Essai d'une méthode probabiliste de calcul du béton armé

Autor(en): **Baus, R.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen**

Band (Jahr): **22 (1962)**

PDF erstellt am: **30.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-18802

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Essai d'une méthode probabiliste de calcul du béton armé

Zu einer probabilistischen Berechnungsmethode im Eisenbeton

Outline of a Probabilistic Design Method for Reinforced Concrete

R. BAUS
Ingénieur Civil des Constructions. Docteur en Sciences appliquées. Liège (Belgique)

Préambule

Lors du 1er Congrès de l'A.I.P.C. à Paris en 1932, le soussigné a été chargé du rapport général du Thème III: «Influence des propriétés physiques des matériaux sur la statique du béton armé.» La signification profonde de ce thème était que les méthodes classiques de la statique du béton armé ne pouvaient plus rendre compte des progrès réalisés dans la connaissance des propriétés des matériaux. Une révision était nécessaire. A la suite des travaux du Congrès de Paris, M. le Professeur M. Roš, secrétaire général de la Nouvelle Association internationale d'essais des matériaux, suscita au sein de celle-ci une commission de travail, dont la présidence fut confiée au soussigné. Un échange intensif de correspondance en résulta entre lui et d'éminents ingénieurs. R. Maillart insista sur le fait que la méthode classique de calcul sous-estimait la résistance réelle du béton; il proposait une augmentation des tensions admissibles. Fr. v. Emperger proposait l'abandon de la méthode classique et du coefficient d'équivalence. Implicitement ou explicitement, la voie proposée était celle du calcul à la rupture, mais selon des modalités et des appellations diverses.

Lors du 3e Congrès de l'A.I.P.C. à Liège en 1948, le soussigné était chargé du rapport général du Thème V: «Analyse de la notion de sécurité.» Les travaux de ce Congrès devaient jeter les fondements de la conception probabiliste de la sécurité, principalement sous l'impulsion de MM. M. Prot et R. Levi. La conception probabiliste de la sécurité s'avérait inséparable du calcul à la rupture.

En 1958, le soussigné fut informé des études entreprises par MM. les Professeurs Ch. Massonnet et P. Moenaert sur la comparaison statistique de

quelques méthodes de calcul dites à la rupture avec un grand nombre de résultats d'essais de rupture rassemblés par le Comité Européen du béton. Les résultats de cette étude ont fait l'objet d'un rapport des auteurs précités au 6e Congrès de l'A.I.P.C. à Stockholm en 1960, dans le Thème Ib: «Développement des méthodes de calcul.»

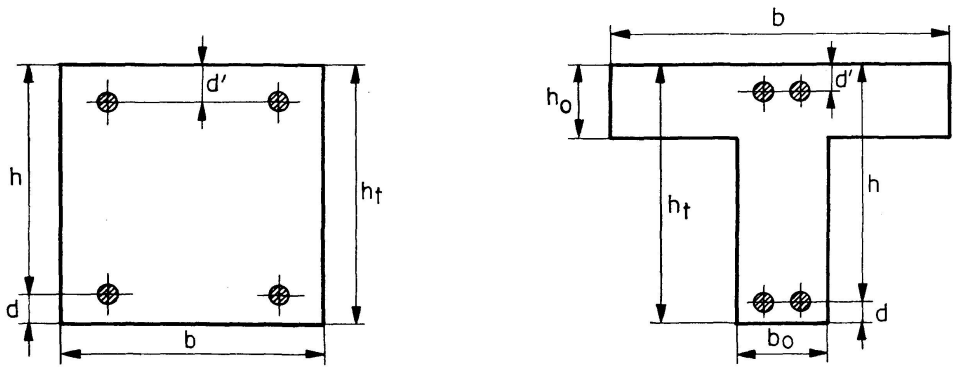
Pressentant le parti qui pouvait être tiré de la documentation réunie par le C.E.B., le soussigné se rendit à la réunion du C.E.B. à Vienne en avril 1959 et, après l'exposé oral de M. P. MOENAERT, il exprima l'idée que l'analyse des résultats des essais de rupture par la voie de la corrélation statistique pourrait être très intéressante et féconde.

Après cette réunion, le soussigné proposa ce travail à un jeune assistant de l'Université de Liège, M. R. BAUS. Celui-ci marqua un très vif intérêt et, avec l'assentiment de M. le Professeur H. LOUIS, entreprit d'effectuer cette recherche sous la direction du soussigné, dans l'intention, en cas de succès, de présenter le résultat sous forme d'une thèse de doctorat en sciences appliquées. Le travail de calcul numérique considérable pouvait être effectué facilement grâce à un ordinateur électronique. Mais la partie essentielle et personnelle du travail était de sélectionner les variables caractéristiques faisant l'objet de la corrélation statistique.

M. BAUS est parvenu à établir ce que le soussigné considère comme le premier essai d'une méthode probabiliste proprement dite de calcul à la rupture. Il est heureux que la primeur d'un abrégé de cette méthode soit réservée aux Mémoires de l'A.I.P.C., Association internationale dont les travaux ont tellement contribué, comme il est rappelé ci-dessus, à la genèse d'un tel travail.

F. CAMPUS (Liège)

Notations



M_0 moment de rupture.
N_0 effort normal de rupture.
A aire de la section d'armature tendue.
A' aire de la section d'armature comprimée.

$\omega = \frac{A}{b\,h}$ proportion d'armature longitudinale tendue.

$\omega' = \frac{A'}{b\,h}$ proportion d'armature longitudinale comprimée.

α coefficient de remplissage de la zone de béton comprimé.

β coefficient de centre de gravité.

σ_e limite élastique réelle de l'acier en traction (aciers doux); limite élastique conventionnelle à $2\,^0/_{00}$ de l'acier en traction (aciers écrouis).

σ'_e limite élastique de l'acier en compression.

σ'_0 contrainte maximum de compression du béton d'une poutre fléchie dans l'état de rupture.

$\sigma_{a,R}$ contrainte de traction de l'acier dans l'état de rupture d'une pièce fléchie.

σ'_R résistance à la rupture du béton en compression.

$\sigma'_{cyl.}$ résistance en compression du béton sur cylindre.

n coefficient d'équivalence.

e excentricité de l'effort normal par rapport au centre de gravité de l'armature tendue ou la moins comprimée.

$f(\ldots)$ fonction de forme quelconque.

$\bar{x}, \bar{y} \ldots$ moyennes.

$s_x, s_y \ldots$ dispersions.

R risque de ruine.

P probabilité de rupture.

N_a résultante des efforts de traction dans les armatures longitudinales tendues.

N'_a résultante des efforts de compression dans les armatures longitudinales comprimées.

N'_R résultante des efforts agissant sur le béton et l'armature de compression d'une pièce fléchie au moment de la rupture.

N'_{RB} résultante des efforts de compression et de traction agissant sur le béton d'une pièce fléchie au moment de la rupture.

Introduction

Le dimensionnement des poutres en béton armé requiert l'intervention de méthodes de calcul qui doivent nécessairement tenir compte des caractéristiques et de l'hétérogénéité des matériaux qui le composent.

La méthode classique élastique utilisée jusqu'à présent fait intervenir des tensions admissibles.

Ces tensions admissibles sont obtenues en appliquant à la résistance en compression du béton et à la limite élastique de l'acier un coefficient de minoration qui est le coefficient de sécurité. Les dimensions et l'armature de la pièce

calculée doivent être suffisantes pour que les tensions admissibles ne soient pas dépassées sous l'action de la sollicitation maximum de service.

La méthode classique s'avère incapable de rendre compte correctement de la sécurité ultime des pièces calculées. Les études expérimentales ont d'autre part montré qu'elle sous-estime la résistance du béton et conduit de ce fait à une utilisation abusive d'armatures de compression. C'est pourquoi, depuis de nombreuses années déjà, des recherches ont été entreprises dans le but de substituer à la méthode classique des méthodes de calcul dites à la rupture. Les dimensions et l'armature des pièces calculées par ces méthodes doivent être telles que la sollicitation de rupture soit au moins égale à la sollicitation maximum en service multipliée par un coefficient de majoration qui est le coefficient de sécurité.

On peut à propos de ces méthodes à la rupture formuler deux remarques fondamentales.

La première est relative à la nature même du béton armé et particulièrement à son hétérogénéité. La détermination théorique ou semi-théorique de la sollicitation de rupture entraîne l'introduction d'hypothèses et coefficients expérimentaux nombreux sans qu'il soit cependant possible de prendre en compte avec exactitude tous les phénomènes qui interviennent. Les hypothèses les plus fréquemment rencontrées sont relatives à la conservation des sections planes, à l'absence de résistance du béton tendu, à la forme du diagramme des tensions de compression et la valeur maximum de ces tensions, à la déformation ultime de la fibre la plus comprimée, à la constance du rapport n entre le module d'élasticité longitudinal de l'acier et celui du béton; ces différentes hypothèses ont conduit à un nombre considérable de théories et de méthodes de calcul sans que l'unanimité ait pu se faire autour de l'une d'entre elles.

La nature complexe du matériau et le caractère statistique des données expérimentales incitent à penser que le meilleur moyen d'aborder le problème de la prévision de la rupture est de se baser sur les résultats d'expérience de la façon la plus directe, c'est-à-dire en s'appuyant sur un nombre minimum d'hypothèses. La méthode la mieux appropriée est alors celle de la corrélation statistique.

La deuxième remarque qu'il convient de formuler est relative au caractère aléatoire de la résistance ultime des pièces en béton armé. Pour obtenir la sécurité réelle d'une pièce sous l'action d'une sollicitation déterminée, il faudrait au préalable l'essayer jusqu'à rupture et déduire la sécurité à postériori. La sécurité se présente sous la forme d'une probabilité de ruine plutôt que d'un coefficient, ce qui incite à donner aux méthodes de calcul un caractère probabiliste. Les dimensions et l'armature des pièces calculées doivent être telles que la probabilité de ruine sous l'action de la sollicitation maximum de service soit très faible, de l'ordre de 10^{-5}, 10^{-6} ou 10^{-7}.

En partant de ces considérations, nous avons essayé d'établir une méthode probabiliste de calcul à la rupture basée sur un grand nombre de résultats

expérimentaux traités par la méthode de la corrélation statique et ne reposant que sur un nombre très restreint d'hypothèses [1].

Nous admettons l'état uniaxial de tensions, ce qui revient à supposer que l'influence de l'effort tranchant sur la rupture est nulle ou négligeable. Nous adoptons comme résistance de référence du béton au moment de la rupture la résistance mesurée dans un essai sur cylindre ou sur prisme ou encore les 85 centièmes de la résistance sur cube lorsque cette résistance est seule connue. Nous nous référons à la limite élastique de l'acier σ_e qui est soit l'ordonnée du palier d'étirage dans le cas des aciers doux, soit la limite élastique conventionnelle à $2\,^0/_{00}$ dans le cas des aciers écrouis. Ces différentes caractéristiques sont d'ailleurs les seules données dont nous disposons.

Lors de l'étude de la flexion composée et des poutres en té, nous serons amenés à faire quelques hypothèses complémentaires d'importance secondaire dont nous parlerons dans la suite.

L'expérience apprend que les poutres fléchies en béton armé peuvent présenter 5 types de rupture parmi lesquels les deux premiers sont de loin les plus importants. Ce sont les deux seuls que nous retiendrons dans la suite.

Le type 1 comprend les poutres présentant des ruptures par insuffisance de l'acier, la cause primaire de la rupture étant due au fait que l'acier tendu atteint sa limite élastique.

Le type 2 comprend les poutres présentant des ruptures par insuffisance du béton, la cause primaire de la rupture étant due à un excès de compression du béton avant que l'acier tendu n'atteigne sa limite élastique.

Le type 3 comprend les poutres pour lesquelles l'acier tendu atteint sa limite élastique juste avant que le béton ne cède par excès de compression. Ce type de rupture forme la transition entre les deux types précédents et relève à la fois de ces deux types de rupture.

Le type 4 comprend les poutres où intervient le phénomène d'hyperrésistance de l'armature. L'allongement de l'acier avant rupture est tellement important que le point représentatif de son état se trouve sur le parcours montant qui suit le palier d'étirage sur la courbe tension-déformation dans le cas des aciers à palier et au-delà de $2\,^0/_{00}$ dans le cas des aciers écrouis. Les ruptures de ce type relèvent du type 1, c'est-à-dire des ruptures par insuffisance de l'acier. Si on admet que la tension dans l'acier au moment de la rupture est égale à la limite élastique alors qu'en fait cette tension est supérieure, l'hyperrésistance se manifeste indirectement par un accroissement fictif du bras de levier des forces internes.

Le type 5 comprend les poutres présentant une rupture par cassure nette de l'acier tendu immédiatement après la formation de fissures de traction dans le béton. Ce type de rupture ne se présente pratiquement jamais: il nécessite pour se produire des pourcentages d'acier extrêmement faibles, aussi n'en tiendrons-nous pas compte.

Première partie

Nous considérons dans une première partie, les poutres rectangulaires simplement armées sollicitées en flexion simple. L'étude de la flexion composée en armature simple ou double de même que l'étude des poutres en té fera l'objet de la seconde partie.

Nous convenons d'appeler l'expression $\frac{M_0}{b\,h^2}$: moment unitaire de rupture; $\omega\,\sigma_e$: résistance unitaire de l'acier et $\sigma'_R = \sigma'_{cyl.}$: résistance unitaire du béton. Ces trois expressions seront toujours dans la suite exprimées en kg/cm². M_0 est le moment de rupture, b la largeur de la section et h sa hauteur utile. ω est le pourcentage d'acier rapporté à la hauteur utile de la section, σ_e la limite élastique réelle ou conventionnelle à $2\,^0/_{00}$, $\sigma'_R = \sigma'_{cyl.}$ la résistance du béton déterminée dans un essai de compression.

Dans l'hypothèse d'un état uniaxial de tensions, les équations d'équilibre de la statique sont au nombre de 2. Ces 2 équations font intervenir la hauteur $\dot{x}$ de la zone comprimée de la section étudiée. Par élimination de $\dot{x}$ entre ces deux équations, on obtient une nouvelle équation valable en toute généralité, donnant l'expression du moment de flexion unitaire en fonction des caractéristiques de l'acier et du béton (tableau I).

