

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

**Band:** 21 (1961)

**Artikel:** Application de la méthode plurilocale au calcul des coques de translation

**Autor:** Beles, A.A. / Soare, Mircea

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-18244>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 30.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# **Application de la méthode plurilocale au calcul des coques de translation**

*Anwendung des Mehrstellenverfahrens auf die Berechnung von Translationsschalen*

*The Application of the Multilocal Method for the Calculus of Translational Shells*

A. A. BELEŞ

Professeur Ingénieur, Membre correspondant de l'Académie de la République Populaire Roumaine, Bucarest

MIRCEA SOARE

Ingénieur Civil, Bucarest

## **Introduction**

La détermination des équations d'équilibre et de déformation dans l'étude des coques conduit à un certain nombre d'équations différentielles et aux dérivées partielles, dans lesquelles les inconnues sont les efforts intérieurs, respectivement les déplacements.

Dans la grande majorité des cas, les solutions ne peuvent être obtenues à l'aide de fonctions élémentaires. Cela est bien explicable. Dans le cas le plus général, les rayons de courbure principaux de la surface médiane ainsi que les charges extérieures ne sont en effet pas donnés sous forme explicite; le type d'équation différentielle ou aux dérivées partielles n'est donc pas intégrable.

Dans certains cas, la solution analytique est connue, mais son application est tellement laborieuse qu'elle devient inutilisable du point de vue pratique.

Si de nombreux types de coques n'ont pas trouvé une application pratique plus étendue, cela est dû au manque d'une méthode de calcul, en particulier pour déterminer l'état de déformation et des perturbations marginales.

Nous pensons ne pas nous tromper en disant que c'est l'application de méthodes numériques appropriées qui a mis le calcul des coques à double courbure à la portée du constructeur.

A cet égard, il faut mentionner le mémoire fondamental de A. PUCHER [1] qui a exprimé les efforts intérieurs d'une coque à l'aide d'une seule fonction de contrainte et indiqué la transformation de l'équation aux dérivées partielles du

second ordre, que cette fonction doit satisfaire, en un système linéaire d'équations aux différences [2].

Cette méthode aux différences a une interprétation analytique simple; elle est en effet basée sur la parabole d'interpolation du second degré.

Unanimement apprécié, le procédé de PUCHER s'est largement répandu, spécialement au cours de la dernière décennie.

La nouvelle méthode de résolution, par approximations successives, que constitue la *relaxation*, marque un nouvel aspect du problème sans en modifier les principes [4].

Il existe une certaine corrélation entre le nombre de points du réseau pour lesquels les différences sont formées et l'exactitude des résultats ainsi que le travail nécessaire à la résolution du problème. Aussi certains auteurs ont-ils cherché à améliorer la méthode classique aux différences en essayant d'obtenir une exactitude plus grande tout en utilisant le moindre nombre de nœuds possible.

Mentionnons tout d'abord *la méthode des polygones funiculaires* proposée par M. le Prof. F. STÜSSI, dès 1934, pour le calcul du flambage latéral des poutres. Cette méthode a trouvé une large application dans divers domaines comme l'instabilité élastique, les vibrations, les dalles, la torsion<sup>1)</sup> etc. A la connaissance des auteurs de la présente étude, la méthode n'a pas encore été appliquée au calcul des coques.

La signification statique de cette méthode (comme son nom l'indique d'ailleurs) est intéressante à signaler; quoiqu'elle donne des approximations excellentes, l'ordre de grandeur des erreurs n'a pas encore été évalué, si ce n'est sur la base d'équations dont les solutions analytiques sont connues. Du point de vue analytique, la méthode est basée sur la parabole d'interpolation du quatrième degré quoique, pour les dérivées d'ordre réduit, il intervienne quelquefois un nombre de points égal à celui figurant dans la méthode classique aux différences. En tout cas, elle nécessite une certaine finesse d'application de la part du calculateur.

M. le Prof. L. COLLATZ a développé une autre méthode améliorée: *la méthode plurilocale*. Elle est basée sur l'association intime de l'équation différentielle à intégrer et du développement en série de Taylor de la fonction, de manière à négliger le moins de termes possible.

<sup>1)</sup> Voir à ce sujet:

1. F. STÜSSI: *Die Stabilität des auf Biegung beanspruchten Trägers*. Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau, Abhandlungen, III, S. 401, Zürich, 1935.
2. P. DUBAS: *Calcul numérique des plaques et des parois minces*. Ed. Leemann, Zurich, 1955.
3. F. STÜSSI: *Contribuições para a Teoria e o Cálculo das Estruturas*. São Paulo, Brasil, 1955.
4. F. STÜSSI: *Entwurf und Berechnung von Stahlbauten*. 1. Band, Grundlagen des Stahlbaues, Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1958, S. 180.

La méthode présente un aspect mathématique, aussi son application n'offre aucune difficulté et permet d'évaluer l'ordre de grandeur des erreurs. Par rapport à la méthode des polygones funiculaires, elle présente encore un avantage: permettre de considérer des termes secondaires dans l'expression du terme libre.

A notre connaissance, la méthode a été appliquée au calcul des plaques<sup>2)</sup> et des disques<sup>3)</sup>, mais pas encore de manière systématique au calcul des coques.

M. SOARE a appliqué la méthode plurilocale au calcul du paraboloïde elliptique [11], [12].

L'objet de la présente étude est de présenter l'application de la méthode plurilocale au calcul de l'état de membrane des coques de translation. Un exemple de calcul complète la théorie développée.

## I. Equations générales

### § 1. Eléments géométriques

Soient deux courbes planes ( $\Gamma_1$ ) et ( $\Gamma_2$ ) nommées *courbes directrices*. Leurs plans sont supposés être verticaux et mutuellement perpendiculaires. Lorsque l'une des directrices se déplace parallèlement à elle-même, en glissant sur la seconde directrice, elle décrit une *surface de translation*. Dans cette surface, toutes les sections verticales parallèles aux courbes directrices sont donc identiques, ce qui explique la simplicité de leur forme et la possibilité de couvrir une surface rectangulaire dans le plan (fig. 1).

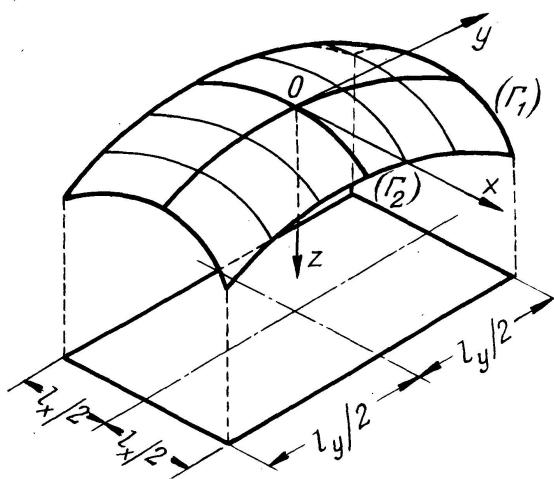


Fig. 1. Coque de translation.

<sup>2)</sup> R. ZURMÜHL: *Behandlung der Plattenaufgabe nach dem verbesserten Differenzenverfahren*. Z.A.M.M., H. 1/2, S. 1 (1957).

<sup>3)</sup> K. KLÖPPEL, W. SCHÖNBACH: *Wärmespannungen in rechteckig berandeten Scheiben*. Der Stahlbau, H. 5, S. 122 (1958).

Si l'on prend l'origine des axes cartésiens au sommet de la surface, les équations des courbes directrices sont de la forme

$$(\Gamma_1) \quad z_1 = z_1(x), \quad (\Gamma_2) \quad z_2 = z_2(y)$$

et l'équation de la surface s'écrit

$$z = z_1(x) + z_2(y). \quad (1.1)$$

Pour l'étude qui suit, il est nécessaire de préciser les dérivées du premier et du second ordre de la fonction  $z$ , en utilisant les notations de Monge:

$$p = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz_1}{dx}, \quad q = \operatorname{tg} \psi = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz_2}{dy}, \quad (1.2)$$

$$\cos \theta = \sin \varphi \sin \psi, \quad (1.3)$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{d^2 z_1}{dx^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \equiv 0, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{d^2 z_2}{dy^2}. \quad (1.4)$$

Les angles  $\varphi$ ,  $\psi$  et  $\theta$  sont représentés à la fig. 2. Il est caractéristique pour les surfaces de translation que le *gauchissement* soit nul ( $s \equiv 0$ ); aussi toutes les dérivées mixtes déduites de (1.1) sont identiquement nulles.

### § 2. Les équations différentielles d'équilibre

Selon PUCHER [1], les équations d'équilibre peuvent être obtenues sous une forme simple si l'on utilise, au lieu des efforts réels  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy} = N_{yx}$ , leurs projections  $S_x$ ,  $S_y$ ,  $T$  sur le plan  $(x, y)$  (efforts projetés) et, au lieu des composantes  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  de la charge extérieure appliquée à l'élément de coque, les composantes  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  rapportées au plan  $(x, y)$ .

