 4/6, 5/6.
\end{aligned}$$

Die Spannungen in der Mittelfläche wurden auf der Maschine ZRA-1 für das Netz

$$\begin{aligned}
x/a: & 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1, \\
y/b: & 0, 1/6, 2/6, 3/6, 4/6, 5/6, 1
\end{aligned}$$

berechnet.

Auf den Konturen wurden außerdem die axialen Spannungen σ_p , σ'_p , σ_v und σ'_v ermittelt.

Bei der Berechnung wurden Teilprogramme für die trigonometrische Funktion verwendet.

Als Beispiel werden auf der Fig. 4 die der Durchbiegungsfläche (Fig. 3) entsprechenden relativen Werte der Biegespannungen $\frac{\sigma_{x_0}}{E} \left(\frac{b}{t}\right)^2$, $\frac{\sigma_{y_0}}{E} \left(\frac{b}{t}\right)^2$, $\frac{\tau_0}{E} \left(\frac{b}{t}\right)^2$ angeführt. Als Eingangsparameter für die Berechnung sind die Koeffizienten $\frac{w_{mn}}{t}$ für $n_x = 5$ (das fünffache der Überschreitung der kritischen Beanspruchung) aus der Fig. 2 betrachtet worden.

Auf der Fig. 5 sind die relativen Werte der Spannungen in der Mittelfläche $\frac{\sigma_x}{E} \left(\frac{b}{t}\right)^2$, $\frac{\sigma_y}{E} \left(\frac{b}{t}\right)^2$, $\frac{\tau}{E} \left(\frac{b}{t}\right)^2$ und die relativen Werte der axialen Spannungen in den Gurten $\frac{\sigma_p}{E} \left(\frac{b}{t}\right)^2$, $\frac{\sigma'_p}{E} \left(\frac{b}{t}\right)^2$ aufgetragen. Für die Berechnung sind die Werte $\frac{w_{mn}}{t}$, k_x , k_y , η , θ aus der Fig. 2 für $n_x = 5, 10$ genommen worden. Die Schubspannungen im gegebenen Punkt des Netzes $\frac{\tau}{E} \left(\frac{b}{t}\right)^2$ werden in Nummern ausgedrückt (die obere Zahl gilt für $n_x = 5$, die untere Zahl für $n_x = 10$). Ebenso