Dans le cas des ruptures par insuffisance de l'acier, la tension dans l'acier atteint la limite élastique et l'équation générale s'écrit sous la forme (I).

Dans le cas des ruptures par insuffisance du béton, la tension maximum de compression du béton σ'_0 atteint la tension de rupture σ'_R, tandis que la tension dans l'acier $\sigma_{a,R}$ reste inférieure à la limite élastique. L'équation générale s'écrit alors sous la forme (II).

Différentes hypothèses sont nécessaires dans les méthodes dites rationnelles pour expliciter les seconds membres de l'équation générale, c'est-à-dire pour rendre calculables les expressions de ζ et de μ'.

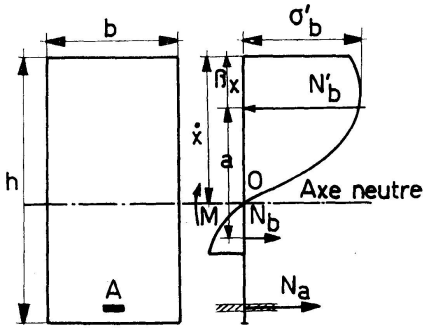
Les très nombreuses méthodes de calcul proposées dans la littérature se ramènent suivant les hypothèses admises, à une des expressions suivantes du moment unitaire de rupture. Les expressions A_1, A_2 et A_3 sont relatives aux ruptures par insuffisance de l'acier, tandis que les expressions B_1, B_2 et B_3 concernent les ruptures par insuffisance du béton.

On constate que les expressions proposées pour les ruptures par insuffisance de l'acier font toutes intervenir la résistance unitaire de l'acier $\omega\,\sigma_e$ tandis que celles relatives aux ruptures par insuffisance du béton font toutes intervenir la résistance unitaire du béton σ'_R.

Le grand nombre d'expressions proposées et le manque d'unanimité autour de l'une d'entre elles traduisent la complexité du problème. Les grandes dispersions expérimentales affectant chacune des variables et la difficulté de leur introduction théorique moyennant des hypothèses valables font que souvent

Tableau I.

Ruptures par insuffisance de l'acier	*Ruptures par insuffisance du béton*
$\frac{M_0}{b h^2} = \omega \sigma_e K_a \left[1 - \frac{\beta_1}{\alpha_1} K_a \frac{\omega \sigma_e}{\sigma_0'} + \frac{N_{b1}}{b h}\left(\frac{a_1}{h} \frac{1}{K_a \omega \sigma_e} - \frac{\beta_1}{\alpha_1 \sigma_0'}\right)\right] = \omega \sigma_e \zeta$ (I)	$\frac{M_0}{b h^2} = \sigma_R' K_b' \left[\frac{\omega \sigma_{a,R}}{K_b' \sigma_R'} - \frac{\beta_2}{\alpha_2 K_b'^2}\left(\frac{\omega \sigma_{a,R}}{\sigma_R'}\right)^2 + \frac{N_{b2}}{b h}\left(\frac{a_2}{h} - \frac{\beta_2}{K_b'} \frac{\omega \sigma_{a,R}}{\sigma_R'}\right)\right] = \sigma_R' \mu'$ (II)
$\frac{M_0}{b h^2} = \omega \sigma_e f(\omega, n) = \omega \sigma_e \zeta$ (A1)	$\frac{M_0}{b h^2} = \sigma_R' f(\omega, n) = \sigma_R' \mu'$ (B1)
$\frac{M_0}{b h^2} = \omega \sigma_e f(\omega \sigma_e, \sigma_R') = \omega \sigma_e \zeta$ (A2)	$\frac{M_0}{b h^2} = \sigma_R' f(\sigma_R', \omega) = \sigma_R' \mu'$ (B2)
$\frac{M_0}{b h^2} = \omega \sigma_e C^{te} = \omega \sigma_e \zeta$ (A3)	$\frac{M_0}{b h^2} = \sigma_R' C^{te} = \sigma_R' \mu'$ (B3)
$\omega \sigma_e n \omega \sigma_R'$	$n \omega \sigma_R'$

Expression adoptée		*Expression adoptée*
$\frac{M_0}{b h^2} = \omega \sigma_e \zeta = \omega \sigma_e f(\omega \sigma_e)$		$\frac{M_0}{b h^2} = \sigma_{cyl.}' \mu' = \begin{cases} \sigma_{cyl.}' C^{te} \\ \sigma_{cyl.}' f(\sigma_{cyl.}') \end{cases}$ ou
$\frac{M_0}{b h^2} = \omega \sigma_e 1{,}838 (\omega \sigma_e)^{-0{,}179}$		$\frac{M_0}{b h^2} = \sigma_{cyl.}' 0{,}375$ ou
$\boxed{\frac{M_0}{b h^2} = 1{,}838 (\omega \sigma_e)^{0{,}821}}$		$\frac{M_0}{b h^2} = \sigma_{cyl.}' 0{,}641 (\sigma_{cyl.}')^{-0{,}104}$
		$\boxed{\frac{M_0}{b h^2} = 0{,}641 (\sigma_{cyl.}')^{0{,}896}}$

la prise en compte de nombreuses variables n'amène aucune amélioration sensible des résultats.

Ceci explique la présence dans la littérature d'expressions aussi simples que celles du type A_3 ou B_3 où ζ et μ' sont des constantes, à côté d'expressions présentant un caractère extrêmement complexe.

La nature même du problème incite à penser qu'il est préférable de s'orienter vers des lois stochastiques basées sur un grand nombre de résultats d'essais.

Les résultats d'essais que nous avons utilisés ont été réunis par le Comité Européen du Béton et figurent dans ses publications. Parmi les 914 poutres retenues, 778 présentent des ruptures par insuffisance de l'acier tandis que 238 présentent des ruptures par insuffisance du béton; 102 d'entre elles font partie des deux types de rupture.

La portée des poutres d'essais, les résistances des bétons utilisés, les pourcentages et les limites élastiques des aciers servant d'armatures couvrent une gamme très étendue de valeurs [2].

Examinons tout d'abord le cas des rupture par insuffisance de l'acier. Le diagramme représenté sur la fig. 1 présente en abscisse le moment unitaire de rupture $\frac{M_0}{b\,h^2}$ et en ordonnée la résistance unitaire de l'acier $\omega\,\sigma_e$, ainsi que les résultats des 778 poutres étudiées.

Les expressions théoriques A_1, A_2 et A_3 sont représentées dans le même système d'axe à la fig. 2.

Flexion simple Armature simple

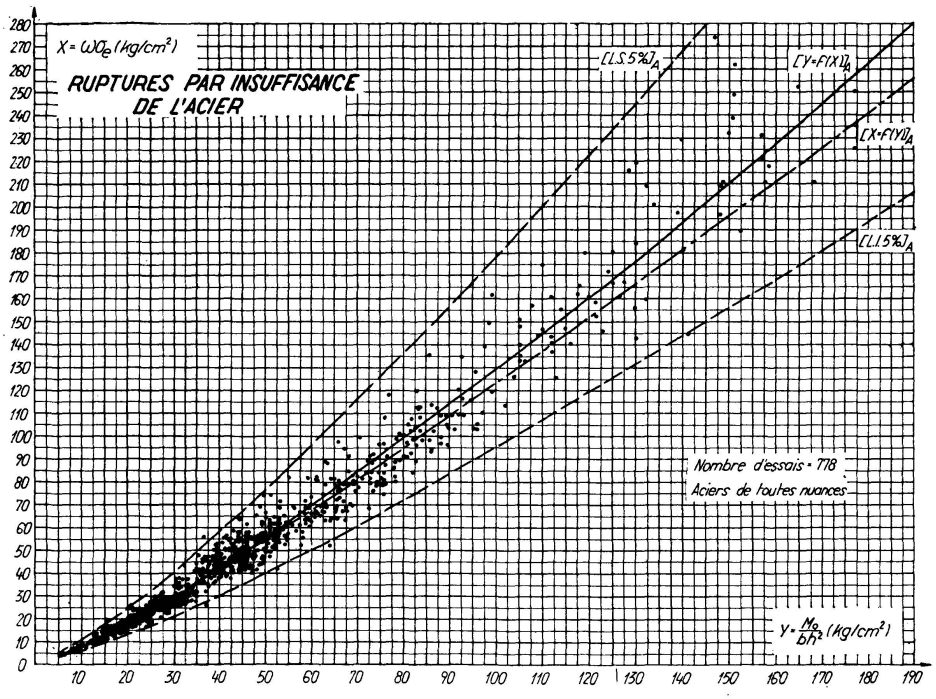


Fig. 1.

Le diagramme A_1 correspond à l'expression A_1, le diagramme A_2 à l'expression A_2 et le diagramme A_3 à l'expression A_3.

Les facteurs susceptibles d'influencer la rupture et donnés par les expressions A_1, A_2 et A_3 sont les suivants: la résistance unitaire de l'acier $\omega\,\sigma_e$, le coefficient d'équivalence n, le pourcentage d'acier ω et la résistance du béton σ'_R.

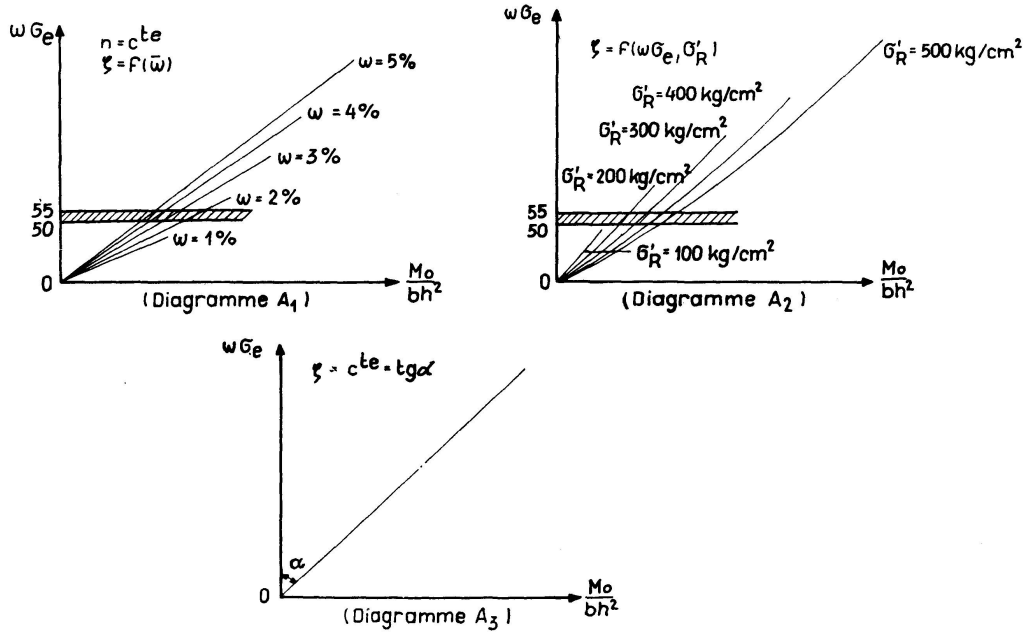


Fig. 2.

Flexion simple Armature simple

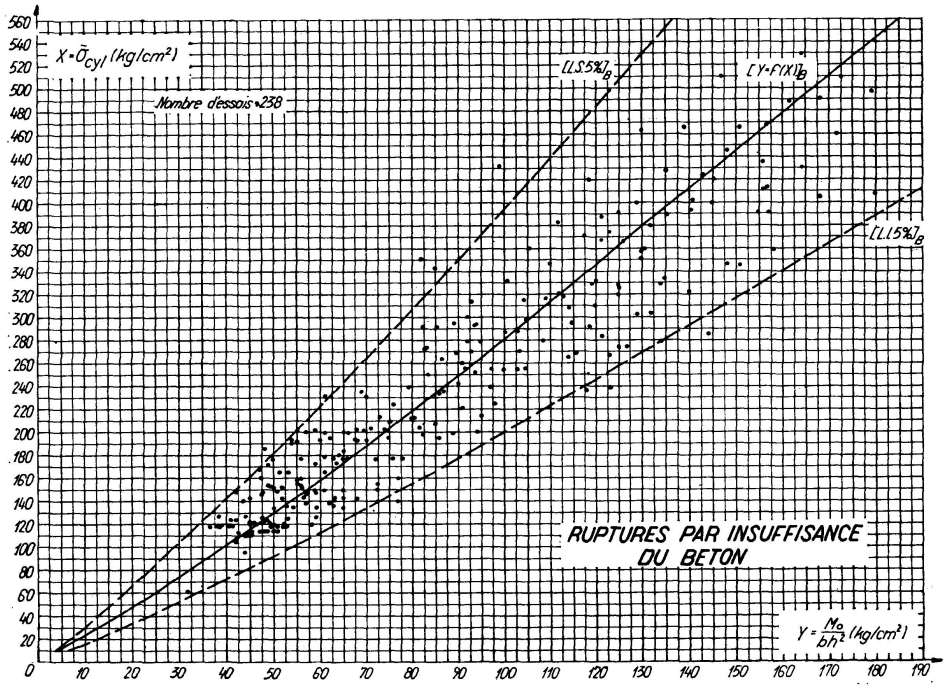


Fig. 3.

En comparant les résultats d'essais aux expressions théoriques, nous avons pu montrer que l'influence de n, ω et σ'_R sur la rupture présente un caractère aléatoire et que seule l'influence de $\omega\,\sigma_e$ peut être mise en évidence à partir des résultats expérimentaux.

La forme courbe du nuage expérimental montre que les expressions du type A_3 ou ζ est une constante ne permettent pas de le représenter de façon satisfaisante sur toute son étendue.

Nous avons par conséquent adopté comme expression générale du moment de rupture par insuffisance de l'acier $\frac{M_0}{b\,h^2} = \omega\,\sigma_e\,\zeta = \omega\,\sigma_e\,f\,(\omega\,\sigma_e)$.