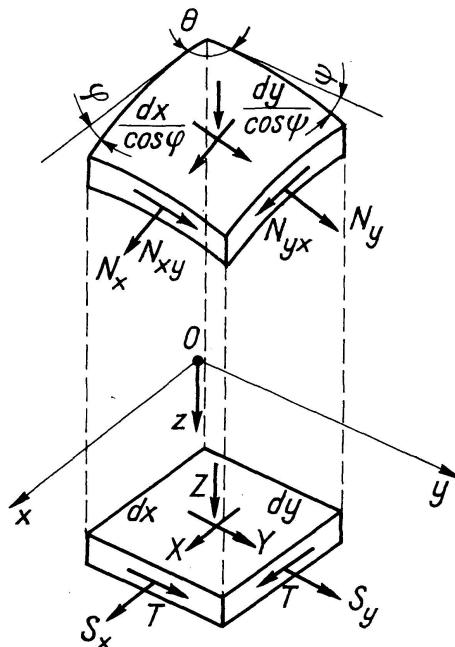


Fig. 2. Equilibre de membrane d'un élément de coque.

Entre les grandeurs représentées à la fig. 2 existent les relations:

$$X = \frac{F_x \sin \theta}{\cos \varphi \cos \psi}; \quad Y = \frac{F_y \sin \theta}{\cos \varphi \cos \psi}; \quad Z = \frac{F_z \sin \theta}{\cos \varphi \cos \psi} = F_z \sqrt{1 + \tan^2 \varphi + \tan^2 \psi}; \quad (2.1)$$

$$N_x = S_x \frac{\cos \psi}{\cos \varphi}, \quad N_y = S_y \frac{\cos \varphi}{\cos \psi}, \quad N_{xy} = N_{yx} = T. \quad (2.2)$$

L'équation de projection sur l'axe  $0z$  a une forme algébrique qui, compte tenu de  $s \equiv 0$ , s'écrit:

$$r S_x + t S_y = p X + q Y - Z. \quad (2.3)$$

Elle fournit directement l'une des inconnues lorsque l'autre est connue. Cette relation peut être écrite sous l'une des formes

$$S_x = -\frac{t}{r} S_y + \frac{p X + q Y - Z}{r}, \quad (2.4)$$

$$S_y = -\frac{r}{t} S_x + \frac{p X + q Y - Z}{t}. \quad (2.5)$$

Comme l'effort de cisaillement  $T$  n'intervient pas dans l'équation (2.3) et intervient seulement sous forme différentielle dans les deux autres équations de projections, L. BROGLIO [3] fait remarquer que l'on peut ajouter une constante à son expression, sans modifier ni les équations d'équilibre, ni les valeurs de la fonction de contrainte  $F$ , déterminée de la manière développée dans la présente étude.

Lorsque l'état de contrainte présente au moins un plan de symétrie, la constante est nulle. Dans le cas le plus général, sa valeur doit être déterminée à partir de la condition du minimum de l'énergie de déformation de la coque.

Si l'on exprime les efforts projetés à l'aide d'une fonction de contrainte  $F$

$$S_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \int X dx, \quad S_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \int Y dy, \quad T = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad (2.6)$$

les équations de projections sur les axes  $0x$ ,  $0y$  sont des identités et l'équation (2.3) devient:

$$t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + r \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -P \quad (2.7)$$

où  $P$  représente la charge extérieure

$$-P = p X + q Y - Z + r \int X dx + t \int Y dy. \quad (2.8)$$

L'équation (2.5), qui détermine la fonction de contrainte  $F$ , représente l'équation de base, en coordonnées cartésiennes, des coques de translation, dans la théorie de membrane.

La première et la deuxième dérivée donnent:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial x} &= t \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + r \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \\ -\frac{\partial P}{\partial y} &= t \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} + r \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} + \frac{\partial t}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} &= t \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + r \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \\ -\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} &= t \frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial y} + r \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^3} + \frac{\partial t}{\partial y} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial^3 F}{\partial y^3}, \\ -\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} &= t \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + r \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial t}{\partial y} \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Rappelons que  $r$  est fonction seulement de  $x$  et  $t$ , seulement de  $y$ ; on en a tenu compte dans la dérivation et on a supposé que  $z = z_1(x) + z_2(y)$  est une fonction continue et dérivable au moins jusqu'au quatrième degré y compris.

## II. Conditions aux limites. Conditions d'équilibre global

### § 3. Conditions aux limites

Un aspect difficile de la résolution du problème est constitué par la détermination des valeurs au contour. Les divers cas qui peuvent se présenter sont assez variés, aussi est-il nécessaire d'étudier, selon le cas, les conditions marginales adéquates.

Sans entrer dans les détails, nous mentionnerons que pour certains types d'appuis et de charge ou de formes de surfaces médianes, l'état de contrainte peut être hyperstatique (ce qui entraîne la nécessité de l'étude des déformations) ou même incompatible avec l'hypothèse de membrane.

Dans la pratique, la coque s'appuie souvent sur des tympans. Par suite de leur mode de réalisation, nous pouvons admettre que ces tympans sont parfaitement rigides dans leur plan et parfaitement élastiques dans une direction normale à leur plan.

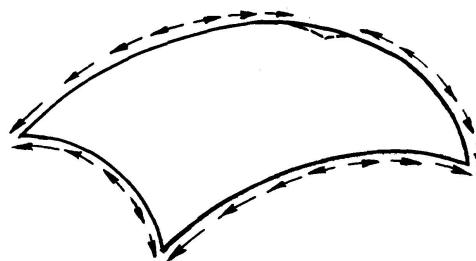


Fig. 3. Déchargement de la coque, le long des tympans, par des efforts tangentiels.

La conséquence statique pour le bord correspondant de la coque est que, le long de ce même bord, les efforts longitudinaux ( $N$  ou  $S$ ) doivent s'annuler. La transmission des efforts de la coque aux tympans se fera à l'aide d'efforts tangentiels seulement (fig. 3).

Nous supposerons, dans ce qui suit, que la charge extérieure est normale au plan  $xOy$ , c'est-à-dire  $X = Y \equiv 0$  et  $Z = Z(x, y)$  (avec  $P \equiv Z$ ). Le cas où les composantes  $X$  et  $Y$  sont différentes de zéro devra être examiné avec soin, afin de voir dans quelle mesure un mode d'appui uniquement à l'aide de contours simples est possible.

Afin de fixer les idées, supposons que la coque soit appuyée sur un tympan  $x=x_0$  (parallèle à l'axe  $Oy$ ). Dans ce cas, conformément à l'hypothèse faite, les efforts  $S_x$  doivent être nuls, c'est-à-dire qu'on aura sur le pourtour respectif

$$S_{x0} = \frac{\partial^2 F(x_0, y)}{\partial y^2} = 0. \quad (3.1)$$

L'autre effort résulte directement de (2.5) sous la forme

$$S_{y0} = \left( -\frac{Z}{t} \right)_{x=x_0}. \quad (3.2)$$

Puisque selon (3.1) la dérivée seconde est nulle, la fonction  $F$  doit avoir une variation linéaire sur le contour

$$F(x_0, y) = A(x_0)y + B(x_0).$$

Commençons par le cas le plus simple, lorsque le système géométrique, les charges et l'appui sont symétriques par rapport aux deux plans  $(x, z)$  et  $(y, z)$ .

Vu cette symétrie, la fonction  $F$  prendra la même valeur constante sur le contour entier et pour simplifier, on pourra prendre

$$A(x_0) = B(x_0) = 0,$$

puisque les termes constants et du premier degré dans l'expression de  $F$  n'influencent pas les valeurs de  $S_x$ ,  $S_y$  et  $T$ .

Nous examinerons, dans la suite, le cas d'un seul plan de symétrie, soit  $(y, z)$ . La variation de la fonction  $\bar{F}$  sur le contour est représentée sur la fig. 4.

La valeur  $\bar{F}$  doit être déterminée à partir des conditions d'équilibre global de la coque.

#### *§ 4. Conditions d'équilibre global*

Lorsqu'on applique les différences finies, il est nécessaire, comme on le démontrera plus loin, d'associer aux équations relatives aux points intérieurs du réseau, les équations d'équilibre global afin de pouvoir déterminer l'état de contrainte.

