

Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 21 (1961)

Artikel: Détermination du régime de membrane dans les voiles minces de translation, à l'aide de la méthode du polygone funiculaire
Autor: Stüssi, F. / Dubas, Pierre
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-18257>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 10.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Détermination du régime de membrane dans les voiles minces de translation, à l'aide de la méthode du polygone funiculaire

Bestimmung des Membranspannungszustandes in Translationsschalen mit Hilfe der Seilpolygonmethode

Determination of the Diaphragm State of Stress in Translational Thin Shells by Means of the Funicular Polygon Method

F. STÜSSI

Prof. Dr, EPF, Zurich

PIERRE DUBAS

Prof. Dr, EPF, Zurich

Introduction

Dans ce même volume des Mémoires¹⁾, MM. BELES et SOARE exposent l'application de la méthode plurilocale au calcul des coques de translation; ils rappellent pour commencer les divers procédés que l'on peut utiliser pour résoudre le problème et citent en passant la méthode du polygone funiculaire. Nous avons donc pensé utile de montrer l'emploi de cette méthode pour le calcul des voiles minces de translation ou, plus exactement, pour la détermination du régime de membrane dans ces surfaces gauches, admises travaillant sans flexion²⁾.

¹⁾ A. A. BELES et M. SOARE, Application de la méthode plurilocale au calcul des coques de translation, Mémoires A.I.P.C., 21e volume, Zurich 1961, page 11.

²⁾ La méthode du polygone funiculaire a déjà été appliquée à un problème semblable, celui de la torsion, régi par une équation différentielle qui est un cas particulier de celle intervenant dans les voiles de translation; on consultera à ce sujet F. STÜSSI, Zur Prandtl-schen Membranenalogie der Torsion, Zeitschrift für angew. Math. und Physik, Festschrift Jakob Ackeret, 1958, Vol. IX b, p. 661, ou Entwurf und Berechnung von Stahlbauten, 1. Band, Grundlagen des Stahlbaues, Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1958, p. 206.

Pour les voiles de translation, l'emploi de la méthode du polygone funiculaire a été exposé par Z. PELKA, voir Obliczanie powłok translacyjnych metodą wieloboku sznurowego, Rozprawy Inżynierskie, Tom VII, Zeszyt 4, Warszawa 1959, p. 465, ou Powłoki translacyjne, Towarzystwo Naukowe Ekspertów Budownictwa W Polsce, Warszawa 1960;

Etablissant tout d'abord brièvement l'équation qui régit le problème, nous montrerons comment on peut résoudre numériquement cette équation différentielle en y substituant un système d'équations linéaires, écrites en un certain nombre de points du domaine étudié. Pour illustrer l'exposé, nous traiterons deux exemples numériques, ce qui par ailleurs donnera une idée de l'ordre de précision obtenu.

Bases théoriques

Considérons un voile mince dont la surface moyenne est engendrée par la translation d'une courbe quelconque, mais contenue dans un plan vertical, le long d'une autre courbe, contenue dans un plan vertical perpendiculaire au précédent; cette surface moyenne est définie par une équation de la forme

$$z = z_1(x) + z_2(y), \quad (1)$$

si xy désigne le plan horizontal de référence (fig. 1). Comme la fonction z_1 ne dépend que de x et z_2 ne dépend que de y , la torsion géodésique $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ est nulle sur toute la surface et les courbures $\frac{d^2 z_1}{d x^2}$, $\frac{d^2 z_2}{d y^2}$ sont des dérivées totales.

Désignons par Z la force, supposée parallèle à l'axe z , appliquée à l'unité de surface en projection horizontale. Lorsque l'on admet que le voile travaille sans flexion, on peut exprimer le régime de membrane par trois composantes, les efforts élémentaires longitudinaux S_1 , S_2 et le cisaillement T . Pour écrire

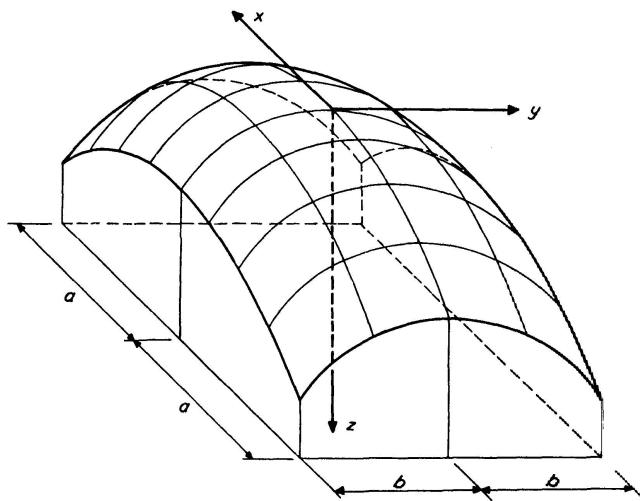


Fig. 1.

voir aussi Powłoka katenoidalna, Rozprawy Inżynierkie, Tom VIII, Zeszyt 4, Warszawa 1960, p. 697, et Catenoidal Shell, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des Sciences Techniques, Volume VIII, Numéro 8, Varsovie 1960, p. 477. Le mode d'application exposé dans ces publications n'est toutefois pas tout à fait exact à notre avis; nous y reviendrons plus loin.

les conditions d'équilibre d'un petit élément de voile, qui se projette selon un rectangle $dx dy$ (fig. 2), il est indiqué de considérer les projections \bar{N}_x , \bar{N}_y et \bar{N}_{xy} des efforts élémentaires. Les équations d'équilibre prennent alors la forme suivante:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{N}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{N}_{yx}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{N}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial x} &= 0, \quad \bar{N}_x \frac{d^2 z_1}{dx^2} + \bar{N}_y \frac{d^2 z_2}{dy^2} + Z = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

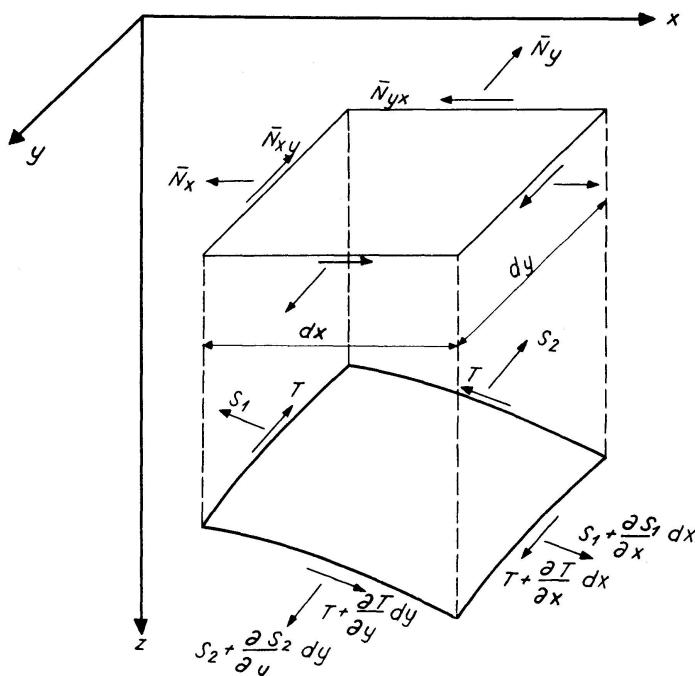


Fig. 2.

On a négligé les infiniment petits d'ordre supérieur et tenu compte, dans la dernière équation, de la torsion géodésique nulle.

Comme dans les problèmes d'élasticité plane, les deux premières équations, relatives aux axes x et y , sont satisfaites si l'on pose

$$\bar{N}_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \bar{N}_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \bar{N}_{xy} = \bar{N}_{yx} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (3)$$

c'est-à-dire si l'on introduit une fonction d'effort F ³⁾, analogue à la fonction de tension d'AIRY. Quant à la troisième condition d'équilibre, relative à l'axe z , elle devient grâce aux relations (3)

³⁾ Ce procédé a été introduit par A. PUCHER, Über den Spannungszustand in doppelt gekrümmten Flächen, Beton und Eisen, 33. Jg., 1934, p. 298; voir aussi B. LAFFAILLE, Mémoire sur l'étude générale des surfaces gauches minces, Mémoires A.I.P.C., 3e volume, 1935, p. 315.

$$\frac{d^2 z_2}{d y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{d^2 z_1}{d x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -Z. \quad (4)$$

Cette équation⁴⁾ linéaire aux dérivées partielles du second ordre permet en principe, avec les conditions aux limites, de définir la fonction F ⁵⁾. Nous ne considérerons ici que le cas, courant en pratique, d'un voile dont la projection sur le plan horizontal xy est rectangulaire et qui est lié, le long du périmètre de sa projection, à des tympans qui ne présentent pas de rigidité appréciable hors de leur plan. Les conditions au contour s'expriment donc de la façon suivante (fig. 1):

$$\begin{aligned} x = \pm a: \quad \bar{N}_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0, \\ y = \pm b: \quad \bar{N}_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Ces relations signifient que la fonction F doit avoir une variation linéaire le long des lisières. D'après les équations (3), seules les dérivées secondes de F ont une signification physique et F n'est déterminé qu'à une fonction $A + Bx + Cy$ près⁶⁾; rien ne nous empêche donc de poser comme conditions au contour

$$\underline{F = 0 \quad \text{sur tout le contour.}} \quad (6)$$

La fonction F une fois connue, les relations (3) permettent de remonter aux projections \bar{N} . Les efforts de membrane sont alors données par les relations suivantes

⁴⁾ Dans le cas le plus général, avec des forces appliquées quelconques, de composantes X , Y , Z , le terme de droite de l'équation (4) se généralise en

$$-Z + X \frac{\partial z}{\partial x} + Y \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \int X dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \int Y dy$$

et les relations (3) deviennent

$$\bar{N}_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \int X dx; \quad \bar{N}_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \int Y dy; \quad \bar{N}_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.$$

Voir par exemple S. TIMOSHENKO and S. WOINOWSKY-KRIEGER, Theory of Plates and Shells, Second Edition, McGraw-Hill, 1959, p. 461.