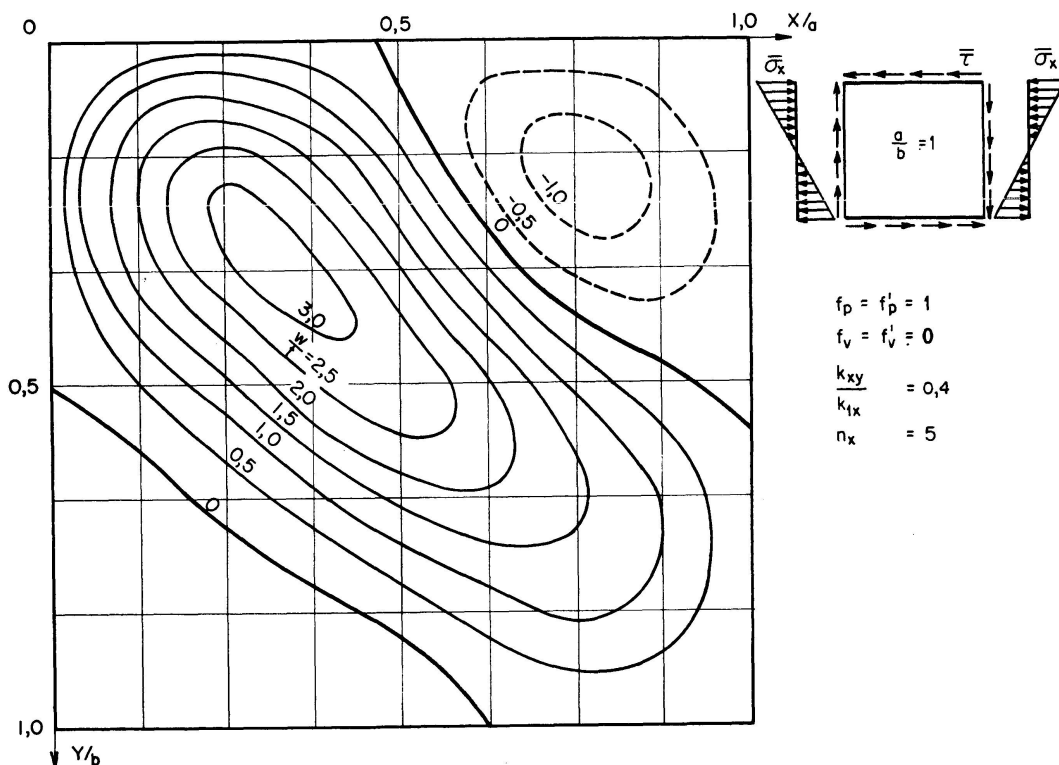


Fig. 3. Höhenlinien der relativen Durchbiegungen w/t einer biege- und schubbeanspruchten quadratischen Wand bei einer fünffachen Überschreitung der kritischen Belastung.

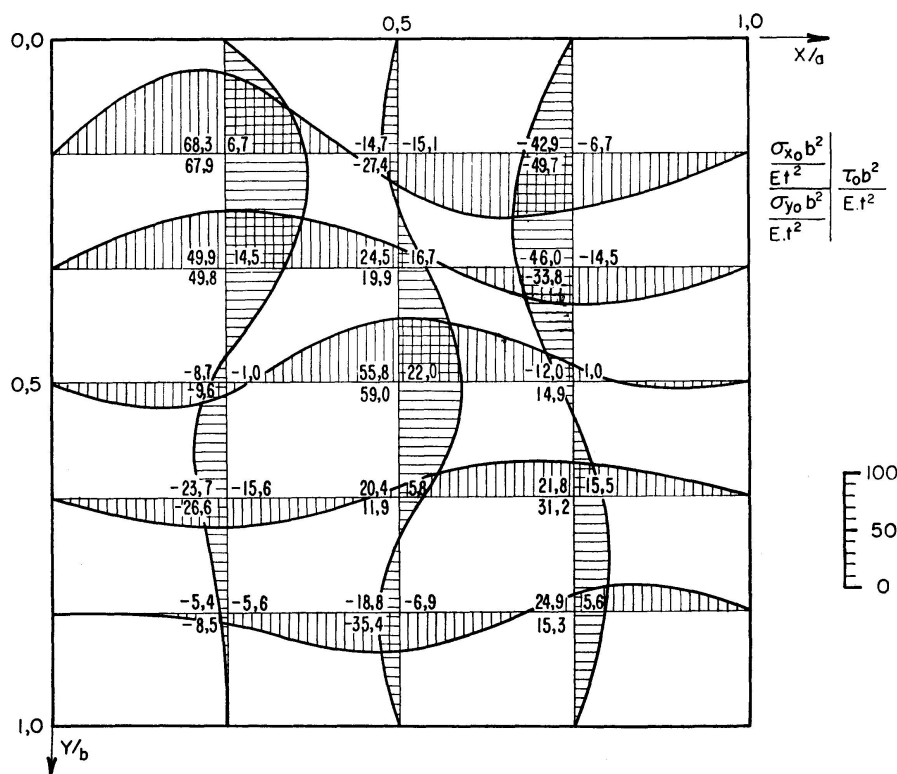


Fig. 4. Relative Biegespannungen auf der Wandoberfläche $\frac{\sigma_{x0}}{E} \left(\frac{b}{t}\right)^2$, $\frac{\sigma_{y0}}{E} \left(\frac{b}{t}\right)^2$, $\frac{\tau_0}{E} \left(\frac{b}{t}\right)^2$, die der Durchbiegungsfläche (Abb. 3) entsprechen.

werden auch die Axialspannungen in den Gurten, wie das aus dem Bild ersichtlich ist, in Zahlen angegeben.

Unter anderem ist aus den Ergebnissen ersichtlich, daß hier eine Spannungserhöhung im gedrückten Gurt des Querschnitts im Verhältnis zur Spannung im gezogenen Gurt vorhanden ist.

