

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

**Band:** 22 (1962)

**Artikel:** Les bordages raidis en construction hydraulique

**Autor:** Dehousse, N.M.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-18803>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# **Les bordages raidis en construction hydraulique**

*Die versteifte Stauwand im Wasserbau*

*Stiffened Steel Plating in Hydraulic Construction*

N. M. DEHOUSSE

Agrégé près la Faculté des Sciences Appliquées de l'Université de Liège (Belgique)

Dans ce qui suit, notre propos sera d'examiner l'étude élastique d'éléments cylindriques de section circulaire raidis par des nervures placées orthogonalement dans le sens des génératrices (nervures longitudinales) et dans le sens des directrices (nervures transversales ou circonférentielles).

De tels éléments sont appelés orthotropes en faisant usage d'un néologisme consacré signifiant qu'il s'agit d'une anisotropie, ici structurelle, et offrant deux directions privilégiées orthogonales.

## **I. Rappel sommaire de la théorie des coques lisses**

La méthode la plus connue pour le calcul approché mais très exact des coques cylindriques lisses est sans doute la méthode D.K.J.<sup>1)</sup> (Donnel - von Karman - Jenkins). Les notations classiquement employées, lors de l'exposé de cette méthode, sont reprises à la fig. 1 pour les coordonnées et les déplacements et à la fig. 2 pour la charge extérieure et les éléments de réduction, dans chaque section, comptés par unité de longueur. Pour alléger les écritures, nous ferons usage des signes

$$f' \text{ pour désigner } \frac{\partial f}{\partial x} \text{ et } f' \text{ pour désigner } \frac{\partial f}{\partial \varphi}.$$

La méthode D.K.J. exprime comme suit les éléments de réduction en fonction des déplacements:

---

<sup>1)</sup> De berekening van de spanningverdeling in cirkelcilindrische schaaldaken volgens de D.K.J. methode — I.B.C. mededelingen, Delft, 1956.

$$\begin{aligned}
 N_\varphi &= \frac{D}{q} (v^\cdot + w + \nu q u'), \\
 N_x &= \frac{D}{q} (u' q + \nu v^\cdot + \nu w), \\
 N_{x\varphi} &= N_{\varphi x} = \frac{D}{q} \frac{1-\nu}{2} (u^\cdot + q v'), \\
 M_\varphi &= \frac{K}{q^2} (w^{\cdot\cdot} + \nu q^2 w''), \\
 \end{aligned} \tag{1}$$

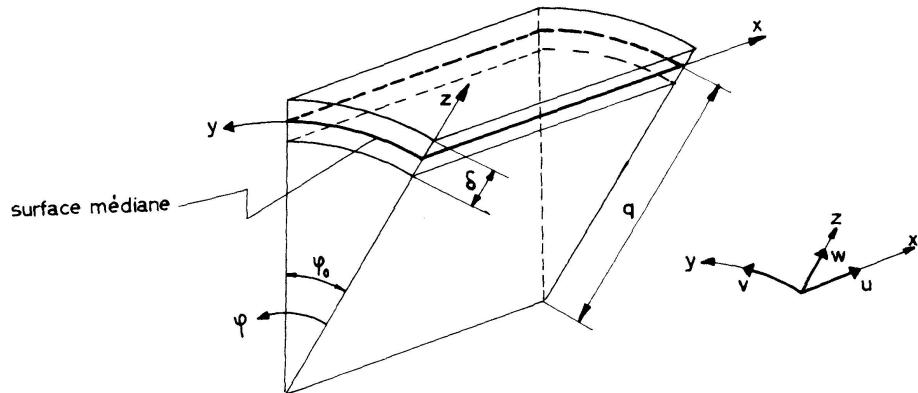


Fig. 1

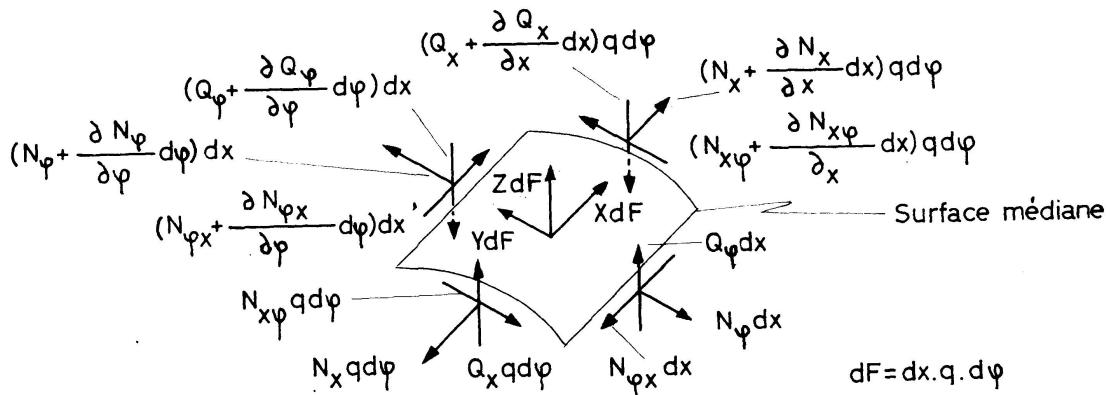


Fig. 2a

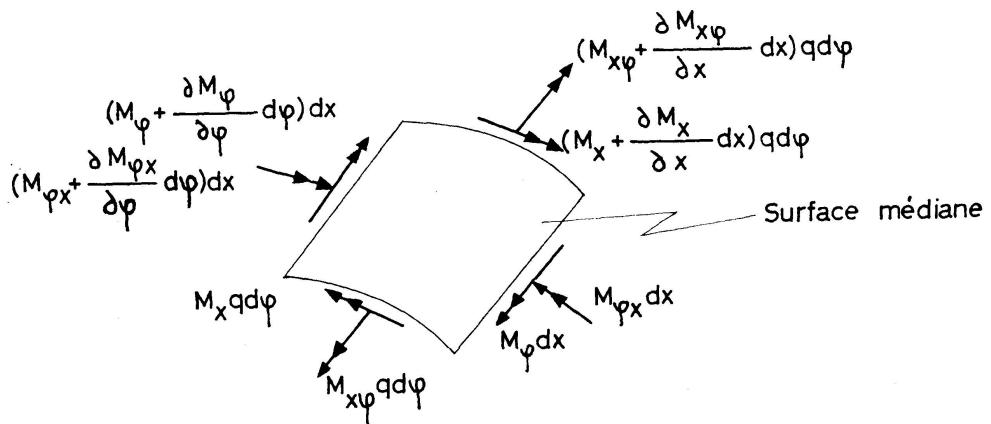


Fig. 2b

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{K}{q^2} (w'' q^2 + \nu w''), \\ M_{x\varphi} = M_{\varphi x} &= \frac{K}{q} (1 - \nu) w', \end{aligned} \quad (1)$$

où  $D = \frac{E\delta}{1-\nu^2}$ ,  $K = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}$ ,  $E$  = module élastique du matériau et  $\nu$  = coefficient de Poisson correspondant.

Le matériau constituant la coque lisse est supposé homogène et isotrope. Par les équations d'équilibre entre les éléments de réduction, on peut éliminer ces derniers pour n'obtenir finalement que les 3 équations suivantes en  $u$ ,  $v$ ,  $w$ :

$$\begin{aligned} \frac{D}{q} (u'' q + \nu v' + \nu w') + \frac{D}{q^2} \frac{1-\nu}{2} (u' + q v'') + X &= 0, \\ \frac{D}{q^2} (v' + w' + \nu q u'') + \frac{D}{q} \frac{1-\nu}{2} (u' + q v'') + Y &= 0, \\ \frac{D}{q^2} (v' + w + \nu q u') + \frac{K}{q^4} w'''' + \frac{2K}{q^2} w''' + K w''' &= Z. \end{aligned} \quad (2)$$

Il est aisément, entre ces trois relations, de faire disparaître deux des déplacements ( $u$  et  $v$ ) en ne conservant que le troisième, on obtient ainsi l'équation du 8° ordre en  $w$ :

$$\begin{aligned} K q \Delta^4 w + \frac{D}{q} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} (1 - \nu^2) &= q \Delta^2 Z + \frac{1}{q^3} \frac{\partial^3 Y}{\partial \varphi^3} \\ &+ (2 + \nu) \frac{1}{q} \frac{\partial^3 Y}{\partial x^2 \partial \varphi} - \frac{1}{q^2} \frac{\partial^3 X}{\partial x \partial \varphi^2} + \nu \frac{\partial^3 X}{\partial x^3}, \\ \text{où } \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{q^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Le problème du traitement des coques cylindriques lisses se réduit ainsi à l'étude d'une équation aux dérivées partielles linéaire.

Lorsque  $w$  aura été déterminé, on pourra en déduire  $u$  et  $v$  par les équations (2) et les efforts par les équations (1) pour autant que les conditions aux limites aient été imposées sur les bords:

$$\begin{aligned} x &= 0, \quad \text{et} \quad \varphi = 0 \\ x &= l \quad \varphi = \varphi_0 \end{aligned}$$

On ne dispose pas à l'heure actuelle des solutions correspondant à n'importe quel type de conditions aux limites.

On aborde plutôt le problème d'une manière inverse en étudiant les conditions aux limites qui correspondent à des solutions possibles.

C'est ainsi que les solutions

$$w = \sum_{n=1,2,\dots} W_n f_n(\varphi) \sin \frac{n \pi \varphi}{l} \quad \text{et} \quad w = \sum_{m=1,2,\dots} W_m f_m(x) \sin \frac{m \pi x}{l},$$

sont le plus fréquemment employées.

Elles correspondent, la première à des appuis simples en  $x=0$  et  $x=l$  et des appuis quelconques en  $\varphi=0$  et  $\varphi=\varphi_0$ , la seconde à des appuis simples en  $\varphi=0$  et  $\varphi=\varphi_0$  et des appuis quelconques en  $x=0$  et  $x=l$ .

Ce sont heureusement des conditions d'appui très fréquentes en pratique.

## II. Les équations différentielles des coques raidies

Pour le calcul des relations donnant la valeur des efforts par unité de longueur (1), on procède à des intégrations sur l'épaisseur de la coque; c'est ainsi que

$$N_\varphi = \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \sigma_\varphi 1 dz,$$

où  $\sigma_\varphi$  est l'effort par unité de surface (tension) sur laquelle il agit normalement et dans le sens des  $\varphi$ .

C'est en remplaçant ultérieurement  $\sigma_\varphi$  par sa valeur, en fonction des déplacements, que l'on obtient selon la méthode D. K. J. l'expression de  $N_\varphi$  écrite précédemment.

Dans le cas d'une coque raidie, l'expression précédente de  $N_\varphi$  ne sera valable que sur la surface de la coque non raidie.

Au droit d'un raidisseur on devra écrire selon la figure 3:

$$N_\varphi d_\varphi = \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \sigma_\varphi d_\varphi dz + \int_{\omega_\varphi} \sigma_\varphi e_\varphi dz,$$

où  $\omega_\varphi$  est l'aire de la section du raidisseur.

On aura ainsi:

$$N_\varphi = \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \sigma_\varphi dz + \int_{\omega_\varphi} \frac{e_\varphi}{d_\varphi} dz,$$

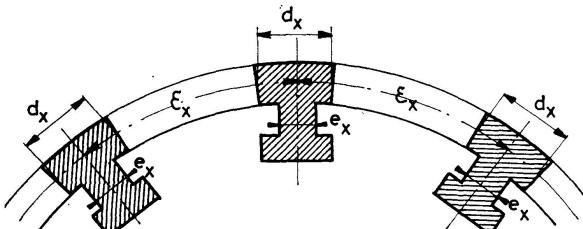
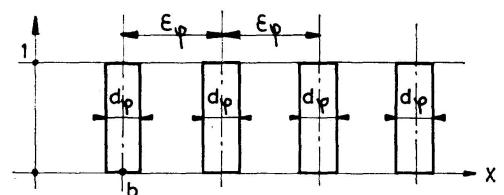
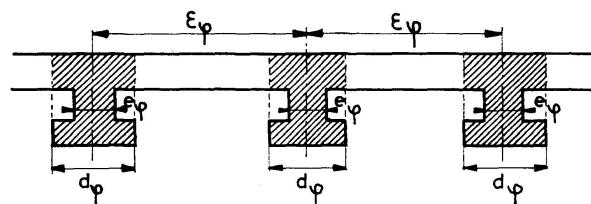


Fig. 3a

Fig. 3b

si bien que l'on pourra écrire d'une manière générale:

$$N_\varphi = \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \sigma_\varphi dz + f(x) \int_{\omega_\varphi} \sigma_\varphi \frac{e_\varphi}{d_\varphi} dz,$$

en admettant que  $\sigma_\varphi$  ne varie pas sur la largeur  $e_\varphi$ , ni sur  $d_\varphi$  et en remarquant que  $e_\varphi$  varie en fonction de  $z$  dans le domaine  $\omega_\varphi$ .

Dans la formule précédente,  $\omega_\varphi$  représente la section du raidisseur sous la coque; d'autre part,  $f(x)$  est une fonction nulle partout sauf au droit des raidisseurs où elle prend la valeur unité (fig. 3).  $f(x)$  répondra à l'expression:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{k=m} \left\{ H \left[ x - \left( b + k \epsilon_\varphi - \frac{d_\varphi}{2} \right) \right] - H \left[ x - \left( b + k \epsilon_\varphi + \frac{d_\varphi}{2} \right) \right] \right\},$$

en employant la notation  $H(x)$  pour désigner la fonction d'Heaviside.

Si l'on substitue à  $\sigma_\varphi$  son expression en fonction de  $u$ ,  $v$  et  $w$ , de la méthode D. K. J., on obtient la valeur de  $N_\varphi$  dans la coque raidie:

$$N_\varphi = \frac{D}{q} (v' + w + \nu q u') + f(x) \frac{E}{d_\varphi} \left[ \left( \frac{v'}{q} + \frac{w}{q} \right) \omega_\varphi - \frac{w''}{q^2} h_\varphi \right],$$

où  $h_\varphi$  est le moment statique de  $\omega_\varphi$  calculé par rapport à la surface médiane de la coque proprement dite.

Il est évident que cette façon de procéder appliquée aux raidisseurs longitudinaux va donner naissance à une fonction

$$f(\varphi) = \sum_{j=0}^{j=n} \left\{ H \left[ q\varphi - \left( b' + j \epsilon_x - \frac{d_x}{2} \right) \right] - H \left[ q\varphi - \left( b' + j \epsilon_x + \frac{d_x}{2} \right) \right] \right\},$$

en tout point analogue à  $f(x)$ .