Commençons par le cas le plus général où l'état de contrainte est symétrique par rapport à un seul axe, soit  $0y$ . Il suffit donc de considérer une moitié de la coque. En appelant

- $\mathfrak{P}$  la composante parallèle à l'axe  $0z$  de la charge totale qui agit sur la coque,
- $\mathfrak{H}$  la composante parallèle à l'axe  $0y$  (pour les charges verticales  $\mathfrak{H} \equiv 0$ ),
- $d$  la distance du point d'application de la résultante  $\mathfrak{P}$  par rapport à l'axe  $0x$ ,

l'équation de projections sur l'axe  $0z$  (la verticale) s'écrit:

$$\int_0^{x_0} (T \operatorname{tg} \varphi)_{y=l_{y/2}} dx + \int_0^{x_0} (T \operatorname{tg} \varphi)_{y=-l_{y/2}} dx + \int_{-l_{y/2}}^{+l_{y/2}} (T \operatorname{tg} \psi)_{x=x_0} dy = -\frac{\mathfrak{P}}{2}; \quad (4.1)$$

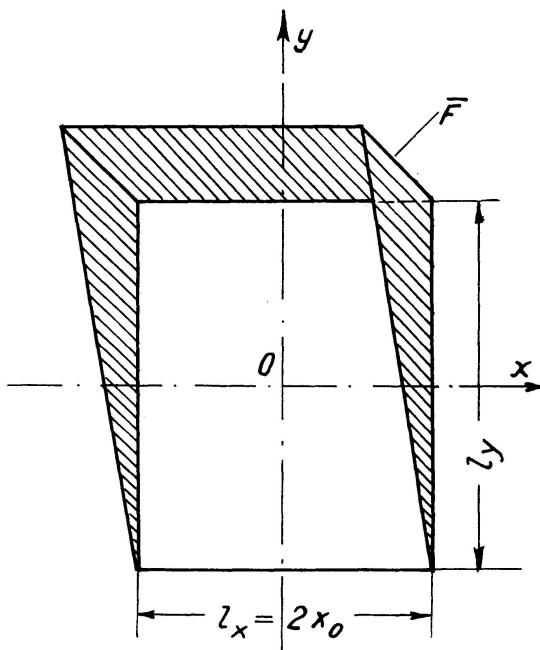


Fig. 4. Variation de la fonction de contrainte  $F$  sur le contour, dans le cas d'un seul plan de symétrie de l'état de contrainte.

d'une manière analogue l'équation de projections sur l'axe  $0y$ :

$$\int_{-l_{y/2}}^{+l_{y/2}} (T)_{x=x_0} dy = \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{x=x_0, y=+l_{y/2}} - \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{x=x_0, y=-l_{y/2}} = \frac{\mathfrak{H}}{2}, \quad (4.2)$$

et enfin l'équation de moments par rapport à l'axe  $0x$ :

$$\int_{-l_{y/2}}^{+l_{y/2}} (T \operatorname{tg} \psi)_{x=x_0} y dy = -\frac{\mathfrak{P} d}{2}. \quad (4.3)$$

Dans le cas où il existe deux plans de symétrie, les relations (4.2), (4.3) sont identiquement vérifiées et (4.1) s'écrit:

$$\int_0^{x_0} (T \operatorname{tg} \varphi)_{y=l_{y/2}} dx + \int_0^{l_{y/2}} (T \operatorname{tg} \psi)_{x=x_0} dy = -\frac{\mathfrak{P}}{4}. \quad (4.4)$$

### III. Application de la méthode plurilocale

#### § 5. Les relations générales

Afin de passer aux différences, on trace dans le plan  $(x, y)$  deux séries de droites parallèles aux axes et équidistantes, qui déterminent sur la projection de la surface réelle un réseau de points (fig. 5).

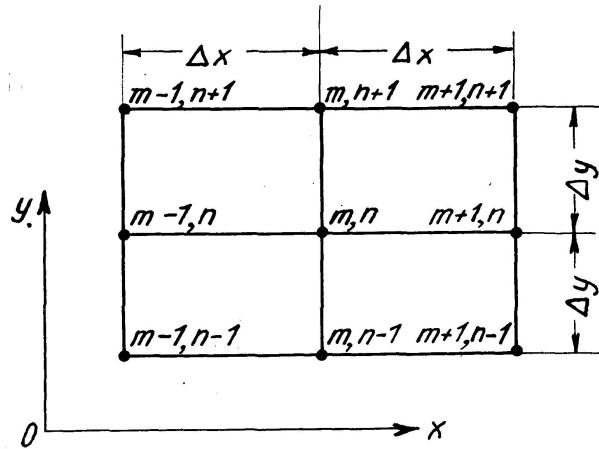


Fig. 5. Tracé du réseau à mailles égales.

Nous allons préciser par des indices doubles la position de chaque point du réseau dans le plan  $(x, y)$ . Le premier  $(0, 1, 2, \dots, m, \dots)$  indique la succession des points sur des droites parallèles à l'axe  $0x$ , le second  $(0, 1, 2, \dots, n, \dots)$  indique la succession des points sur des droites parallèles à l'axe  $0y$ .

Développons la fonction  $F$  en série de Taylor selon la formule générale

$$F(x - \Delta x, y - \Delta y) = \sum \frac{1}{(j+k)!} \left[ (-1)^j \Delta x \frac{\partial F}{\partial x} + (-1)^k \Delta y \frac{\partial F}{\partial y} \right]^{(j+k)}$$

où la puissance représente symboliquement l'ordre de la dérivation.

En appliquant cette formule pour les points du réseau autour du nœud  $m, n$  (voir fig. 5), on obtient:

$$F_{m+1, n} - F_{m, n} = \Delta x \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \dots$$

trois relations similaires pour  $(F_{m-1, n} - F_{m, n})$ ,  $(F_{m, n+1} - F_{m, n})$ ,  $(F_{m, n-1} - F_{m, n})$ :

$$\begin{aligned} F_{m+1, n+1} - F_{m, n} &= \Delta x \frac{\partial F}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2 \frac{\Delta x \Delta y}{2!} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ &\quad + \frac{(\Delta y)^2}{2!} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + 3 \frac{(\Delta x)^2 \Delta y}{3!} \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} \\ &\quad + 3 \frac{\Delta x (\Delta y)^2}{3!} \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} + \frac{(\Delta y)^3}{3!} \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} + \dots \end{aligned}$$

et trois autres relations similaires pour  $(F_{m-1, n+1} - F_{m, n})$ ,  $(F_{m+1, n-1} - F_{m, n})$ ,  $(F_{m-1, n-1} - F_{m, n})$ .

Les valeurs des dérivées des membres de droite se réfèrent au nœud  $m, n$ .

Nous allons multiplier chacune des relations précédentes par un coefficient indéterminé  $\lambda$ , d'une manière analogue les relations (2.9), (2.10), puis nous allons additionner membre à membre.

Soient  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  la valeur de chaque membre de l'égalité ainsi obtenue. Pour la partie gauche nous obtenons:

$$\begin{aligned}\Phi_1 \equiv & \lambda_1(F_{m+1, n} - F_{m, n}) + \lambda_2(F_{m-1, n} - F_{m, n}) + \lambda_3(F_{m, n+1} - F_{m, n}) \\ & + \lambda_4(F_{m, n-1} - F_{m, n}) + \lambda_5(F_{m+1, n+1} - F_{m, n}) + \lambda_6(F_{m-1, n+1} - F_{m, n}) \\ & + \lambda_7(F_{m+1, n-1} - F_{m, n}) + \lambda_8(F_{m-1, n-1} - F_{m, n}) \\ & - \lambda_9 \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - \lambda_{10} \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} - \lambda_{11} \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} - \lambda_{12} \frac{\partial Z}{\partial x} - \lambda_{13} \frac{\partial Z}{\partial y} - \lambda_{14} Z.\end{aligned}\quad (5.1)$$

Dans le membre de droite, nous grouperons les termes selon les dérivées successives de la fonction  $F$ . On obtient ainsi:

$$\begin{aligned}\Phi_2 \equiv & a_{10} \Delta x \frac{\partial F}{\partial x} + a_{01} \Delta y \frac{\partial F}{\partial y} + a_{20} \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2a_{11} \frac{\Delta x \Delta y}{2!} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ & + a_{02} \frac{(\Delta y)^2}{2!} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + a_{30} \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + 3a_{21} \frac{(\Delta x)^2 \Delta y}{3!} \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} \\ & + 3a_{12} \frac{\Delta x (\Delta y)^2}{3!} \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} + a_{03} \frac{(\Delta y)^3}{3!} \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} + a_{40} \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} \\ & + 4a_{31} \frac{(\Delta x)^3 \Delta y}{4!} \frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial y} + 6a_{22} \frac{(\Delta x \Delta y)^2}{4!} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} \\ & + 4a_{13} \frac{\Delta x (\Delta y)^3}{4!} \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^3} + a_{04} \frac{(\Delta y)^4}{4!} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + a_{50} \frac{(\Delta x)^5}{5!} \frac{\partial^5 F}{\partial x^5} \\ & + 5a_{41} \frac{(\Delta x)^4 \Delta y}{5!} \frac{\partial^5 F}{\partial x^4 \partial y} + 10a_{32} \frac{(\Delta x)^3 (\Delta y)^2}{5!} \frac{\partial^5 F}{\partial x^3 \partial y^2} \\ & + 10a_{23} \frac{(\Delta x)^2 (\Delta y)^3}{5!} \frac{\partial^5 F}{\partial x^2 \partial y^3} + 5a_{14} \frac{\Delta x (\Delta y)^4}{5!} \frac{\partial^5 F}{\partial x \partial y^4} + a_{05} \frac{(\Delta y)^5}{5!} \frac{\partial^5 F}{\partial y^5} + \dots\end{aligned}\quad (5.2)$$

Afin de simplifier l'écriture, on introduira les notations suivantes:

$$\begin{aligned}4X_1 &= \lambda_5 - \lambda_6 + \lambda_7 - \lambda_8, \\ 4X_2 &= \lambda_5 + \lambda_6 - \lambda_7 - \lambda_8, \\ 4X_3 &= \lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7 + \lambda_8, \\ 4X_4 &= \lambda_5 - \lambda_6 - \lambda_7 + \lambda_8.\end{aligned}\quad (5.3)$$