⁵⁾ Dans les problèmes d'élasticité plane, l'équation différentielle pour la fonction d'AIRY découle d'une condition de compatibilité car ces problèmes sont hyperstatiques au plus haut degré. Les problèmes relatifs aux voiles de translation que nous allons examiner sont par contre isostatiques ou, au plus, une fois hyperstatique comme indiqué à la note 6.

⁶⁾ Lorsque le problème n'est symétrique ni par rapport à x ni par rapport à y , on peut encore considérer un terme de la forme Dxy et, selon (3), le cisaillement \bar{N}_{xy} ne sera défini qu'à une constante près. Le problème est ainsi une fois hyperstatique et il est nécessaire de considérer dans ce cas une condition d'énergie de déformation minimum; on consultera à ce sujet L. BROGLIO, Introduction d'une théorie générale pour l'étude des voûtes minces de translation, A.I.P.C., 3e Congrès, Liège 1948, Rapport final, p. 553; voir aussi B. LAFFAILE, op. cit. à la note 3.

$$S_1 = \bar{N}_x \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}; \quad S_2 = \bar{N}_y \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}}; \quad T = \bar{N}_{xy}. \quad (7)$$

On peut également déterminer les contraintes principales et leurs trajectoires mais il ne faut pas oublier que l'élément de voile considéré n'est rectangulaire qu'en projection⁷⁾.

Résolution de l'équation différentielle des voiles de translation par la méthode du polygone funiculaire

Comme dans la méthode bien connue aux différences finies, nous allons déterminer la valeur de la fonction F en un nombre fini de points, situés aux nœuds d'un réseau rectangulaire qui décrit le domaine entre ses limites. Les mailles seront toutes égales, avec une surface $\Delta x \Delta y$ (fig. 3).

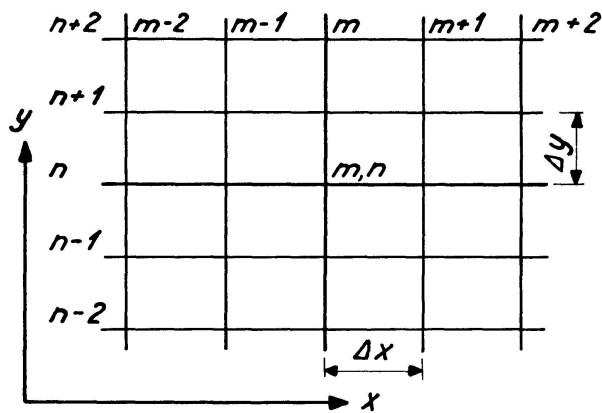


Fig. 3.

C'est aux nœuds du réseau que l'on va remplir l'équation différentielle. Pour ce faire, on exprime les dérivées partielles de la fonction F par des relations qui ne contiennent que les valeurs nodales $F_{m,n}$, c'est-à-dire les inconnues du problème. On peut écrire en chaque nœud intérieur l'équation différentielle transformée et tenir compte sur les lisières de la condition (6) qui détermine directement les valeurs de la fonction sur le contour. On obtiendra donc autant d'équations, linéaires, qu'il y a de valeurs nodales inconnues. La résolution de ces équations se fera par les procédés classiques qu'il est inutile de rappeler ici.

Pour éliminer les dérivées partielles, on utilise la relation du polygone funiculaire qui donne justement une relation entre les valeurs des dérivées

⁷⁾ Voir A. PUCHER, op. cit. à la note 3, ou Z. PELKA, Powłoki Translacyjne, cité à la note 2.

secondes en certains points et les valeurs de la fonction aux mêmes points. Cette relation bien connue s'écrit⁸⁾:

$$y_{m-1} - 2y_m + y_{m+1} = \Delta x K_m(y'')$$

ou, pour des dérivées partielles et une fonction F au lieu de y ,

$$F_{m-1} - 2F_m + F_{m+1} = \Delta x K_m \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right). \quad (8)$$

On peut bien entendu considérer des lignes verticales en remplaçant x par y et m par n .

Ces relations sont *exactes* puisqu'il n'y est fait aucune hypothèse sur l'allure des dérivées secondes et la manière d'évaluer la charge nodale K . La formule, par contre, devient *approchée* si l'on admet une variation parabolique de la dérivée seconde entre les points $m-1$ et $m+1$ et que l'on calcule la charge nodale en conséquence:

$$F_{m-1} - 2F_m + F_{m+1} = \frac{\Delta x^2}{12} \left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_{m-1} + 10 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_m + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_{m+1} \right]. \quad (9)$$

Comme il s'agit d'un problème bidimensionnel, il est indiqué d'introduire la notion de *charge nodale bidimensionnelle* $\bar{K}_{m,n}$, que l'on obtient en généralisant la charge nodale classique bien connue. Pour une distribution de la surcharge p admise *parabolique* dans les deux directions de la surface, on obtient:

$$\bar{K}_{m,n}(p) = \frac{\Delta y}{12} \begin{vmatrix} 1 & & & \\ 10 & & & \\ & & & \\ 1 & & & \end{vmatrix} K_m(p) = \frac{\Delta x}{12} \begin{vmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 10 & 100 & 10 \\ 1 & 10 & 1 \end{vmatrix} K_n(p) = \frac{\Delta x \Delta y}{144} \begin{vmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 10 & 100 & 10 \\ 1 & 10 & 1 \end{vmatrix} p. \quad (10)$$

K_m y désigne la charge nodale classique le long des lignes horizontales et K_n , le long des lignes verticales.

Rien ne nous empêche de considérer chaque terme de l'équation différentielle (4) comme une charge (dont on recherche ou on connaît la valeur en chaque point du réseau). On peut donc en former la charge nodale bidimensionnelle \bar{K} et écrire la relation suivante:

$$\bar{K}_{m,n} \left(\frac{d^2 z_2}{d y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) + \bar{K}_{m,n} \left(\frac{d^2 z_1}{d x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) = -\bar{K}_{m,n}(Z). \quad (11)$$

Comme l'équation (4) doit être satisfaite en chaque point du domaine, la relation (11) est exacte tant qu'on ne fait aucune hypothèse sur la forme de la charge nodale \bar{K} . Cela est possible pour le terme de droite, qui contient les charges données et dont on peut toujours, au moins en principe, évaluer

⁸⁾ On consultera par exemple F. STÜSSI, Entwurf und Berechnung von Stahlbauten, cité à la note 2, page 186, ou Numerische Methoden der Baustatik, Schw. Bauztg., 79. Jg., 1961, p. 275.

mathématiquement la charge nodale \bar{K} exacte. Pour les deux termes de gauche, par contre, qui contiennent les valeurs nodales F inconnues, il faut bien admettre quelque chose et nous supposons que leur charge nodale est parabolique.