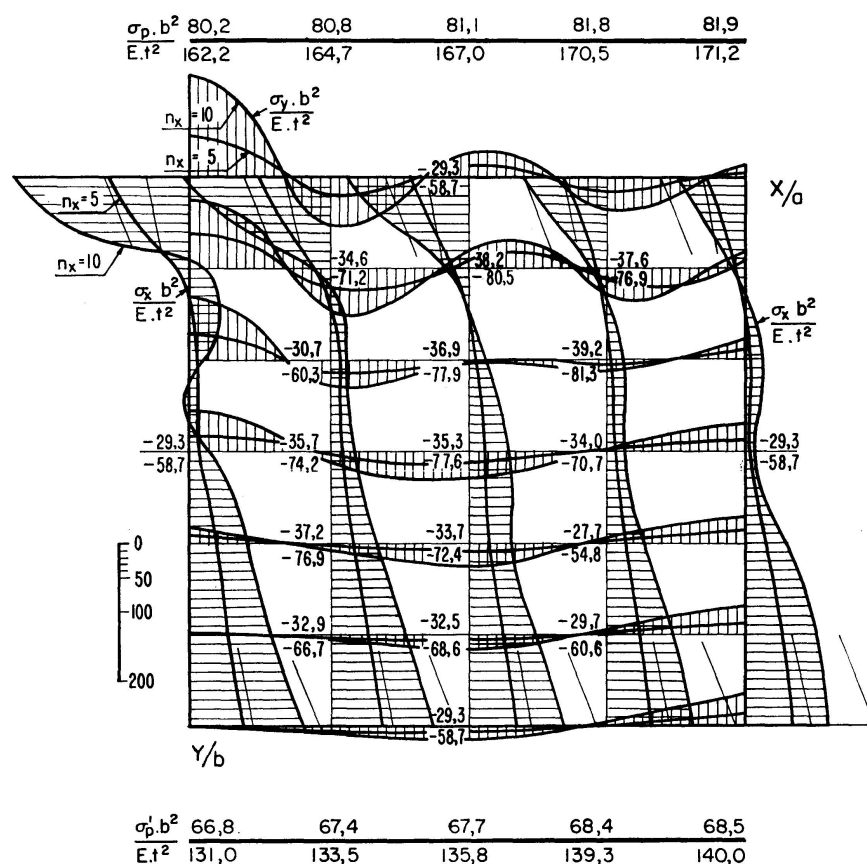


Fig. 5. Relative Spannung in der Mittelfläche einer quadratischen Wand $\frac{\sigma_x}{E} \left(\frac{b}{t}\right)^2$, $\frac{\sigma_y}{E} \left(\frac{b}{t}\right)^2$, $\frac{\tau}{E} \left(\frac{b}{t}\right)^2$ und die relative Spannung in den Gurten $\frac{\sigma_p}{E} \left(\frac{b}{t}\right)^2$, $\frac{\sigma_p'}{E} \left(\frac{b}{t}\right)^2$ bei einer 5- und 10-fachen Überschreitung der kritischen Last der Wand.

Bezeichnungen

t	Wanddicke.
$\alpha = a/b$	Wandbreite zu Wandhöhe.
u, v	Verschiebung der Punkte in der Mittelfläche der Wand.
w	Durchbiegung der Wand.
w_0	Anfangsdurchbiegung der Wand.
Φ	Spannungsfunktion.
$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \Phi_{yy}, \sigma_y = \Phi_{xx} \\ \tau &= -\Phi_{xy} \end{aligned} \right\}$	Spannungen in der Mittelfläche der Wand.

$\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}'_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}'_y$	Äußere normale Beanspruchung in der Mittelfläche der Wand auf den Rändern $y=0, b$ bzw. $x=0, a$.
σ_{kr}	Beulspannung der Wand.
$\sigma_e = \frac{\pi^2 D}{b^2 t} = \frac{\pi^2 E t^2}{12(1-\mu^2)b^2}$	Eulersche Beulspannung für einen Wandstreifen der Länge b , der Dicke t und der Breite 1.
$k = \sigma/\sigma_e$	Koeffizienten der Spannungen.
E, μ	Elastizitätsmodul und Querdehnungsverhältnis.
N, M	Normalkraft und Biegemoment des Querschnitts.
$w^* = w/t, w_0^* = w_0/t$	Relative Durchbiegung und relative Anfangsdurchbiegung der Wand.
$\Delta \Delta$	$\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$.

* * *

Ich möchte noch meinen Dank den Mitarbeitern des Berechnungszentrums der Slowakischen Akademie der Wissenschaften und dem Rechenzentrum des VEB Hydrostav in Bratislava aussprechen, die es übernommen haben, die Berechnungen, deren Ergebnisse in diesem Beitrag vorgelegt wurden, durchzuführen.

Zu besonderem Dank bin ich meinem Mitarbeiter prom. Mat. Rudolf Kodnár verpflichtet, der alle für die Berechnungen erforderlichen Programme ausgearbeitet hat.