Les expressions des coefficients  $a_{10}, a_{01}, \dots, a_{04}$  qui interviennent en (5.2) s'écrivent sous forme développée

$$\begin{aligned}a_{10} &= \lambda_1 - \lambda_2 + 4X_1, \\ a_{01} &= \lambda_3 - \lambda_4 + 4X_2.\end{aligned}\quad (5.4)$$

$$a_{20} = \lambda_1 + \lambda_2 + 4X_3 + \frac{2}{(\Delta x)^2} \left( \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \lambda_{11} + \frac{\partial t}{\partial y} \lambda_{13} + t \lambda_{14} \right), \\ a_{11} = 4X_4, \quad (5.5)$$

$$a_{02} = \lambda_3 + \lambda_4 + 4X_3 + \frac{2}{(\Delta y)^2} \left( \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \lambda_9 + \frac{\partial r}{\partial x} \lambda_{12} + r \lambda_{14} \right), \\ a_{30} = a_{10} + \frac{6}{(\Delta x)^3} \left( \frac{\partial t}{\partial y} \lambda_{10} + t \lambda_{12} \right), \\ a_{21} = 4X_2 + \frac{2}{(\Delta x)^2 \Delta y} \left( 2 \frac{\partial t}{\partial y} \lambda_{10} + t \lambda_{13} \right), \\ a_{12} = 4X_1 + \frac{2}{\Delta x (\Delta y)^2} \left( 2 \frac{\partial r}{\partial x} \lambda_9 + r \lambda_{12} \right), \\ a_{03} = a_{01} + \frac{6}{(\Delta y)^3} \left( \frac{\partial r}{\partial x} \lambda_{10} + r \lambda_{13} \right), \quad (5.6)$$

$$a_{40} = \lambda_1 + \lambda_2 + 4X_3 + \frac{24}{(\Delta x)^4} t \lambda_9, \\ a_{31} = 4X_4 + \frac{6}{(\Delta x)^3 \Delta y} t \lambda_{10}, \\ a_{22} = 4X_3 + \frac{4}{(\Delta x \Delta y)^2} (r \lambda_9 + t \lambda_{11}), \quad (5.7) \\ a_{13} = 4X_4 + \frac{6}{\Delta x (\Delta y)^3} r \lambda_{10}, \\ a_{04} = \lambda_3 + \lambda_4 + 4X_3 + \frac{24}{(\Delta y)^4} r \lambda_{11}.$$

L'égalité  $\Phi_1 = \Phi_2$  serait rigoureusement exacte si, dans l'expression de  $\Phi_2$ , on considérait l'infini des termes des développements en série de Taylor.

Par contre, si l'on détermine les coefficients  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{14}$  en sorte que les coefficients  $a_{ij}$  donnés par (5.4)–(5.7) soient nuls et si l'on néglige le reste des termes du développement en série, la relation

$$\Phi_1 = 0$$

représente la transformation de l'équation aux dérivées partielles (2.7) en équation aux différences finies relative au nœud  $m, n$ .

La valeur du reste (pour l'évaluation des erreurs) s'obtient sous la forme

$$R_{m,n} = \Phi_2 = \frac{(\Delta x)^4 \Delta y}{6} X_2 \frac{\partial^5 F}{\partial x^4 \partial y} + \frac{(\Delta x)^3 (\Delta y)^2}{3} X_1 \frac{\partial^5 F}{\partial x^3 \partial y^2} \\ + \frac{(\Delta x)^2 (\Delta y)^3}{3} X_2 \frac{\partial^5 F}{\partial x^2 \partial y^3} + \frac{\Delta x (\Delta y)^4}{6} X_1 \frac{\partial^5 F}{\partial x \partial y^4} + \dots \quad (5.8)$$

*§ 6. L'équation aux différences finies habituelle*

Avant de passer à la détermination des coefficients indéterminés  $\lambda$  selon le procédé indiqué plus haut, nous choisirons plus simplement:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \lambda_2 = -\frac{t_n}{(\Delta x)^2}, \\ \lambda_3 &= \lambda_4 = -\frac{r_m}{(\Delta y)^2}, \\ \lambda_5 &= \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9 = \lambda_{10} = \lambda_{11} = \lambda_{12} = \lambda_{13} = 0, \\ \lambda_{14} &= 1.\end{aligned}\tag{6.1}$$

La relation (5.1) devient:

$$\begin{aligned}\Phi_1 \equiv 2 \left[ \frac{t_n}{(\Delta x)^2} + \frac{r_m}{(\Delta y)^2} \right] F_{m,n} - \frac{t_n}{(\Delta x)^2} (F_{m+1,n} + F_{m-1,n}) \\ - \frac{r_m}{(\Delta y)^2} (F_{m,n+1} + F_{m,n-1}) - Z_{m,n} = 0\end{aligned}\tag{6.2}$$

et représente l'équation aux différences finies habituelle qu'on obtient en utilisant la méthode de la parabole.

L'erreur qu'on fait en remplaçant l'équation aux dérivées partielles (2.7) par l'équation aux différences finies (6.2) vaut:

$$|\Re_{m,n}| \leq \frac{t_n}{12} (\Delta x)^2 \left| \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} \right|_{x=\xi} + \frac{r_m}{12} (\Delta y)^2 \left| \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \right|_{y=\zeta},\tag{6.3}$$

où

$$x_{m-1} \leq \xi \leq x_{m+1} \quad \text{et} \quad y_{n-1} \leq \zeta \leq y_{n+1}.$$

De la comparaison des relations (5.8) et (6.3), il ressort que l'approximation fournie par la méthode plurilocale est de loin la meilleure.

*§ 7. Déduction de l'équation aux différences finies*

On peut maintenant passer à la déduction des coefficients indéterminés  $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_{14}$ .

L'annulation des coefficients  $a_{10}, a_{01}, \dots, a_{04}$  conduit à un système de 14 équations linéaires et homogènes à 14 inconnues. On peut vérifier assez aisément que le déterminant principal du système est nul, de sorte que l'une quelconque des équations découle des autres. Dès lors, il reste comme inconnues les rapports entre les coefficients  $\lambda$  et l'une des valeurs, choisie arbitrairement. Le plus commode est de choisir  $\lambda_{14}=1$ , parce que l'on peut toujours supposer que la coque supporte des charges extérieures.

La matrice du système d'équations est présentée dans le tableau 1.

Tableau 1

Les équations  $(a_{31})$  et  $(a_{13})$  sont équivalentes, de sorte qu'une seule est distincte.

Pour déterminer les valeurs des inconnues, il est convenable d'introduire les notations suivantes:

$$R^* = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} (\Delta x)^2; \quad T^* = \frac{1}{t} \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} (\Delta y)^2 \quad (7.1)$$

et de choisir les nouvelles inconnues (représentant des coefficients sans dimensions):

$$\begin{aligned} X_i^* &= X_i \frac{(\Delta y)^2}{r}, \quad (i = 1, 2, 3, 4), \\ \lambda_j^* &= \lambda_j \frac{(\Delta y)^2}{r}, \quad (j = 1, 2, \dots, 13), \end{aligned}$$

On obtient sans difficulté les valeurs suivantes:

$$X_4^* = \lambda_0^* = \lambda_{12}^* = \lambda_{13}^* = 0. \quad (7.2)$$

Pour déterminer les autres valeurs, il est commode de choisir comme inconnues de base  $X_1^*$ ,  $X_2^*$  et  $X_3^*$ :

$$\begin{aligned} X_1^* &= -\frac{\Delta x}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{12 + T^*}{144 - R^* T^*}; \\ X_2^* &= -\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 \frac{\Delta y}{r} \frac{\partial t}{\partial y} \frac{12 + R^*}{144 - R^* T^*}; \\ X_3^* &= -\frac{12 + T^*}{144 - R^* T^*} - \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 \frac{t}{r} \frac{12 + R^*}{144 - R^* T^*}; \end{aligned} \quad (7.3)$$

$X_1^*$ ,  $X_2^*$  et  $X_3^*$  une fois déterminés, les autres inconnues résultent des relations:

$$\begin{aligned} \lambda_1^* &= -2 X_1^* - 2 X_3^* - 12 \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 \frac{t}{r} \frac{12 + T^*}{144 - R^* T^*}; \\ \lambda_2^* &= +2 X_1^* - 2 X_3^* - 12 \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 \frac{t}{r} \frac{12 + T^*}{144 - R^* T^*}; \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned} \lambda_3^* &= -2 X_1^* - 2 X_3^* - \frac{12(12 + R^*)}{144 - R^* T^*}; \\ \lambda_4^* &= +2 X_2^* - 2 X_3^* - \frac{12(12 + R^*)}{144 - R^* T^*}; \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} \lambda_5^* &= +X_1^* + X_2^* + X_3^*; \\ \lambda_6^* &= -X_1^* + X_2^* + X_3^*; \\ \lambda_7^* &= +X_1^* - X_2^* + X_3^*; \\ \lambda_8^* &= -X_1^* - X_2^* + X_3^*; \end{aligned} \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned}\lambda_9^* &= \frac{(\Delta x \Delta y)^2}{r} \frac{12 + T^*}{144 - R^* T^*}; \\ \lambda_{11}^* &= \frac{(\Delta y)^4}{r} \frac{12 + R^*}{144 - R^* T^*}.\end{aligned}\quad (7.7)$$

Dans toutes les relations précédentes on introduira, pour  $r$ ,  $t$  et leurs dérivées, les valeurs relatives au nœud  $m, n$ .