Examinons le premier terme de gauche en déterminant la charge $\bar{K}_{m,n}$ à l'aide de la relation approchée (10); il vient:

$$\bar{K}_{m,n} \left(\frac{d^2 z_2}{d y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) = \frac{\Delta y}{12} \begin{vmatrix} 1 \\ 10 \\ 1 \end{vmatrix} K_m \left(\frac{d^2 z_2}{d y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right).$$

Comme le facteur $\frac{d^2 z_2}{d y^2}$ ne dépend que de y , il ne varie pas le long des lignes horizontales du réseau et on peut écrire:

$$\begin{aligned} K_m \left(\frac{d^2 z_2}{d y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) &= \frac{\Delta x}{12} \left[\left(\frac{d^2 z_2}{d y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_{m-1} + 10 \left(\frac{d^2 z_2}{d y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_m + \left(\frac{d^2 z_2}{d y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_{m+1} \right] \\ &= \frac{\Delta x}{12} \left(\frac{d^2 z_2}{d y^2} \right) \left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_{m-1} + 10 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_m + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_{m+1} \right] \\ &= \left(\frac{d^2 z_2}{d y^2} \right) K_m \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right). \end{aligned}$$

Il vient donc:

$$\bar{K}_{m,n} \left(\frac{d^2 z_2}{d y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) = \frac{\Delta y}{12} \begin{vmatrix} 1 \\ 10 \\ 1 \end{vmatrix} \frac{d^2 z_2}{d y^2} K_m \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right).$$

En tenant compte de la relation du polygone funiculaire (8), on obtient finalement l'expression

$$\bar{K}_{m,n} \left(\frac{d^2 z_2}{d y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) = \frac{\Delta y}{12 \Delta x} \begin{vmatrix} +1 & -2 & +1 \\ +10 & -20 & +10 \\ +1 & -2 & +1 \end{vmatrix} \frac{d^2 z_2}{d y^2} F.$$

Pour le second terme de gauche, il suffit bien entendu de permuter x et y ainsi que les lignes horizontales et verticales. Après multiplication par -12 , l'équation (11) conduit donc à la relation

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \begin{vmatrix} -1 & +2 & -1 \\ -10 & +20 & -10 \\ -1 & +2 & -1 \end{vmatrix} \frac{d^2 z_2}{d y^2} F + \frac{\Delta x}{\Delta y} \begin{vmatrix} -1 & -10 & -1 \\ +2 & +20 & +2 \\ -1 & -10 & -1 \end{vmatrix} \frac{d^2 z_1}{d x^2} F = 12 \bar{K}_{m,n}(Z). \quad (12)$$

Il s'agit là au fond simplement d'une combinaison linéaire de l'équation (4) dans laquelle les dérivées partielles ont été exprimées, grâce à la relation du polygone funiculaire (8), par les valeurs nodales F .

Ce schéma (12) donne les coefficients ⁹⁾ des équations linéaires qui permettent de déterminer les inconnues F . Les termes de charge de ces équations figurent à droite; la charge nodale $\bar{K}(Z)$ peut être calculée exactement ou, si la surface de charge est d'allure parabolique, évaluée à l'aide de la relation (10).

Quant aux conditions aux limites (6), il est bien facile d'en tenir compte; toutes les ordonnées F sur les bords sont nulles et les coefficients correspondants des schémas n'interviennent pas dans les équations.

Les équations linéaires une fois résolues, toutes les valeurs nodales de la fonction $F_{m,n}$ seront connues. Pour déterminer les efforts de membrane du voile, il faudra cependant évaluer encore les dérivées de F , en particulier les dérivées secondes (voir équations (3)).

Sur le contour, les dérivées secondes sont fixées directement par les conditions (5) et l'équation différentielle (4); on obtient en effet:

$$\begin{aligned} x = \pm a : \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = - \frac{Z}{\frac{d^2 z_2}{d y^2}}, \\ y = \pm b : \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = - \frac{Z}{\frac{d^2 z_1}{d x^2}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Pour les autres points, on a recours à la relation du polygone funiculaire (9). En écrivant cette formule aux divers points intérieurs situés sur une ligne du réseau choisi et en tenant compte des valeurs données par la relation (13) pour les points au bord, on obtient autant d'équations linéaires qu'il y a de dérivées inconnues. Il est indiqué d'établir la matrice inversée du système d'équations, ce qui permet de calculer, par multiplication et sommation, les dérivées secondes à partir des conditions au contour et des valeurs F connues. A titre d'exemple, nous donnons les tableaux I_4 , I_6 et I_8 , relatifs à des lignes comportant un nombre de divisions usuel (fig. 4). Les valeurs nodales sont

⁹⁾ On remarquera que les facteurs variables $\frac{d^2 z_2}{d y^2}$ et $\frac{d^2 z_1}{d x^2}$ sont écrits à la droite de l'opérateur $|$. Explicitement, le premier terme s'écrit donc:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} \left[\left(\frac{d^2 z_2}{d y^2} \right)_{n+1} (-F_{m-1, n+1} + 2F_{m, n+1} - F_{m+1, n+1}) \right. \\ \left. + \left(\frac{d^2 z_2}{d y^2} \right)_n (-10F_{m-1, n} + 20F_{m, n} - 10F_{m+1, n}) \right. \\ \left. + \left(\frac{d^2 z_2}{d y^2} \right)_{n-1} (-F_{m-1, n-1} + 2F_{m, n-1} - F_{m+1, n-1}) \right]; \end{aligned}$$

on sait en effet que la dérivée seconde $\frac{d^2 z_2}{d y^2}$ est constante sur une ligne horizontale $n+1$, n ou $n-1$.

Il n'est par conséquent pas indiqué de mettre les facteurs $\frac{d^2 z_2}{d y^2}$ et $\frac{d^2 z_1}{d x^2}$ devant l'opérateur comme le fait M. PELKA (voir note 2), c'est-à-dire de multiplier tous les coefficients par les valeurs des facteurs au point central m, n ; la précision en souffrira.

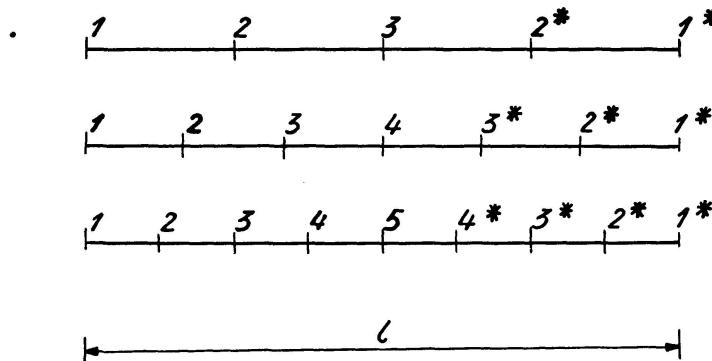


Fig. 4.

Tableau (I₄). Quatre mailles, dérivée seconde y'' donnée au bord

Cas symétrique				
	$y_1 = y_{1*} = 1$	$y_2 = y_{2*} = 1$	$y_3 = 1$	$y''_1 = y''_{1*} = 1/l^2$
	$y''_1 = y''_{1*} = 0$			
y''_2	+ 19,591837	- 43,102041	+ 23,510204	- 0,10204082
y''_3	- 3,918367	+ 47,020408	- 43,102041	+ 0,02040816

$\left. \frac{1}{l^2} \right\}$

Tableau (I₆). Six mailles, dérivée seconde y'' donnée au bord

Cas symétrique					
	$y_1 = y_{1*} = 1$	$y_2 = y_{2*} = 1$	$y_3 = y_{3*} = 1$	$y_4 = 1$	$y''_1 = y''_{1*} = 1/l^2$
	$y''_1 = y''_{1*} = 0$				$y = 0$ partout
y''_2	+43,645361	-91,744330	+ 53,443299	- 5,344330	-0,10103093
y''_3	- 4,453608	+53,443299	-102,432990	+53,443299	+0,01030928
y''_4	+ 0,890722	-10,688660	+106,886598	-97,088660	-0,00206186

$\left. \frac{1}{l^2} \right\}$

Tableau (I₈). Huit mailles, dérivée seconde y'' donnée au bord

Cas symétrique						
	$y_1 = y_{1*} = 1$	$y_2 = y_{2*} = 1$	$y_3 = y_{3*} = 1$	$y_4 = y_{4*} = 1$	$y_5 = 1$	$y''_1 = y''_{1*} = 1/l^2$
	$y''_1 = y''_{1*} = 0$					$y = 0$ partout
y''_2	+77,58384	-163,00604	+ 94,06040	- 9,59800	+ 0,95980	-0,10102062
y''_3	- 7,83837	+ 94,06040	-172,60404	+ 95,98000	- 9,59800	+0,01020621
y''_4	+ 0,79983	- 9,59800	+ 95,98000	-182,20204	+ 95,02020	-0,00104145
y''_5	- 0,15997	+ 1,91960	- 19,19600	+190,04041	-172,60404	+0,00020829

$\left. \frac{1}{l^2} \right\}$

admisées symétriques par rapport au milieu de la ligne, les astérisques désignant justement les points symétriques¹⁰⁾. Pour plus de généralité, la fonction est désignée par y ; dans le cas des voiles, sur une ligne horizontale du réseau, y'' désigne donc $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ et $y''_1 = y''_{1*}$ correspond à la valeur sur le bord, donnée par la relation (13), soit $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_{x=\pm a} = -Z \frac{d^2 z_2}{dy^2}$.