Si l'on opère sur les efforts linéaires en extension, flexion, cisaillement et torsion selon  $x$  et selon  $\varphi$  on peut obtenir les relations suivantes analogues aux relations (1) mais valables pour la coque raidie.

$$\begin{aligned} N_\varphi &= \frac{D}{q} (v' + w + \nu q u') + f(x) \left[ \frac{\Omega_\varphi}{q} (v' + w) - \frac{H_\varphi}{q^2} w'' \right], \\ N_x &= \frac{D}{q} (u' q + \nu w + \nu v') + f(\varphi) [\Omega_x u' - H_x w''], \\ N_{\varphi x} &= \frac{D}{q} \frac{1-\nu}{2} (u' + q v') + f(x) S_\varphi \frac{u'}{q}, \\ N_{x\varphi} &= \frac{D}{q} \frac{1-\nu}{2} (u' + q v') + f(\varphi) S_x v', \end{aligned} \tag{4}^2$$

<sup>2)</sup> Les bordages raidis en construction hydraulique — N. M. DEHOUSSE. Ed. Derouaux, Liège 1961.

$$\begin{aligned}
 M_\varphi &= \frac{K}{q^2} (w'' + \nu q^2 w'') - f(x) \left[ \frac{H_\varphi}{q} (w + v') - \frac{R_\varphi}{q^2} w'' \right], \\
 M_x &= \frac{K}{q^2} (w'' q^2 + \nu w'') - f(\varphi) [H_x u' - R_x w''], \\
 M_{\varphi x} &= \frac{K}{q} (1 - \nu) w'' + f(x) \left[ T_\varphi \frac{w'}{q} + L_\varphi \frac{u'}{q} \right], \\
 M_{x\varphi} &= \frac{K}{q} (1 - \nu) w'' + f(\varphi) \left[ T_x \frac{w'}{q} + L_x v' \right].
 \end{aligned} \tag{4}$$

Pour simplifier les écritures, les notations suivantes ont été introduites:

$$\begin{array}{lll}
 \frac{E \omega_\varphi}{d_\varphi} = \Omega_\varphi, & \frac{E h_\varphi}{d_\varphi} = H_\varphi, & \frac{EI_\varphi}{d_\varphi} = R_\varphi, \\
 \frac{G \Omega'_\varphi}{d_\varphi} = S_\varphi, & \frac{G K_{\varphi x}}{d_\varphi} = T_\varphi, & \frac{\lambda_\varphi G \Omega'_\varphi}{d_\varphi} = L_\varphi, \\
 \frac{E \omega_x}{d_x} = \Omega_x, & \frac{E h_x}{d_x} = H_x, & \frac{EI_x}{d_x} = R_x, \\
 \frac{G \Omega'_x}{d_x} = S_x, & \frac{G K_{x\varphi}}{d_x} = T_x, & \frac{\lambda_x G \Omega'_x}{d_x} = L_x,
 \end{array}$$

où  $\omega_x$  et  $\omega_\varphi$  représentent la surface de la section des raidisseurs,  
 $h_x$  et  $h_\varphi$  sont les moments statiques des  $\omega_x$  et  $\omega_\varphi$  calculés par rapport à la surface médiane,  
 $I_x$  et  $I_\varphi$  sont les moments d'inertie des mêmes  $\omega_x$  et  $\omega_\varphi$  calculés par rapport à la surface médiane,  
 $K_{x\varphi}$  et  $K_{\varphi x}$  constituent les modules de torsion des raidisseurs,

enfin  $\Omega'_x$ ,  $\Omega'_\varphi$ ,  $\lambda_x$  et  $\lambda_\varphi$  marquent la contribution des raidisseurs au cisaillement: dans l'hypothèse où les raidisseurs sont des profilés en té soudés sur ou sous la coque, avec leurs semelles parallèles à la coque,  $\Omega'_x$  et  $\Omega'_\varphi$  sont les sections réduites de ces semelles et  $\lambda_x$ ,  $\lambda_\varphi$  sont les distances de la surface médiane de la coque au centre de gravité des sections réduites.

Les  $\omega$ ,  $I$ ,  $\Omega'$ ,  $K_{x\varphi}$ ,  $K_{\varphi x}$  sont toujours positifs; les  $h$  sont positifs dans le sens où  $z$  est positif donc si les raidisseurs sont sur la coque (à l'extrados), les  $\lambda$  sont positifs dans le sens des  $z$  négatifs donc si les raidisseurs sont sous la coque (à l'intrados).

Toutes ces caractéristiques sont à calculer pour chaque type de raidisseur: il est évident que l'on n'est pas tenu à respecter la seule forme de profilé en té.

En suivant un processus analogue à celui des coques non raidies, soit en éliminant par les équations d'équilibre les éléments de réduction entre les relations (4) et les équations d'équilibre, on voit apparaître les trois équations différentielles suivantes qui sont ainsi celles des coques à nervures:

$$\begin{aligned}
& \frac{D}{q} (u'' q + \nu v'' + \nu w') + \frac{D}{q^2} \frac{1-\nu}{2} (u'' + q v'') \\
& + f(x) \frac{S_\varphi}{q^2} u'' + f(\varphi) (\Omega_x u'' - H_x w'') + X = 0, \\
& \frac{D}{q^2} (v'' + w' + \nu q u'') + \frac{D}{q} \frac{1-\nu}{2} (u'' + q v'') \\
& + f(x) \frac{1}{q^2} \left[ \Omega_\varphi (v'' + w') - \frac{H_\varphi}{q} w''' \right] + f(\varphi) S_x v'' + Y = 0, \\
& \frac{D}{q^2} (v' + w + \nu q u') + \frac{K}{q^4} w'''' + \frac{2K}{q^2} w''' + \frac{K}{q^2} w'''' q^2 \\
& + f(x) \frac{1}{q} \left[ \frac{\Omega_\varphi}{q} (v' + w) - \frac{2H_\varphi}{q^2} w'' - \frac{H_\varphi}{q^2} v''' + \frac{R_\varphi}{q^3} w'''' + T_\varphi \frac{w''''}{q} + L_\varphi \frac{u'''}{q} \right] \\
& + f(\varphi) \frac{1}{q} \left[ T_x \frac{w''''}{q} + L_x v''' - H_x q u''' + R_x q w'''' \right] \\
& + f(\varphi) \frac{1}{q} \left( \frac{T_x}{q} w'''' + L_x v''' \right) + f'(x) \frac{1}{q^2} (T_\varphi w''' + L_\varphi u'') = Z.
\end{aligned} \tag{5}$$

### III. Discussion des équations différentielles des coques raidies

1. Les trois équations (5) méritent un examen sérieux, car elles sont la clé de la résolution des coques raidies.

Dans les équations en cause, on découvre trois séries de termes:

- a) ceux représentant la charge appliquée:  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ ;
- b) ceux en  $D$ ,  $K$ ,  $u$ ,  $v$  et  $w$  et qui sont communs aux équations (5) des coques raidies et aux équations (2) des coques lisses;
- c) ceux en  $f(x)$ ,  $f(\varphi)$ ,  $f'(x)$  et  $f'(\varphi)$ .

La signification en est évidente: la charge appliquée est reprise partiellement par la coque et partiellement par les nervures; le rôle des raidisseurs est ainsi matérialisé par les termes en  $f(x)$ ,  $f(\varphi)$ ,  $f'(x)$  et  $f'(\varphi)$ .

Si l'on pose  $f(x) = f'(x) = 0$ , on se trouve en présence d'une coque raidie seulement dans le sens longitudinal.

Si l'on pose  $f(\varphi) = f'(\varphi) = 0$ , il n'y a que des nervures transversales.

Si enfin  $f(x) = f'(x) = f(\varphi) = f'(\varphi) = 0$ , on a affaire à la coque non raidie.

2. Le rôle des raidisseurs se caractérise par quatre types de forces. Les trois premiers sont ceux des termes en  $f(x)$  et  $f(\varphi)$ :

$$\begin{aligned}
X_0 &= \left( \frac{S_\varphi}{q^2} u'' \right)_{\text{suivant } \varphi} \quad \text{et} \quad (\Omega_x u'' - H_x w'')_{\text{suivant } x}, \\
Y_0 &= \frac{1}{q^2} \left[ \Omega_\varphi (v'' + w') - \frac{H_\varphi}{q} w''' \right]_{\text{suivant } \varphi} \quad \text{et} \quad (S_x v'')_{\text{suivant } x},
\end{aligned}$$

$$Z_0 = \frac{1}{q} \left[ \frac{\Omega_\varphi}{q} (v^\cdot + w) - \frac{2H_\varphi}{q^2} w^{\cdot\cdot} - \frac{H_\varphi}{q^2} v^{\cdot\cdot\cdot} + \frac{R_\varphi}{q^3} w^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + \frac{T_\varphi}{q} w^{\cdot\cdot\cdot\prime} + L_\varphi \frac{u^{\cdot\cdot\cdot\prime}}{q} \right]_{\text{suivant } \varphi},$$

et  $\frac{1}{q} \left[ T_x \frac{w^{\cdot\cdot\prime}}{q} - H_x q u^{\prime\prime\prime} + R_x q w^{\prime\prime\prime\prime} + L_x v^{\cdot\cdot\prime} \right]_{\text{suivant } x}.$

$X_0$ ,  $Y_0$  et  $Z_0$  sont des pressions agissant sur la surface médiane de la coque et le long de bandes dont la largeur est  $d_\varphi$  suivant  $x$  et  $d_x$  suivant  $\varphi$ .

Sur la largeur des bandes, ces pressions restent constantes.

Le quatrième type de force est celui des termes en  $f'(x)$  et  $f^\cdot(\varphi)$ .

De la définition des fonctions  $f(x)$  et  $f(\varphi)$  on peut écrire:

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{k=m} \left\{ \delta \left[ x - \left( b + k \epsilon_\varphi - \frac{d_\varphi}{2} \right) \right] - \delta \left[ x - \left( b + k \epsilon_\varphi + \frac{d_\varphi}{2} \right) \right] \right\},$$

et  $f^\cdot(\varphi) = \sum_{j=0}^{j=n} \left\{ \delta \left[ q \varphi - \left( b' + j \epsilon_x - \frac{d_x}{2} \right) \right] - \delta \left[ q \varphi - \left( b' + j \epsilon_x + \frac{d_x}{2} \right) \right] \right\},$

où  $\delta(x)$  est la fonction de Dirac dont l'existence a été consacrée par les physiciens et justifiée par des mathématiciens tels que L. Schwarz (Théorie des distributions).

On sait que la fonction  $\delta(x)$  est nulle partout, sauf à l'origine où sa valeur est infinie de telle sorte que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1.$$

La plus importante propriété de cette fonction est celle qui lui permet de sélectionner dans n'importe quelle autre fonction une valeur particulière:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a) f(x) dx = f(a).$$

Le calcul symbolique montre que sa relation avec la fonction d'Heaviside est très simple:

$$H'(x) = \delta(x).$$

On sait en effet que la dérivation des fonctions symboliques est définie à partir de la propriété d'intégration par parties:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s'(x) f(x) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) s(x) dx,$$

où  $s(x)$  désigne une fonction symbolique et  $f(x)$  une fonction dont la seule restriction est de s'annuler en dehors d'un intervalle fini.

Dans la présente note, les fonctions  $f(x)$  sont précisément de ce type et la substitution de  $\delta(x)$  à  $H'(x)$  est licite.

Dès lors, il apparaît que les termes en  $f'(x)$  et  $f^\cdot(\varphi)$  symbolisent des forces concentrées dans un système de forces réparties.

Comme ils font intervenir une série de fonctions  $\delta$  agissant en des points distants de  $d_\varphi$  ou  $d_x$  et que ces fonctions  $\delta$  sont précédées de signes différents, les termes en  $f'(x)$  et  $f'(\varphi)$  définissent des couples de forces radiales donc normales à la surface.

Leur valeur est ainsi

$$U_{0\varphi} = \frac{1}{q^2} (T_\varphi w''' + L_\varphi u'') d_\varphi \quad \text{suivant } \varphi,$$

et

$$U_{0x} = \left( \frac{T_x}{q} w'' + L_x v'' \right) d_x \quad \text{suivant } x.$$

Le problème de la coque raidie peut ainsi être ramené à un problème de coque lisse: cette dernière étant chargée des forces extérieures et des  $X_0$ ,  $Y_0$ ,  $Z_0$  et  $U_0$  adéquats (fig. 4).

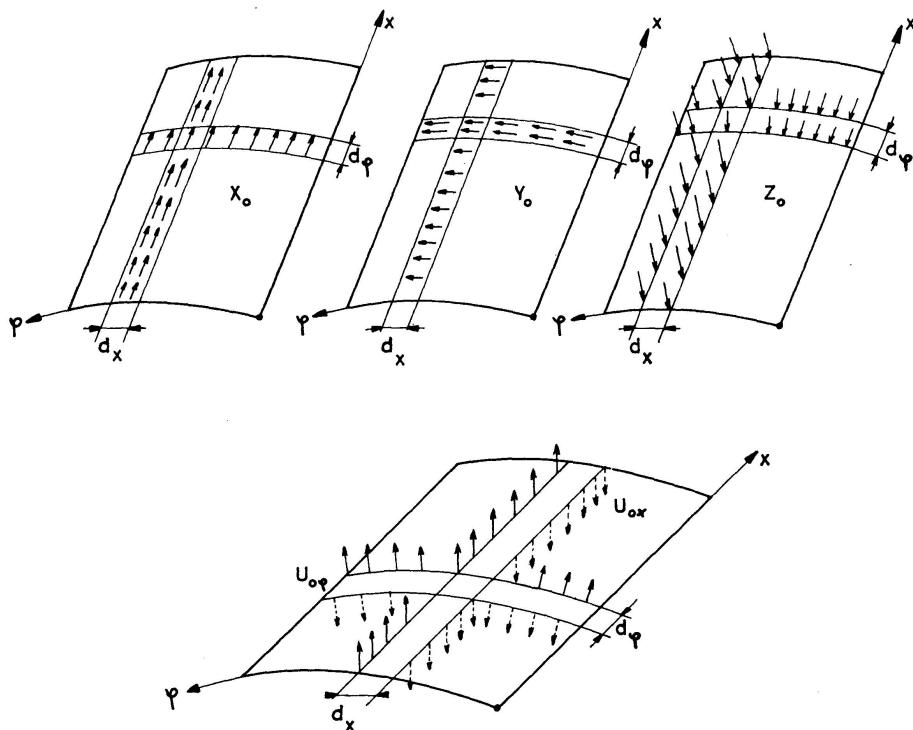


Fig. 4

Les  $X_0$ ,  $Y_0$ ,  $Z_0$  sont des pressions agissant sur des bandes de largeur généralement faible ( $d_\varphi$ ,  $d_x$ ).