L'équation aux différences finies s'écrit donc finalement:

$$\begin{aligned}\lambda_1^* F_{m+1,n} + \lambda_2^* F_{m-1,n} + \lambda_3^* F_{m,n+1} + \lambda_4^* F_{m,n-1} + \lambda_5^* F_{m+1,n+1} + \lambda_6^* F_{m-1,n+1} \\ + \lambda_7^* F_{m+1,n-1} + \lambda_8^* F_{m-1,n-1} - (\lambda_1^* + \lambda_2^* + \lambda_3^* + \lambda_4^* + 4 X_3^*) F_{m,n} = \\ \left( Z_{m,n} + \lambda_9^* \frac{\partial^2 Z_{m,n}}{\partial x^2} + \lambda_{11}^* \frac{\partial^2 Z_{m,n}}{\partial y^2} \right) \frac{(\Delta y)^2}{r_m}.\end{aligned}\quad (7.8)$$

La valeur du reste est donnée par la relation (5.8). La détermination du système d'équations aux inconnues  $F_{m,n}$  ne présente aucune difficulté.

Le cas particulier du paraboloïde elliptique conduit à des formules beaucoup plus simples [11], [12].

### § 8. Les expressions des dérivées secondes

L'expression des dérivées partielles du second ordre, qui déterminent les efforts projetés à partir des valeurs de la fonction  $F$  dans neuf points voisins du réseau, découle d'une manière analogue.

Soit, par exemple, à déterminer  $\partial^2 F_{m,n}/\partial x^2$ . A cette fin, on dispose du système d'équations présenté dans le Tableau 1, dans lequel l'une des relations ( $a_{31}$ ) ou ( $a_{13}$ ) découle de l'autre et dans lequel la relation ( $a_{20}$ ) doit être éliminée. En posant  $\lambda_{14} = 1$ , on dispose de 12 équations pour les 13 inconnues<sup>4)</sup>  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{13}$ . Une dernière relation peut être trouvée en exigeant que deux termes du reste disparaissent (par exemple le second et le quatrième). Il en résulte:

$$X_1 = X_4 = 0; \quad \lambda_9 = \lambda_{10} = \lambda_{12} = \lambda_{13} = 0$$

et  $\lambda_1 = \lambda_2$ .

Le reste des inconnues s'obtient aisément et, avec ces valeurs, la relation aux différences finies qui détermine la dérivée seconde s'écrit:

$$\begin{aligned}\left[ 12 + \frac{(\Delta y)^2}{t_n} \frac{\partial^2 t_n}{\partial y^2} \right] \frac{\partial^2 F_{m,n}}{\partial x^2} = \frac{1}{(\Delta x)^2} [2(F_{m+1,n} + F_{m-1,n} + F_{m,n+1} + F_{m,n-1}) \\ - (F_{m+1,n+1} + F_{m-1,n+1} + F_{m+1,n-1} + F_{m-1,n-1} + 4 F_{m,n})] \\ - \frac{\Delta y}{t_n} \frac{\partial t_n}{\partial y} \frac{1}{(\Delta x)^2} (F_{m+1,n+1} + F_{m-1,n+1} - F_{m+1,n-1} - F_{m-1,n-1}) \\ + 2 F_{m,n-1} - 2 F_{m,n+1} - \frac{12 r_m}{t_n (\Delta y)^2} (F_{m,n+1} - 2 F_{m,n} + F_{m,n-1}) \\ - \frac{12}{t_n} Z_{m,n} - \frac{(\Delta y)^2}{t_n} \frac{\partial^2 Z_{m,n}}{\partial y^2}.\end{aligned}\quad (8.1)$$

<sup>4)</sup> Les nouvelles inconnues sont différentes de celles du paragraphe précédent.

D'une manière absolument analogue on calcule  $\partial^2 F_{m,n} / \partial y^2$ . Par permutation convenable des termes et des indices, on obtient:

$$\begin{aligned} \left[ 12 + \frac{(\Delta x)^2}{r_m} \frac{\partial^2 r_m}{\partial x^2} \right] \frac{\partial^2 F_{m,n}}{\partial y^2} &= \frac{1}{(\Delta y)^2} [2(F_{m+1,n} + F_{m-1,n} + F_{m,n+1} + F_{m,n-1}) \\ &\quad - (F_{m+1,n+1} + F_{m-1,n+1} + F_{m+1,n-1} + F_{m-1,n-1} + 4F_{m,n})] \\ &\quad - \frac{\Delta x}{r_m} \frac{\partial r_m}{\partial x} \frac{1}{(\Delta y)^2} (F_{m+1,n+1} + F_{m+1,n-1} - F_{m-1,n+1} - F_{m-1,n-1} + 2F_{m-1,n} \\ &\quad - 2F_{m+1,n}) - \frac{12t_n}{r_m(\Delta x)^2} (F_{m+1,n} - 2F_{m,n} + F_{m-1,n}) - \frac{12}{r_m} Z_{m,n} - \frac{(\Delta x)^2}{r_m} \frac{\partial^2 Z_{m,n}}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Il est évidemment plus simple de déduire l'une des dérivées secondes de la relation (2.7), lorsque l'autre dérivée a été déterminée par l'application de la relation (8.1) ou (8.2). On peut écrire par exemple:

$$\frac{\partial^2 F_{m,n}}{\partial y^2} = -\frac{Z_{m,n}}{r_m} - \frac{t_n}{r_m} \frac{\partial^2 F_{m,n}}{\partial x^2}. \quad (8.3)$$

Il faut encore observer que, par l'introduction des expressions des dérivées secondes (8.1) et (8.2) en (2.7), on ne retrouve pas exactement l'équation aux différences finies (7.8), vu que les dérivées ne présentent plus — après leur transcription en différences — autant de symétries que l'équation aux dérivées partielles (2.7).

\* \* \*

La détermination de la dérivée seconde mixte est un peu plus compliquée.

L'inconnue  $X_4$  qui multiplie  $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$  en (5.2) ne peut plus être nulle. Par contre, afin que les équations  $(a_{31})$  et  $(a_{13})$  du tableau 1 soient compatibles, il faut prendre

$$\lambda_{10} = 0.$$

Cela montre que l'approximation obtenue par le remplacement de la dérivée seconde mixte par les différences finies est inférieure à celle des deux autres dérivées, parce qu'elle contient des termes du quatrième ordre.

Une condition supplémentaire, nécessaire à la résolution du système d'équations aux inconnues  $\lambda$  et  $X$ , peut être considérée:

$$X_4 = \frac{1}{4\Delta x \Delta y}. \quad (8.4)$$

Il en découle immédiatement:

$$\lambda_{12} = \lambda_{13} = 0; \quad \lambda_{14} = 1. \quad (8.5)$$

Pour le reste des valeurs, on choisit comme inconnues de base  $\lambda_9$  et  $\lambda_{11}$  qui deviennent, avec les notations (7.1):

$$\lambda_9 = (\Delta x)^2 \frac{12 + T^*}{144 - R^* T^*}, \quad \lambda_{11} = (\Delta y)^2 \frac{12 + R^*}{144 - R^* T^*}. \quad (8.6)$$

On obtient ensuite:

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{\Delta x}{(\Delta y)^2} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{12 + T^*}{144 - R^* T^*}, \\ X_2 &= -\frac{\Delta y}{(\Delta x)^2} \frac{\partial t}{\partial y} \frac{12 + R^*}{144 - R^* T^*}, \\ X_3 &= -\frac{r}{(\Delta y)^2} \frac{12 + T^*}{144 - R^* T^*} - \frac{t}{(\Delta x)^2} \frac{12 + R^*}{144 - R^* T^*}, \end{aligned} \quad (8.7)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -2X_1 - 2X_3 - \frac{12t}{(\Delta x)^2} \frac{12 + T^*}{144 - R^* T^*}, \\ \lambda_2 &= +2X_1 - 2X_3 - \frac{12t}{(\Delta x)^2} \frac{12 + T^*}{144 - R^* T^*}, \end{aligned} \quad (8.8)$$

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= -2X_2 - 2X_3 - \frac{12r}{(\Delta y)^2} \frac{12 + R^*}{144 - R^* T^*}, \\ \lambda_4 &= +2X_2 - 2X_3 - \frac{12r}{(\Delta y)^2} \frac{12 + R^*}{144 - R^* T^*}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

La dérivée seconde mixte s'écrit alors:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_{m,n}}{\partial x \partial y} &= \lambda_1 F_{m+1,n} + \lambda_2 F_{m-1,n} + \lambda_3 F_{m,n+1} + \lambda_4 F_{m,n-1} + \lambda_5 F_{m+1,n+1} \\ &\quad + \lambda_6 F_{m-1,n+1} + \lambda_7 F_{m+1,n-1} + \lambda_8 F_{m-1,n-1} - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + 4X_3) F_{m,n} \\ &\quad - Z_{m,n} - \lambda_9 \frac{\partial^2 Z_{m,n}}{\partial x^2} - \lambda_{11} \frac{\partial^2 Z_{m,n}}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (8.10)$$

#### IV. Déduction des efforts de membrane

##### § 9. Valeurs des efforts sur le contour

En appliquant la relation (7.8) à tous les points intérieurs du réseau, on obtient un système d'équations linéaires ayant comme inconnues les valeurs de la fonction  $F$  aux points intérieurs aussi bien qu'aux points du contour.