Pour les cisaillements T , nous avons besoin, selon l'équation (3), des dérivées mixtes $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$. A cet effet, nous calculons d'abord les dérivées premières $\frac{\partial F}{\partial x}$ ou $\frac{\partial F}{\partial y}$ à l'aide des relations suivantes¹¹⁾, fondées également sur les propriétés du polygone funiculaire ou, plus exactement, sur l'analogie entre l'effort tranchant d'une poutre chargée et la dérivée première du moment de flexion:

pour un point sur le bord

$$\Delta x y'_1 = y_2 - y_1 - \frac{\Delta x^2}{12} (3,5 y''_1 + 3 y''_2 - 0,5 y''_3),$$

pour un point intérieur

$$\Delta x y'_m = \frac{1}{2} (y_{m+1} - y_{m-1}) - \frac{\Delta x^2}{12} (y''_{m+1} - y''_{m-1}). \quad (14)$$

En introduisant dans ces relations les valeurs y'' données par les tableaux I, on peut établir les tableaux II ci-dessous qui permettent de déterminer, par multiplication et sommation, les dérivées premières lorsque l'on connaît les valeurs nodales et la dérivée seconde sur les bords, d'après la relation (13).

Pour passer à la torsion géodésique $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$, on procède bien entendu de la même manière, en prenant pour fonction y les dérivées premières $\frac{\partial F}{\partial y}$ ou $\frac{\partial F}{\partial x}$. Nous examinerons dans les applications les particularités du calcul.

Tableau (II₄). Quatre mailles, dérivée seconde y'' donnée au bord

Cas symétrique, $y'_3 = 0$				
	$y_1 = y_{1*} = 1$	$y_2 = y_{2*} = 1$	$y_3 = 1$	$y''_1 = y''_{1*} = 1/l^2$ $y = 0$ partout
	$y''_1 = y''_{1*} = 0$			
y'_1	- 5,265306	+ 7,183673	- 1,918367	- 0,06632653
y'_2	- 1,918367	- 0,979592	+ 2,897959	+ 0,02040816

¹⁰⁾ On peut bien entendu établir des tableaux correspondants pour le cas antisymétrique et, par superposition, pour le cas général. Comme nous n'en aurons pas besoin dans les applications, nous ne les reproduisons pas ici. On les trouvera dans PIERRE DUBAS, Calcul numérique des plaques et des parois minces, Publ. No 27 de l'Institut de statique appliquée à l'EPF, Leemann, Zurich 1955.

¹¹⁾ Voir les références à la note 8.

Tableau (II₆). Six mailles, dérivée seconde y'' donnée au bord

Cas symétrique, $y'_4 = 0$					
	$y_1 = y_{1*} = 1$	$y_2 = y_{2*} = 1$	$y_3 = y_{3*} = 1$	$y_4 = 1$	$y''_1 = y''_{1*} = 1/l^2$ $y = 0$ partout
y'_1	-7,849485	+10,193814	-2,938144	+0,593814	-0,04432990
y'_2	-2,938144	-0,742268	+4,422680	-0,742268	+0,01374570
y'_3	+0,593814	-4,125773	-0,742268	+4,274227	-0,00137457

Tableau (II₈). Huit mailles, dérivée seconde y'' donnée au bord

Cas symétrique, $y'_5 = 0$						
	$y_1 = y_{1*} = 1$	$y_2 = y_{2*} = 1$	$y_3 = y_{3*} = 1$	$y_4 = y_{4*} = 1$	$y_5 = 1$	$y''_1 = y''_{1*} = 1/l^2$ $y = 0$ partout
y'_1	-10,465320	+13,583837	-3,838367	+0,799833	-0,079983	-0,03324828
y'_2	-3,918350	-0,979796	+5,797959	-0,999792	+0,099979	+0,01031035
y'_3	+0,799833	-5,598000	-0,019996	+5,797959	-0,979796	-0,00104145
y'_4	-0,079983	+0,959800	-5,598000	-0,979796	+5,697980	+0,00010414

Première application numérique

Afin de permettre une comparaison directe, nous examinons d'abord l'exemple traité par MM. BELES et SOARE¹⁾, c'est-à-dire un voile de translation dont la surface moyenne est engendrée par des directrices circulaires, de rayons r_1 et r_2 , et qui est définie par l'équation (fig. 1)

$$z = r_1 + r_2 - \sqrt{r_1^2 - x^2} - \sqrt{r_2^2 - y^2}. \quad (15)$$

Les dérivées secondes de la surface moyenne valent donc:

$$\frac{d^2 z_1}{d x^2} = r_1^2 (r_1^2 - x^2)^{-3/2}, \quad \frac{d^2 z_2}{d y^2} = r_2^2 (r_2^2 - y^2)^{-3/2}. \quad (16)$$

Pour travailler avec des grandeurs sans dimensions, nous multiplions par r_1 tous les termes de l'équation (12) et, en mettant à droite de l'opérateur $\frac{d}{d x}$ les facteurs constants $\frac{d y}{d x}$ et $\frac{d x}{d y}$, ce qui est licite, il vient:

$$\begin{vmatrix} -1 & +2 & -1 \\ -10 & +20 & -10 \\ -1 & +2 & -1 \end{vmatrix} \frac{d y}{d x} r_1 r_2^2 (r_2^2 - y^2)^{-3/2} F + \begin{vmatrix} -1 & -10 & -1 \\ +2 & +20 & +2 \\ -1 & -10 & -1 \end{vmatrix} \frac{d x}{d y} r_1^3 (r_1^2 - x^2)^{-3/2} F = 12 r_1 \bar{K}_{m,n}(Z). \quad (17)$$

Les conditions au contour sont données bien entendu par la relation (6), soit $F=0$ sur tout le périmètre.

Pour étudier l'amélioration de la précision avec le nombre de divisions, nous avons examiné des réseaux comportant 4×4 , 6×6 et 8×8 mailles. Ce dernier réseau est visible à la fig. 5, avec la numérotation des nœuds, qui reste

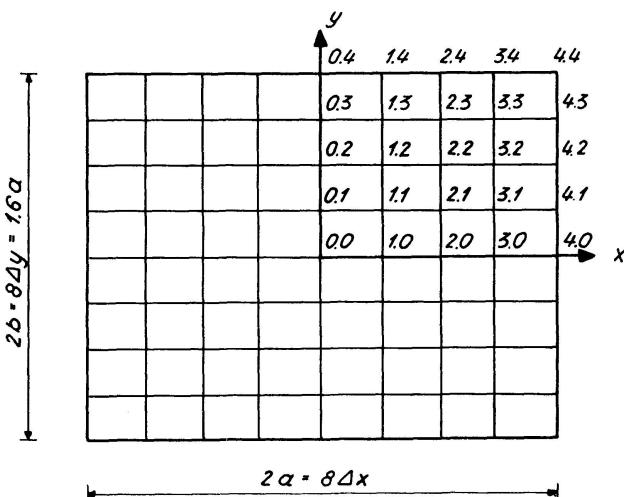


Fig. 5.

valable en principe pour les autres réseaux; chaque point est donc désigné par ses coordonnées, l'unité étant la maille.

Pour les rapports choisis par MM. BELES et SOARE, soit

$$b = 0,8a, \quad \text{d'où} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,8 \quad \text{et} \quad \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1,25,$$

$$r_1 = \frac{241}{240} 2a, \quad r_2 = \frac{2}{3} 2a,$$

on peut déterminer sans difficulté la valeur des facteurs $\frac{d^2 z_2}{d y^2}$ et $\frac{d^2 z_1}{d x^2}$ (formule 16) pour tous les points. On obtient le tableau III ci-dessous.

Ces valeurs et la relation (17) permettent d'écrire en chaque nœud intérieur une équation linéaire en F . Lorsque la surcharge est symétrique par rapport aux deux axes de coordonnées, le nombre d'inconnues $F_{m,n}$ se limite à 4 pour

Tableau III

$y =$ $\Delta y / \Delta x r_1 r_2^2 (r_2^2 - y^2)^{-3/2}$	0	$b/4$	$b/3$	$b/2$	$2b/3$	$3b/4$
1,205	1,2468434	1,2810916	1,3881134	1,5651938	1,6919636	
$x =$ $\Delta x / \Delta y r_1^3 (r_1^2 - x^2)^{-3/2}$	0	$a/4$	$a/3$	$a/2$	$2a/3$	$3a/4$
1,25	1,2796274	1,3034896	1,3759211	1,4892403	1,5658629	

le réseau à 4×4 mailles, à 9 pour celui à 6×6 et à 16 pour celui à 8×8 . Il faut naturellement tenir compte des points symétriques en écrivant les équations. Pour la première équation du réseau à 4×4 mailles, par exemple, écrite au point 0,0, le coefficient de $F_{1,0}$ ($x=a/2, y=0$) vaut:

$$2(-10 \cdot 1,205 + 2 \cdot 1,3759211) = -24,1 + 5,50368;$$

celui de $F_{0,1}$ ($x=0, y=b/2$):

$$2(+2 \cdot 1,3881134 - 10 \cdot 1,25) = +5,55245 - 25;$$

et celui de $F_{1,1}$ ($x=a/2, y=b/2$):

$$4(-1 \cdot 1,3881134 - 1 \cdot 1,3759211) = -5,55245 - 5,50368.$$

Si l'on veut obtenir une matrice à peu près symétrique par rapport à sa diagonale principale, il faut dès lors multiplier par 2 l'équation écrite au nœud 1,0 et celle du nœud 0,1, par 4 celle du nœud 1,1 etc. Ces facteurs figurent dans la première colonne des tableaux IV et V reproduisant les équations.