Literaturverzeichnis

1. K. BASLER, B. T. YEN, Y. A. MUELLER, B. THÜRLIMANN: "Web Buckling Tests on Welded Plate Girders." Welding Research Council Bulletin Series, No. 64, Sept. 1960.
2. CH. MASSONNET, M. ŠKALOUD: «Principy návrhu stěn ocelových nosníků s přihlédnutím k jejich pokritickému působení.» Stavebnický časopis 6, 1963. (Grundsätze für den Entwurf der Wände von Stahlträgern unter Berücksichtigung ihrer überkritischen Beanspruchung.)
3. J. DJUBEK: «Bemessung der Wände von Vollwandträgern.» Stahlbau-Rundschau Heft 21, 1962. S. 81—83. (Sonderheft Österreichische Stahlbautagung 1961, Innsbruck.)
4. A. S. VOL'MIR: «Gibkije plastinki i obolotschki.» Moskva 1956, S. 124—170. (Schlanke Platten und Schalen.)
5. D. F. DAVIDENKO: «Ob odnom novom metode tschislennogo. reschenija sistem nelinejnych uravnenij.» DAN SSSR, 1953, No. 4. (Über eine neue Methode zur numerischen Lösung des Systems nichtlinearer Gleichungen.)
6. A. D. BOOTH: "An Application of the Method of Steepest Descents to the Solution of Systems of Non-linear Simultaneous Equations." Quart. J. Mech. II. 1949.

7. P. A. SOKOLOV: "Stress Distribution in Plates that have lost their Stability under the Action of Compressive Forces." (Trans. of the Shipbuilding and Standard Scientific Research, Moskva-Leningrad 1932.)
8. S. LEVY: "Bending of Rectangular Plates with Large Deflections." NACA Report No. 737, 1942. (Publiziert auch als NACA TN No. 846, 1942.)
9. S. LEVY, K. L. FIENUP, R. M. WOOLLEY: "Analysis of Square Shear Web Above Buckling Load." NACA Tech. Note No. 962, 1945.
10. S. LEVY, R. M. WOOLLEY, J. N. CORRICK: "Analysis of Deep Rectangular Shear Web Above Buckling Load." NACA, Tech. Note No. 1009, 1946.
11. S. G. A. BERGMAN: "Behaviour of Buckled Rectangular Plates under the Action of Shearing Forces." Stockholm 1948.
12. J. M. COAN: "Large Deflection Theory for Plates with Small Initial Curvature Loaded in Edge Compression." Journal of Applied Mechanics, vol. 18, Trans. ASME, vol. 73, 1951, pp. 143—151.
13. N. YAMAKI: "Postbuckling Behaviour of Rectangular Plates with Small Initial Curvature Loaded in Edge Compression." Journal of Applied Mechanics, vol. 26, Trans. ASME, vol. 81, series E 1959, pp. 407—414 and vol. 27, Trans. ASME, vol. 82 series E, 1960, pp. 335—342.

Zusammenfassung

In dem vorliegenden Beitrag wird die Lösung des nichtlinearen Problems der Theorie schlanker Wände, die in der Mittelfläche durch eine Kombination von Druck, Biegung und Schub beansprucht werden, angegeben. Die Wand ist auf den Rändern mit elastisch drückbaren Versteifungen versehen. Es wird beurteilt inwiefern sich die Methode Davidenkos, die Methode Newton-Raphson und die Methode des Gradienten für die Lösung des Systems algebraischer kubischer Gleichungen, bei der Anwendung von Digitalrechnern, eignen. Die Lösung wird durch numerische Werte illustriert.

Summary

The paper deals with the solution of the non-linear problem of the theory of slender webs which are loaded, in the middle-plane, by a combination of pressure, bending, and shear. The web is reinforced on its periphery by elastically compressible stiffeners. An evaluation is made of the methods of Davidenko and of Newton-Raphson, and the method of gradient values, are suitable for the solution of the system of algebraic cubic equations when digital computers are employed. The solution is illustrated by numerical results.

Résumé

L'auteur présente une solution au problème non linéaire de la théorie des âmes minces, soumises dans leur plan moyen à des sollicitations combinées de compression, de flexion et de cisaillement. Sur son pourtour, l'âme comporte des raidisseurs élastiquement compressibles. L'auteur examine dans quelle mesure la méthode de Davidenko, celle de Newton-Raphson et celle des gradients se prêtent à la résolution du système d'équations algébriques du 3^e degré au moyen de calculatrices électroniques. La solution du problème est illustrée par des résultats numériques.