Examinons de même les ruptures par insuffisance du béton. Le diagramme représenté à la fig. 3 porte en abscisse le moment unitaire $\frac{M_0}{b\,h^2}$ et en ordonnée la résistance unitaire du béton $\sigma'_R = \sigma'_{cyl.}$ ainsi que les points figuratifs des 238 poutres étudiées.

Les expressions théoriques B_1, B_2 et B_3 sont représentées dans le même système d'axe à la fig. 4.

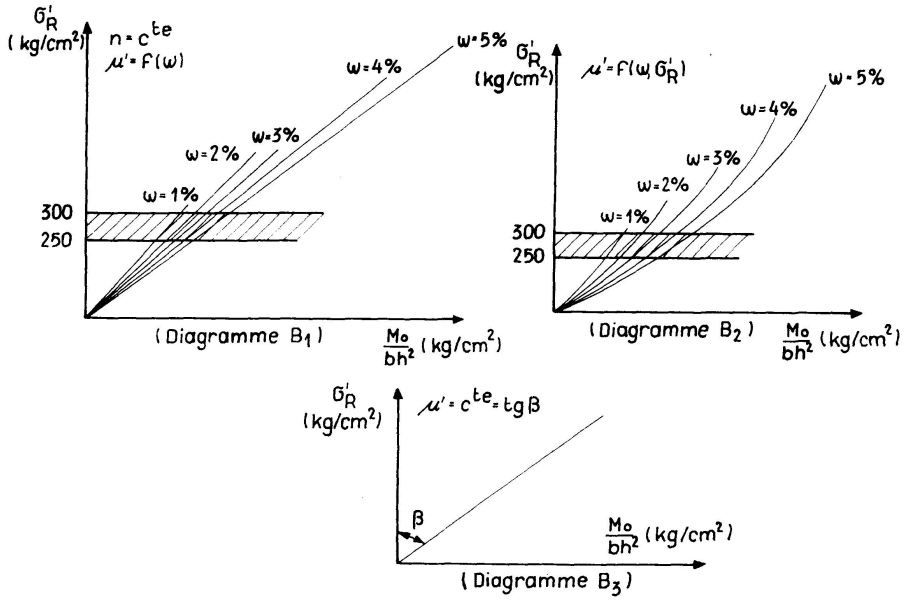


Fig. 4.

Le diagramme B_1 correspond à l'expression B_1, le diagramme B_2 à l'expression B_2 et le diagramme B_3 à l'expression B_3.

Les facteurs susceptibles d'influencer la rupture et donnés par les expressions B_1, B_2 et B_3 sont les suivants: le coefficient d'équivalence n, le pourcentage d'acier ω et la résistance du béton σ'_R.

En comparant les résultats d'essais aux expressions théoriques, nous avons pu montrer que l'influence de n et de ω sur la rupture présente un caractère aléatoire et que seule l'influence de σ'_R peut être mise en évidence à partir des résultats expérimentaux.

L'allure linéaire du nuage de points montre qu'une expression du type B_3 où μ' est une constante, est susceptible de le représenter de façon satisfaisante. Nous avons cependant étudié également le cas où μ' est une fonction de $\sigma'_R = \sigma'_{cyl.}$.

Nous avons par conséquent adopté comme expression générale du moment de rupture par insuffisance du béton: $\frac{M_0}{b\,h^2} = \sigma'_{cyl.} \cdot \mu'$ avec μ' égal soit à une constante soit à une fonction de $\sigma'_{cyl.}$.

Etude statistique des résultats de rupture

Les études statistiques ont été effectuées au Centre de Calculs Numériques de l'Université de Liège, sur un ordinateur IBM 660.

Envisageons en premier lieu les ruptures par *insuffisance de l'acier:*

$$\frac{M_0}{b\,h^2} = \omega\,\sigma_e\,f\,(\omega\,\sigma_e).$$

Divers essais nous ont conduit à adopter pour l'expression de ζ en fonction de $\omega\,\sigma_e$ une loi où $\omega\,\sigma_e$ apparaît avec un exposant fractionnaire.

Si nous représentons dans un système d'axes logarithmiques les 778 résultats d'essais, nous obtenons le nuage de points de la fig. 5. Ce nuage présente une allure linéaire et son étude est plus simple que celle du nuage initial. On peut d'ailleurs sans difficulté passer d'un diagramme à l'autre.

Flexion simple Armature simple

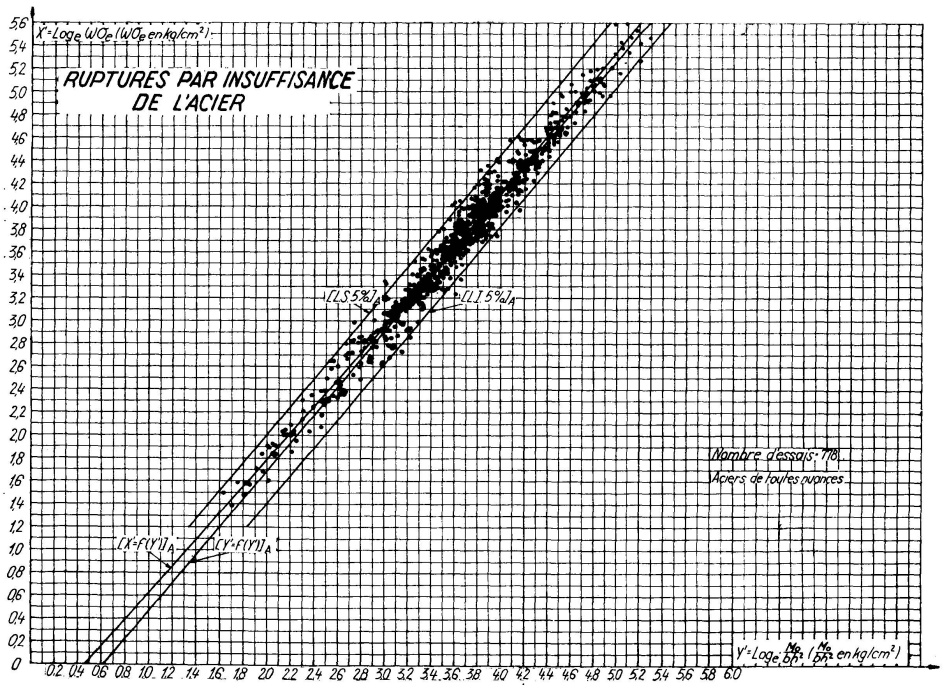


Fig. 5.

Un calcul de corrélation entre les variables $Y' = \text{Log.}_e \frac{M_0}{b h^2}$ et $X' = \text{Log.}_e \omega \sigma_e$ donne 0,977 comme coefficient de corrélation *). Cette valeur très élevée indique un excellent degré de liaison entre les deux variables et constitue une justification à postériori du choix des variables.

Les deux droites de régression figurent sur le diagramme logarithmique de même que les courbes limitant l'intervalle de confiance au seuil de probabilité 5% correspondant à la droite de régression $[Y' = f(X')]_A$.

Aux droites de régression, il correspond sur le diagramme initial (fig. 1) deux courbes exponentielles. Aux courbes limites de l'intervalle de confiance, il correspond deux autres courbes notées $[L.\,I.]_A$ et $[L.\,S.]_A$.

L'utilisation de ces courbes en vue de la prévision de la rupture est très simple, pour une poutre dont les caractéristiques sont connues. On calcule la résistance unitaire de l'acier $\omega \sigma_e$. L'horizontale d'ordonnée $\omega \sigma_e$ détermine sur les courbes $[Y = f(X)]_A$, $[L.\,I.]_A$ et $[L.\,S.]_A$ respectivement le moment unitaire de rupture de plus probable et ses valeurs extrêmes au seuil de probabilité choisi.

L'expression de la courbe $[Y = f(X)]_A$ permettant de prévoir le moment de rupture le plus probable par insuffisance de l'acier est la suivante: $\frac{M_0}{b h^2} = 1{,}838\,(\omega \sigma_e)^{0{,}821}$.

Nous avons divisé la variable $Y = \frac{M_0}{b h^2}$ en une série de classes suffisamment nombreuses pour qu'on puisse admettre sans grande erreur que tous les points figurant dans une quelconque de ces classes présentent la même valeur du moment unitaire, égale d'ailleurs à la moyenne des points de la classe.

Nous avons ensuite étudié les distributions par classe des résistances unitaires de l'acier. Ces distributions sont pratiquement normales et on peut donc les caractériser par leur moyenne et par leur dispersion.

Soit par exemple $\overline{X}_5$ et s_{x_5} la moyenne et la dispersion sur la résistance unitaire de l'acier dans la classe 5 comprenant les essais pour lesquels le moment unitaire de rupture est compris entre 40 et 50 kg/cm².

Le tableau II montre que la probabilité P d'obtenir des ruptures dans cette classe pour des résistances unitaires de l'acier égales ou supérieures par exemple à 87,09 kg/cm² est égale à 10^{-6}.

Il est possible d'établir des tableaux analogues pour chacune des classes. Il est également possible de remplacer cet ensemble de tableaux par une série de courbes d'égale probabilité dont l'usage est plus commode.

Nous avons en effet constaté que dans le système logarithmique, les valeurs moyennes par classe du moment unitaire varient linéairement en fonction des valeurs moyennes de la résistance unitaire de l'acier. Le coefficient de corrélation est de 0,999.

De même, les dispersions par classe sur la résistance unitaire de l'acier

*) Coefficient de corrélation de Bravais-Pearson.

Tableau II.

$t =$	$\overline{X}_5 + t S_{X_5}$ (kg/cm²)	P
1,28	60,36	10^{-1}
2,33	68,39	10^{-2}
3,09	74,24	10^{-3}
3,72	79,09	10^{-4}
4.27	83,39	10^{-5}
4,76	87,09	10^{-6}
5,20	90,49	10^{-7}

varient linéairement en fonction des résistances moyennes. Le coefficient de corrélation est de 0,990.

Le diagramme représenté à la fig. 6 montre les courbes d'égale probabilité de rupture $P = 10^{-7}, 10^{-6}, 10^{-5} \ldots$. L'utilisation de ce diagramme est la suivante: on se fixe à priori une probabilité de rupture admise, par exemple 10^{-6}. A chaque valeur du moment unitaire, il correspond sur la courbe $P = 10^{-6}$ une résistance unitaire limite de sécurité de l'acier en dessous de laquelle il ne faut pas descendre si on veut respecter la probabilité de rupture admise à priori.

Flexion simple Armature simple

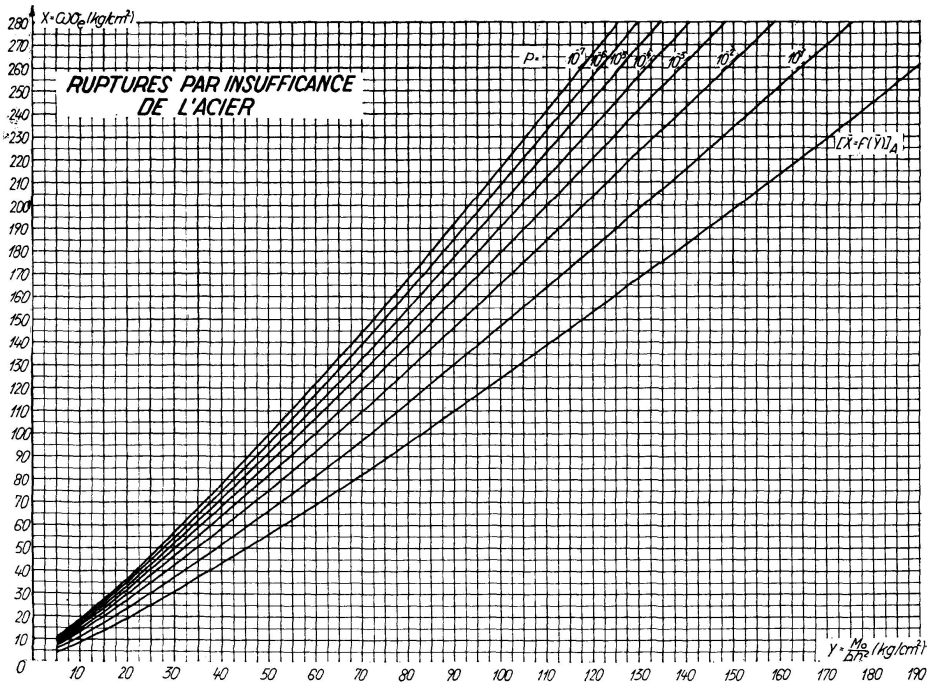


Fig. 6.

Remarque relative aux aciers à palier et aux aciers écrouis

Dans ce qui précède, nous avons considéré simultanément les poutres armées d'aciers à palier et celles armées d'aciers écrouis. Nous avons également effectué une étude séparée des 536 poutres armées d'aciers à palier et des 242 poutres armées d'aciers écrouis. Les résultats obtenus dans ces études nous permettent de conclure que le comportement des poutres armées d'aciers écrouis est pratiquement le même que celui des poutres armées d'aciers à palier, malgré le caractère conventionnel de la limite élastique à $2\,^0/_{00}$ adoptée comme référence. Notons d'ailleurs que cette limite élastique est la seule caractéristique de l'acier donnée dans les essais rassemblés par le Comité Européen du Béton.

Envisageons à présent les ruptures par *insuffisance du béton*

$$\frac{M_0}{b\,h^2} = \sigma'_{cyl.}\,\mu' \begin{cases} \mu' = \text{constante} \\ \mu' = f\,(\sigma'_{cyl.}) \end{cases}.$$

Les 238 résultats d'essais dont nous disposons sont représentés sur la fig. 3. En procédant de la même façon que pour les ruptures par insuffisance de l'acier, on trouve dans le système logarithmique un coefficient de corrélation de 0,931 entre les variables $Y' = \text{Log.}_e \frac{M_0}{b\,h^2}$ et $X' = \text{Log.}_e\,\sigma'_{cyl.}$.

La courbe permettant de prévoir le moment de rupture le plus probable par insuffisance du béton a pour équation $\frac{M_0}{b\,h^2} = 0{,}641\,(\sigma'_{cyl.})^{0{,}896}$.