Quant à la dernière colonne de ces tableaux, elle contient les termes de charge, c'est-à-dire les termes de droite de la relation (17). La surcharge est admise *uniformément répartie*, donc symétrique par rapport aux deux axes comme nous l'avons supposé. D'après les conditions au contour (5), le coin du voile ($x=a, y=b$) est caractérisé par des efforts \bar{N}_x et \bar{N}_y tous deux nuls. L'équation différentielle (4) ne peut donc être satisfaite au coin que si la surcharge y est nulle ou qu'elle est reprise par une flexion du voile¹²⁾. Comme nous voulons nous limiter à un régime de membrane, nous admettrons ici que *les coins ne sont pas chargés*. La charge nodale vaudra donc $\Delta x \Delta y Z$ pour les nœuds ordinaires; pour le nœud situé sur la diagonale, juste avant le coin, on aura par contre, pour une variation admise parabolique, $\frac{143}{144} \Delta x \Delta y Z$ selon la formule (10).

Si l'on désigne par n le nombre de mailles, on a $\Delta x = \frac{2a}{n} = \frac{2,5b}{n}$ et $\Delta y = \frac{2b}{n}$; le terme de charge ordinaire s'écrit alors:

$$12r_1 \bar{K}_{m,n} Z = 12r_1 \frac{2,5b}{n} \frac{2b}{n} Z = \frac{15}{n^2} r_1 (2b)^2 Z. \quad (18)$$

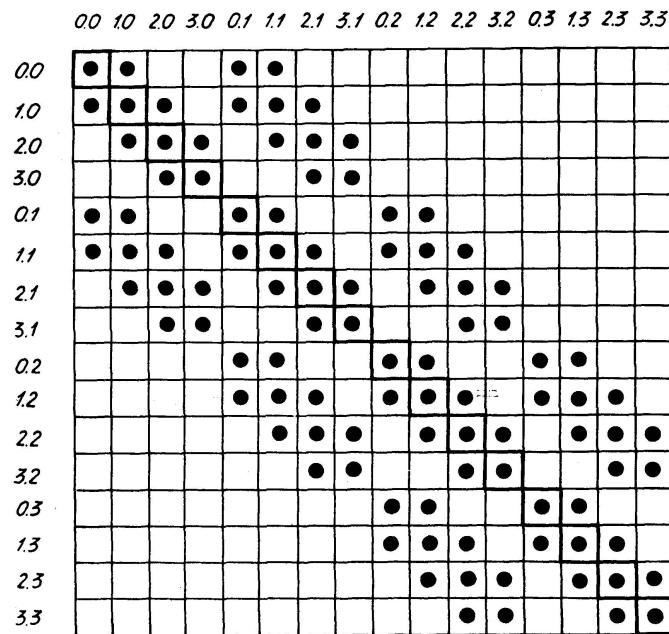
Pour le nœud près du coin, on multipliera comme indiqué ci-dessus par 143/144.

Le tableau IV ci-dessous reproduit le système d'équations correspondant au réseau à 4×4 mailles ($n=4$ pour la formule 18) et le tableau V, celui à 6×6 ($n=6$). Quant à la fig. 6, elle montre schématiquement la matrice relative

¹²⁾ Pour un voile présentant une torsion géodésique non nulle, la surcharge au coin est reprise par des cisaillements car l'équation différentielle (4) comprend dans ce cas un terme $2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$. A la limite, pour $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$ comme dans les voiles de translation, ces cisaillements devraient être infinis en cas de charge au coin, ce qui est physiquement impossible. En réalité l'état de membrane sera complété par des fixions.

Tableau IV. Système d'équations pour le réseau à 4×4 mailles¹³⁾

		$F_{0,0}$	$F_{1,0}$	$F_{0,1}$	$F_{1,1}$	T. de charge
1 ×	0,0	+ 24,1	- 24,1	+ 5,55245	- 5,55245	+ 0,9375
		+ 25,0	+ 5,50368	- 25,0	- 5,50368	
		+ 49,1	- 18,59632	- 19,44755	- 11,05613	+ 0,9375
2 ×	1,0	- 24,1	+ 48,2	- 5,55245	+ 11,10491	
		+ 5,0	+ 55,03684	- 5,0	- 55,03684	+ 1,875
		+ 0,389002	+ 96,00283	- 18,11759	- 48,23279	+ 2,239689
2 ×	0,1	+ 4,82	- 4,82	+ 55,52454	- 55,52454	+ 1,875
		- 25,0	- 5,50368	+ 50,0	+ 11,00737	
		+ 0,410998	+ 0,187148	+ 94,14097	- 58,08789	+ 2,679464
4 ×	1,1	- 4,82	+ 9,64	- 55,52454	+ 111,04907	
		- 5,0	- 55,03684	+ 10,0	+ 110,07369	+ 3,723958
		+ 0,2	+ 0,511611	+ 0,6233546	+ 158,02575	+ 6,727564
Sol.	10^{-3}	+ 71,20656	+ 55,04707	+ 54,73085	+ 42,57258	$\times r_1 (2b)^2 Z$

Fig. 6. Système d'équations schématique pour le réseau à 8×8 mailles.

¹³⁾ Pour faciliter le contrôle, on a écrit séparément, l'un au-dessous de l'autre, les chiffres correspondants aux 2 termes de gauche de la relation (17). D'autre part, le tableau contient la résolution complète d'après Gauss.

Tableau V. Système d'équations pour le réseau à 6×6 mailles

		$F_{0,0}$	$F_{1,0}$	$F_{2,0}$	$F_{0,1}$	$F_{1,1}$	$F_{2,1}$	$F_{0,2}$	$F_{1,2}$	$F_{2,2}$	T. de charge
1 ×	0,0	+24,1 +25,0	-24,1 + 5,21396		+ 5,12437 -25,0	- 5,12437 - 5,21396					0,4166667
2 ×	1,0	-24,1 + 5,0	+48,2 +52,13958	-24,1 + 5,95696	- 5,12437 - 5,0	+ 10,24873 - 52,13958	- 5,12437 - 5,95696				0,8333333
2 ×	2,0		-24,1 + 5,21396	+48,2 +59,56961		- 5,12437 - 5,21396	+ 10,24873 - 59,56961				0,8333333
2 ×	0,1	+ 4,82 -25,0	- 4,82 - 5,21396		+51,24366 +50,0	- 51,24366 + 10,42792	+ 6,26078 -25,0	- 6,26078 - 5,21396			0,8333333
4 ×	1,1	- 4,82 - 5,0	+ 9,64 -52,13958	- 4,82 - 5,95696	-51,24366 +10,0	+102,48733 +104,27917	- 51,24366 + 11,91392	- 6,26078 - 5,0	+ 12,52155 - 52,13958	- 6,26078 - 5,95696	1,6666667
4 ×	2,1		- 4,82 - 5,21396	+ 9,64 -59,56961		- 51,24366 + 10,42792	+102,48733 +119,13922		- 6,26078 - 5,21396	+ 12,52155 - 59,56961	1,6666667
2 ×	0,2				+ 5,12437 -25,0	- 5,12437 - 5,21396	+62,60775 +50,0	- 62,60775 + 10,42792			0,8333333
4 ×	1,2				- 5,12437 - 5,0	+ 10,24873 - 52,13958	- 5,12437 - 5,95696	-62,60775 +10,0	+125,21550 +104,27917	- 62,60775 + 11,91392	1,6666667
4 ×	2,2					- 5,12437 - 5,21396	+ 10,24873 - 59,56961		- 62,60775 + 10,42792	+125,21550 +119,13922	1,655093
Sol.	10^{-3}	70,93289	63,88009	41,61857	63,69793	57,42319	37,54560	41,18681	37,27348	24,74050	$\times r_1(2b)^2 Z$

au réseau à 8×8 mailles; on voit que les coefficients sont groupés autour de la diagonale principale, ce qui facilite la résolution. Par contre les matrices ne sont pas exactement symétriques par rapport à cette diagonale (voir tableaux IV et V); les calculs sont donc un peu plus longs. Nous avons utilisé l'algorithme bien connu de Gauss et obtenu les solutions figurant sous les tableaux IV et V pour les réseaux à 4×4 et 6×6 mailles; pour le réseau 8×8 , les résultats sont indiqués dans le tableau VI.

Tableau VI. Solutions des équations pour le réseau à 8×8 mailles

	0	1	2	3	
3	32,83214	31,11460	25,77711	16,09730	$r_1(2b)^2 Z 10^{-3}$
2	54,42505	51,46534	42,30249	25,92425	
1	66,82399	63,12435	51,70375	31,45804	
0	70,87845	66,93395	54,76940	33,25913	

La fonction F est représentée graphiquement à la fig. 7.