Si les valeurs marginales sont connues, le problème a une solution unique et consiste dans le résolution d'un système d'équations linéaires avec autant d'inconnues. En appliquant les relations (2.6), on déterminera les valeurs des efforts dans tous les points intérieurs du réseau.

Si la coque s'appuie sur quatre tympans, comme on l'a indiqué au § 3, les efforts longitudinaux  $S_x$  et  $S_y$  résultent directement de l'équation d'équilibre (2.3) — voir la relation (3.2). Lorsque l'intensité de la charge aux coins est différente de zéro, les coins sont des points singuliers (dans l'hypothèse de membrane).

Un procédé spécial doit être utilisé pour la détermination des valeurs des efforts tangentiels sur le contour, parce que les différences (8.10) nécessitent la connaissance des valeurs de  $F$  dans les points extérieurs.

Nous allons nous occuper du cas où l'état de contrainte est symétrique par rapport aux deux axes de coordonnées.

Soit un point  $(m, i)$  situé sur le bord  $x = x_0$  (fig. 6).

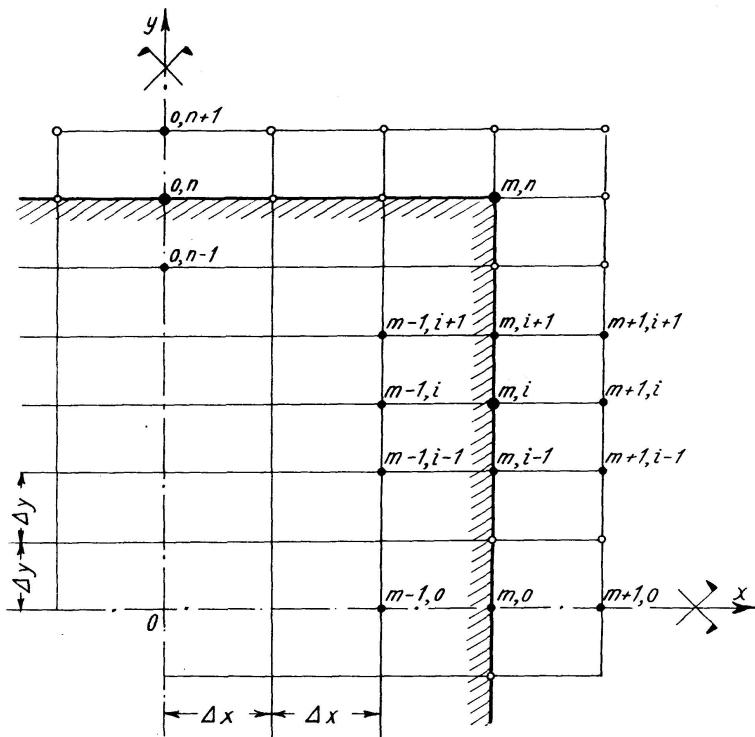


Fig. 6. Nœuds dans la région du bord.

Puisque  $S_{x, m, i} = \frac{\partial^2 F_{m, i}}{\partial y^2} = 0$ , l'équation (8.2) devient:

$$\begin{aligned}
 & 2 \left[ 1 + \frac{\Delta x}{r_m} \frac{\partial r_m}{\partial x} - \frac{6 t_i}{r_m} \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \right] F_{m+1, i} - \left( 1 + \frac{\Delta x}{r_m} \frac{\partial r_m}{\partial x} \right) (F_{m+1, i+1} + F_{m+1, i-1}) = \\
 & 2 \left[ -1 + \frac{\Delta x}{r_m} \frac{\partial r_m}{\partial x} + \frac{6 t_i}{r_m} \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \right] F_{m-1, i} + \left( 1 - \frac{\Delta x}{r_m} \frac{\partial r_m}{\partial x} \right) (F_{m-1, i+1} + F_{m-1, i-1}) \\
 & + \frac{12 (\Delta y)^2}{r_m} Z_{m, i} + \frac{(\Delta x \Delta y)^2}{r_m} \frac{\partial^2 Z_{m, i}}{\partial x^2}.
 \end{aligned} \tag{9.1}$$

Tous les termes du membre de droite sont connus.

Une expression similaire peut être écrite pour un point  $(j, n)$  situé sur le bord  $y = y_0$ .

L'équation du type (9.1) peut être appliquée pour tous les points du contour, y compris les coins. Ainsi peut-on écrire autant d'équations que d'inconnues moins une.

La dernière équation peut être déduite en exprimant l'équilibre global de la coque, selon la relation (4.4). Les intégrales doivent être calculées numériquement, par exemple avec la formule de Simpson.

Si l'on admet que le point  $m, n$  coïncide avec le coin de la coque et que les nombres  $m$  et  $n$  sont pairs, la relation (4.4) s'écrit finalement:

$$\begin{aligned} \Delta x (4 T_{m,1} \operatorname{tg} \varphi_1 + 2 T_{m,2} \operatorname{tg} \varphi_2 + 4 T_{m,3} \operatorname{tg} \varphi_3 + \cdots + 2 T_{m,n-2} \operatorname{tg} \varphi_{n-2} \\ + 4 T_{m,n-1} \operatorname{tg} \varphi_{n-1} + T_{m,n} \operatorname{tg} \varphi_n) + \Delta y (4 T_{1,n} \operatorname{tg} \psi_1 + 2 T_{2,n} \operatorname{tg} \psi_2 \\ + 4 T_{3,n} \operatorname{tg} \psi_3 + \cdots + 2 T_{m-2,n} \operatorname{tg} \psi_{m-2} + 4 T_{m-1,n} \operatorname{tg} \psi_{m-1} \\ + T_{m,n} \operatorname{tg} \psi_m) = -\frac{3}{4} \mathfrak{P}. \end{aligned}$$

Si l'on remplace maintenant les efforts tangentiels par les expressions correspondantes fournies par (8.10), on obtient la dernière équation nécessaire. En raison de la symétrie par rapport aux deux axes, l'étude peut être limitée à un quart de coque.

\* \* \*

Pour le cas d'un seul axe de symétrie, le problème se complique du fait que, sur le bord, la fonction  $F$  a une variation linéaire, ce qui engendre une inconnue supplémentaire  $\bar{F}$  (fig. 4). En raison de la symétrie simple, on peut se limiter à une moitié de coque. Par contre les équations d'équilibre global doivent être associées toutes trois.

### *§ 10. Singularités*

Les valeurs des efforts aux coins peuvent être déterminées même sans connaître la solution générale des équations précédentes, en utilisant les expressions des efforts en sections inclinées.

Avec les conditions marginales

$$S_x = S_\alpha = 0,$$

( $\alpha$  angle des deux bords), on obtient

$$\begin{aligned} S_\alpha &= S_y \sin^2 \alpha + 2 T \sin \alpha \cos \alpha = 0, \\ T_{\alpha\beta} &= -S_y \sin \alpha \cos \alpha - T (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha). \end{aligned}$$

Comme  $S_y$  est donné par la relation (3.2), il résulte des équations précédentes

$$T = T_{\alpha\beta} = \frac{Z}{2t} \operatorname{tg} \alpha.$$

Lorsque  $\alpha = \pi/2$ , c'est-à-dire que les deux bords sont à angle droit, la formule donne des efforts tangentiels infinis au coin.

L'équilibre ne peut en effet être assuré au coin par les efforts de membrane  $S_x = S_y = 0$ . Comme le gauchissement de la surface est nul, les efforts tangentiels devraient être infinis ce qui est contraire au sens physique du problème.

Nous admettrons donc que, dans le voisinage des coins, les efforts longitudinaux ne sont pas nuls, mais présentent des sauts qui impliquent des sauts égaux, mais de sens opposé, des efforts tangentiels. En réalité, à la suite du travail d'ensemble de la coque et des tympans, la présence des efforts normaux aux coins fait que les efforts tangentiels restent finis; de plus, les charges sont aussi transmises partiellement par flexion.

Pour satisfaire à la condition de dualité des efforts tangentiels, M. SOARE [9] a proposé que les corrections  $\bar{S}_x$  et  $\bar{S}_y$  soient égales. De (2.3) on déduit alors:

$$\bar{S}_{x0} = \bar{S}_{y0} = \left( -\frac{Z}{r+t} \right)_c. \quad (10.1)$$

Soit  $T_c$  la valeur finie des efforts tangentiels aux coins. Si l'on représentait graphiquement la variation de  $T$  le long d'un bord, par exemple  $x=x_0$ , il résulterait une courbe semblable à celle représentée à la fig. 7, qui pour  $x \rightarrow x_0$  tend asymptotiquement vers l'infini. L'accroissement rapide des ordonnées se produit sur un intervalle très restreint dans le proche voisinage du coin (de l'ordre  $0,05 x_0$ ).

A proximité du coin, la courbe réelle s'éloignera de la courbe déduite de la théorie de membrane et atteindra la valeur maximum  $T_c$ . L'intervalle sur lequel a lieu ce raccordement, et de même l'allure de la courbe de raccordement, ne peuvent être déduites théoriquement; de petites variations sont dépourvues d'intérêt pratique.