Elle est représentée sur la diagramme (fig. 3) de même que les deux courbes limitant l'intervalle de confiance au seuil de probabilité 5%.

L'horizontale d'ordonnée $\sigma'_{cyl.}$ détermine sur les courbes $[Y = f\,(X)]_B$, $[L.\,I.]_B$ et $[L.\,S.]_B$ respectivement le moment de rupture le plus probable et ses valeurs extrêmes au seuil de probabilité choisi.

Un calcul de corrélation effectué entre les variables $\frac{M_0}{b\,h^2}$ et $\sigma'_{cyl.}$ et non plus entre leurs logarithmes conduit à un coefficient de corrélation de 0,917. Les deux droites de régression figurent sur le diagramme (fig. 7) de même que les deux courbes correspondant aux droites de régression du système logarithmique. On constate que ces droites et ces courbes diffèrent peu et que la droite $\frac{M_0}{b\,h^2} = 0{,}375\,\sigma'_{cyl.}$ préconisée par le C.E.B. pour les poutres présentant un rapport $\frac{\dot{x}}{h} > 0{,}5$, donne une représentation satisfaisante du nuage de points, tout au moins pour des bétons de qualités moyennes. Notons cependant que la courbe proposée pour les ruptures par insuffisance du béton conduit à des valeurs de μ' décroissant au fur et à mesure que la qualité du béton augmente. Les valeurs de μ' passent de 0,370 pour un béton de résistance égale à 250 kg/cm² à 0,333 pour un béton de résistance égale à 500 kg/cm². Le sens de cette variation concorde avec les résultats d'expériences américaines récentes [3].

Flexion simple Armature simple

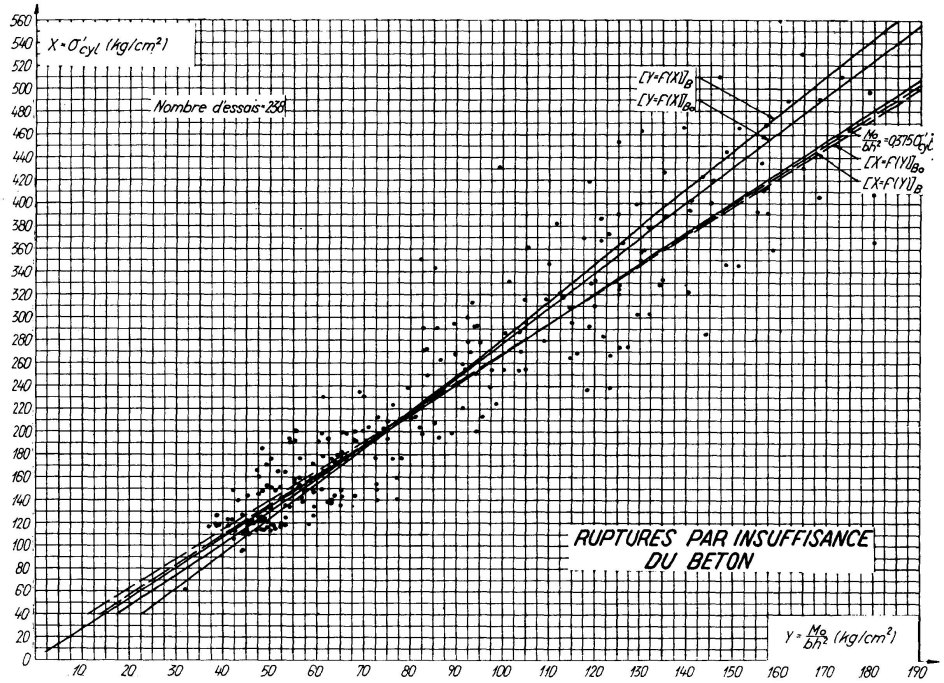


Fig. 7.

Flexion simple Armature simple

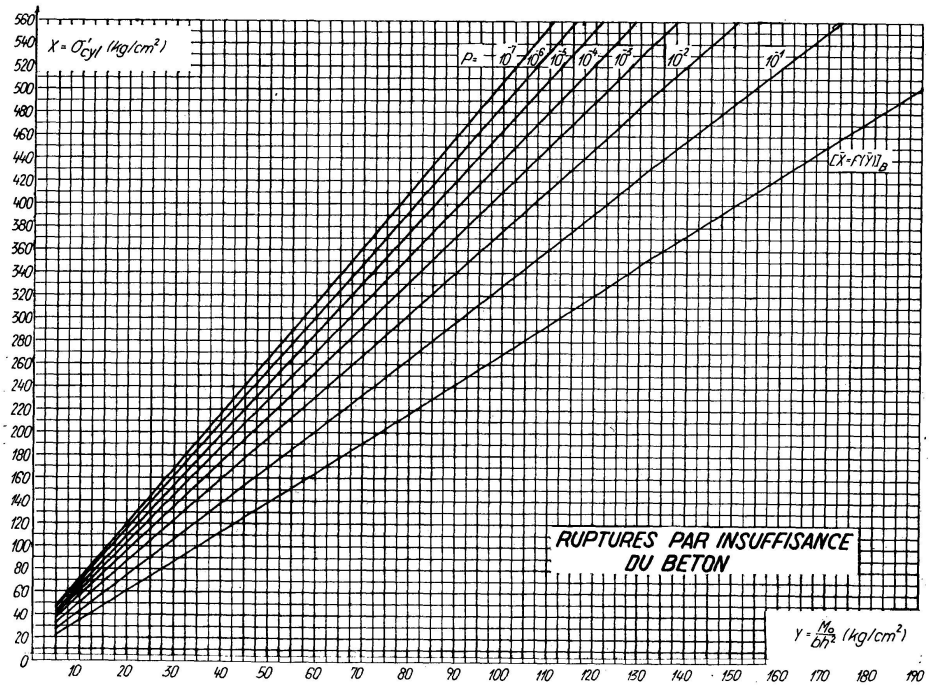


Fig. 8.

En procédant de la même façon que pour les ruptures par insuffisance de l'acier, on obtient les courbes d'égale probabilité de rupture $P = 10^{-7}$, 10^{-6}, 10^{-5}... figurant sur le diagramme (fig. 8).

L'utilisation de ce diagramme est la suivante. On se fixe un risque de ruine admis à priori, par exemple $P = 10^{-6}$. A chaque valeur du moment unitaire, il correspond sur la courbe P une résistance unitaire limite de sécurité du béton en dessous de laquelle il ne faut pas descendre si on veut respecter la probabilité de rupture P admise à l'avance.

Les diagrammes que nous avons établis permettent soit de prévoir le moment de rupture soit de calculer les dimensions et l'armature des poutres.

Envisageons tout d'abord le problème de la *prévision de la rupture*. On utilise simultanément les diagrammes relatifs à l'acier et au béton. Ces diagrammes ont en commun l'axe des abscisses et peuvent être représentés de la façon suivante (fig. 9).

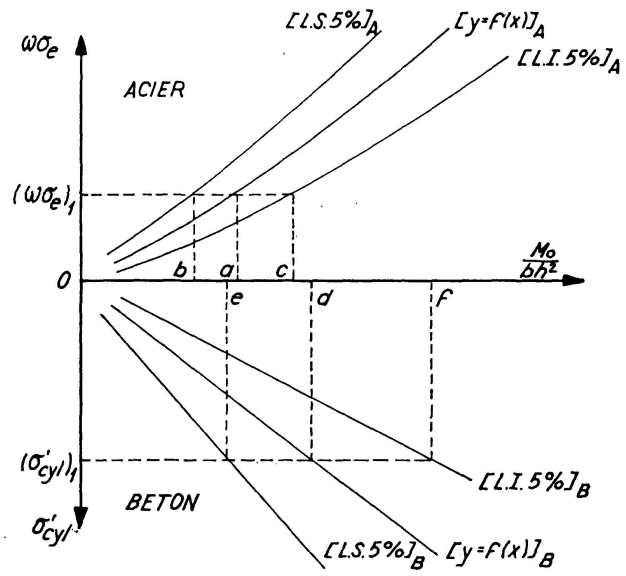


Fig. 9.

Pour une poutre dont on connaît les caractéristiques $\omega\,\sigma_e$ et $\sigma'_{cyl.}$, la détermination du type de rupture le plus probable, du moment unitaire de rupture et de ses valeurs extrêmes au seuil de probabilité 5% n'offre aucune difficulté. Dans le cas de la figure 9, relative à une poutre de caractéristiques $(\sigma_e)_1$ et $(\sigma'_{cyl.})_1$, la rupture la plus probable a lieu par insuffisance de l'acier car $0\,a$ est plus petit que $0\,d$.

Le moment unitaire de rupture le plus probable vaut $0\,a$ et ses limites sont $0\,b$ et $0\,c$.

Envisageons à présent le *calcul des dimensions* et de *l'armature des poutres*. On utilise simultanément les diagrammes portant les courbes d'égale probabilité P relatives à l'acier et au béton. Ces diagrammes ont en commun l'axe des abscisses et peuvent être représentés de la façon suivante (fig. 10).

Le problème à résoudre peut se poser comme suit: connaissant le moment maximum M_1 auquel une poutre peut être soumise en service, déterminer sa section et son armature.

On se fixe un risque de ruine accepté, par exemple $P = 10^{-6}$; on choisit un béton de résistance $(\sigma'_{cyl.})_1$ et un acier de limite élastique $(\sigma_e)_1$.

La résistance du béton étant connue, la courbe $P = 10^{-6}$ relative au béton donne un moment unitaire $\frac{M_1}{b\,h^2} = 0a_1$; M_1 étant connu, on en déduit la valeur du produit $b\,h^2$.

Si on se donne une largeur de poutre, on en déduit la hauteur ou inversement si on se donne la hauteur, on en déduit la largeur.

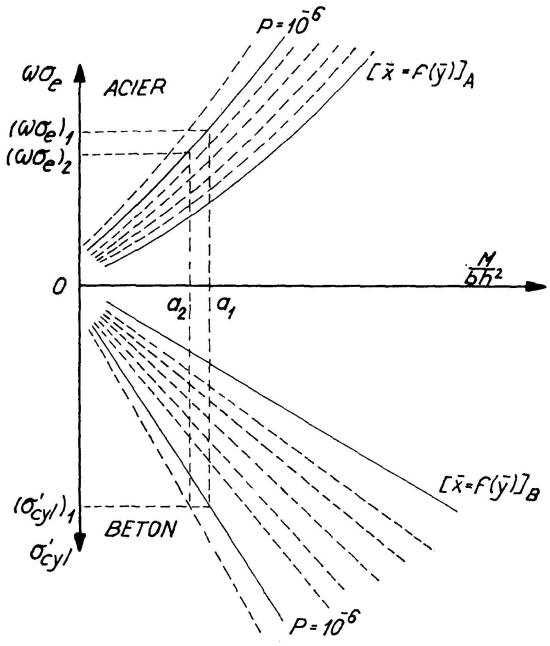


Fig. 10.

La courbe $P = 10^{-6}$ du diagramme relatif à l'acier donne alors la résistance unitaire $(\omega\,\sigma_e)_1$.

La limite élastique de l'acier étant connue, on en déduit directement le pourcentage d'acier à adopter.

Nous examinerons à présent la façon dont il est possible de *prendre en compte la qualité réelle des matériaux sur chantier.*

Les diagrammes précédents sont tous basés sur des résultats d'essais effectués en laboratoire où pour chaque poutre, les limites élastiques des armatures et les résistances des bétons sont relevées individuellement sur des éprouvettes témoins. De telles vérifications individuelles sont impossibles sur chantier.

On dispose alors, pour un ensemble de poutre, d'un ensemble de valeurs de $\sigma'_{cyl.}$ et de σ_e déterminées par des essais effectués lors de la réception des aciers ou au cours du bétonnage.

Au lieu de disposer d'une valeur de $\sigma'_{cyl.}$ et d'une valeur de σ_e valables pour une seule poutre, on dispose d'une distribution des valeurs possibles de chacune de ces deux caractéristiques valables pour un ensemble de poutres. Il est

toujours possible d'utiliser les courbes d'égale probabilité P, en partant non plus des valeurs réelles de $\sigma'_{cyl.}$ et de σ_e mais des valeurs garanties déduites de leurs distributions.

Il est possible également de calculer le risque de ruine des poutres en tenant compte à la fois des distributions de $\sigma'_{cyl.}$ et σ_e obtenues sur chantier et des distributions de ces caractéristiques ayant donné lieu à des ruptures en laboratoire sous l'action d'un moment égal au moment maximum prévu en service.

Sur la figure 11, nous avons porté en abscisse une distribution supposée normale des résistances sur cylindre X_{Br} obtenues sur chantier et en ordonnée la distribution supposée également normale des résistances sur cylindre X_B ayant conduit à des ruptures de poutres pour un moment unitaire déterminé. La rupture survient dès qu'une valeur X_B est plus grande qu'une valeur X_{Br}.

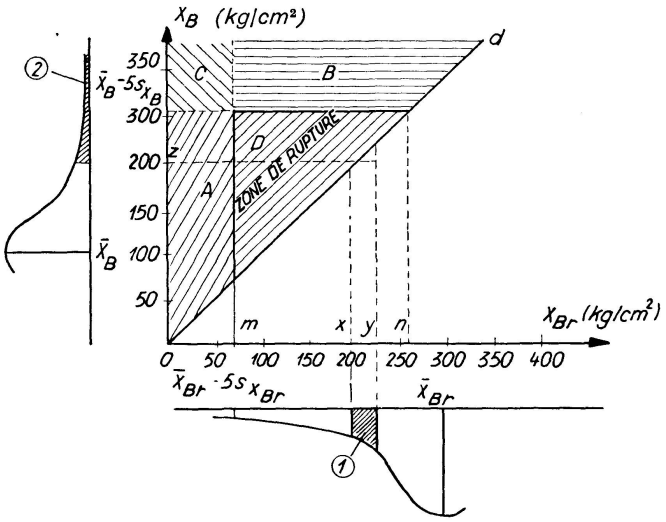


Fig. 11.

La probabilité partielle du risque de ruine vaut le produit de la probabilité qu'à X_{Br} d'être comprise entre x et y, représentée par l'aire hachurée 1, par la probabilité qu'à X_B d'être plus grand ou égal à z, représentée par l'aire hachurée 2.