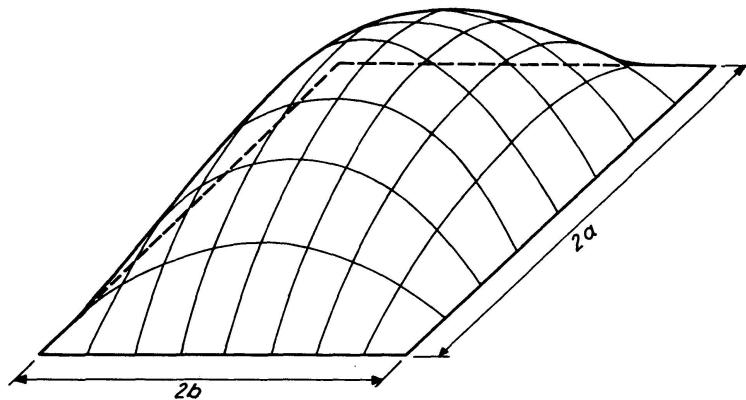


Fig. 7. Fonction de force F .

Les efforts $\bar{N}_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ et $\bar{N}_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ sur le contour sont donnés par les relations (13), les valeurs $\frac{d^2 z_1}{d x^2}$ et $\frac{d^2 z_2}{d y^2}$ étant tirées du tableau III (bien entendu sans les facteurs $\Delta x / \Delta y$ ou $\Delta y / \Delta x$). Les dérivées secondees $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ sur le contour et les solutions F données dans les tableaux IV, V ou VI peuvent maintenant être introduites dans les tableaux I, ce qui détermine les dérivées secondees et par conséquent les efforts \bar{N}_x et \bar{N}_y à l'intérieur. A titre d'exemple et pour montrer la convergence, ces valeurs sont indiquées au tableau VII

pour le réseau à 4×4 ¹⁴⁾ et au tableau VIII pour celui à 8×8 mailles. Elles sont également représentées graphiquement aux fig. 8 et 9.

Tableau VII. Efforts \bar{N}_x et \bar{N}_y pour le réseau à 4×4 mailles

$\bar{N}_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$				$\bar{N}_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$			
	0	1	2		0	1	2
2	-1,0	-0,90848	0	2	0	0	0
1	-0,58289	-0,44810	0	1	-0,24039	-0,29206	-0,57632
0	-0,51609	-0,38940	0	0	-0,32127	-0,37933	-0,66390

$r_1 Z$

Tableau VIII. Efforts \bar{N}_x et \bar{N}_y pour le réseau à 8×8 mailles

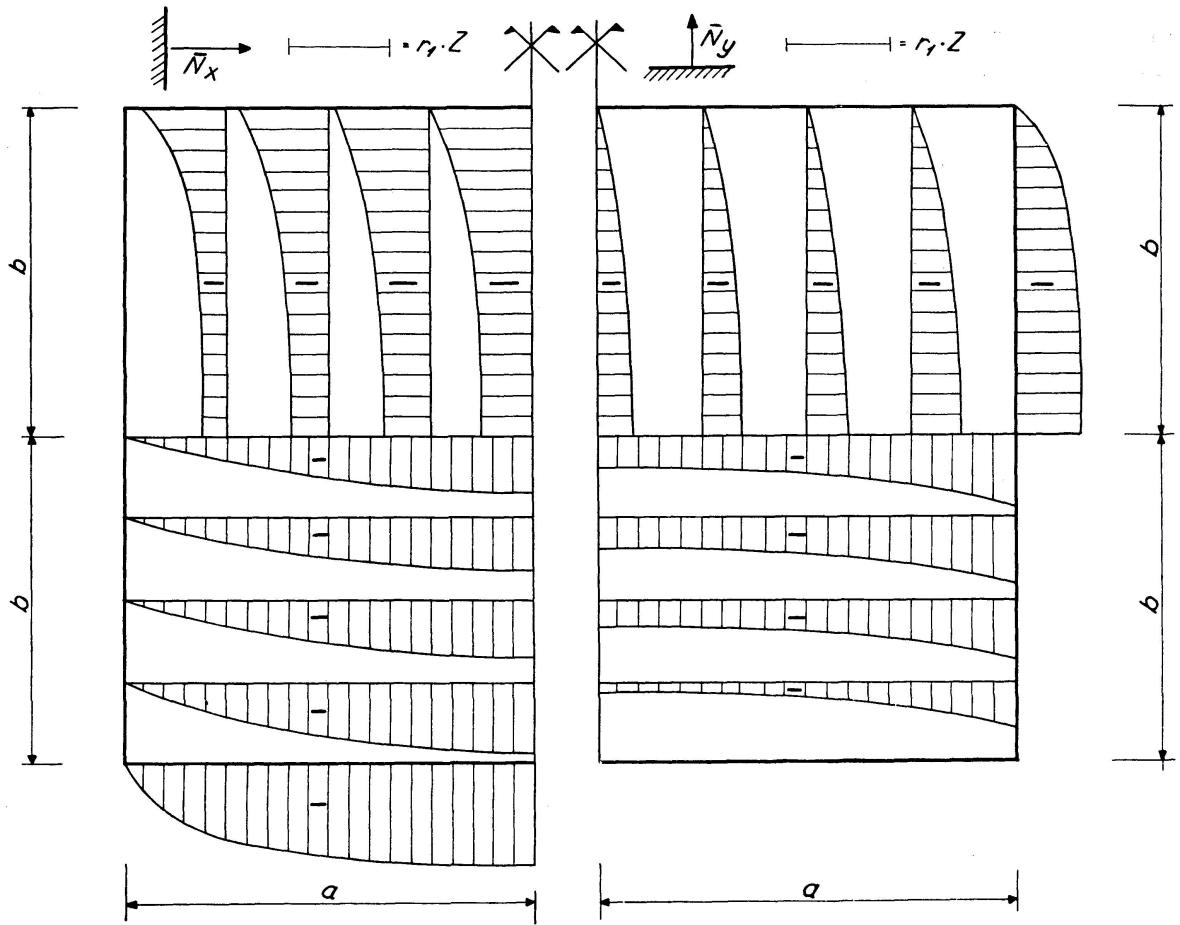
$\bar{N}_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$					
	0	1	2	3	4
4	-1,0	-0,97685	-0,90848	-0,79828	0
3	-0,70492	-0,67396	-0,57475	-0,37488	0
2	-0,58251	-0,55020	-0,44940	-0,26854	0
1	-0,53095	-0,49928	-0,40260	-0,23689	0
0	-0,51658	-0,48530	-0,39036	-0,22927	0

$\bar{N}_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$					
	0	1	2	3	4
4	0	0	0	0	0
3	-0,13952	-0,14661	-0,17369	-0,25078	-0,47282
2	-0,24061	-0,25171	-0,29123	-0,38245	-0,57632
1	-0,30095	-0,31368	-0,35728	-0,45122	-0,64162
0	-0,32095	-0,33407	-0,37863	-0,47323	-0,66390

$r_1 Z$

¹⁴⁾ Pour le point $x=a$, $y=0$ sur le bord, par exemple, la relation (13) donne $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{Z}{d^2 z_2 / d y^2}$; avec le tableau III, on obtient: $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_{0,2} = -\frac{0,8}{1,205} r_1 Z = -0,6639 r_1 Z$. Pour le centre 0,0 il vient dès lors, à partir des tableaux (I₄) et IV:

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_{0,0} = y_3'' = \frac{1}{(2a)^2} (+ 47,020408 \cdot 55,04707 - 43,102041 \cdot 71,20656) \cdot 10^{-3} r_1 (2b)^2 Z + 0,02040816 (-0,6639) r_1 Z = -r_1 Z (0,8^2 \cdot 0,48081 + 0,01355) = -0,32127 r_1 Z.$$

Fig. 8. Efforts \bar{N}_x .Fig. 9. Efforts \bar{N}_y .

Pour déterminer les cisaillements $T = \bar{N}_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$, on procède comme indiqué plus haut, c'est-à-dire on calcule d'abord les dérivées premières, par exemple $\frac{\partial F}{\partial x}$, à l'aide du tableau II (ou directement à partir des relations 14, avec les ordonnées F et les dérivées secondes évaluées précédemment).