3. Pour rendre la suite de l'étude plus abordable, bien qu'il n'y ait aucune impossibilité théorique à opérer autrement, on supposera les pressions en cause, réduites à l'effort correspondant à une intégration dans le sens de la largeur de la bande.

Ainsi plutôt que de parler de pressions  $X_0$ ,  $Y_0$  et  $Z_0$ , on opérera sur des  $X_0 d_\varphi$ ,  $Y_0 d_\varphi$  et  $Z_0 d_\varphi$  qui sont des lignes de forces dans le sens des  $\varphi$ .

De la même manière, les bandes longitudinales de largeur  $d_x$  seront remplacées par des forces linéaires

$$X_0 d_x, \quad Y_0 d_x \quad \text{et} \quad Z_0 d_x.$$

Enfin, les moments  $U_{0\varphi}$  et  $U_{0x}$  constitués de forces égales mais opposées et distantes de  $d_\varphi$  et  $d_x$  seront remplacés par des lignes de moment de même intensité.

Ce procédé est d'autant plus correct que les largeurs  $d_\varphi$  et  $d_x$  sont petites.

A ce stade, le calcul de la coque raidie est ramené à celui d'une coque lisse chargée de forces extérieures et de lignes de forces et de moment le long des nervures.

4. D'autres équations peuvent être déduites des équations (5). Notamment celles des plaques raidies qui s'écrivent avec  $\frac{\partial f}{\partial y} = f^0$

$$D u'' + D v v^o + \frac{D}{2} (1 - \nu) u^{oo} + f(x) S_\varphi u^{oo} + f(y) (\Omega_x u'' - H_x w''') + X = 0,$$

$$D (v^o + \nu u^o) + \frac{D}{2} (1 - \nu) (u^o + v'') + f(x) (\Omega_\varphi v^{oo} - H_\varphi w^{ooo}) + f(y) S_x v'' + Y = 0,$$

$$\begin{aligned} K w^{oooo} + 2 K w^{oo''} + K w''' + f(x) [-H_\varphi v^{ooo} + R_\varphi w^{oooo} + T_\varphi w^{oo''} + L_\varphi u^{oo'}] \\ + f(y) [T_x w^{oo''} + L_x v'' - H_x u''' + R_x w'''] \\ + f^o(y) (T_x w^{oo''} + L_x v'') + f'(x) (T_\varphi w^{oo''} + L_\varphi u^{oo}) = Z. \end{aligned}$$

En ne considérant que les déplacements verticaux  $w$ , on aura simplement:

$$\begin{aligned} K w^{oooo} + 2 K w^{oo''} + K w''' + f(x) [R_\varphi w^{oooo} + T_\varphi w^{oo''}] + f(y) [T_x w^{oo''} + R_x w'''] \\ + f^o(y) [T_x w^{oo''}] + f'(x) [T_\varphi w^{oo''}] = Z. \end{aligned}$$

Enfin, il est possible de déduire de (5) les équations différentielles que l'on obtiendrait en répartissant les raideurs des nervures uniformément entre deux nervures.

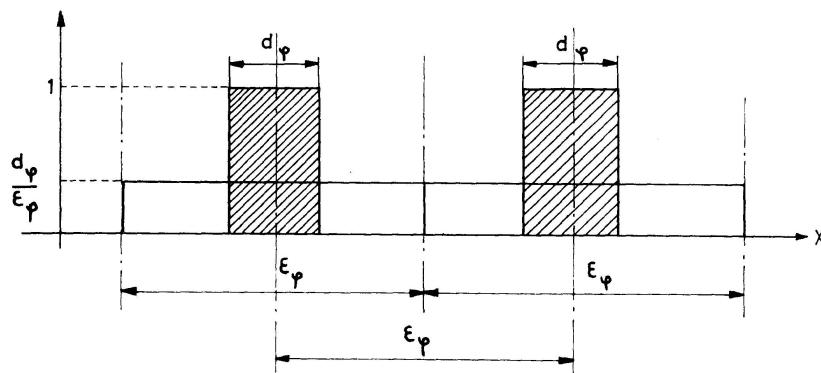


Fig. 5

Pour cela, et conformément à la figure 5, on voit qu'il suffit de remplacer

$$f(x) \text{ par une fonction constante: } \frac{d_\varphi}{\epsilon_\varphi},$$

$$f(\varphi) \text{ par une fonction constante: } \frac{d_x}{\epsilon_x},$$

et de poser  $f'(x) = f'(\varphi) = 0$ .

On peut ensuite incorporer les facteurs  $\frac{d_\varphi}{\epsilon_\varphi}$  et  $\frac{d_x}{\epsilon_x}$  dans les raideurs et écrire

$$\Omega_\varphi^r = \Omega_\varphi \frac{d_\varphi}{\epsilon_\varphi} = \frac{E \omega_\varphi}{\epsilon_\varphi},$$

$$H_\varphi^r = H_\varphi \frac{d_\varphi}{\epsilon_\varphi} = \frac{E h_\varphi}{\epsilon_\varphi},$$

$$\Omega_x^r = \Omega_x \frac{d_x}{\epsilon_x} = \frac{E \omega_x}{\epsilon_x},$$

$$H_x^r = H_x \frac{d_x}{\epsilon_x} = \frac{E h_x}{\epsilon_x},$$

$$R_\varphi^r = R_\varphi \frac{d_\varphi}{\epsilon_\varphi} = \frac{EI_\varphi}{\epsilon_\varphi},$$

$$S_\varphi^r = S_\varphi \frac{d_\varphi}{\epsilon_\varphi} = \frac{G \Omega'_\varphi}{\epsilon_\varphi},$$

$$R_x^r = R_x \frac{d_x}{\epsilon_x} = \frac{EI_x}{\epsilon_x},$$

$$S_x^r = S_x \frac{d_x}{\epsilon_x} = \frac{G \Omega'_x}{\epsilon_x},$$

$$T_\varphi^r = T_\varphi \frac{d_\varphi}{\epsilon_\varphi} = \frac{G}{\epsilon_\varphi} K_{\varphi x},$$

$$L_\varphi^r = L_\varphi \frac{d_\varphi}{\epsilon_\varphi} = \frac{\lambda_\varphi}{\epsilon_\varphi} G \Omega'_\varphi,$$

$$T_x^r = T_x \frac{d_x}{\epsilon_x} = \frac{G}{\epsilon_x} K_{x \varphi},$$

$$L_x^r = L_x \frac{d_x}{\epsilon_x} = \frac{\lambda_x}{\epsilon_x} G \Omega'_x.$$

Dans ces conditions les équations en cause se transforment en 3 équations différentielles à coefficients constants:

$$\begin{aligned} & \frac{D}{q} (u'' q + \nu v'' + \nu w') + \frac{D}{q^2} \frac{1-\nu}{2} (u'' + q v'') + \frac{S_\varphi^r}{q^2} u'' + \Omega_x^r u'' - H_x^r w''' + X = 0, \\ & \frac{D}{q^2} (v'' + w' + \nu q u'') + \frac{D}{q} \frac{1-\nu}{2} (u'' + q v'') \\ & \quad + \frac{\Omega_\varphi^r}{q^2} (v'' + w') - \frac{H_\varphi^r}{q^3} w''' + S_x^r v'' + Y = 0, \\ & \frac{D}{q^2} (v' + w + \nu q u') + \frac{K}{q^4} w'''' + \frac{2K}{q^2} w''' + \frac{K}{q^2} w''' q^2 + \frac{\Omega_\varphi^r}{q^2} (v' + w) \\ & \quad - \frac{2H_\varphi^r}{q^3} w'' + \frac{L_\varphi^r}{q^2} u''' - \frac{H_\varphi^r}{q^3} v''' + \frac{R_\varphi^r}{q^4} w'''' + \frac{T_\varphi^r}{q^2} w''' + \frac{T_x^r}{q^2} w''' \\ & \quad - H_x^r u''' + R_x^r w''' + L_x^r \frac{1}{q} v''' = Z. \end{aligned} \tag{6}$$

Dans le cas fréquent où les nervures sont minces dans le sens parallèle à la surface médiane de la coque, ( $d_x$  et  $d_\varphi$  petits) on peut admettre que les efforts de cisaillement sont repris uniquement par la coque seule et dans les équations ci-dessus, les coefficients  $S_\varphi^r$ ,  $S_x^r$ ,  $L_\varphi^r$  et  $L_x^r$  disparaissent.

On retrouve alors les 3 équations différentielles mentionnées par MAS-SONNET<sup>3)</sup>.

#### IV. Principe de résolution des équations des coques raidies

La valeur des efforts  $X_0 d_x$ ,  $Y_0 d_x \dots Z_0 d_\varphi$  dépend essentiellement des déformations finales  $u$ ,  $v$  et  $w$  soit donc de la solution.

C'est à cause de cette caractéristique que leur détermination ne peut se faire qu'au moyen de relations intégrales.

Dans les calculs du présent paragraphe, on a considéré seulement 3 des 4 efforts linéaires dans le but de soulager les écritures.

Formellement les  $U_0$  seront omis ici et seuls les  $X_0$ ,  $Y_0$  et  $Z_0$  seront pris en considération.

Il n'y a évidemment aucune difficulté de principe à inclure les  $U_0$  dans les formules qui vont suivre.

Lorsque la coque raidie se déforme, les efforts précités varient de point en point le long des nervures.

Supposant les variations connues nous les désignerons par

$$\begin{array}{ll} F_\varphi(k\epsilon_\varphi, \varphi) \text{ pour } Z_0 d_\varphi & F_x(x, l\epsilon_x) \text{ pour } Z_0 d_x \\ \Phi_\varphi(k\epsilon_\varphi, \varphi) \text{ pour } Y_0 d_\varphi & \Phi_x(x, l\epsilon_x) \text{ pour } Y_0 d_x \\ \Psi_\varphi(k\epsilon_\varphi, \varphi) \text{ pour } X_0 d_\varphi & \Psi_x(x, l\epsilon_x) \text{ pour } X_0 d_x \end{array}$$

où  $k$  et  $l$  fixent respectivement la position de la nervure circonférentielle et de la nervure longitudinale.

Ainsi donc  $F_\varphi(k\epsilon_\varphi, \varphi)$  représente la variation selon  $\varphi$  de la force radiale exercée par la  $k^{\text{ième}}$  nervure circonférentielle sur la coque lisse et  $\Psi_x(x, l\epsilon_x)$  représente la variation selon  $x$  de la force longitudinale exercée par la  $l^{\text{ième}}$  nervure longitudinale sur la coque lisse.

On suppose ensuite que l'on soit en mesure de calculer les déplacements  $u$ ,  $v$  et  $w$  de la coque lisse mais sollicitée par

- a) une force concentrée radiale unitaire,
- b) une force concentrée circonférentielle unitaire,
- c) une force concentrée longitudinale unitaire.

Ces déplacements seront désignés respectivement par

$$\begin{aligned} u_A, \quad v_A, \quad w_A. \\ u_B, \quad v_B, \quad w_B. \\ u_C, \quad v_C, \quad w_C. \end{aligned}$$

Ces  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont ainsi les fonctions de Green associées aux systèmes des 3 équations différentielles des coques lisses:

---

<sup>3)</sup> Plaques et coques cylindriques orthotropes à nervures dissymétriques, CH. MAS-SONNET, A.I.P.C. Volume 19, Zürich 1959.

$$\begin{aligned}
F X(u, v, w) &= 0, & F X(u, v, w) &= 0, \\
F Y(u, v, w) &= 0, & F Y(u, v, w) + \delta(x - \bar{x}, \varphi - \bar{\varphi}) &= 0, \\
F Z(u, v, w) &= \delta(x - \bar{x}, \varphi - \bar{\varphi}), & F Z(u, v, w) &= 0, \\
&& F X(u, v, w) + \delta(x - \bar{x}, \varphi - \bar{\varphi}) &= 0, \\
&& F Y(u, v, w) &= 0, \\
&& F Z(u, v, w) &= 0,
\end{aligned}$$

où  $F X(u, v, w)$ ,  $F Y(u, v, w)$  sont les termes des équations différentielles (2) non compris les termes de charge et où  $\bar{x}$  et  $\bar{\varphi}$  fixent la position de la force unitaire concentrée.

Ainsi les  $u_A, v_A, w_A \dots w_C$  dépendent de deux types de coordonnées: celles fixant la position de la force concentrée  $(\bar{x}, \bar{\varphi})$  et celles qui fixent la position des points courants  $(x, \varphi)$ .

On peut obtenir deux expressions différentes des actions créées par les nervures.

La première est celle des  $F_\varphi, \Phi_\varphi \dots \Psi_x$ .

Pour obtenir la seconde, il suffit de remplacer dans les  $Z_0 d_\varphi, Y_0 d_\varphi \dots X_0 d_x$  les déplacements  $u, v, w$  par leur valeur réelle.

Pour y arriver, on substitue d'abord dans ces expressions, les déformations créées par des forces unitaires:

$$u_A, v_A, w_A \dots w_C.$$

On obtient ainsi de nouvelles expressions qui seront désignées par

$$\begin{aligned}
&(Z_0 d_\varphi)_A (Y_0 d_\varphi)_A (X_0 d_\varphi)_A \\
&(Z_0 d_x)_A (Y_0 d_x)_A (X_0 d_x)_A \text{ obtenues par substitution des } u_A, v_A, w_A. \\
&(Z_0 d_\varphi)_B \dots \dots \\
&\dots \dots (X_0 d_x)_B \text{ obtenues par substitution des } u_B, v_B, w_B. \\
&(Z_0 d_\varphi)_C \dots \dots \\
&\dots \dots (X_0 d_\varphi)_C \text{ obtenues par substitution des } u_C, v_C, w_C.
\end{aligned}$$

Ces 18 expressions sont ainsi des fonctions de  $x, \varphi, \bar{x}$  et  $\bar{\varphi}$ .