Le risque total de ruine R est donné par la somme des probabilités partielles relatives à tous les intervalles xy dans lesquels la variable x_{Br} peut être comprise.

En procédant de cette façon, il est possible d'établir des réseaux de courbes d'égal risque de ruine $R = 10^{-7}$, 10^{-6}, 10^{-5}, 10^{-4}, valables pour des valeurs constantes de la dispersion relative sur la limite élastique de l'acier ou sur la résistance en compression du béton.

Ainsi par exemple, dans le cas d'une dispersion relative de 5% sur la limite élastique de l'acier, on obtient le diagramme donné à la figure 12.

Dans le cas d'une dispersion relative de 10% sur la résistance du béton, on obtient le diagramme donné à la figure 13.

Flexion simple Armature simple

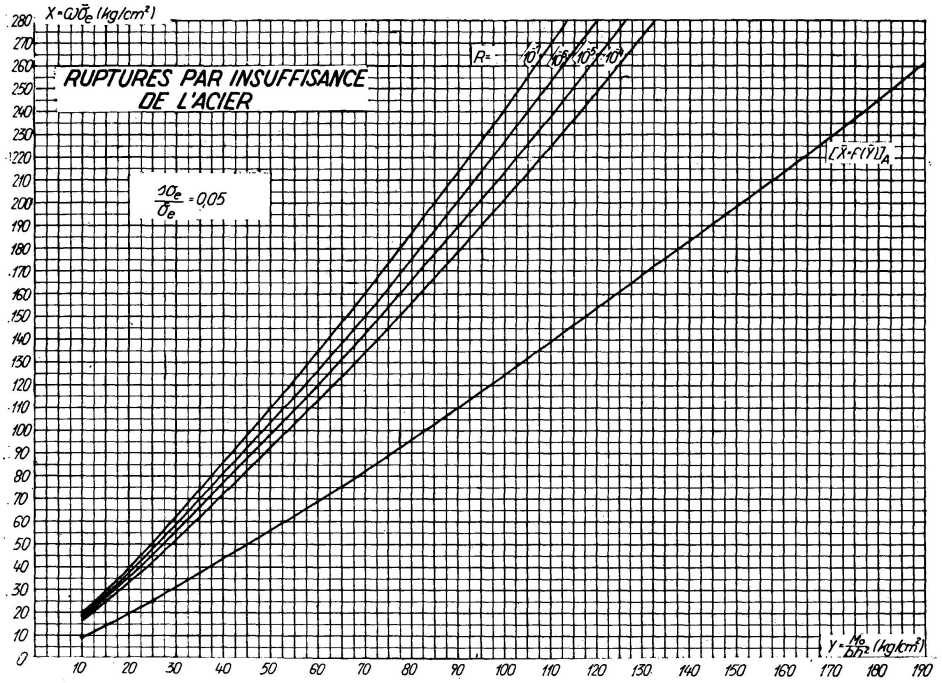


Fig. 12.

Flexion simple Armature simple

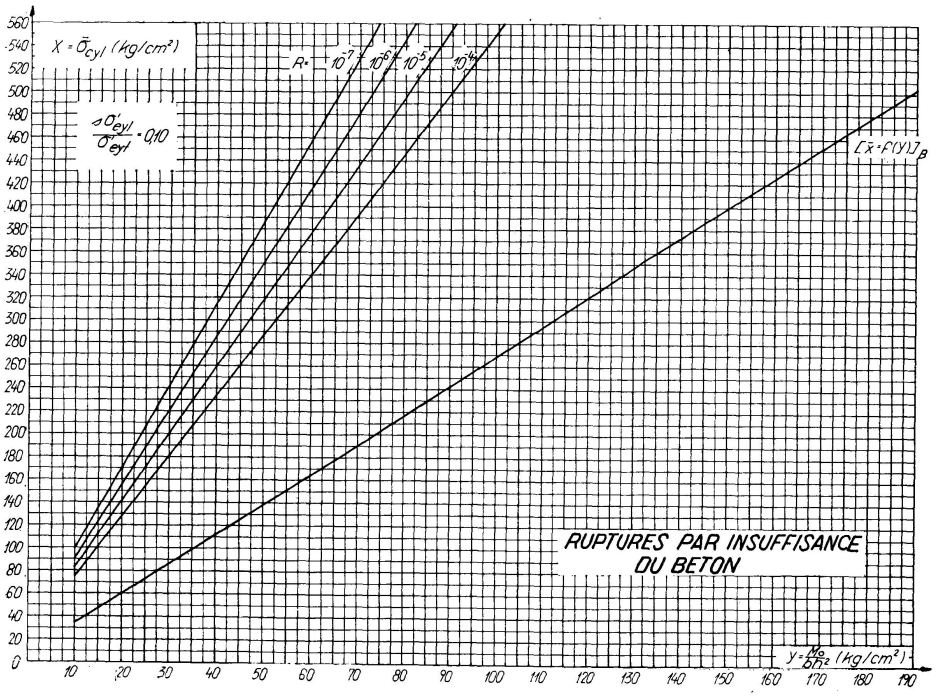
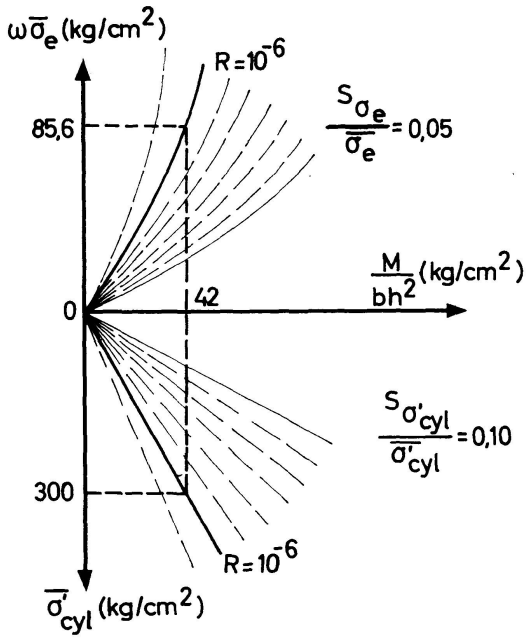


Fig. 13.

Plus les dispersions relatives augmentent, plus les courbes se rapprochent de l'axe vertical et plus faibles sont les moments à appliquer pour obtenir un risque de ruine déterminé.

Plus les dispersions relatives sont faibles, plus les courbes se rapprochent des courbes d'égale probabilité P avec lesquelles elles sont confondues si la dispersion relative est nulle, c'est-à-dire si les qualités de l'acier et du béton sont déterminées individuellement pour chaque poutre comme en laboratoire.

Donnons à présent le *calcul d'une poutre par la méthode proposée et la comparaison aux résultats donnés par la méthode classique* (Fig. 14).



Données: $\bar{\sigma}'_{cyl.} = 300$ kg/cm²
$s_{\sigma'_{cyl.}} = 30$ kg/cm²
$\bar{\sigma}_e = 3000$ kg/cm²
$s_{\sigma_e} = 150$ kg/cm²

Moment maximum en service: 10 000 kgm
Risque de ruine admis: 10^{-6} $b = 20$ cm

Méthode proposée	Méthode réglementaire
$h = 34{,}5$ cm	$h = 60$ cm
$\omega = 2{,}85\%$	$\omega = 0{,}90\%$
Si on impose	Si on impose
$h = 60$ cm	$h = 34{,}5$ cm
$\omega = 0{,}87\%$	$\omega = 2{,}71\%$
	$\omega' = 3{,}74\%$
	$\omega + \omega' = 6{,}45\%$

Fig. 14. Exemple de calcul d'une poutre.

Le moment maximum en service est de 10 000 kgm. Le béton utilisé a une résistance moyenne sur cylindre de 300 kg/cm² avec une dispersion de 30 kg/cm².

La limite élastique moyenne de l'acier employé est de 3000 kg/cm² avec une dispersion de 150 kg/cm².

Le risque de ruine admis est égal à 10^{-6}.

La méthode proposée donne les résultats suivants: pour $\bar{\sigma}'_{cyl.} = 300$ kg/cm², la courbe $R = 10^{-6}$ du diagramme inférieur donne une valeur de $\frac{M}{b\,h^2}$ égale à 42 kg/cm². Pour $b = 20$ cm, on trouve $h = 34{,}5$ cm. La courbe $R = 10^{-6}$ du diagramme supérieur donne alors $\omega\,\sigma_e = 85{,}6$ kg/cm² d'où on déduit le pourcentage d'acier égal à 2,85%.

Par la méthode classique avec $n = 15$ et en adoptant les taux de travail règlementaires de 80 kg/cm² pour le béton et de 1800 kg/cm² pour l'acier (l'acier est supposé à adhérence renforcée), on trouve pour $b = 20$ cm une hauteur utile rationnelle de 60 cm et un pourcentage d'acier de 0,90%.

On constate que la hauteur minimum donnée par la méthode règlementaire est notablement plus importante que celle donnée par le calcul à la rupture.

Si les conditions imposées exigent une hauteur plus faible que 60 cm, la méthode classique prévoit l'utilisation d'armatures de compression alors que la résistance du béton est suffisante pour descendre jusqu'à 34,5 cm tout en conservant un risque de ruine très faible.

Pour une hauteur utile de 60 cm, la méthode à la rupture donne un pourcentage d'acier de 0,87%, soit pratiquement le même que celui donné par la méthode classique, mais le risque de ruine par insuffisance du béton est nettement plus petit que 10^{-6}.

Pour une poutre de hauteur utile égale à 34,5 cm, la méthode classique prévoit l'utilisation d'une armature de compression de 3,74%, d'une armature de traction de 2,71% et d'une armature totale qui vaut 6,45%.

Les deux méthodes donnent donc des pourcentages d'armatures tendues peu différents, par contre la méthode classique prévoit 3,74% d'acier comprimé alors que la méthode à la rupture n'en prévoit pas.

Définissons à présent la *résistance unitaire critique de l'armature* (Fig. 15). La résistance critique $(\omega\,\sigma_e)_{cr.}$ peut se définir comme une limite en deça de laquelle les ruptures par insuffisance de l'acier ont plus de chances de se présenter que les ruptures par insuffisance du béton.

A cause des dispersions expérimentales, cette résistance critique s'obtient sous forme d'une zone où les deux types de rupture sont également probables et elle peut s'exprimer en fonction de la seule résistance du béton.

La zone obtenue est représentée sur le diagramme suivant (Fig. 15).

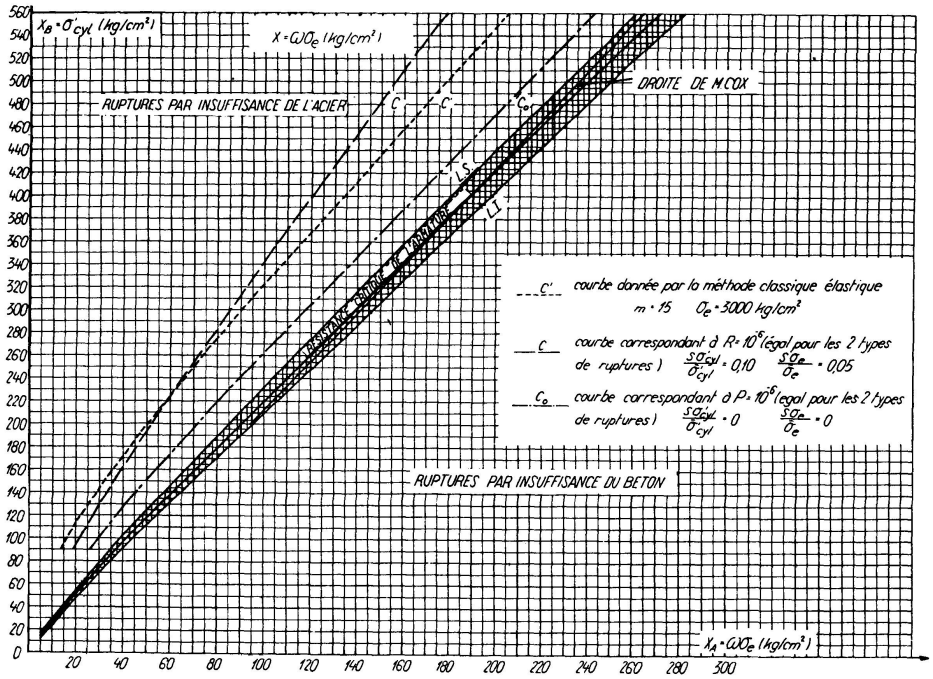


Fig. 15.

Les poutres dont les points représentatifs tombent dans la zone supérieure du diagramme ont plus de chances de présenter une rupture par insuffisance de l'acier. Les poutres dont les points représentatifs tombent dans la zone inférieure du diagramme ont plus de chances de présenter une rupture par insuffisance du béton. Les poutres dont les points représentatifs tombent dans la zone hachurée définissant la résistance unitaire critique de l'armature présentent une égale probabilité de rupture par insuffisance de l'acier et par insuffisance du béton.

Notons que toutes les théories, quelles qu'elles soient, arrivent à la conclusion qu'il existe une valeur critique séparant les deux types de rupture. A cette valeur critique, nous substituons une zone où les deux types de rupture sont également probables.

Monsieur Cox [4] dans une étude expérimentale du pourcentage critique a obtenu, sur la base de 110 essais systématiques de poutres rectangulaires, l'expression suivante du pourcentage critique d'armature: $\omega_{cr.} = 0{,}47 \frac{\sigma'_{cyl.}}{\sigma_e}$.

La droite qui y correspond sur le diagramme (Fig. 15) tombe dans la zone hachurée définissant la résistance unitaire critique sauf pour des résistances de béton inférieures à 160 kg/cm^2.

Notons encore avant de terminer cette première partie, que le choix d'une probabilité de ruine acceptable à priori est discutable.

On considère généralement comme négligeable une probabilité d'accident de l'ordre de 10^{-6}. Une probabilité de l'ordre de 10^{-2} correspond à une sécurité faible. Pour préciser davantage, il faut tenir compte de la condition d'économie et déterminer le risque de ruine économique c'est-à-dire celui qui rend minimum le coût total de la construction.