Pour les dérivées mixtes, on répète les mêmes opérations en prenant cette fois comme fonction y les dérivées $\frac{\partial F}{\partial x}$ que l'on vient de calculer et en dérivant dans le sens y , le long des lignes verticales. Une seule difficulté se présente: on a besoin des valeurs $y'' = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)$ sur le bord $y=b$. On pourrait bien entendu partir de la relation (13) et déterminer $\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2}$ mathématiquement, par dérivation de $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\frac{Z}{d^2 z_1/d x^2}$. On admettrait ainsi implicitement que la charge Z est constante jusqu'à proximité immédiate du coin. En réalité, tous nos calculs ont été faits en supposant que Z avait une variation parabolique le long de la dernière maille, près du coin; il en sera donc de même pour \bar{N}_x et il convient de déterminer $\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2}$ numériquement, à l'aide du tableau II et en partant des valeurs nodales des dérivées secondes $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ connues sur le bord et de $\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} = 0$ au coin. Pour le réseau à 8×8 mailles, on obtient par exemple les valeurs suivantes, en tenant compte que $1/l \rightarrow 1/2 a = 0,8/2 b$.

x	0,25a	0,50a	0,75a	1,0a	
$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$	- 0,337101	- 0,157579.	- 2,886820.	- 6,446379	$r_1 Z/2b$

En effectuant les calculs, on peut établir le tableau IX, qui contient également les valeurs intermédiaires $\frac{\partial F}{\partial x}$.

Tableau IX. Dérivées premières $\frac{\partial F}{\partial x}$ et cisaillements $T = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ pour le réseau à 8×8 mailles

$\frac{\partial F}{\partial x}$					
	0	1	2	3	4
4	0	0	0	0	0
3	0	0,017705	0,037359	0,062873	0,106589
2	0	0,030506	0,064023	0,105325	0,164179
1	0	0,038121	0,079633	0,129400	0,196697
0	0	0,040638	0,084758	0,137238	0,207308
$T = \bar{N}_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$					
	0	1	2	3	4
4	0	- 0,19952	- 0,40355	- 0,77386	- 1,41240
3	0	- 0,15337	- 0,32770	- 0,51200	- 0,77296
2	0	- 0,10220	- 0,21047	- 0,33016	- 0,42841
1	0	- 0,05050	- 0,10296	- 0,15711	- 0,21400
0	0	0	0	0	0

$r_1 2a Z$

$r_1 Z$

On obtiendrait exactement les mêmes valeurs en déterminant d'abord les dérivées premières $\frac{\partial F}{\partial y}$ puis en dérivant dans le sens des lignes horizontales, pourvu que l'on détermine les $\frac{\partial^3 F}{\partial y \partial x^2}$ au bord comme ci-dessus.

Rappelons pour terminer que ces cisaillements, comme indiqué à la note 12, dépendent fortement de l'état de charge au coin, ce qui n'est pas le cas pour les efforts longitudinaux \bar{N}_x et \bar{N}_y . Comme nous avons supposé que la charge varie paraboliquement, de Z à 0, sur la maille près du coin et que la surface de cette maille vaut $\Delta x \Delta y = \frac{2a^2b}{n^2}$ (elle dépend par conséquent du réseau choisi), nous avons au fond examiné pour chaque réseau un cas de charge différent.

En réalité, pour les conditions au contour (5) adoptées, le problème ne peut pas être résolu exactement dans l'hypothèse d'un régime de membrane: vers les coins, une partie de la charge sera reprise par des flexions du voile et le

reste par les efforts de membrane. La difficulté que nous rencontrons à déterminer la valeur exacte des cisaillements maxima, au coin, ne provient donc pas de la méthode du polygone funiculaire mais bien des données théoriques du problème. Bien au contraire, cette méthode du polygone funiculaire est spécialement indiquée pour résoudre le problème exact: une fois connue la distribution de la charge correspondant au régime de membrane, il sera aisément d'en considérer la variation lors de l'établissement des termes de charge des équations (12).

En supposant par exemple que la distribution effective des charges relatives au régime de membrane soit celle que nous avons admise pour notre réseau à 8×8 mailles — c'est-à-dire décroissance parabolique de Z à 0 sur la dernière maille, de surface $\frac{a}{4} \frac{b}{4}$ — on obtiendrait les résultats donnés graphiquement à la fig. 10.

A titre de récapitulation, nous groupons dans le tableau X les valeurs des ordonnées $F_{max} = F_{0,0}$ et des efforts $\bar{N}_x = S_1$ et $\bar{N}_y = S_2$ au centre du voile, valeurs calculées pour les divers réseaux étudiés, avec extrapolation pour $n = \infty$. On voit la remarquable précision et la bonne convergence, environ proportionnelle à n^4 , de la méthode du polygone funiculaire. On pourra comparer ces valeurs à celles évaluées à l'aide de la méthode aux différences finies et de la méthode plurilocale, indiquées dans le tableau 6 de MM. BELES et SOARE¹⁾.

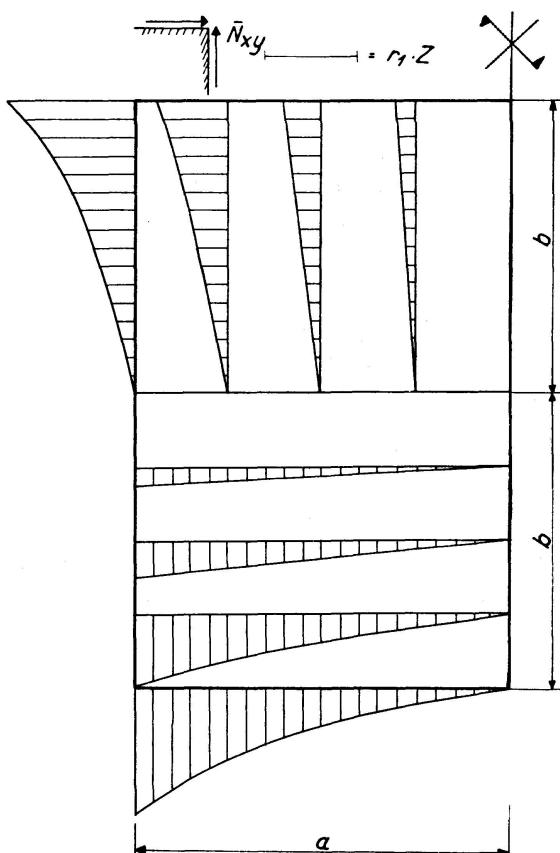


Fig. 10. Efforts \bar{N}_{xy} .

Tableau X

	$F_{0,0} = F_{max}$	Erreur	$(S_1)_{0,0}$	Erreur	$(S_2)_{0,0}$	Erreur
4×4	71,207	+ 0,50 %	- 0,51609	- 0,101 %	- 0,32127	+ 0,109 %
6×6	70,933	+ 0,12 %	- 0,51649	- 0,023 %	- 0,32100	+ 0,025 %
8×8	70,878	+ 0,04 %	- 0,516576	- 0,007 %	- 0,320945	+ 0,008 %
∞	70,85	—	- 0,51661	—	- 0,32092	—
	$10^{-3} r_1 (2b)^2 Z$		$r_1 Z$		$r_1 Z$	

Remarquons que, pour tous les réseaux, les efforts S_1 et S_2 trouvés satisfont exactement l'équation différentielle (4). Pour le centre du réseau à 4×4 mailles, par exemple on a:

$$S_1 = \bar{N}_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -0,51609; \quad S_2 = \bar{N}_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -0,32127;$$

$$\frac{d^2 z_1}{d x^2} = 1,0; \quad \frac{d^2 z_2}{d y^2} = 1,50625;$$

d'où

$$-0,51609 - 0,32127 \cdot 1,50625 = 1,0.$$

Il en est de même pour toutes les valeurs des tableaux VII et VIII¹⁵⁾. Cela montre simplement que les calculs numériques sont corrects mais n'a rien à voir avec la précision inhérente à la méthode. Les erreurs de \bar{N}_x et \bar{N}_y sont tout simplement de signe inverse et, après multiplication par les facteurs $\frac{d^2 z_1}{d x^2}$ ou $\frac{d^2 z_2}{d y^2}$, se compensent exactement.

Seconde application numérique

Dans l'exemple précédent, la distribution de la surcharge Z était admise uniforme, ce qui pourrait expliquer la précision relativement satisfaisante de la méthode aux différences. Nous allons examiner maintenant un voile soumis à une charge *variable* et choisissons à cet effet un exemple déjà résolu mathématiquement¹⁶⁾: il s'agit d'une surface moyenne en paraboloïde elliptique, définie par l'équation

$$z = \frac{f_1}{2} \frac{x^2}{a^2} + \frac{f_2}{2} \frac{y^2}{b^2}. \quad (19)$$

¹⁵⁾ Cela n'est vrai que si l'on calcule avec une charge au coin nulle. Autrement, on introduirait implicitement, dans les équations linéaires, l'équation différentielle (4) écrite au coin, ce qui est en contradiction avec les conditions au contour (5).

¹⁶⁾ Voir E. TUNGL, Das elliptische Paraboloid über rechteckigem Grundriß. Österr. Bauzeitschrift, 11. Jg., 1956, p. 274; voir aussi K. GIRKMANN, Flächentragwerke, 5. Auflage, Springer, Wien, 1959, p. 390.