On possède à présent tous les outils nécessaires pour égaler les deux formes des actions créées par les nervures. On est conduit à 6 équations:

$$\begin{aligned}
F_\varphi(x, \varphi) = & \\
&(Z_0 d_\varphi)_I + \sum_{k=1}^{k=n} \left\{ \int_{\bar{\varphi}} (Z_0 d_\varphi)_A F_\varphi(k \epsilon_\varphi, \bar{\varphi}) q d\bar{\varphi} \right\} + \sum_{k=1}^{k=n} \left\{ \int_{\bar{\varphi}} (Z_0 d_\varphi)_B \Phi_\varphi(k \epsilon_\varphi, \bar{\varphi}) q d\bar{\varphi} \right\} \\
&+ \sum_{k=1}^{k=n} \left\{ \int_{\bar{\varphi}} (Z_0 d_\varphi)_C \Psi_\varphi(k \epsilon_\varphi, \bar{\varphi}) q d\bar{\varphi} \right\} + \sum_{l=1}^{l=m} \left\{ \int_{\bar{x}} (Z_0 d_\varphi)_A F_x(\bar{x}, l \epsilon_x) d\bar{x} \right\} \\
&+ \sum_{l=1}^{l=m} \left\{ \int_{\bar{x}} (Z_0 d_\varphi)_B \Phi_x(\bar{x}, l \epsilon_x) d\bar{x} \right\} + \sum_{l=1}^{l=m} \left\{ \int_{\bar{x}} (Z_0 d_\varphi)_C \Psi_x(\bar{x}, l \epsilon_x) d\bar{x} \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_\varphi(x, \varphi) = & \\
& (Y_0 d_\varphi)_I + \sum_{k=1}^{k=n} \left\{ \int_{\bar{\varphi}} (Y_0 d_\varphi)_A F_\varphi(k \epsilon_\varphi, \bar{\varphi}) q d\bar{\varphi} \right\} + \sum_{k=1}^{k=n} \left\{ \int_{\bar{\varphi}} (Y_0 d_\varphi)_B \Phi_\varphi(k \epsilon_\varphi, \bar{\varphi}) q d\bar{\varphi} \right\} \\
& + \sum_{k=1}^{k=n} \left\{ \int_{\bar{\varphi}} (Y_0 d_\varphi)_C \Psi_\varphi(k \epsilon_\varphi, \bar{\varphi}) q d\bar{\varphi} \right\} + \sum_{l=1}^{l=m} \left\{ \int_{\bar{x}} (Y_0 d_\varphi)_A F_x(\bar{x}, l \epsilon_x) d\bar{x} \right\} \\
& + \sum_{l=1}^{l=m} \left\{ \int_{\bar{x}} (Y_0 d_\varphi)_B \Phi_x(\bar{x}, l \epsilon_x) d\bar{x} \right\} + \sum_{l=1}^{l=m} \left\{ \int_{\bar{x}} (Y_0 d_\varphi)_C \Psi_x(\bar{x}, l \epsilon_x) d\bar{x} \right\},
\end{aligned}$$

et 4 autres relations analogues en

$$X_0 d_\varphi, \quad Z_0 d_x, \quad Y_0 d_x \quad \text{et} \quad X_0 d_x.$$

Dans la première de ces équations on trouve exprimée d'une manière générale l'égalité entre  $F_\varphi$  et  $Z_0 d_\varphi$ .

$(Z_0 d_\varphi)_I$  représente l'expression de  $Z_0 d_\varphi$  dans laquelle on a substitué les  $u, v$  et  $w$  de la coque lisse: c'est une fonction de  $x$  et  $\varphi$ .

Les expressions entre accolades sont évidentes; elles représentent l'intégration selon une fonction donnée de fonctions unitaires.

Les différents termes du membre de droite de cette première équation correspondent au fait que la coque raidie peut être étudiée par superposition de la charge extérieure appliquée et de charges lignes de forces agissant le long des axes des nervures.

Les 6 équations ci-dessus constituent un système de 6 équations intégrales de Fredholm de la 2e espèce dégénérées en sommes, en les 6 fonctions inconnues:

$$F_\varphi, \Phi_\varphi, \Psi_\varphi, F_x, \Phi_x, \Psi_x.$$

Les noyaux de ces 6 équations intégrales  $(Z_0 d_\varphi)_A, (Y_0 d_\varphi)_A, (X_0 d_\varphi)_A, \dots$  résultent donc de l'introduction des fonctions de Green associées aux 3 équations différentielles de coques lisses, dans les expressions des  $(Z_0 d_\varphi), (Y_0 d_\varphi) \dots (X_0 d_x)$ .

Le problème est ainsi ramené:

1. au calcul de ces fonctions de Green,
2. à la résolution du système des 6 équations intégrales.

On sait qu'un moyen parfois commode pour le calcul des fonctions de Green est de faire appel aux transformées de Laplace.

Pour que ce procédé soit réellement efficace, il faut connaître toutes les conditions aux limites au même bord (problème aux valeurs initiales).

Pour des problèmes aux frontières, il fonctionne dans quelques cas en laissant subsister des inconnues qui, après inversion, seront calculées en tenant compte des conditions aux limites.

Ce processus, très lourd, ne fonctionne pas ici étant donné la complexité des conditions aux limites.

Un autre système est celui consistant à exprimer la force concentrée en

série double de Fourier; on peut ainsi, en utilisant de nombreux termes de la série, trouver une solution pour la coque appuyée sur les 4 bords

$$(x=0), \quad (x=l), \quad (\varphi=0), \quad (\varphi=\varphi_0).$$

Très souvent, on peut considérer les coques comme étant appuyées sur deux bords et possédant d'autres caractéristiques sur les deux autres bords; par exemple

1. en  $x = 0$  et  $x = l$ : appui simple  
en  $\varphi = 0$  et  $\varphi = \varphi_0$ : bords libres, encastrés, l'un libre, l'autre appuyé ...
2. en  $\varphi = 0$  et  $\varphi = \varphi_0$ : appui simple  
en  $x = 0$  et  $x = l$ : bords libres, encastrés, l'un appuyé, l'autre encastré ...

On peut alors employer pour le calcul des fonctions de Green des séries simples dans un procédé analogue à celui de Lévy-Estanave pour le calcul des plaques.

On fait appel dans ce cas aux formules rappelées précédemment:

$$w = \sum_{n=1,2,\dots} W_n f_n(\varphi) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

$$w = \sum_{m=1,2,\dots} W_m f_m(x) \sin \frac{m\pi \varphi}{\varphi_0}.$$

## V. Cas pratiques d'applications

Les équations intégrales précédentes décrivent l'aspect le plus compliqué que le problème puisse revêtir.

En fait, lors des applications à la construction métallique pratique (hydraulique-aéronautique-navale) des circonstances simplificatrices permettront un traitement plus aisé. Ce sera notamment les cas :

1. lorsque la coque pourra être supposée appuyée sur les deux bords  $\varphi = 0$  et  $\varphi = \varphi_0$  et que seules des nervures circonférentielles existeront;
2. lorsqu'elle pourra être supposée appuyée sur les deux bords  $x = 0$  et  $x = l$  et que seules des nervures longitudinales existeront;
3. lorsque les nervures d'un cours seront très voisines au point que leur action sur la coque soit pratiquement continue;
4. lorsque les deux cours de nervures seront dans les mêmes conditions qu'au 3. ci-dessus.

## VI. Coque raidie dans un seul sens

1. Dans l'hypothèse où la coque est raidie dans une seule direction (soit  $\varphi$ , soit  $x$ ), les difficultés sont beaucoup moindres. En effet, le problème des coques raidies dans deux sens exige l'étude des effets des forces locales (fonctions de

Green) qui sont très difficiles à obtenir alors que si la coque ne présente qu'un seul cours de nervures, adéquatement placées, on peut se contenter de faire appel à des forces linéaires variant en sinus ou cosinus et d'intensité unité.

Notamment, si l'on suppose que la coque repose sur les bords  $\varphi=0$  et  $\varphi=\varphi_0$  d'une manière simple, la solution qui admet un développement en série simple de Fourier dans le sens des  $\varphi$  est applicable. Tous les déplacements de la coque seront des fonctions circulaires dans le sens des  $\varphi$  et dès lors, puisque les  $X_0 d_\varphi$ ,  $Y_0 d_\varphi$  et  $Z_0 d_\varphi$  sont des fonctions linéaires des  $u$ ,  $v$  et  $w$ , ceux-ci varieront aussi selon des fonctions circulaires de  $\varphi$ . On est ainsi conduit à l'étude de coques sollicitées par des lignes de force variant suivant des fonctions circulaires de  $\varphi$ .

On pourrait aussi conclure à l'étude des effets de  $X_0 d_x$ ,  $Y_0 d_x$  et  $Z_0 d_x$ , variant suivant les fonctions circulaires en  $x$ , dans des coques appuyées simplement en  $x=0$  et  $x=l$ .

2. Pour employer le processus décrit précédemment, il importe évidemment que la coque considérée soit appuyée sur 2 bords et que les nervures soient disposées dans le sens perpendiculaire à ces deux bords.

Il est alors possible d'envisager l'action de forces linéaires, agissant suivant une directrice (fig. 6a) ou suivant une génératrice (fig. 6b), et variant dans le sens de la nervure selon

$$\sin \gamma \varphi \text{ (ou } \cos \gamma \varphi\text{)}, \quad \sin \lambda x \text{ (ou } \cos \lambda x\text{)}.$$

Cela impose donc que dans le sens des nervures, la charge soit développée en série de Fourier et que chaque terme de la série soit étudié séparément.

A titre d'exemple, on a considéré les cas représentés par les figures 6c à 6f.

Dans ces figures, les appuis sont schématisés par des hachures et la pression appliquée est représentée en pointillés. Les pressions considérées varient selon la loi hydrostatique: on s'est placé dans l'optique de la construction hydraulique.

— Cas de la figure 6c.

Le développement doit porter dans le sens des  $\varphi$  et la charge appliquée doit s'écrire

$$Z = -\Delta x \left[ \sum_n A_n \sin \frac{2n\pi\varphi}{2\varphi_0} \right] \quad \text{où } \Delta = \text{poids spécifique de l'eau}$$

avec

$$A_n = \frac{2}{\varphi_0} \int_0^{+\varphi_0} \sin \frac{n\pi\varphi}{\varphi_0} d\varphi$$

donc

$$Z = -\Delta x \left[ \sin \frac{\pi\varphi}{\varphi_0} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi\varphi}{\varphi_0} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi\varphi}{\varphi_0} + \dots \right] \frac{4}{\pi}.$$

Les trois premiers termes suffiront en général pour assurer un bon résultat.

— Cas de la figure 6d.

Le développement doit porter aussi dans le sens des  $\varphi$ .

On peut écrire la pression comme suit (fig. 6g)

$$Z = -[q \cos \beta - q \cos (\beta + \varphi_0 - \varphi)] \Delta = -q \Delta [\cos \beta - \cos (\beta + \varphi_0 - \varphi)]$$

et en développant en série :

$$Z = -q \Delta \left[ \sum_n A_n \sin \frac{2n\pi\varphi}{2\varphi_0} \right]$$

avec

$$A_n = \frac{2}{\varphi_0} \int_0^{\varphi_0} [\cos \beta - \cos (\beta + \varphi_0 - \varphi)] \sin \frac{n\pi\varphi}{\varphi_0} d\varphi.$$

Ici il faudra généralement envisager 4 à 5 termes de la série.

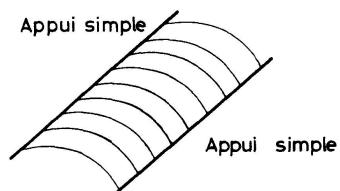


Fig. 6a

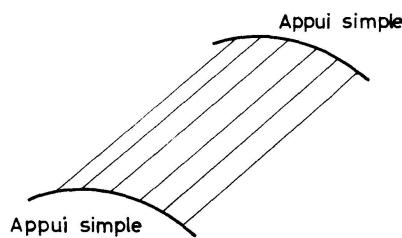


Fig. 6b

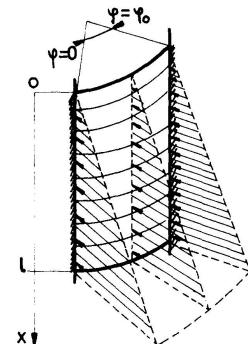


Fig. 6c

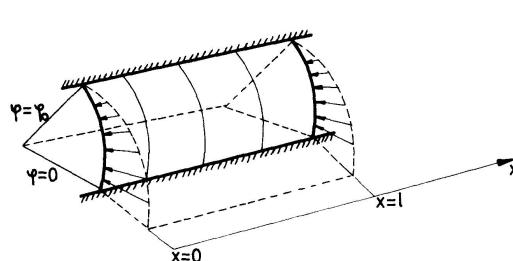


Fig. 6d

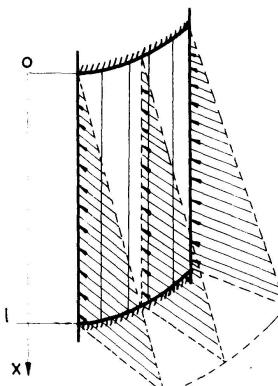


Fig. 6e

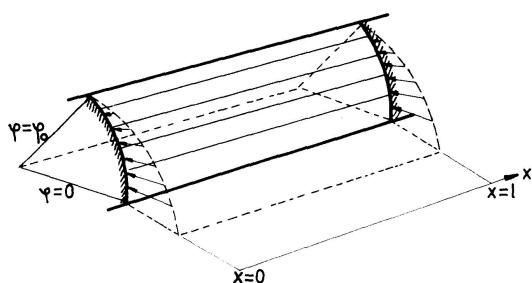


Fig. 6f

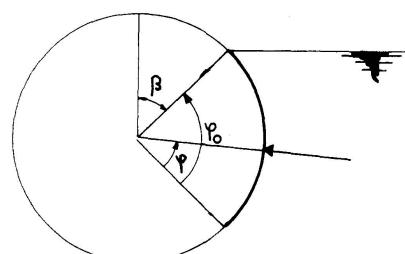


Fig. 6g

— Cas de la figure 6e.

Le développement doit porter sur  $x$  et on écrira la pression appliquée sous la forme

$$Z = \frac{-2\Delta l}{\pi} \left\{ \sin \frac{\pi x}{l} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{l} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{l} - \frac{1}{4} \sin \frac{4\pi x}{l} \right\}.$$

— Cas de la figure 6f.

Ici, de la théorie des coques appliquée aux toitures, il est bien connu qu'un seul terme est suffisant et dès lors la charge s'écrit simplement :

$$Z = -q\Delta [\cos \beta - \cos(\beta + \varphi_0 - \varphi)] \frac{4}{\pi} \sin \frac{\pi x}{l} \quad (\text{fig. 6g}).$$

Dans le sens perpendiculaire aux nervures, il n'y a aucune restriction à la variation de la charge extérieure.

Si la loi de représentation varie continûment, on peut appliquer comme solution particulière de la coque non raidie, celle fournie par la théorie de la membrane.

Cependant, cette variation peut être brusque, par exemple dans le cas de plages non chargées.

La solution de membrane ne s'applique plus alors, mais on peut obtenir une intégrale particulière à partir de la coque infinie ou de la coque complète par intégration d'effets concentrés.

Enfin, si sur deux bords la coque doit être supposée simplement appuyée, les deux autres bords peuvent connaître n'importe quel mode d'appui (simples, encastrés, . . .). Il n'y a ici non plus aucune restriction dans ce sens.