Remarquons finalement que la méthode proposée permet de calculer aisément les dimensions et l'armature de poutres pouvant supporter des sollicitations exceptionnelles sur lesquelles on dispose de données statistiques.

Deuxième partie

La deuxième partie comprend l'étude des poutres rectangulaires simplement ou doublement armées, sollicitées en flexion simple ou composée et des poutres en té sollicités en flexion simple.

Cette seconde partie traite donc des principaux types de poutres et de sollicitations rencontrés en pratique et concerne les cas pour lesquels on dispose de données expérimentales.

Les expressions du moment de rupture admises dans la première partie de ce travail peuvent aussi s'obtenir à partir de la seule équation d'équilibre des moments. Dans le cas des ruptures par insuffisance de l'acier, les moments sont pris par rapport au point de passage P' dans la section étudiée de la résultante N'_R des efforts agissant sur le béton et éventuellement l'armature

Tableau III. Ruptures par insuffisance de l'acier.

$\zeta = \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_5$			
$\boxed{\dfrac{M_0}{b h^2} = 1{,}840\, X_A^{0{,}820}}$			$X_A = \omega\, \sigma_e$ Flexion simple $X_A = \omega\, \sigma_e + \dfrac{N_0}{b\, h}$ Flexion composée
$\boxed{\dfrac{M_0}{b h^2} = \omega\, \sigma_e\, \zeta}$ (I)	$\boxed{\dfrac{M_0}{b h^2} = \omega\, \sigma_e\, \zeta_1}$ (II)		
Flexion simple Armature simple Section rectangulaire	*Flexion simple* Armature double Section rectangulaire		
		$\boxed{\dfrac{M_0}{b h^2} = \omega\, \sigma_e\, \zeta_5}$ (IV)	
		Flexion simple Section en T	
$\boxed{\dfrac{M_0}{b h^2} = \dfrac{N_0\, e}{b h^2} = \left(\omega\, \sigma_e + \dfrac{N_0}{b\, h}\right) \zeta_2}$ (III)			
Flexion composée Section rectangulaire			

de compression. Dans le cas des ruptures par insuffisance du béton, les moments sont pris par rapport au centre de gravité P de l'armature tendue.

La généralisation de ces expressions s'effectue sur la même base, c'est-à-dire en écrivant l'équation d'équilibre des moments par rapport au point P' dans le cas des ruptures par insuffisance de l'acier et par rapport au point P dans le cas des ruptures par insuffisance du béton.

En procédant de cette façon, on obtient les expressions du moment de rupture par *insuffisance de l'acier* données au Tableau III.

L'expression I est relative aux poutres rectangulaires simplement armées soumises à flexion simple. L'étude de cette expression a fait l'objet de la première partie. L'expression II est relative aux poutres rectangulaires doublement armées sollicitées en flexion simple.

L'expression III concerne les poutres rectangulaires soumises à flexion composée. Dans les cas de flexion composée, le moment de rupture est égal au produit de l'effort normal de rupture N_0 par le bras de levier e de cet effort pris par rapport au centre de gravité de l'armature tendue.

L'expression IV est relative aux poutres en té soumises à flexion simple.

Ces expressions s'obtiennent sans qu'il soit nécessaire d'émettre aucune hypothèse nouvelle; elles sont déduites simplement des équations d'équilibre interne.

Toutes les variables qui y interviennent sont connues sauf ζ_1, ζ_2 et ζ_5. Il est possible de les déterminer en traitant par la méthode de la corrélation statistique un grand nombre de résultats d'essais comme cela a été fait pour déterminer ζ au cours de la première partie.

Les expressions obtenues pour les moments de rupture par insuffisance du béton sont données aux tableaux IV et V.

L'expression V est relative aux poutres rectangulaires simplement armées, soumises à flexion simple. L'étude de cette expression a fait l'objet de la première partie.

L'expression VI est relative aux poutres rectangulaires doublement armées sollicitées en flexion simple.

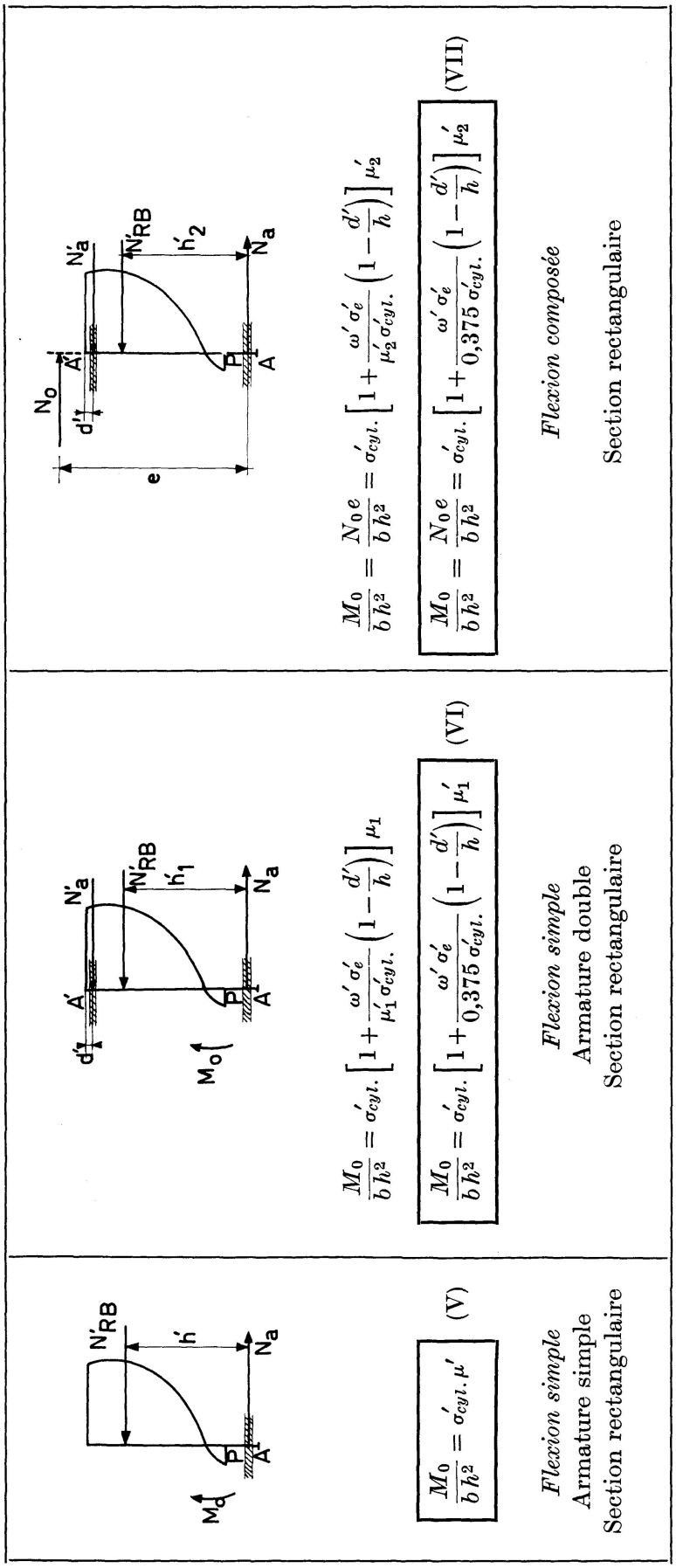
L'expression VII est relative aux poutres rectangulaires soumises à flexion composée.

L'expression VIII concerne les cas de compression centrée ou faiblement excentrée. L'expression IX est relative aux poutres en té simplement fléchies.

Pour obtenir ces expressions, déduites simplement des équations d'équilibre interne, nous avons admis:

1. Que l'armature de compression atteint la limite élastique au moment de la rupture pour autant que cette limite élastique soit au plus de 40 à 45 kg/mm². Cette hypothèse admise également par le C.E.B. est toujours vérifiée rigoureusement pour autant que l'armature ne glisse pas dans sa gaine de béton et qu'elle ne se dérobe pas par flambage.

Tableau IV. Ruptures par insuffisance du béton.



$$\boxed{\frac{M_0}{b\,h^2} = \sigma'_{cyl.}\,\mu'} \quad \text{(V)}$$

Flexion simple
Armature simple
Section rectangulaire

$$\frac{M_0}{b\,h^2} = \sigma'_{cyl.}\left[1 + \frac{\omega'\,\sigma'_e}{\mu'_1\,\sigma'_{cyl.}}\left(1 - \frac{d'}{h}\right)\right]\mu_1$$

$$\boxed{\frac{M_0}{b\,h^2} = \sigma'_{cyl.}\left[1 + \frac{\omega'\,\sigma'_e}{0{,}375\,\sigma'_{cyl.}}\left(1 - \frac{d'}{h}\right)\right]\mu'_1} \quad \text{(VI)}$$

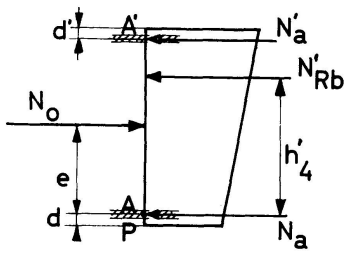
Flexion simple
Armature double
Section rectangulaire

$$\frac{M_0}{b\,h^2} = \frac{N_0\,e}{b\,h^2} = \sigma'_{cyl.}\left[1 + \frac{\omega'\,\sigma'_e}{\mu'_2\,\sigma'_{cyl.}}\left(1 - \frac{d'}{h}\right)\right]\mu'_2$$

$$\boxed{\frac{M_0}{b\,h^2} = \frac{N_0\,e}{b\,h^2} = \sigma'_{cyl.}\left[1 + \frac{\omega'\,\sigma'_e}{0{,}375\,\sigma'_{cyl.}}\left(1 - \frac{d'}{h}\right)\right]\mu'_2} \quad \text{(VII)}$$

Flexion composée
Section rectangulaire

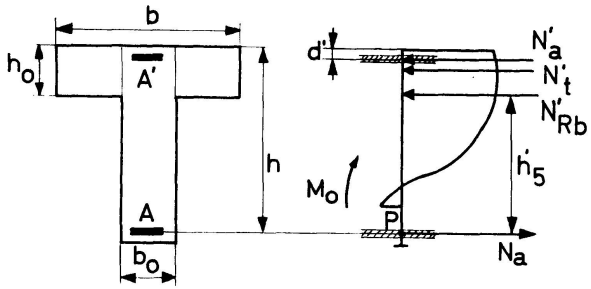
Tableau V. Ruptures par insuffisance du béton (suite).



$$\frac{M_0}{b\,h^2} = \frac{N_0\,e}{b\,h^2} = \sigma'_{cyl.}\left[\frac{1}{\mu'_4}\left(1+\frac{d}{h}\right)^2 \frac{e}{6\,e-2\,h+4\,d} + \frac{\omega'\sigma'_e}{\mu'_4\,\sigma'_{cyl.}}\left(1-\frac{d'}{h}\right)\right]\mu'_4$$

$$\boxed{\frac{M_0}{b\,h^2} = \frac{N_0\,e}{b\,h^2} = \sigma'_{cyl.}\left[\frac{1}{0{,}375}\left(1+\frac{d}{h}\right)^2 \frac{e}{6\,e-2\,h+4\,d} + \frac{\omega'\sigma'_e}{0{,}375\,\sigma'_{cyl.}}\left(1-\frac{d'}{h}\right)\right]\mu'_4} \quad \text{(VIII)}$$

Compression centrée ou faiblement excentrée
Section rectangulaire



$$\frac{M_0}{b\,h^2} = \sigma'_{cyl.}\left\{\frac{b_0}{b} + \frac{1}{\mu'_5}\left[\frac{b-b_0}{b}\,\frac{h_0}{h}\,\frac{h-\frac{h_0}{2}}{h} + \frac{\omega'\,\sigma'_e}{\sigma'_{cyl.}}\left(1-\frac{d'}{h}\right)\right]\right\}\mu'_5$$

$$\boxed{\frac{M_0}{b\,h^2} = \sigma'_{cyl.}\left\{\frac{b_0}{b} + \frac{1}{0{,}375}\left[\frac{b-b_0}{b}\,\frac{h_0}{h}\,\frac{h-\frac{h_0}{2}}{h} + \frac{\omega'\,\sigma'_e}{\sigma'_{cyl.}}\left(1-\frac{d'}{h}\right)\right]\right\}\mu'_5} \quad \text{(IX)}$$

Flexion simple
Section en **T**

$$\boxed{\frac{M_0}{b\,h^2} = D\,\sigma'_{cyl.}\,\mu' = \ldots = X_B\mu'}$$

$$\boxed{X_B = D\,\sigma'_{cyl.}}$$

$$\boxed{\mu'_1 = \mu'_2 = \mu'_3 = \mu'_4 = \mu'_5 = 0{,}375}$$

$$\boxed{\frac{M_0}{b\,h^2} = 0{,}608\,X_B^{0{,}898}}$$

2. Que dans le cas de la compression centrée ou faiblement excentrée, c'est-à-dire quand la résultante de compression tombe dans le noyau central, les diagrammes de compression du béton sont rectangulaires ou trapézoïdaux.
3. Que les parties latérales de la table des poutres en té sont, au moment de la rupture, soumises à une tension uniforme de compression égale à la résistance du béton sur cylindre.

   Dans le cas des ruptures par insuffisance du béton et pour autant que la limite élastique de l'acier tendu ne soit pas trop élevée et que l'axe neutre de flexion tombe dans la nervure, l'hypothèse admise ne saurait amener d'erreurs importantes.

Ces trois hypothèses permettent de ne faire usage que des seules caractéristiques connues dans les essais dont nous disposons.

Toutes les expressions obtenues sont de la forme $\frac{M_0}{b\,h^2} = D\,\sigma'_{cyl.}\,\mu'_{1,2,\ldots}$ où D est une fonction de μ' et d'autres facteurs connus.

Après avoir essayé plusieurs valeurs numériques pour les μ' intervenant dans les expressions D, nous avons retenu la valeur 0,375 qui coïncide d'ailleurs avec celle proposée par le C.E.B. Les expressions de D valables dans chacun des cas sont alors aisément calculables.