Pour simplifier, on peut admettre que la variation est linéaire sur une longueur  $\xi$ , respectivement  $\zeta$ . La valeur de  $T_c$  se détermine après, en écrivant l'équation d'équilibre global (4.4).

$$T_c = \left( \frac{Z}{r+t} \right)_c. \quad (10.2)$$

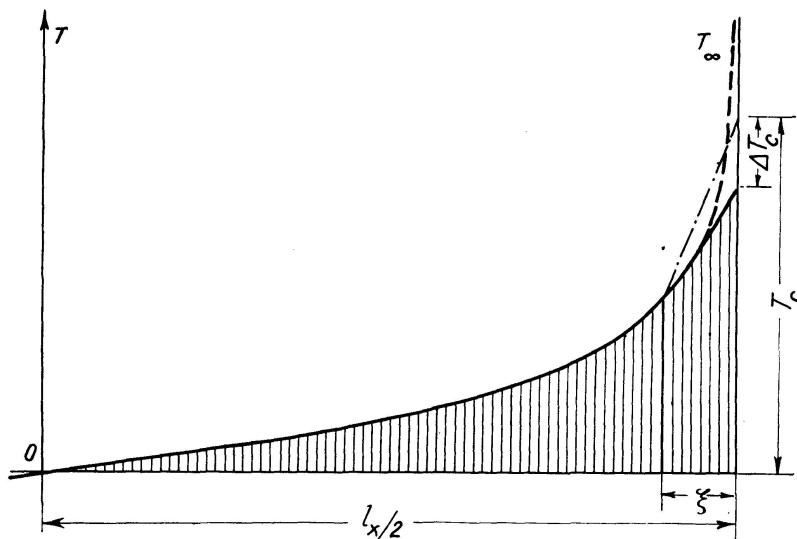


Fig. 7. Raccordement des efforts tangentiels au coin.

La discontinuité du coin sera ensuite raccordée sur les intervalles  $\xi, \zeta$ . D'autres solutions ont été données par M. G. SALVADORI [6] et M. et Y. MIHAILESCU [10].

Cette singularité disparaît si l'intensité de la charge aux coins est nulle.

## V. Exemple de calcul

### § 11. Coque de translation avec directrices circulaires

Soit à déterminer la fonction de contrainte dans une coque en béton armé, recouvrant une surface rectangulaire en plan. La surface médiane est une surface de translation admettant pour courbes directrices deux arcs de cercle (fig. 8 a, b).

*Données numériques:* dimensions dans le plan:  $l_x = 22,50 \text{ m}$ ,  $l_y = 18,00 \text{ m}$ .

Flèches des deux tympans:  $f_x = f_y = l_x/7,5 = 3,00 \text{ m}$ .

Epaisseur de la coque:  $\delta = 8 \text{ cm}$ .

Intensité de la charge:  $p = 300 \text{ kg/m}^2$  (supposée uniformément répartie en projection horizontale). Composantes de la charge extérieure  $X = Y \equiv 0$ ,  $Z = P = p$ .

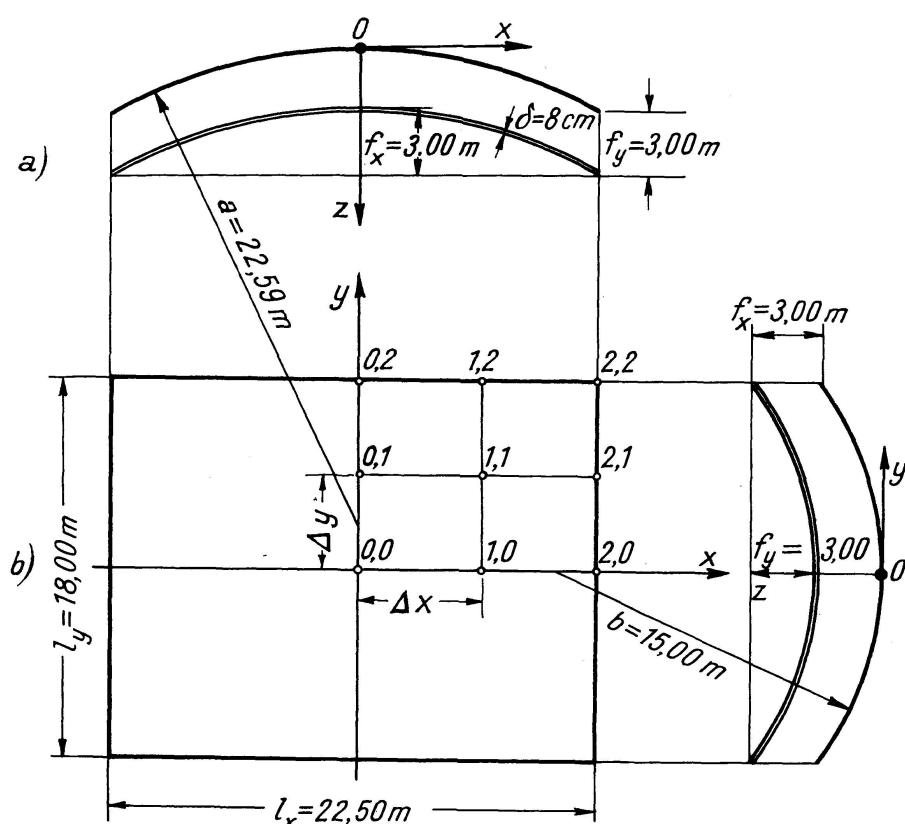


Fig. 8. a) Surface de translation avec deux arcs de cercle comme directrices.  
 b) Réseau adopté.

Tableau 2

$F_{0,0}$	$F_{1,0}$	$F_{0,1}$	$F_{1,1}$	Terme libre *)
$-(\lambda_1^* + \lambda_3^* + 2X_3^*)$ + $\lambda_2^*$ + $\lambda_4^*$ + $\lambda_8^*$	$+\lambda_1^*$ $-(\lambda_1^* + \lambda_2^* + 2\lambda_3^* + 4X_3^*)$ + $2\lambda_7^*$ + $\lambda_4^*$	$+\lambda_3^*$ + $2\lambda_6^*$ $-(2\lambda_1^* + \lambda_3^* + \lambda_4^* + 4X_3^*)$ + $\lambda_2^*$	$+2X_3^*$ + $2\lambda_3^*$ + $2\lambda_1^*$ $-(\lambda_1^* + \lambda_2^* + \lambda_3^* + \lambda_4^* + 4X_3^*)$	$+\frac{1}{2}$ $+r_0/r_1$ + 1 $+r_0/r_1$

\*) Multiplicateur  $\frac{P(\Delta y)^2}{r_0}$ .

Tableau 3

Point	$r$ ( $m^{-1}$ )	$t$ ( $m^{-1}$ )	$\frac{\Delta x}{r} \frac{\partial r}{\partial x}$	$R^*$	$T^*$	$\frac{12+R^*}{144-R^*T^*}$	$\frac{12+T^*}{144-R^*T^*}$	$\frac{\partial t}{r}$	$\frac{\partial y}{\partial y} \Delta y$ ( $m^{-1}$ )	$\frac{t}{r} \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2$ $\cdot \frac{12+R^*}{144-R^*T^*}$
0,0	0,044 260	0,066 667	0	0,185 947	0,270 000	0,084 654	0,085 238	1,506 250	0	0,081 607
1,0	0,048 719	0,066 667	0,198 234	0,263 729	0,270 000	0,085 207	0,085 250	1,368 401	0	0,074 622
0,1	0,044 260	0,076 797	0	0,185 947	0,443 425	0,084 673	0,086 462	1,735 142	0,022 786	0,094 029
1,1	0,048 719	0,076 797	0,198 234	0,263 729	0,443 425	0,085 234	0,086 483	1,576 345	0,022 786	0,085 989

Tableau 4

Point	$X_1^*$	$X_2^*$	$X_3^*$	$\lambda_1^*$	$\lambda_2^*$	$\lambda_3^*$
0,0	0	0	-0,166 844 6	-0,652 344 5	-0,652 344 5	-0,682 160 5
1,0	-0,016 899 6	0	-0,159 872 7	-0,542 380 3	-0,609 978 5	-0,702 737 5
0,1	0	-0,027 898 6	-0,180 490 9	-0,791 203 6	-0,791 203 6	-0,599 298 4
1,1	-0,017 143 9	-0,025 513 3	-0,172 472 2	-0,667 758 8	-0,736 334 3	-0,626 837 1
Point	$\lambda_4^*$	$\lambda_5^*$	$\lambda_6^*$	$\lambda_7^*$	$\lambda_8^*$	
0,0	-0,682 160 5	-0,166 844 6	-0,166 844 6	-0,166 844 6	-0,166 844 6	-0,166 844 6
1,0	-0,702 737 5	-0,176 772 3	-0,142 973 2	-0,176 772 3	-0,142 973 2	-0,142 973 2
0,1	-0,710 892 9	-0,208 389 5	-0,208 389 5	-0,152 592 3	-0,152 592 3	-0,152 592 3
1,1	-0,728 890 3	-0,215 129 4	-0,180 841 6	-0,164 102 8	-0,129 815 0	-0,129 815 0