3. Si l'on étudie, par exemple, le cas des coques appuyées sur les deux bords  $\varphi=0$  et  $\varphi=\varphi_0$ , pour déterminer l'action d'une nervure, on doit calculer les efforts

$$\begin{aligned} X_0 d_\varphi &= \frac{S_\varphi}{q^2} d_\varphi u^{\cdot\cdot}, \\ Y_0 d_\varphi &= \frac{1}{q^2} \left[ Q_\varphi (v^{\cdot\cdot} + w^\cdot) - \frac{H_\varphi}{q} w^{\cdot\cdot\cdot} \right] d_\varphi, \\ Z_0 d_\varphi &= \frac{1}{q} \left[ \frac{Q_\varphi}{q} (v^\cdot + w) - \frac{2H_\varphi}{q^2} w^{\cdot\cdot} - \frac{H_\varphi}{q^2} v^{\cdot\cdot\cdot} + \frac{R_\varphi}{q^3} w^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + T_\varphi \frac{w^{\cdot\cdot\cdot}}{q} + L_\varphi \frac{u^{\cdot\cdot\cdot}}{q} \right] d_\varphi, \\ U_{0\varphi} &= \frac{1}{q^2} [T_\varphi w^{\cdot\cdot\cdot} + L_\varphi u^{\cdot\cdot\cdot}] d_\varphi. \end{aligned}$$

On connaît déjà la variation de ces efforts dans le sens des  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} X_0 d_\varphi \text{ varie selon } \sin \gamma \varphi, \quad Y_0 d_\varphi \text{ selon } \cos \gamma \varphi, \quad Z_0 d_\varphi \text{ selon } \sin \gamma \varphi \\ \text{et} \quad U_{0\varphi} \text{ selon } \sin \gamma \varphi. \end{aligned}$$

L'amplitude de ces fonctions n'est pas connue.

S'il y a plusieurs nervures identiques, à chacune correspond une valeur de l'amplitude de  $X_0 d_\varphi$  par exemple. On peut admettre, que toutes les valeurs de  $X_0 d_\varphi$  d'une coque raidie sont des valeurs déterminées d'une fonction  $\Psi(x)$ . Ainsi, on peut représenter les diverses valeurs le long de la coque:

- de  $X_0 d_\varphi$  par  $\Psi(x)$
- $Y_0 d_\varphi$  par  $\Phi(x)$
- $Z_0 d_\varphi$  par  $F(x)$
- $U_{0\varphi}$  par  $I'(x)$ .

Si les nervures sont également espacées, en faisant appel à une notation déjà introduite, on peut écrire que les valeurs des amplitudes inconnues sont données par

$$\Psi(k \epsilon_\varphi), \quad \Phi(k \epsilon_\varphi), \quad F(k \epsilon_\varphi), \quad I'(k \epsilon_\varphi) \quad \text{où } k \text{ varie de 1 à } n.$$

( $k=1$ : première nervure;  $k=2$ : seconde nervure . . . etc.).

Pour fixer les idées, on considère une coque appuyée aux bords  $\varphi=0$  et  $\varphi=\varphi_0$ , libre en  $x=0$  et encastrée en  $x=l$ .

On suppose, que sur cette coque on fasse agir des lignes d'efforts unitaires selon une directrice quelconque d'abscisse  $k \epsilon_\varphi$ .

On considère les quatre cas de lignes d'efforts de la figure 7.

On désigne par :

- $u_A v_A w_A$  les déplacements obtenus pour la coque sollicitée longitudinalement
- $u_B v_B w_B$  les déplacements obtenus pour la coque sollicitée circonférentiellement

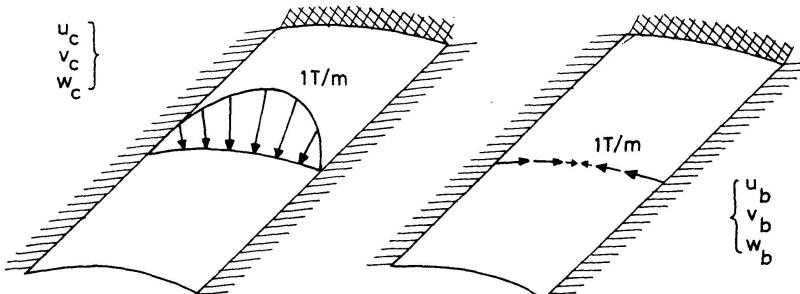


Fig. 7 a

Fig. 7 b

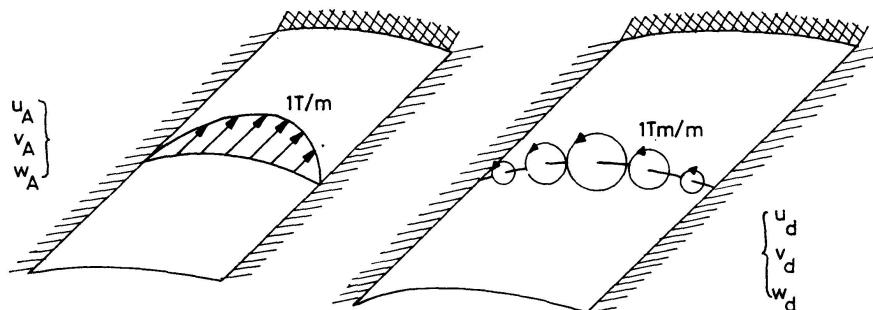


Fig. 7 c

Fig. 7 d

$u_C v_C w_C$  les déplacements obtenus pour la coque sollicitée radialement  
 $u_D v_D w_D$  les déplacements obtenus pour la coque sollicitée par une ligne de moments.

Ces déplacements dépendent ainsi de  $x$ , coordonnée courante, et de  $k \epsilon_\varphi$  qui fixe la position de la ligne de force.

La variation dans le sens des  $\varphi$  est connue et on peut négliger d'en parler.

On remplace ensuite ces  $u_A \dots w_D$  dans les  $X_0 d_\varphi, \dots U_0 \varphi$ :

$(X_0 d_\varphi)_A, (Y_0 d_\varphi)_A, (Z_0 d_\varphi)_A, (U_0 \varphi)_A$  résultent du remplacement des  $u_A, v_A, w_A$   
 $(X_0 d_\varphi)_B, (Y_0 d_\varphi)_B, (Z_0 d_\varphi)_B, (U_0 \varphi)_B$  résultent du remplacement des  $u_B, v_B, w_B$   
 $(X_0 d_\varphi)_C, (Y_0 d_\varphi)_C, (Z_0 d_\varphi)_C, (U_0 \varphi)_C$  résultent du remplacement des  $u_C, v_C, w_C$   
 $(X_0 d_\varphi)_D, (Y_0 d_\varphi)_D, (Z_0 d_\varphi)_D, (U_0 \varphi)_D$  résultent du remplacement des  $u_D, v_D, w_D$

Ainsi  $(Y_0 d_\varphi)_C$  représente la loi de variation selon  $x$  des efforts circonférentiels créés dans une coque par les nervures si la coque prenait les déformations correspondant à une sollicitation radiale selon la loi:

$$-1000 \text{ kg/m} \sin \gamma \varphi \quad \text{en } k \epsilon_\varphi.$$

On peut alors écrire les quatre équations suivantes, analogues à celles du chapitre IV et où

$$(X_0 d_\varphi)_0, \quad (Y_0 d_\varphi)_0, \quad (Z_0 d_\varphi)_0 \quad \text{et} \quad (U_0 \varphi)_0$$

sont les valeurs des efforts créés par les nervures si la coque raidie se déformait comme la coque lisse.

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= [X_0 d_\varphi]_0 \\ &\quad + \left\{ \sum_{k=1}^{k=n} [X_0 d_\varphi]_A \Psi(k \epsilon_\varphi) + \sum_{k=1}^{k=n} [X_0 d_\varphi]_B \Phi(k \epsilon_\varphi) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{k=n} [X_0 d_\varphi]_C F(k \epsilon_\varphi) + \sum_{k=1}^{k=n} [X_0 d_\varphi]_D G(k \epsilon_\varphi) \right\} \frac{1}{1000}, \\ \Phi(x) &= [Y_0 d_\varphi]_0 \\ &\quad + \left\{ \sum_{k=1}^{k=n} [Y_0 d_\varphi]_A \Psi(k \epsilon_\varphi) + \sum_{k=1}^{k=n} [Y_0 d_\varphi]_B \Phi(k \epsilon_\varphi) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{k=n} [Y_0 d_\varphi]_C F(k \epsilon_\varphi) + \sum_{k=1}^{k=n} [Y_0 d_\varphi]_D G(k \epsilon_\varphi) \right\} \frac{1}{1000}, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= [Z_0 d_\varphi]_0 \\ &\quad + \left\{ \sum_{k=1}^{k=n} [Z_0 d_\varphi]_A \Psi(k \epsilon_\varphi) + \sum_{k=1}^{k=n} [Z_0 d_\varphi]_B \Phi(k \epsilon_\varphi) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{k=n} [Z_0 d_\varphi]_C F(k \epsilon_\varphi) + \sum_{k=1}^{k=n} [Z_0 d_\varphi]_D G(k \epsilon_\varphi) \right\} \frac{1}{1000}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(x) = & [U_{0\varphi}]_0 \\ & + \left\{ \sum_{k=1}^{k=n} [U_{0\varphi}]_A \Psi(k\epsilon_\varphi) + \sum_{k=1}^{k=n} [U_{0\varphi}]_B \Phi(k\epsilon_\varphi) \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{k=n} [U_{0\varphi}]_C F(k\epsilon_\varphi) + \sum_{k=1}^{k=n} [U_{0\varphi}]_D \Gamma(k\epsilon_\varphi) \right\} \frac{1}{1000}.\end{aligned}\quad (7)$$

Le facteur  $\frac{1}{1000}$  est présent car les  $u_A, v_A, \dots, w_D$  ont été calculés pour des charges de 1000 kg/m ou de 1000 kgm/m.

Ces équations constituent un système de 4 équations intégrales de Fredholm dégénérées, qui définissent les fonctions  $\Psi(x), \Phi(x), F(x), \Gamma(x)$ .

Dans ces équations, les  $[X_0 d_\varphi]_A \dots [U_{0\varphi}]_D$  dépendent de  $x$  et de  $k\epsilon_\varphi$ , les  $[X_0 d_\varphi]_0 \dots [U_{0\varphi}]_0$  ne dépendent que de  $x$ .

Le problème revient ainsi à la recherche des fonctions  $\Psi(x), \Phi(x), F(x)$  et  $\Gamma(x)$ .

Le calcul des  $u_A, v_A, w_A, \dots, w_D$  précédents est très long et de ce fait aussi le calcul des  $[X_0 d_\varphi]_A \dots [U_{0\varphi}]_D$ .

En effet, si l'on désire calculer par exemple les  $u_C, v_C, w_C$ , on doit donc faire agir sur une coque ayant les conditions d'appui indiquées, une force linéaire de  $-1000 \text{ kg/m} \sin \gamma \varphi$  suivant la directrice  $x=k\epsilon_\varphi$ .

Il n'est pas possible de laisser  $k$  sous forme de paramètre.

En effet, la solution du problème réside dans la superposition d'une solution particulière et de la solution générale.

Comme solution particulière, on adopte celle de la coque infinie.

La solution générale comporte 8 constantes qui doivent être fixées en exprimant qu'en  $x=0$  l'appui est libre ( $M_x = N_x = Q_x = N_{x\varphi} = 0$ ) et qu'en  $x=l$  l'appui est encastré ( $u=v=w=w'=0$ ).

La valeur des constantes dépend donc de la solution particulière c'est-à-dire de la position de la ligne de force considérée.

Donc pour  $k=1$  (force linéaire à la 1re nervure), il faut calculer les 8 constantes, recommencer ensuite pour  $k=2 \dots$

Lorsque ce travail est fait, on dispose alors de  $n$  formes de  $u_C, v_C$  et  $w_C$ .

Les mêmes opérations sont à répéter pour

$$u_A, v_A, w_A, u_B, v_B, w_B \text{ et } u_D, v_D, w_D.$$

Ce travail est nécessaire si l'on désire exprimer les conditions aux limites dans les équations (7).

On peut heureusement s'en dispenser, en exprimant les conditions aux limites «extérieurement» à ces équations et en ne les exprimant qu'une fois au lieu de  $4n$  fois comme dans le système précédent.

Il suffit d'opérer sur des coques infinies judicieusement chargées.

La première opération consiste à étudier une coque infinie dans le sens des  $x$ , raidie comme doit l'être la coque finie, et chargée des forces extérieures (voir figure 8 — premier stade).

Dans ces conditions,  $k\epsilon_\varphi$  peut rester dans les relations des déplacements  $u_A, v_A \dots w_D$  sous forme de paramètre.

L'effet de la force considérée, aux différentes positions  $k$ , s'obtient aisément par glissement de la fonction précédente parallèlement à elle-même.

Les expressions  $[X_0 d_\varphi]_A \dots [U_0 \varphi]_D$  sont ainsi calculées une seule fois pour toutes.

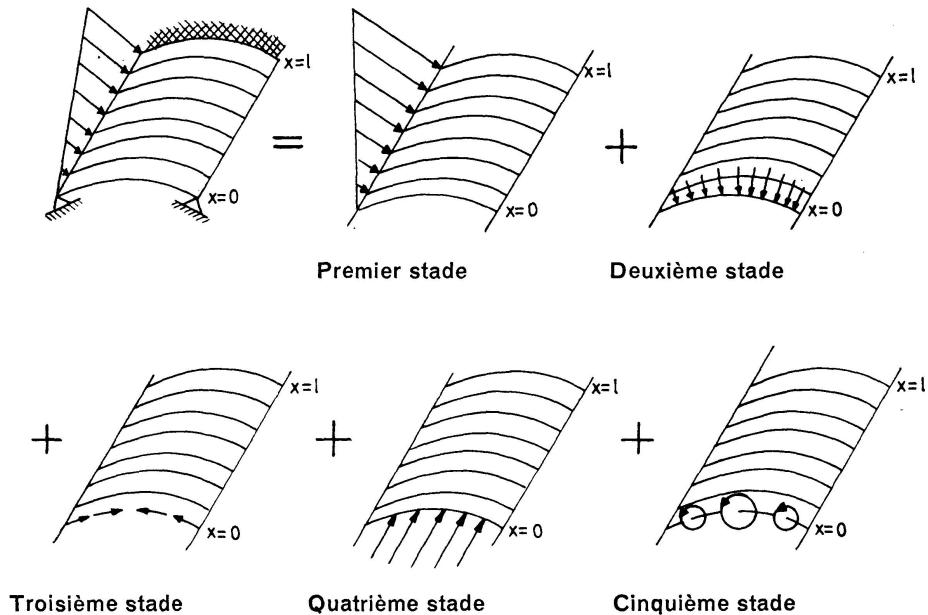


Fig. 8

Les valeurs de  $[X_0 d_\varphi]_0 \dots [U_0 \varphi]_0$  dépendent des valeurs de la coque infinie lisse: on les obtiendra par intégration de la force linéaire suivant la loi donnée.