Examinons tout d'abord les *ruptures par insuffisance de l'acier.* Portons en abscisse les moments unitaires de rupture $\frac{M_0}{b\,h^2}$ et en ordonnée les valeurs de la variable X_A qui vaut soit $\omega\,\sigma_e$ dans les cas de flexion simple, soit $\omega\,\sigma_e + \frac{N_0}{b\,h}$ dans les cas de flexion composée.

On obtient dans ce système d'axes une série de nuages de points sur lesquels on peut effectuer la même étude que celle entreprise au cours de la première partie pour les poutres rectangulaires simplement armées.

Les essais étudiés comportent 117 poutres rectangulaires doublement armées, sollicitées en flexion simple, pour lesquelles le coefficient de corrélation est de 0,975, 112 poutres rectangulaires, sollicitées en flexion composée, pour lesquelles le coefficient de corrélation est de 0,981 et 164 poutres en té pour lesquelles le coefficient de corrélation est de 0,961.

Montrons à titre d'exemple le nuage des points obtenus dans le cas de la flexion composée (Fig. 16).

La courbe donnant le moment unitaire de rupture le plus probable dans les cas de flexion simple diffère très peu de la courbe correspondant à la flexion composée.

Nous avons de même constaté que la courbe donnant le moment de rupture le plus probable dans les cas de flexion simple, armature simple donne une bonne représentation des différents nuages de points et que pratiquement tous les résultats sont compris entre les mêmes limites de confiance.

On ne commet donc pas de grande erreur en supposant $\zeta = \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_5$ et en étudiant simultanément l'ensemble des résultats.

L'ensemble des résultats d'essais de poutre de toutes natures au nombre de 1231 est représenté sur la figure 17.

Une étude analogue à celle effectuée au cours de la première partie donne dans le système logarithmique un coefficient de corrélation de 0,978.

Flexion composée

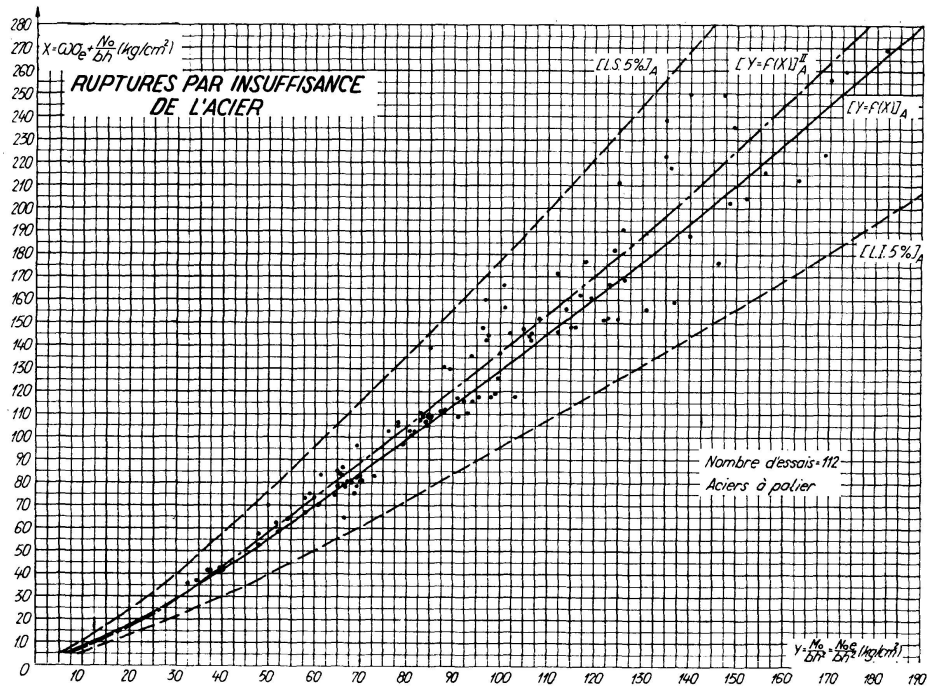


Fig. 16.

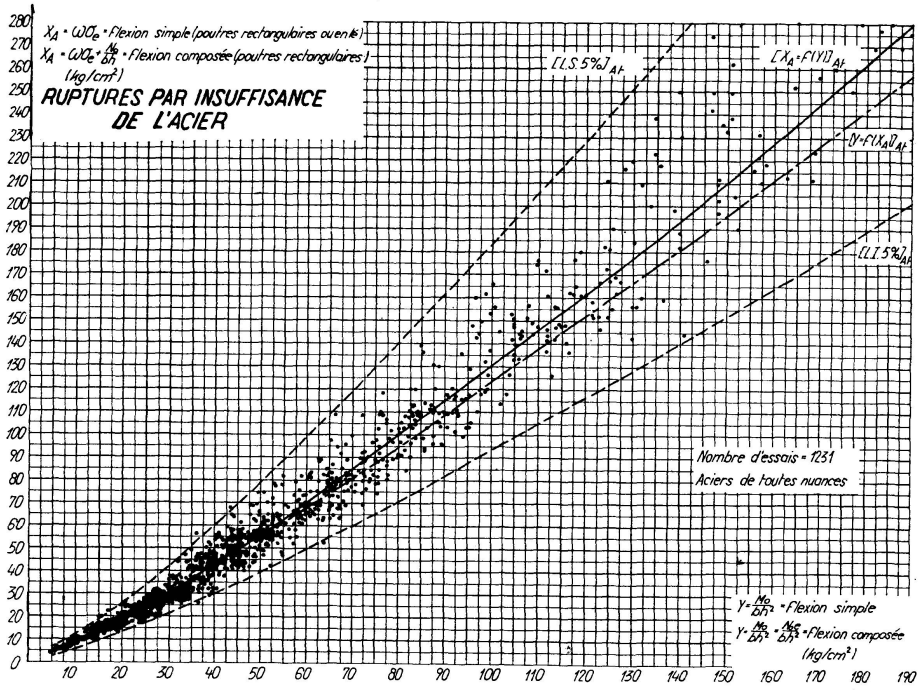


Fig. 17.

La courbe permettant de prévoir le moment de rupture par insuffisance de l'acier a pour équation $\frac{M_0}{b\,h^2} = 1{,}840\,X_A^{0{,}820}$.

Cette courbe figure sur le diagramme (fig. 17) de même que les limites de confiance au seuil de probabilité 5%.

Une division en classes de la variable Y et une étude des distributions par classe de la variable X_A permettent d'obtenir les courbes d'égale probabilité tracées à la figure 18.

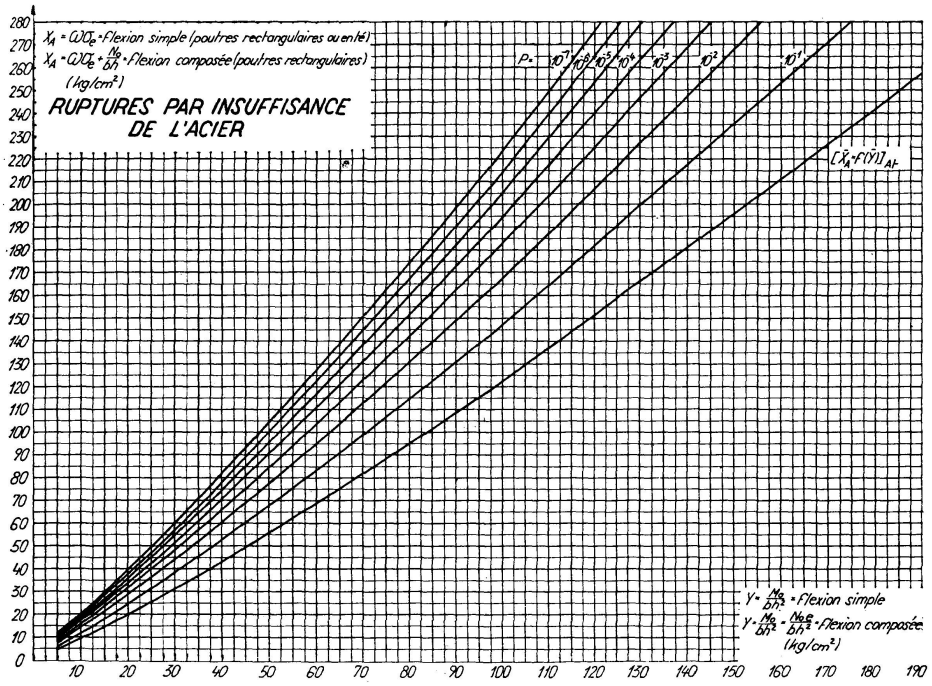


Fig. 18.

L'utilisation de ces courbes est analogue à celle des courbes obtenues au cours de la première partie; elles en diffèrent d'ailleurs très peu.

Examinons à présent les *ruptures par insuffisance du béton.*

Si on porte en abscisse le moment unitaire de rupture $\frac{M_0}{b\,h^2}$ et en ordonnée la variable $X_B = D\,\sigma'_{cyl.}$, on obtient une série de nuages de points sur lesquels on peut effectuer la même étude que celle entreprise au cours de la première partie dans le cas des poutres rectangulaires simplement armées ($D = 1$).

Les essais étudiés comportent 38 poutres rectangulaires doublement armées sollicitées en flexion simple pour lesquelles le coefficient de corrélation vaut 0,951, 151 poutres rectangulaires soumises à flexion composées pour lesquelles on a trouvé un coefficient de corrélation de 0,867, 53 poutres rectangulaires soumises à compression centrée ou faiblement excentrée pour lesquelles le coefficient de corrélation est de 0,914 et 51 poutres en té pour lesquelles le coefficient de corrélation est de 0,970.

Montrons à titre d'exemple le nuage des points obtenus dans le cas des poutres en té (Fig. 19).

Poutres en té

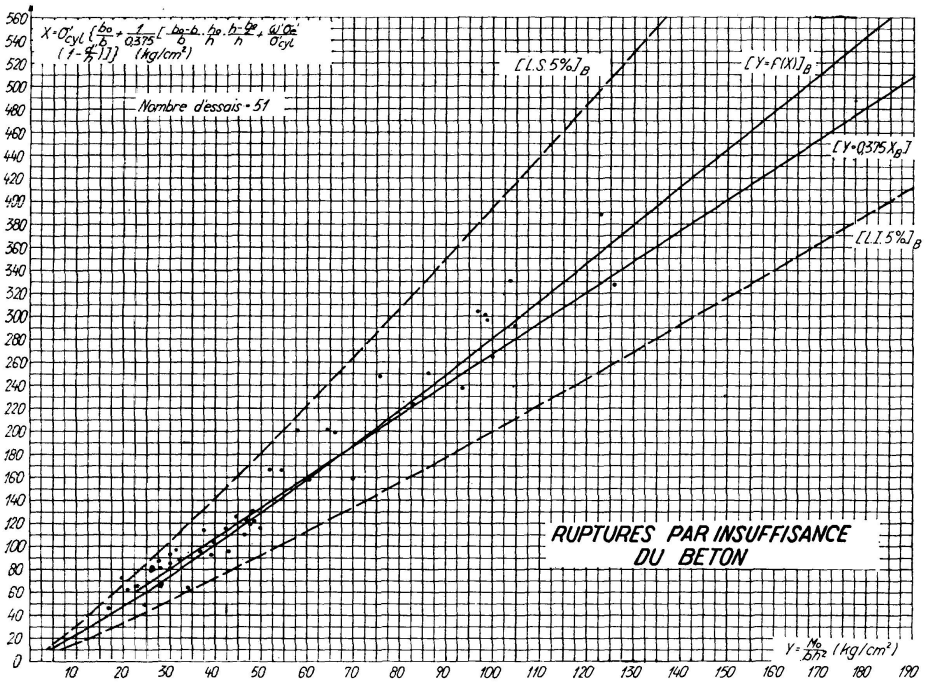


Fig. 19.

On constate que la droite $\frac{M_0}{b\,h^2} = 0{,}375\,X_B$ donne une représentation satisfaisante du nuage de points.

On constate de même que cette droite donne une représentation satisfaisante des autres nuages de points, ce qui fournit une justification à postériori du choix de la valeur 0,375 adoptée pour le calcul des expressions D. On constate de plus que pratiquement tous les résultats d'essais tombent entre les limites de confiance au seuil 5%, valables en flexion simple, armature simple.

On peut donc admettre sans grand risque d'erreur $\mu' = \mu'_1 = \mu'_2 = \mu'_4 = \mu'_5$ et étudier simultanément l'ensemble des résultats.

L'ensemble des résultats d'essais de poutres de toutes natures, au nombre de 531 sont représentés sur la fig. 20.

Une étude analogue à celle effectuée au cours de la première partie donne un coefficient de corrélation de 0,919, entre les variables $\frac{M_0}{b\,h^2}$ et X_B. Dans le système d'axes logarithmiques, le coefficient de corrélation est de 0,928. La courbe permettant de prévoir le moment de rupture par insuffisance du béton a pour équation $\frac{M_0}{b\,h^2} = 0{,}608\,X_B^{0{,}898}$.

Cette courbe figure sur le diagramme (fig. 20) de même que les limites de confiance au seuil 5%. Elles sont peu différentes de celles trouvées en flexion simple, armature simple.

Une division en classes de la variable Y et une étude des distributions par

classe de la variable X_B permettent d'obtenir les courbes d'égale probabilité P figurant sur le diagramme fig. 21.

L'utilisation de ces courbes est analogue à celle des courbes trouvées au cours de la première partie; elles en diffèrent d'ailleurs très peu.