Avec les notations précédentes, les rayons des cercles directeurs sont donnés par les relations

$$a = \frac{l_x^2}{8f_x} + \frac{f_x}{2} = \frac{241}{240}l_x \approx 22,59 \text{ m}; \quad b = \frac{l_y^2}{8f_y} + \frac{f_y}{2} = 15,00 \text{ m.}$$

L'équation de la surface médiane s'écrit

$$z = a + b - \sqrt{a^2 - x^2} - \sqrt{b^2 - y^2}.$$

Les dérivées partielles successives ont pour expressions:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= x(a^2 - x^2)^{-1/2}; & \frac{\partial z}{\partial y} &= y(b^2 - y^2)^{-1/2}; \\ r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= a^2(a^2 - x^2)^{-3/2}; & t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= b^2(b^2 - y^2)^{-3/2}; \\ \frac{\partial r}{\partial x} &= 3a^2x(a^2 - x^2)^{-5/2}; & \frac{\partial t}{\partial y} &= 3b^2y(b^2 - y^2)^{-5/2}; \\ \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} &= 3a^2(a^2 + 4x^2)(a^2 - x^2)^{-7/2}; & \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} &= 3b^2(b^2 + 4y^2)(b^2 - y^2)^{-7/2}. \end{aligned}$$

Dans le cas de quatre intervalles égaux ( $N=4$ ,  $\Delta x=l_x/4$ ,  $\Delta y=l_y/4$ ), la matrice du système d'équations est présentée dans le tableau 2.

Les éléments nécessaires pour le calcul figurent dans le tableau 3 et les coefficients  $\lambda^*$  et  $X^*$  dans le tableau 4.

En introduisant les valeurs numériques des coefficients  $X^*$  et  $\lambda^*$  dans le tableau 2, nous trouvons le système d'équations dont la matrice est donnée dans le tableau 5. Les solutions  $F$  figurent dans les deux dernières lignes.

Afin de mieux pouvoir apprécier l'approximation donnée par la méthode plurilocale, on a calculé la valeur de  $F_{0,0}$  en divisant les portées  $l_x$  et  $l_y$  seule-

Tableau 5

$F_{0,0}$	$F_{1,0}$	$F_{0,1}$	$F_{1,1}$	Terme libre <sup>1)</sup>
+ 1,668 194 3	- 0,652 344 5	- 0,682 160 5	- 0,333 689 3	+ 0,500 000 0
- 0,609 978 5	+ 3,197 324 8	- 0,285 946 3	- 1,405 475 1	+ 0,908 482 2
- 0,710 892 9	- 0,305 184 5	+ 3,614 562 0	- 1,582 407 2	+ 1,000 000 0
- 0,129 815 0	- 0,728 890 3	- 0,736 334 3	+ 3,449 709 2	+ 0,908 482 2
+ 1,133 019 5	+ 0,875 476 8	+ 0,869 612 5	+ 0,676 583 8	<sup>1)</sup>
+ 0,070 813 7	+ 0,054 717 3	+ 0,054 350 8	+ 0,042 286 5	<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> Multiplicateur  $\frac{p(\Delta y)^2}{r_0} = \frac{1}{16} p a l_y^2$ .

<sup>2)</sup> Multiplicateur  $p a l_y^2$ .

ment en deux intervalles ( $\Delta x = l_x/2$ ,  $\Delta y = l_y/2$ ), selon la formule

$$F_{0,0} = -\frac{p a (\Delta y)^2}{2(\lambda_1^* + \lambda_3^* + 2 X_3^*)} = 0,070\,608\,5 p a l_y^2.$$

Si l'on admet que les erreurs sont proportionnelles à  $(\Delta x)^5$  et  $(\Delta y)^5$ , la valeur probable de  $F_{0,0}$ , calculée avec la méthode d'extrapolation de Richardson, s'élève à

$$F_{0,0}^{(\infty)} = 0,070\,820\,3 p a l_y^2.$$

Les calculs ont été répétés en utilisant les équations aux différences finies habituelles (paraboles du second degré) avec  $N = 2, 4, 6$  intervalles.

Les valeurs de  $F$  une fois connues, les dérivées seconde, exprimant les efforts, peuvent être déduites tout aussi simplement. De la sorte on a calculé la valeur de l'effort longitudinal  $S_{x,0,0}$ .

Les résultats sont comparés dans le tableau 6.

Tableau 6

N	Valeur de $F_{0,0}/p a l_y^2$		Valeur de $S_{x,0,0}/p a$	
	Méthode de la parabole	Méthode plurilocale	Méthode de la parabole	Méthode plurilocale
2	0,06365	0,07061	-0,5092	-0,5170
4	0,06820	0,07081	-0,5147	-0,5170
6	0,06960	—	-0,5160	—
$\infty$	0,07085	0,07082	-0,5171	-0,5170

On voit de cette manière l'approximation excellente que fournit la méthode plurilocale, même avec un nombre très réduit d'inconnues.

### Bibliographie

1. A. PUCHER: *Über den Spannungszustand in gekrümmten Flächen*. Beton und Eisen, Bd. 33, H. 19, S. 298 (1934).
2. A. PUCHER: *Die Berechnung von doppelt gekrümmten Schalen mittels Differenzen-Gleichungen*. Der Bauingenieur, Bd. 18, H. 9/10, S. 118 (1937).
3. L. BROGLIO: *Introduction d'une théorie générale pour l'étude des voûtes minces de translation*. Association Internationale des Ponts et Charpentes, Troisième Congrès, Rapport final, Liège, 1948, p. 553—564.
4. W. FLÜGGE: *Das Relaxationsverfahren in der Schalenstatik*. Federhofer-Girkmann-Festschrift, Fr. Deuticke Verlag, Wien, 1950.
5. A. R. RJANITZINE: *Théorie sans flexion des coques surbaissées* (en russe). Recueil d'articles «Calcul des systèmes spatiaux», T. XII, Ed. d'état pour architecture et constructions, Moscou, 1955.

6. M. G. SALVADORI: *Analysis and Testing of Translational Shells*. Journal of the American Concrete Institute, Title 52—64, June 1956.
7. W. FLÜGGE: *Statik und Dynamik der Schalen*. 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1957.
8. W. FLÜGGE, F. T. GEYLING: *A General Theory of Deformations of Membrane Shells*. Intern. Assoc. for Bridge and Structural Engineering, Publications, XVII, p. 23, Zürich, 1957.
9. M. SOARE: *Certains aspects du calcul des coques* (en roumain). Industrie des Constructions, Nos 9 et 10 (1957).
10. M. et Y. MIHAILESCU: *L'application de la méthode de la relaxation au calcul des coques* (en roumain). Studii și cercetari de mecanica aplicata X, 3, p. 819, 1959.
11. M. SOARE: *L'application des équations aux différences finies au calcul des coques* (en roumain). Ed. de l'Académie de la République Populaire Roumaine, Bucarest, 1959.
12. M. SOARE: *L'application de la méthode plurilocale au calcul des coques* (en roumain). Studii și cercetari de mecanica aplicata, XI, 1, p. 239—259, 1960.

### Résumé

Les auteurs exposent d'abord brièvement les équations d'équilibre élémentaire et d'équilibre global pour une coque de translation, en se limitant à l'état de membrane; ils traitent également les conditions au contour. Ils donnent ensuite une solution numérique à l'aide de différences finies.

Cette nouvelle méthode, appelée par les auteurs *méthode plurilocale*, est basée sur une association plus intime de l'équation aux dérivées partielles à intégrer et du développement en série de Taylor de la fonction inconnue.

Par rapport à la méthode aux différences finies habituelle, basée sur la parabole d'interpolation du second degré, la méthode plurilocale permet une approximation bien meilleure, même pour un nombre réduit de noeuds.

La théorie est illustrée par une application numérique; il s'agit d'une coque de translation dont les deux directrices sont des arcs de cercle.

### Zusammenfassung

Nach einer kurzen Darstellung der elementaren und allgemeinen Gleichgewichtsgleichungen der Membrantheorie für Translationsschalen sowie der Randbedingungen geben die Autoren eine numerische Lösung des Problems vermittelst der Differenzengleichungen.

Die neue Methode, von den Autoren als *Mehrstellenverfahren* bezeichnet, beruht auf einer engeren Verbindung der zu integrierenden partiellen Differentialgleichung mit der Entwicklung in eine Taylor-Reihe der unbekannten Funktion.

Im Vergleich mit der gewöhnlichen Differenzenmethode, wo die Inter-

polation auf einer Parabel zweiten Grades beruht, führt das Mehrstellenverfahren zu einer besseren Genauigkeit, auch für eine geringe Knotenzahl.

Die Autoren geben eine Anwendung der Theorie auf eine Translationsschale mit zwei kreisförmigen Leitkurven.

### Summary

After a short presentation of the elementary and over-all equilibrium equations in the membrane theory of translational shells, as well as of the boundary conditions, a numerical solution by means of finite differences is given.

The new method, called by the authors *the multilocal method*, is based on a close association between the partial equation which must be integrated and an expansion in Taylor series of the unknown function.

In comparison with the usual method of finite differences, based on a second degree parabola for interpolation, the multilocal method allows a better approximation even for a reduced number of knots.

An application of the theory to a translational shell with two circular directrix is given.