Les  $2^\circ, 3^\circ, 4^\circ$  et  $5^\circ$  stades sont définis à suffisance par la figure 8.

Il faut faire agir sur la même coque infinie et raidie des lignes d'efforts en  $x=0$ . Par simple retournement, les résultats obtenus sont valables pour  $x=l$ .

Il importe de remarquer que ces opérations s'expriment mathématiquement par la seule modification des termes de charge  $[X_0 d_\varphi]_0, [Y_0 d_\varphi]_0, [Z_0 d_\varphi]_0, [U_0 \varphi]_0$  des équations (7).

En somme, on remplace le problème posé par 5 problèmes élémentaires.

Par une adéquate superposition des 5 cas précédents, on peut exprimer les conditions aux limites en  $x=0$  et  $x=l$ : on voit que ces conditions ne sont alors imposées qu'une seule fois.

On constate donc qu'il faut résoudre les équations (7) en ce sens que les fonctions  $\Psi(x), \Phi(x), F(x), \Gamma(x)$  sont à déterminer à partir de la coque infinie.

Les méthodes connues de résolution des équations intégrales sont applicables.

En fait, le problème se pose très bien pour une résolution directe par collocation.

On peut écrire les équations (7) aux différents points  $k \epsilon_\varphi$  ( $k = 1, \dots, n$ ) et prendre comme inconnues les valeurs  $\Psi(k \epsilon_\varphi)$ ,  $\Phi(k \epsilon_\varphi)$ ,  $F(k \epsilon_\varphi)$  et  $U_{0\varphi}(k \epsilon_\varphi)$ .

On construit ainsi un système de  $4n$  équations à  $4n$  inconnues qui sont précisément les effets des nervures sur la coque.

Dans le cas d'un grand nombre de nervures, le système devient lourd mais on peut alors le ramener à un système de 16 équations à 16 inconnues (au maximum dans le cas le plus général) en faisant usage d'une formule d'interpolation.

## VII. Application au calcul d'une porte secteur

Dans les notes qui suivent, on a envisagé l'étude d'une porte secteur d'écluse répondant aux caractéristiques suivantes:

Hauteur:	11 m,
Ouverture:	90°,
Rayon:	10 m,
Epaisseur du bordage:	8 mm,
Matériau:	acier.

La pression hydrostatique est supposée varier de 0 au dessus de la porte à  $11000 \text{ kg/m}^2$  au bas de la porte. Le cas d'une revanche pourrait être étudié sans difficulté et exactement de la même manière que le cas actuel.

La porte comprend 4 raidisseurs distants de 2,2 m et obéissent aux caractéristiques reprises à la figure 9.

Le bordage sera fixé par rivure, sur les quatre pans de charpente extrêmes, de sorte que l'on peut admettre un appui simple sur les 4 bords.

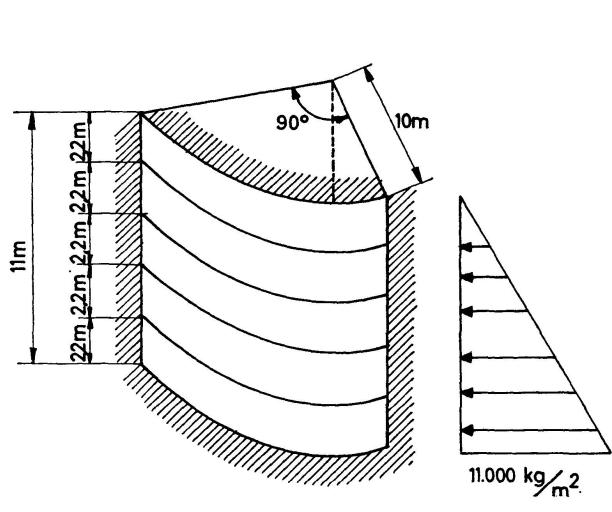


Fig. 9 a

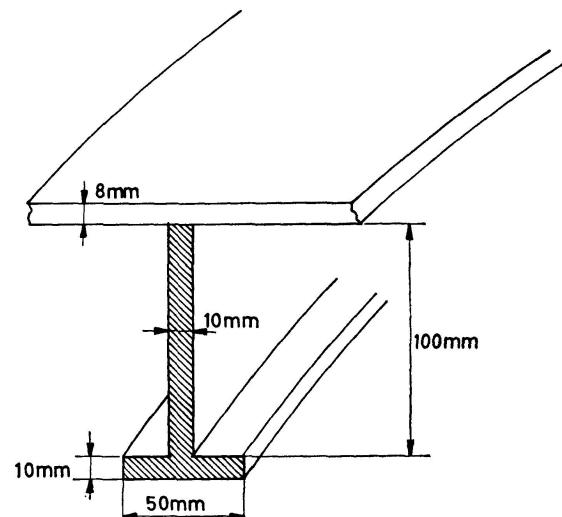


Fig. 9 b

On pourra alors écrire la charge appliquée sous la forme:

$$Z = -\Delta x \left[ \sin \frac{\pi \varphi}{\varphi_0} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi \varphi}{\varphi_0} \dots \right] \frac{4}{\pi},$$

soit donc  $Z = -1000 x \frac{4}{\pi} \left[ \sin 2\varphi + \frac{1}{3} \sin 6\varphi + \dots \right] \text{kg/m}^2.$

Dans cette étude, le premier terme sera étudié et la charge sera ramenée à

$$Z = -1000 x \sin 2\varphi$$

donc au facteur  $\frac{4}{\pi}$  près c'est le premier terme.

Dans le cas particulier actuel il a été supposé puis vérifié que le rôle joué par les moments linéaires était faible et que le système de 4 équations pouvait alors se ramener à un système de 3 équations entre les 3 fonctions  $\Psi$ ,  $\Phi$  et  $F$ :

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= [X_0 d_\varphi]_0 \\ &+ \frac{1}{1000} \left\{ \sum_{k=1}^{k=4} [X_0 d_\varphi]_A \Psi(k 2,2) + \sum_{k=1}^{k=4} [X_0 d_\varphi]_B \Phi(k 2,2) + \sum_{k=1}^{k=4} [X_0 d_\varphi]_C F(k 2,2) \right\}, \\ \Phi(x) &= [Y_0 d_\varphi]_0 \\ &+ \frac{1}{1000} \left\{ \sum_{k=1}^{k=4} [Y_0 d_\varphi]_A \Psi(k 2,2) + \sum_{k=1}^{k=4} [Y_0 d_\varphi]_B \Phi(k 2,2) + \sum_{k=1}^{k=4} [Y_0 d_\varphi]_C F(k 2,2) \right\}, \quad (8) \\ F(x) &= [Z_0 d_\varphi]_0 \\ &+ \frac{1}{1000} \left\{ \sum_{k=1}^{k=4} [Z_0 d_\varphi]_A \Psi(k 2,2) + \sum_{k=1}^{k=4} [Z_0 d_\varphi]_B \Phi(k 2,2) + \sum_{k=1}^{k=4} [Z_0 d_\varphi]_C F(k 2,2) \right\}. \end{aligned}$$

Le système de 12 équations à 12 inconnues auxquelles les relations (8) conduisent, a été résolu par l'ordinateur I.B.M. 650 du Centre de Calcul numérique de l'Université de Liège et a fourni les résultats repris ci-après.

Pour le premier stade: coque infinie raidie et chargée des forces extérieures.

Position de la nervure	$\Psi(x)$ en kg/m	$\Phi(x)$ en $\text{kg/m} \cdot 10^3$	$F(x)$ en $\text{kg/m} \cdot 10^3$
2,2 m	-3842,045 757	456,220 318	219,220 737
4,4 m	-2672,008 054	455,918 807	219,077 379
6,6 m	-1483,345 455	456,410 427	217,862 818
8,8 m	-271,169 789	455,678 744	218,664 457

Lorsque le travail de calcul des fonctions  $\Psi$ ,  $\Phi$  et  $F$  est terminé, il reste alors un travail important mais systématique de superposition des effets pour obtenir notamment la valeur de  $v$ ,  $w$ ,  $N_x$  et  $M_x$  dans la coque et surtout aux points  $x=0$  et  $x=l$  où les conditions aux limites devront être réalisées.

Par exemple, le calcul de la déformation radiale est opéré selon la formule:

$$w = w_0 + \sum_{k=1}^{k=4} w_A \Psi(k, 2, 2) + \sum_{k=1}^{k=4} w_B \Phi(k, 2, 2) + \sum_{k=1}^{k=4} w_C F(k, 2, 2).$$

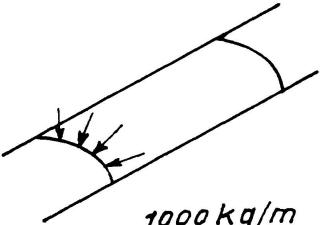
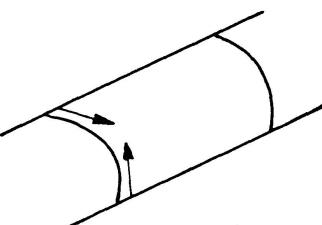
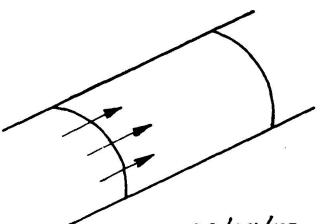
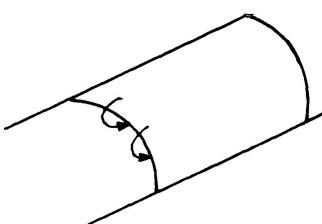
Il en est de même pour les autres effets.

Le second stade consiste dans le calcul de la coque infinie raidie et sollicitée par une force radiale unitaire de  $1000 \text{ kg/m} \sin \gamma \varphi$  en  $x = 0$  (fig. 8).

Le mode d'opération est exactement le même que précédemment et les noyaux des équations (8) sont déjà calculés. La seule modification par rapport au cas du premier stade, réside dans la force appliquée, qui ici n'est plus la pression hydrostatique mais une force radiale unitaire en  $x = 0$ .

Le même processus s'applique aux autres stades de calcul.

On a obtenu les solutions suivantes:

Position de la nervure	Sollicitation	$\Psi(x)$ en kg/m	$\Phi(x)$ en kg/m	$F(x)$ en kg/m
2.2		+ 75,452	+ 7781,654	+ 3739,249
4.4		+ 95,429	+ 7773,343	+ 3735,366
6.6		+ 114,501	+ 7764,189	+ 3730,921
8.8		+ 132,990	+ 7753,946	+ 3725,929
2.2		- 37,723	- 3891,195	- 1869,806
4.4		- 47,711	- 3887,089	- 1867,872
6.6		- 57,247	- 3882,459	- 1865,650
8.8		- 66,538	- 3877,327	- 1863,153
2.2		- 48,438	- 1,917 602	- 0,921 698
4.4		- 47,290	+ 1,963 898	+ 0,943 637
6.6		- 45,985	+ 5,772 343	+ 2,773 860
8.8		- 45,140	+ 9,508 399	+ 4,569 235
2.2		+ 19,338	+ 0,515 823	+ 0,247 266
4.4		+ 18,850	- 0,891 269	- 0,428 251
6.6		+ 18,412	- 2,411 701	- 1,158 923
8.8		+ 18,019	- 3,903 212	- 1,875 672

On peut alors calculer pour chaque sollicitation les déformations et les efforts comme on l'a indiqué précédemment.

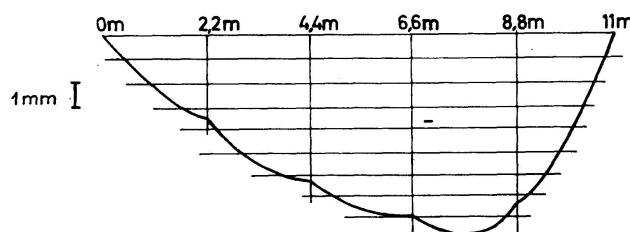


Fig. 10a. Diagramme de  $w$ . Ce diagramme est aussi celui de  $M_\phi$ : il suffit de multiplier  $w$  par  $-35,84$  pour obtenir  $M_\phi$  en  $\text{kgm/m}$

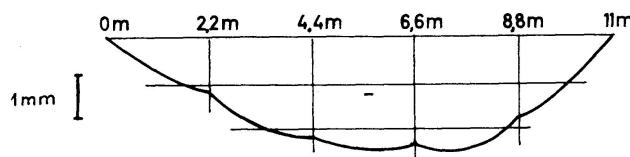


Fig. 10b. Diagramme de  $v$

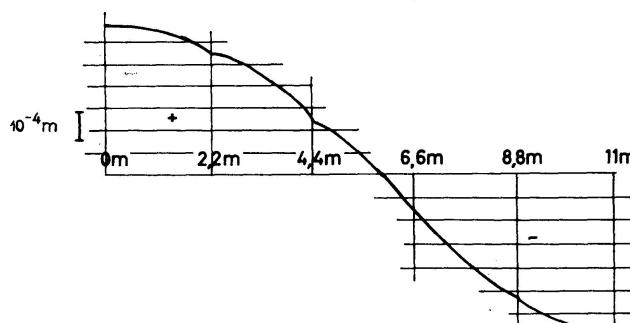


Fig. 10c. Diagramme de  $u$

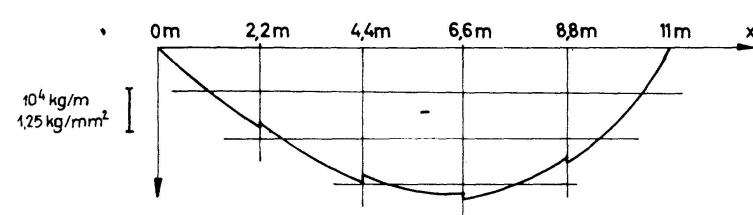


Fig. 10d. Diagramme de  $N_x$   
(dans la coque)

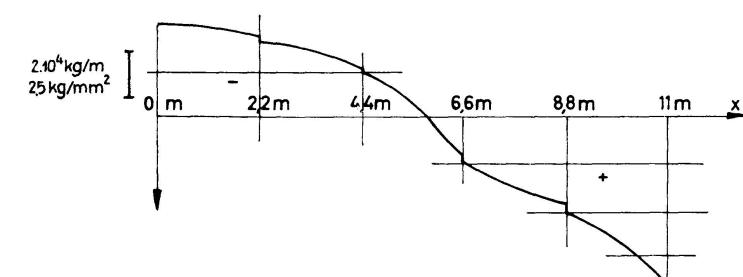


Fig. 10e. Diagramme de  $N_{x\phi}$   
(dans la coque)

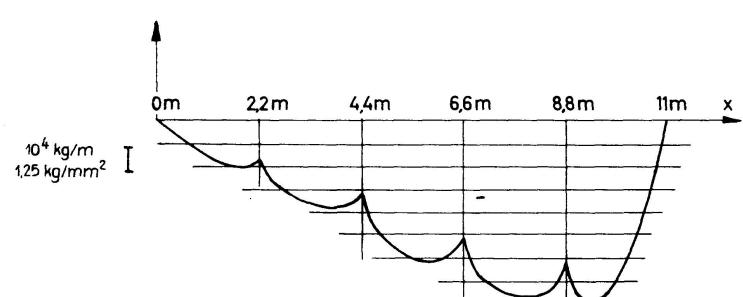


Fig. 10f. Diagramme de  $N_\phi$   
(dans la coque)

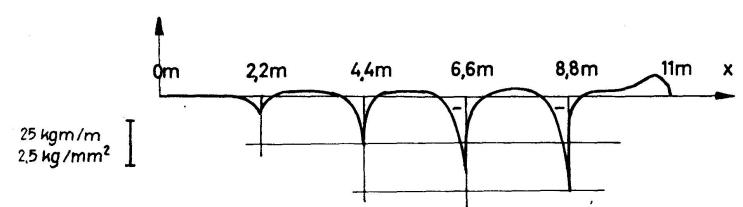


Fig. 10g. Diagramme de  $M_x$   
(dans la coque)

Les 5 problèmes élémentaires sont ainsi résolus: on connaît les efforts et les déformations dans 5 coques infinies raidies et sollicitées l'une par la pression hydrostatique et les 4 autres par des charges unitaires en  $x=0$ .