L'utilisation simultanée des diagrammes valables pour les deux types de rupture permet de déterminer aisément le type de rupture le plus probable, le

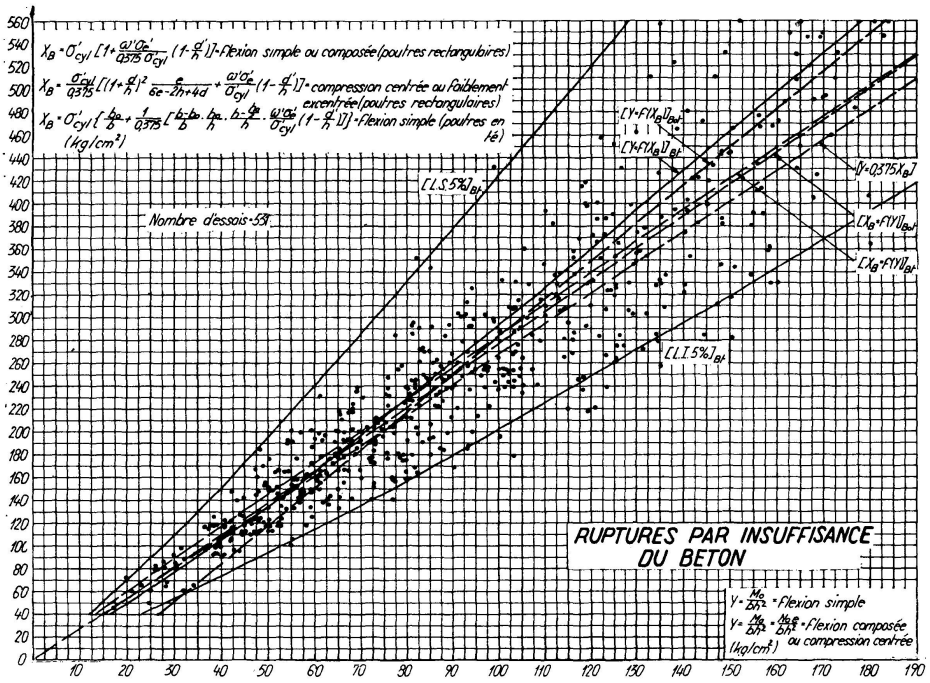


Fig. 20.

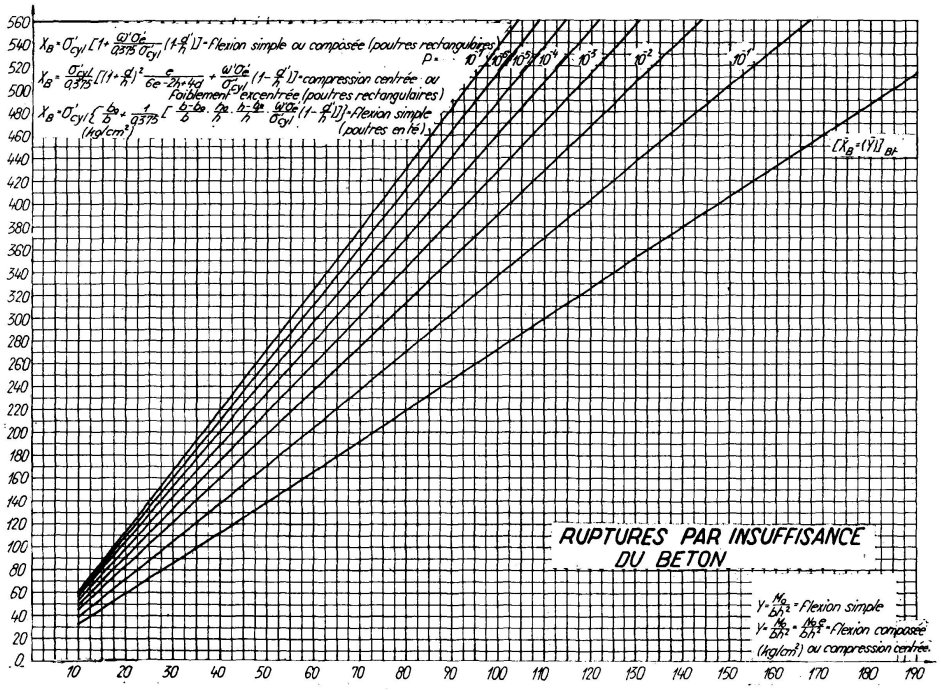


Fig. 21.

moment de rupture le plus probable ainsi que ses limites au seuil de probabilité 5%.

L'utilisation simultanée des courbes d'égale probabilité P valables pour les deux types de rupture, en vue de déterminer les sections des poutres et leurs armatures est analogue à celle décrite au cours de la première partie.

Notons qu'il est également possible de définir une zone où les deux types de rupture sont également probables. Cette zone défini les valeurs critiques de X_A et s'exprime en fonction de X_B.

Conclusions

Nous en arrivons maintenant aux conclusions de cet exposé.

En ce qui concerne la prévision de la rupture, les lois $\frac{M_0}{b\,h^2} = 1{,}838\,(\omega\,\sigma_e)^{0{,}821}$ et $\frac{M_0}{b\,h^2} = 0{,}641\,(\sigma'_{cyl.})^{0{,}896}$ établies à partir de 914 essais de poutres rectangulaires simplement armées et sollicitées en flexion simple donnent de façon satisfaisante le moment de rupture respectivement par insuffisance de l'acier et par insuffisance du béton.

Ces lois valables pour des aciers de toutes nuances, à palier ou écrouis, sont représentées par des courbes d'un usage rapide et commode.

Les valeurs extrêmes du moment de rupture auquelles on peut s'attendre au seuil de probabilité 5% sont également données par des courbes.

La généralisation de ces lois dans le cas des poutres rectangulaires, simplement ou doublement armées, sollicitées en flexion simple ou composée et dans le cas des poutres en té, sollicitées en flexion simple donne les deux expressions suivantes établies à partir de 1577 essais de rupture:

$$\frac{M_0}{b\,h^2} = 1{,}840\,X_A^{0{,}820} \text{ et } \frac{M_0}{b\,h^2} = 0{,}608\,X_B^{0{,}898}.$$

Les expressions de X_A et de X_B, différentes pour chaque type de poutres sont aisément calculables à partir des caractéristiques de l'acier et du béton.

On constate que les deux expressions valables pour les ruptures par insuffisance de l'acier sont pratiquement identiques et que les deux expressions valables pour les ruptures par insuffisance du béton sont très peu différentes. Notons que les dispersions obtenues par rapport aux courbes proposées sont du même ordre de grandeur que celles trouvées par les méthodes semi-théoriques les plus perfectionnées [5].

En ce qui concerne le calcul des dimensions et des armatures, la présente étude montre qu'il est possible de tracer des courbes d'égales probabilités P valables respectivement pour les deux types de rupture.

Le calcul des sections et des pourcentages d'armatures pour la sollicitation

maximum de service s'effectue aisément à partir des courbes P correspondant à des probabilités de rupture très faibles et admises à priori.

Sur chantier, la détermination de la résistance du béton et de la limite élastique de l'acier ne peut se faire individuellement pour chaque poutre. On utilise alors les courbes P en partant des valeurs garanties de ces caractéristiques.

Pour les poutres rectangulaires, simplement armées et simplement fléchies, il est possible de partir des valeurs moyennes des caractéristiques de l'acier et du béton et d'utiliser des courbes d'égal risque de ruine tenant compte à la fois des dispersions en laboratoire et sur chantier.

Notons que les résultats obtenus ne sont valables que pour des poutres possédant une armature d'effort tranchant suffisante pour que la rupture ait lieu par flection et sous réserve d'une vérification de la flèche en service.

Remarquons également que l'établissement de courbes expérimentales donne une méthode de calcul valable uniquement dans les limites où les essais ont été faits. Cependant, les gammes très étendues de résistances unitaires des aciers et des bétons ainsi que des dimensions des sections étudiées donnent aux courbes proposées un caractère très général.

Nous avons étudié par la méthode proposée 33 poutres essayées jusqu'à rupture au Laboratoire d'Essais des Constructions du Génie Civil de l'Université de Liège, soit à l'occasion des travaux pratiques des étudiants, soit à l'occasion de recherches ou de contrôles demandés aux laboratoires.

Appelons p le rapport entre le moment expérimental de rupture et le moment calculé par la méthode proposée.

Nous avons obtenu pour les 33 essais étudiés une valeur moyenne de p égale à 1,043 et une dispersion de 9,4%.

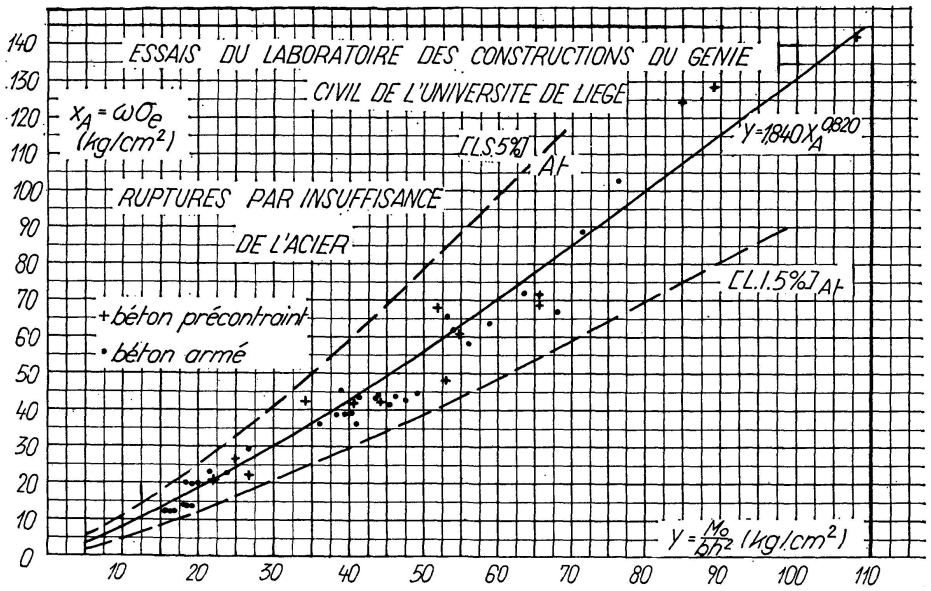


Fig. 22.

Les résultats de rupture par insuffisance de l'acier sont représentés sur la Fig. 22. L'accord avec la courbe proposée est excellent.

En outre, nous avons calculé par la méthode proposée 16 poutres d'essais en béton précontraint, la plupart de grande portée. On sait en effet que le béton précontraint se comporte à la rupture comme le béton armé.

Les résultats trouvés pour ces 16 poutres ont donné une valeur moyenne de p égale à 0,999 et une dispersion de 9,9%.

Les résultats de rupture par insuffisance de l'acier figurent également sur le diagramme (fig. 22). On constate que l'accord est excellent.

Il semble donc bien que la méthode proposée s'applique également au béton précontraint dans les conditions ultimes.

Bibliographie

1. Baus, R.: «Contribution au calcul à la rupture du béton armé.» Tome II. Nouvelle Série, Bulletin du C.E.R.E.S. (Liège 1961.)
2. C.E.B.: Bulletins d'information Nos 6—7 et 11.
3. Kriz, L. B. et Lee, S. L.: "Ultimate Strength of Over-Reinforced Beams." Bulletin D 36, Portland Cement Association Development Department.
4. Cox, K. C.: "Tests of Reinforced Concrete Beams with Recommendations for Attaining Balanced Design." Proceedings Vol. 38, A.C.I. Journal (Septembre 1941).
5. Massonnet, Ch. et Moenaert, P.: «Calcul du béton armé à la rupture en flexion simple ou composée. Comparaison statistique de diverses théories avec l'ensemble des résultats de recherches expérimentales.» Publication préliminaire du Sixième Congrès de l'A.I.P.C. (Stockholm, 1960).

Résumé

Le but de cette étude est:

1. D'établir sur la base de la corrélation statistique des lois de rupture valables pour les poutres rectangulaires simplement armées, sollicitées en flexion simple.

Ces lois, reposant sur un nombre restreint d'hypothèses et sur de nombreux résultats d'essais, permettent de déterminer la valeur la plus probable de la sollicitation de rupture et son intervalle de confiance au seuil de probabilité 5%.

2. De fournir les bases d'une méthode probabiliste de calcul permettant d'adapter la résistance de l'acier et celle du béton à la sollicitation maximum de service, en vue d'obtenir un risque de ruine très faible (de l'ordre de 10^{-6} par exemple).

3. De généraliser les lois et la méthode de calcul et de les rendre applicables aux poutres rectangulaires simplement ou doublement armées, sollicitées en flexion simple ou composée ainsi qu'aux poutres en té sollicitées en flexion simple.

Zusammenfassung

Der Zweck dieser Arbeit ist:

1. Auf Grund der statistischen Korrelation die Gesetze für die Bruchlast von rechteckigen, auf reiner Biegung beanspruchten Trägern mit einfacher Bewehrung aufzustellen.

Diese Gesetze, die auf einer beschränkten Anzahl von Annahmen und auf zahlreichen Versuchsergebnissen beruhen, erlauben es, den wahrscheinlichsten Wert der Bruchbeanspruchung festzustellen und die Spanne der 95prozentigen Sicherheit anzugeben.

2. Die Grundlagen einer probabilistischen Bemessungsmethode zu geben, welche es erlaubt, die Stahl- und Betonfestigkeit der maximalen Betriebsbeanspruchung anzupassen, so daß die Bruchgefahr sehr klein wird (zum Beispiel der Größenordnung 10^{-6}).

3. Die Gesetze und die Bemessungsmethode zu verallgemeinern und sie im Falle von rechteckigen Trägern, mit einfacher oder doppelter Bewehrung, auf Biegung mit oder ohne Normaldruckkraft beansprucht, sowie im Falle von auf reine Biegung beanspruchten T-Trägern, anwendbar zu machen.

Summary

The purpose of this study is:

1. To establish, according to the methods of statistical correlation, failure laws valid for simply reinforced rectangular beams in simple bending.

These laws are based upon a small number of hypotheses and numerous tests results.

They enable the most probable value of the breaking stress and its 95% confidence limit were determined.

2. To provide the basis of a probabilistic design method which would enable the strength of the steel and that of the concrete to be adapted to the maximum service stress, in order to obtain a very slight risk of failure (of the order of 10^{-6}, for example).

3. To generalize the laws and the design method and to make them applicable to singly or doubly reinforced rectangular beams, subjected to simple or composite bending and also to T beams stressed by simple bending.

Leere Seite
Blank page
Page vide