Il reste à ramener tous ces cas à la coque finie c'est-à-dire qu'il faut exprimer les conditions aux limites en  $x=0$  et  $x=l$ .

Les conditions imposées sont celles de l'appui simple:  $v=w=N_x=M_x=0$  en  $x=0$  et  $x=l$ .

Il suffit de combiner les résultats précédents.

On se trouve alors en présence d'un système de 8 équations à 8 inconnues dont on tire 8 constantes multipliant les sollicitations unitaires précédentes et finalement par superposition des effets on peut obtenir les valeurs définitives des  $u, v, w \dots$

Les diagrammes 10 représentent quelques uns des effets de la coque raidie.

### VIII. Repartition de la raideur des nervures

Si les nervures disposées dans le sens des  $\varphi$ , telles que l'on vient de les considérer, sont infiniment rapprochées, le problème se simplifie paradoxalement. On peut en effet admettre qu'elles agissent alors à la manière d'un tapis continu et les équations (5) sont à remplacer par les équations (6) — dans le cas général de double raidissement — équations beaucoup plus simples car elles ne comportent plus de coefficient variable selon  $x$  ou selon  $\varphi$ .

La solution de ces équations est du même type que celle des coques lisses: elle est facile à obtenir.

Les intégrales de FREDHOLM, dégénérées en sommes, deviennent alors d'authentiques intégrales de FREDHOLM. L'examen comparatif des équations intégrales des deux types permet de conclure en ce qui concerne l'écart des raidisseurs pour que l'hypothèse de la répartition des raideurs soit possible. On peut aisément montrer que la répartition est licite quand les fonctions qui entrent en jeu lors du calcul des effets discontinus peuvent être remplacées par une distribution variant selon une loi triangulaire de surface unité sans qu'une modification notable soit enregistrée (fig. 11). Cette opération permet d'ailleurs de définir l'écart maximum entre les raidisseurs<sup>4)</sup>.

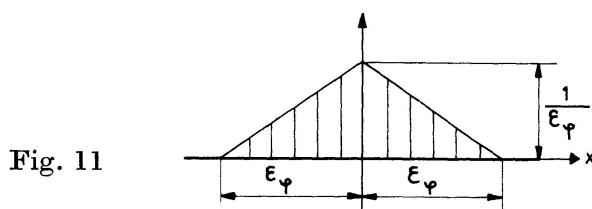


Fig. 11

<sup>4)</sup> Les bordages raidis en construction hydraulique. N. M. DEHOUSSE. Ed. Derouaux, Liège, 1961.

### IX. Application à un barrage mobile à cylindre

Soit à étudier le barrage mobile à cylindre représenté figure 12. Ce barrage est raidi par les deux cours de nervures représentés à la même figure. La sollicitation transmise par le bordage est une pression hydrostatique appliquée seulement sur une partie de la paroi amont de l'ouvrage. On applique à cet ouvrage les relations (6) et la charge extérieure est développée en série de

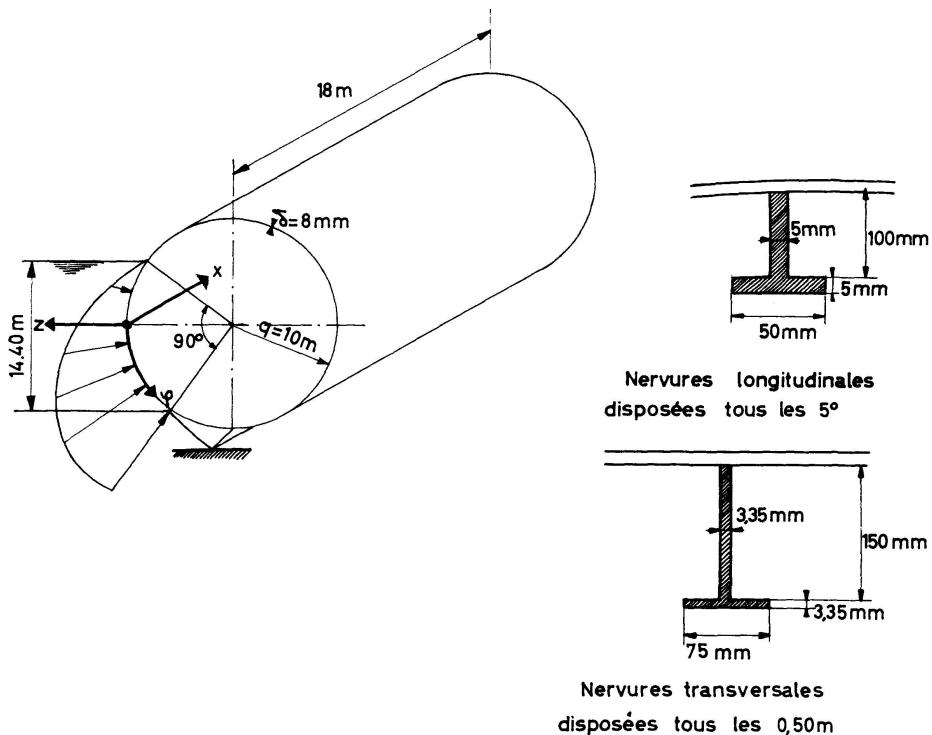


Fig. 12

FOURIER dans le sens des  $x$ : seul le premier terme est pris en considération. On admet donc, sous le couvert d'une vérification ultérieure, que la raideur des nervures peut être répartie. En appliquant le même procédé de résolution que pour les coques lisses, on est d'abord conduit à calculer une équation résolvante qui ne comporte plus que la fonction variable  $w$  [analogue à l'équation (3)]. Tous ces calculs faits, on trouve l'équation du 8e ordre suivante:

$$\begin{aligned}
 & w''' \left[ (K + R_x^r) (D + \Omega_x^r) \left( \frac{D}{2} + S_x^r \right) - \left( \frac{D}{2} + S_x^r \right) \overline{H_x^r}^2 \right] \\
 & + \frac{1}{q^2} w'''' \cdot \left\{ (2K + T_\varphi^r + T_x^r) (D + \Omega_x^r) \left( \frac{D}{2} + S_x^r \right) - (D + \Omega_\varphi^r) \overline{H_x^r}^2 + \left( \frac{D}{2} + S_x^r \right) H_x^r L_\varphi^r \right. \\
 & \quad \left. - \frac{H_x^r}{2} L_x^r D + (K + R_x^r) \left[ (D + \Omega_\varphi^r) (D + \Omega_x^r) + \frac{D}{2} (S_x^r + S_\varphi^r) + S_x^r S_\varphi^r \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{q^4} w''' \cdot \left\{ D H_\varphi^r H_x^r + (K + R_\varphi^r) (D + \Omega_x^r) \left( \frac{D}{2} + S_x^r \right) \right. \\
& \quad \left. + (2K + T_\varphi^r + T_x^r) \left[ (D + \Omega_\varphi^r) (D + \Omega_x^r) + \frac{D}{2} (S_x^r + S_\varphi^r) + S_x^r S_\varphi^r \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (K + R_x^r) (D + \Omega_\varphi^r) \left( \frac{D}{2} + S_\varphi^r \right) + (D + \Omega_\varphi^r) H_x^r L_\varphi^r + (D + \Omega_x^r) H_\varphi^r L_x^r \right] \right\} \\
& + \frac{1}{q^6} w' \cdots \left\{ - (D + \Omega_x^r) \overline{H_\varphi^r}^2 + (K + R_\varphi^r) \left[ (D + \Omega_\varphi^r) (D + \Omega_x^r) + \frac{D}{2} (S_x^r + S_\varphi^r) + S_x^r S_\varphi^r \right] \right. \\
& \quad \left. + (2K + T_\varphi^r T_x^r) (D + \Omega_\varphi^r) \left( \frac{D}{2} + S_\varphi^r \right) - \frac{D}{2} H_\varphi^r L_\varphi^r + H_\varphi^r L_x^r \left( \frac{D}{2} + S_\varphi^r \right) \right\} \\
& + \frac{1}{q^8} w \cdots \left\{ (K + R_\varphi^r) (D + \Omega_\varphi^r) \left( \frac{D}{2} + S_\varphi^r \right) - \left( \frac{D}{2} + S_\varphi^r \right) \overline{H_\varphi^r}^2 \right\} \\
& + \frac{1}{q^2} w'' \left[ - H_x^r \frac{D}{q} (D + \Omega_\varphi^r) - \frac{2H_\varphi^r}{q} (D + \Omega_x^r) \left( \frac{D}{2} + S_x^r \right) - \frac{L_x^r}{q} (D + \Omega_\varphi^r) (D + \Omega_x^r) \right] \\
& + \frac{1}{q^2} w' \left\{ - \frac{1}{q^2} (D + \Omega_\varphi^r)^2 (D + \Omega_x^r) + \frac{1}{q^2} (D + \Omega_\varphi^r) \right. \\
& \quad \cdot \left[ (D + \Omega_\varphi^r) (D + \Omega_x^r) + \frac{D}{2} (S_x^r + S_\varphi^r) + S_x^r S_\varphi^r \right] \left. \right\} \\
& + \frac{1}{q^4} w \left\{ - \frac{2H_\varphi^r}{q} \left[ \frac{D}{2} (S_x^r + S_\varphi^r) + S_x^r S_\varphi^r \right] + \frac{L_x^r D}{2q} (D + \Omega_\varphi^r) \right. \\
& \quad \left. - \frac{L_x^r}{q} \left( \frac{D}{2} + S_\varphi^r \right) (D + \Omega_\varphi^r) \right\} + \frac{w'''}{q^2} (D + \Omega_\varphi^r) (D + \Omega_x^r) \left( \frac{D}{2} + S_x^r \right) = 0,
\end{aligned}$$

avec les notations explicitées précédemment.

Le procédé de calcul des autres effets:  $v$ ,  $u$ ,  $M_x$ ,  $N_x$ ,  $M_\varphi \dots$  est identique à celui des coques lisses, à partir de relations beaucoup plus compliquées, mais sans difficulté de principe.

Lorsque l'on étudie des coques incomplètes ( $\varphi_0 < 2\pi$ ) et que la charge est répartie continûment sur toute la surface, on sait qu'une solution particulière acceptable est fournie en négligeant l'effet des moments de flexion et de torsion et des efforts de cisaillement radiaux.

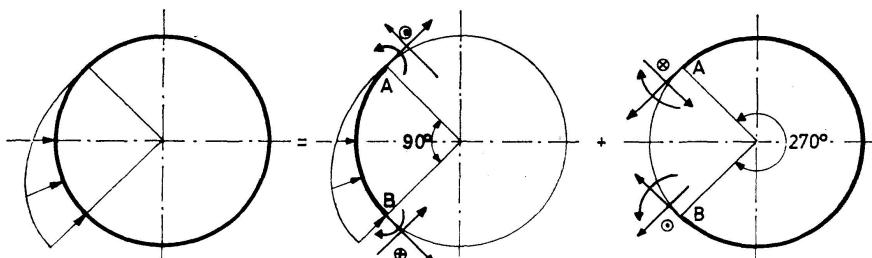


Fig. 13

On peut en principe appliquer cette manière de faire ici à condition de décomposer le cylindre complet en deux coques (cf. fig. 13): une coque chargée sur  $\varphi_0 = 90^\circ$  et une coque non chargée sur  $270^\circ$ .

En exprimant l'égalité des déplacements en  $A$  et  $B$ , on obtient 8 équations en les 8 inconnues efforts en  $A$  et  $B$ .

Ici, il a été choisi d'opérer par intégration d'une force linéaire (fig. 14).

On a d'abord résolu le problème de déterminer les déplacements et les efforts dans une coque complète sollicitée par une force linéaire radiale de  $-1000 \text{ kg/m}$ .

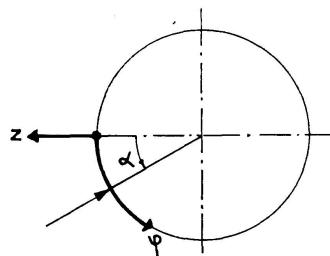


Fig. 14

Il reste à présent à intégrer ces effets le long de la zone chargée.

Comme le montre la figure 15, la charge appliquée peut être représentée par

$$Z = -\frac{4}{\pi} 1000 \left( q \frac{\sqrt{2}}{2} + q \sin \varphi \right) \sin \frac{\pi}{l} x \text{ kg/m}^2 \quad \text{pour } -45^\circ < \varphi < +45^\circ,$$

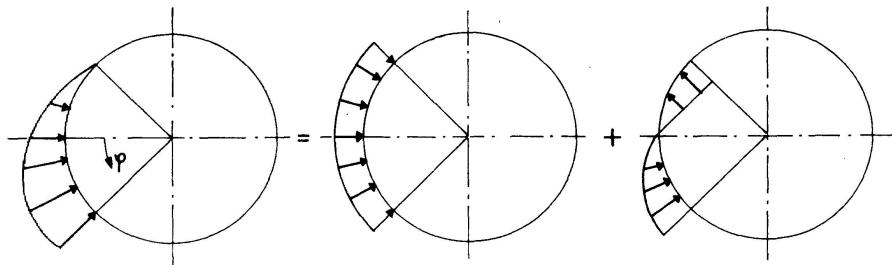


Fig. 15

que l'on peut scinder en deux:

$$Z_1 = -\frac{4}{\pi} 1000 \left( q \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \sin \frac{\pi}{l} x \text{ kg/m}^2,$$

$$Z_2 = -\frac{4}{\pi} 1000 q \sin \varphi \sin \frac{\pi}{l} x \text{ kg/m}^2.$$

Si l'on désigne par  $f$ , un effet quelconque créé dans la coque complète par une charge radiale de  $-1000 \text{ kg/m} \sin \frac{\pi}{l} x$  placée en  $\varphi = \alpha$  (fig. 14), on pourra écrire que sous  $Z_1$  l'effet sera:

$$F_1 = \int_{-45^\circ}^{+45^\circ} \frac{f}{1000} Z_1 q d\alpha = -\frac{4}{\pi} \cdot 70,705 \int_{-45^\circ}^{+45^\circ} f d\alpha,$$

alors que sous  $Z_2$  l'effet sera

$$F_2 = \int_{-45^\circ}^{+45^\circ} \frac{f}{1000} Z_2 q d\alpha = -\frac{4}{\pi} \cdot 100 \int_{-45^\circ}^{+45^\circ} f \sin \alpha d\alpha.$$

Les figures 16 et 17 montrent les diagrammes des  $w$  et  $v$  dûs à la charge  $Z_1$  tandis que les figures 18 et 19 montrent les mêmes effets mais dûs à  $Z_2$ . Pour la simplicité de la représentation, on a supposé la surface moyenne développée dans le sens des  $\varphi$ .

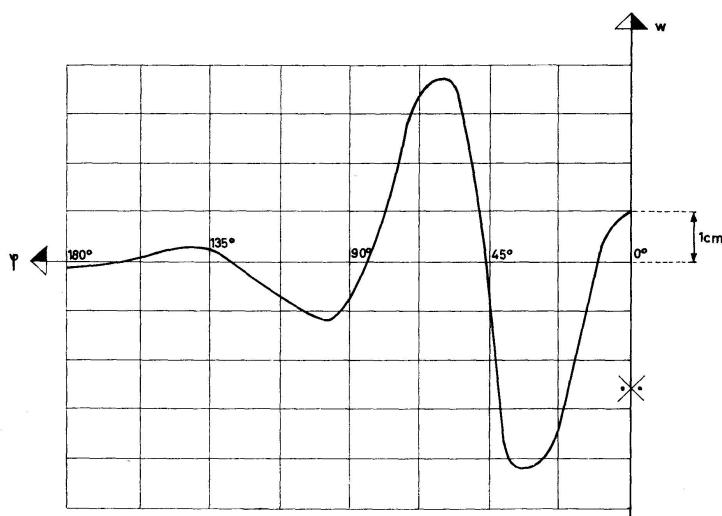


Fig. 16

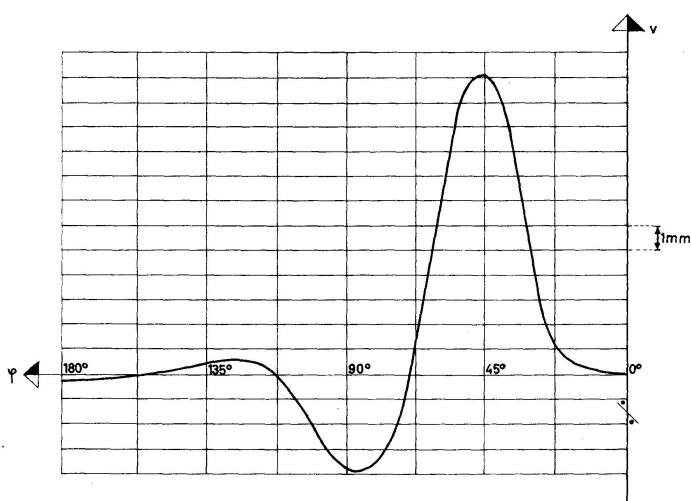


Fig. 17

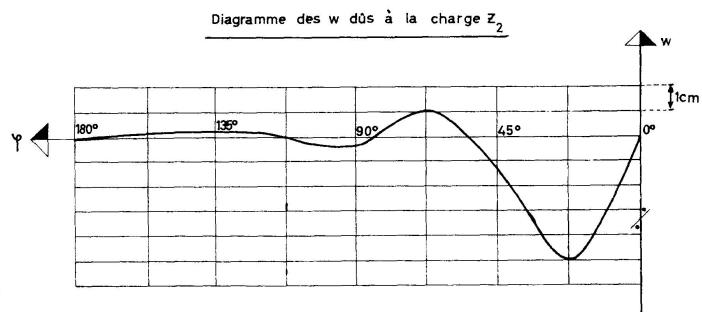


Fig. 18

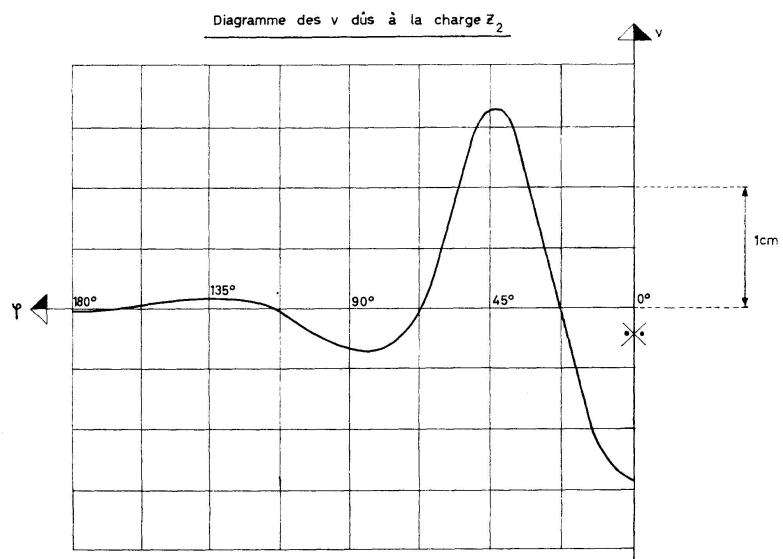


Fig. 19

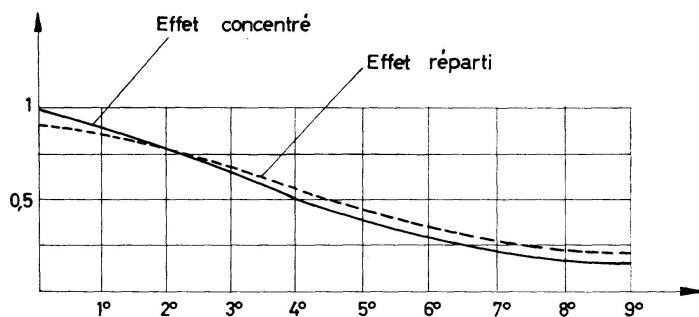


Fig. 20

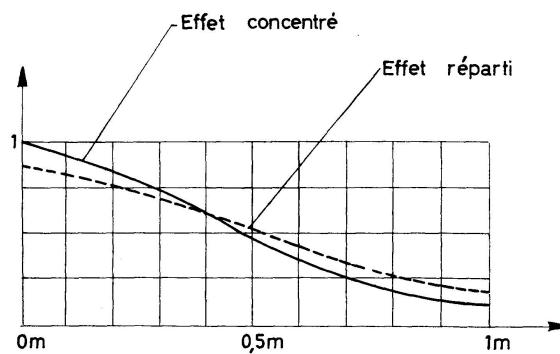


Fig. 21

Il reste à vérifier s'il est raisonnable de répartir la raideur des nervures aussi bien dans un sens que dans l'autre.

A ce sujet, les figures 20 et 21 montrent la comparaison entre un effet «concentré» et le même effet réparti selon une loi triangulaire de surface unité sur la base des écarts adoptés entre les raidisseurs (longitudinaux et transversaux).

Les écarts sont suffisamment faibles pour que la répartition des raideurs soit licite.

### X. Cas courants de double raidissage

Nous avons vu que le cas des coques raidies dans un seul sens se traitait à partir des coques lisses en ajoutant des efforts concentrés au droit des nervures.

D'autre part, nous avons vu aussi qu'il n'y a guère plus de difficulté à traiter une coque lisse qu'une coque raidie dont les raideurs sont réparties. Ceci nous permettra d'étudier les cas les plus fréquents de bordage raidis qui sont ceux où il y a de nombreux raidisseurs dans un sens et assez peu dans l'autre sens (fig. 22).

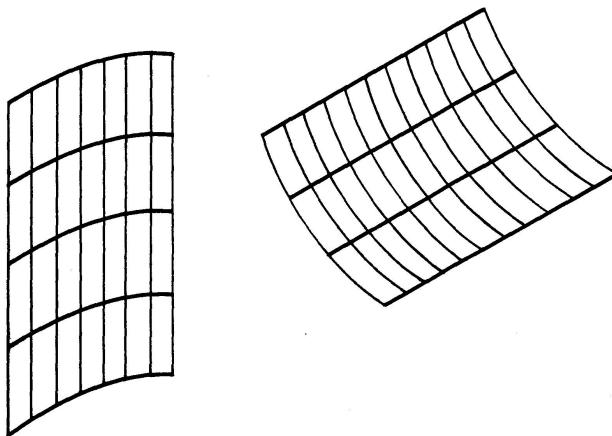


Fig. 22

L'action des nombreux raidisseurs sera répartie et les raidisseurs de l'autre sens seront étudiés comme nous l'avons vu précédemment mais cette fois plus en se servant d'un support qui soit la coque lisse mais d'un support qui soit la coque à nervures réparties. Nous sommes ainsi revenus au cas double de raidissement.

C'est de cette manière que le problème se présentera généralement dans les applications pratiques aux vannes segment, vannes cylindriques hautes, portes d'écluse plane ou secteur, vannes cylindriques de barrage.

## XI. Annexe

Les équations différentielles (5) ont été établies en faisant usage des hypothèses de la méthode D.K.J. de calcul des coques cylindriques lisses.

Un calcul plus rigoureux basé sur les relations présentées par KOITER<sup>5)</sup> donnerait les équations suivantes légèrement différentes de celles données sous le numéro (5).

$$\begin{aligned}
 & Du'' + \frac{D}{2q}(1+\nu)v'' + \frac{D}{q}\nu w' + \frac{D}{2q^2}(1-\nu)u'' \\
 & + \frac{1-\nu}{2q^3}K(w''' - v'') + f(\varphi)[\Omega_x u'' - H_x w'''] \\
 & + \frac{f(x)}{q^2}[S_\varphi u'' + L_\varphi(w''' - v'')] + X = 0. \\
 & \frac{D}{2q}(1+\nu)u'' + \frac{D}{2}(1-\nu)v'' + \frac{D}{q^2}(v'' + w') - \frac{K}{q^2}w'' \frac{3-\nu}{2} \\
 & + \frac{3}{2q^2}(1-\nu)Kv'' - \frac{K}{q^4}(w''' - v'') + f(\varphi) \\
 & \cdot \left[ S_x v'' + \frac{L_x}{q}(w''' - v'') - \frac{T_x}{q^2}(w''' - v'') - \frac{L_x}{q}v'' - \frac{L_x}{q^2}(w''' - v'')\lambda_x \right] \\
 & + \frac{f(x)}{q^2} \left[ \Omega_\varphi(v'' + w') + \frac{H_\varphi}{q}(v'' - w''') - \frac{R_\varphi}{q^2}(w' + w''') \right] + Y = 0. \\
 & \frac{D}{q^2}(v' + w + \nu q u') + \frac{K}{q^4}(w'''' - v''') + \frac{2K}{q^2}w'''' + K w'''' - \frac{2(1-\nu)}{q^2}Kv'' \\
 & + \frac{f(x)}{q} \left[ \frac{\Omega_\varphi}{q}(v' + w) - \frac{H_\varphi}{q^2}(w + 2w'' + v''') \right. \\
 & \left. + \frac{R_\varphi}{q^3}(w'' + w''') + S_\varphi u''' + L_\varphi(w''' - v'') \right] \\
 & + f(\varphi) \left[ R_x w'''' - H_x u''' - S_x v'' - \frac{L_x}{q}(w''' - v'') \right. \\
 & \left. + \frac{T_x}{q^2}(w''' - v'') + L_x \frac{v''}{q} + \frac{L_x}{q^2}\lambda_x(w''' - v'') \right] \\
 & + \frac{f'(x)}{q} [S_\varphi u'' + L_\varphi(w''' - v'')] \\
 & + f'(\varphi) \left[ \frac{T_x}{q^2}(w'' - v'') + L_x \frac{v''}{q} + \frac{L_x}{q^2}\lambda_x(w'' - v'') \right. \\
 & \left. - S_x v'' - \frac{L_x}{q}(w'' - v'') \right] = Z.
 \end{aligned}$$

---

<sup>5)</sup> Proceedings of the I.U.T.A.M. symposium on the theory of thin elastic shells.  
North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1960.

### Résumé

Le calcul des effets élastiques dans les coques cylindriques circulaires raidies par des nervures disposées longitudinalement et transversalement est étudié.

A partir des fonctions d'Heaviside et de Dirac, on montre que les coques raidies se traitent comme des coques lisses à condition d'ajouter des lignes d'efforts selon les axes des nervures.

La détermination de la grandeur des ces efforts linéaires s'opère au moyen d'équations intégrales de Fredholm, de la deuxième espèce, dégénérées en sommes.

Deux exemples d'application relatifs aux constructions hydrauliques sont présentés.

### Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird das elastische Verhalten von längs und quer versteiften Kreis-Zylinderschalen untersucht. Auf Grund der Heavisideschen und Diracschen Funktionen wird festgestellt, daß die versteiften Schalen wie unversteifte behandelt werden können, falls zusätzliche Linienlasten entlang der Rippenachsen aufgetragen werden.

Die Größe dieser Linienlasten wird mit Hilfe von ausgearteten Fredholmschen Integralgleichungen zweiter Art bestimmt.

Es werden Anwendungen im Wasserbau beschrieben.

### Summary

This study is devoted to an analysis of the behaviour of cylindrical shells reinforced by longitudinal and transverse stiffeners.

By the use of Heaviside and Dirac functions, it is shown that a stiffened shell can be calculated as an unstiffened shell upon which line loads, acting along the axis of the stiffeners, are superimposed. The magnitude of these line loads is determined by degenerated Fredholm integral equations of the second kind. Applications to hydraulic construction are presented.

**Leere Seite**  
**Blank page**  
**Page vide**