Les dérivées secondees $\frac{d^2 z_1}{d x^2} = \frac{f_1}{a^2}$ et $\frac{d^2 z_2}{d y^2} = \frac{f_2}{b^2}$ sont donc constantes sur tout le domaine; si l'on suppose que la surface couverte est carrée, avec $a = b$ et $\Delta x = \Delta y$, et que l'on prend $\frac{f_1}{a^2} = \frac{f_2}{b^2} = \frac{f}{a^2}$, la relation (12) se simplifie et devient, après division par 2:

$$\begin{vmatrix} -1 & -4 & -1 \\ -4 & +20 & -4 \\ -1 & -4 & -1 \end{vmatrix} F = \frac{6a^2}{f} \bar{K}_{m,n}(Z). \quad (20)$$

Dans notre exemple numérique, nous choisirons un rapport $\frac{a}{f} = 1,25$.

Quant à la charge Z , correspondant au poids propre de ce voile d'épaisseur variable, elle obéira à l'équation

$$Z = g_0 \left[1 + 1,01 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \right) \right]. \quad (21)$$

Le tableau XI contient les valeurs nodales Z dont nous aurons besoin.

Tableau XI. Valeurs nodales de la charge Z

	$x = 0$	$x = \frac{a}{4}$	$x = \frac{a}{2}$	$x = \frac{3a}{4}$	$x = a$
$y = a$					0
$y = \frac{3a}{4}$				2,13625	2,578125
$y = \frac{a}{2}$			1,505	1,820625	2,2625
$y = \frac{a}{4}$		1,12625	1,315625	1,63125	2,073125
$y = 0$	1,0	1,063125	1,2525	1,568125	2,01

On remarquera que, comme dans l'exemple précédent et pour les mêmes raisons, nous admettons que la charge correspondant au régime de membrane est nulle au coin, au lieu de $3,02g_0$ selon (21). Cette charge doit être reprise par une flexion locale du voile près des coins.

Comme toutes les données sont symétriques par rapport aux diagonales du carré, il en sera de même de la fonction F et l'on peut en tenir compte lors de l'établissement des équations. On n'obtient ainsi que 3 inconnues pour le réseau à 4×4 et 10 pour celui à 8×8 mailles. La numérotation nodale adoptée sera la même que dans l'exemple précédent et la relation (20) permet d'établir sans difficultés les tableaux XII et XIII reproduisant les systèmes d'équations pour les réseaux à 4×4 et 8×8 mailles.

Avec $a/f = 1,25$, les termes de charge valent ici ($n = \text{nombre de mailles} = 2a/\Delta x$):

$$6 \cdot 1,25 a \bar{K}_{m,n}(Z) = 7,5 a \bar{K}_{m,n}(Z) = \frac{7,5}{144} \left(\frac{2a}{n}\right)^2 a \begin{vmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 10 & 100 & 10 \\ 1 & 10 & 1 \end{vmatrix} Z$$

et les charges nodales y sont données exactement par la relation (10) puisque la distribution est effectivement parabolique selon (21).

Tableau XII. Système d'équations pour le réseau à 4×4 mailles

		$F_{0,0}$	$F_{1,0} = F_{0,1}$	$F_{1,1}$	T. de charge
1 ×	0,0	+ 20	- 16	- 4	+ 0,5082031
4 ×	1,0	- 16	+ 72	- 32	+ 2,50625
4 ×	1,1	- 4	- 32	+ 80	+ 2,9403646
Solutions		0,12012902	0,09791667	0,08192768	$g_0 a (2a)^2$

Tableau XIII. Système d'équations pour le réseau à 8×8 mailles

		$F_{0,0}$	$F_{1,0}$	$F_{2,0}$	$F_{3,0}$	$F_{1,1}$	$F_{2,1}$	$F_{3,1}$	$F_{2,2}$	$F_{3,2}$	$F_{3,3}$	T. de charge
$\frac{1}{4} \times$	0,0	+5	- 4			- 1						29,91333
1 ×	1,0	-4	+18	- 4		- 8	- 2					127,05078
1 ×	2,0		- 4	+20	- 4	- 2	- 8	- 2				149,24316
1 ×	3,0			- 4	+20		- 2	- 8				186,23047
1 ×	1,1	-1	- 8	- 2		+20	- 8		- 1			134,44824
2 ×	2,1		- 2	- 8	- 2	- 8	+38	- 8	- 8	- 2		313,28125
2 ×	3,1			- 2	- 8		- 8	+40	- 2	- 8		387,25586
1 ×	2,2					- 1	- 8	- 2	+20	- 8	- 1	178,83301
2 ×	3,2						- 2	- 8	- 8	+38	- 8	431,64063
1 ×	3,3								- 1	- 8	+20	250,34994

$$\cdot g_0 a (2a)^2 10^{-3}$$

La résolution des équations est ici spécialement aisée puisque la matrice est symétrique par rapport à la diagonale principale. Pour le réseau à 4×4 mailles, les solutions trouvées figurent sous le tableau XII; pour celui à 8×8 mailles, dans un tableau spécial XIV. Les cases vides correspondent aux nœuds symétriques par rapport à la diagonale.

Sur le contour, les efforts $\bar{N}_x = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ et $\bar{N}_y = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ sont donnés par les relations (13), avec $1/\frac{d^2 z_1}{dx^2} = 1/\frac{d^2 z_2}{dy^2} = 1,25 a$ et Z d'après le tableau XI. Pour les nœuds intérieurs, on utilise le tableau I. Par suite de la symétrie par rapport à la diagonale principale, il suffit de calculer $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ ou $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$; les valeurs dans l'autre direction s'obtiennent par permutation des lignes horizontales et verticales. Les valeurs trouvées sont indiquées dans les tableaux XV et XVI et à la figure 11.

Tableau XIV. Solutions des équations pour le réseau à 8×8 mailles

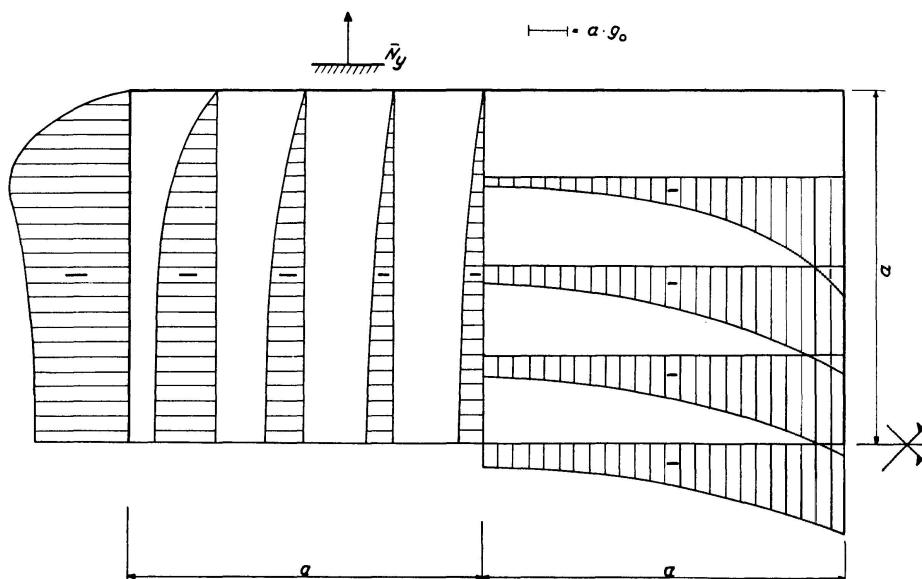
	0	1	2	3	
3				38,463844	
2			82,170453	54,594561	
1		110,576089	94,574674	61,091121	
0	120,285933	115,235062	98,069634	62,819366	$\cdot g_0 a (2a)^2 10^{-3}$

Tableau XV. Efforts \bar{N}_y (ou \bar{N}_x) pour le réseau à 4×4 mailles

	0	1	2	
2	0	0	0	
1	-0,425852	-0,940625	-2,828125	$\cdot g_0 a$
0	-0,625	-1,139773	-2,5125	

Tableau XVI. Efforts \bar{N}_y (ou \bar{N}_x) pour le réseau à 8×8 mailles

	0	1	2	3	4	
4	0	0	0	0	0	
3	-0,207928	-0,287652	-0,577623	-1,335156	-3,222656	
2	-0,427339	-0,547435	-0,940625	-1,698159	-2,828125	$\cdot g_0 a$
1	-0,574837	-0,703906	-1,097097	-1,751411	-2,591406	
0	-0,625000	-0,754070	-1,138287	-1,752228	-2,5125	

Fig. 11. Paraboloïde. Efforts \bar{N}_y .

A titre de comparaison, nous avons également résolu le problème à l'aide de la méthode aux différences finies¹⁷⁾, c'est-à-dire en remplaçant l'équation différentielle par la relation

$$\begin{vmatrix} -1 & & \\ -1 & +4 & -1 \\ & -1 & \end{vmatrix} F = \frac{a^2}{f} \Delta x^2 Z = 1,25 a \left(\frac{2a}{n} \right)^2 Z. \quad (22)$$

en chaque nœud du réseau. Pour le réseau à 8×8 mailles, on obtient alors les équations figurant au tableau XVII. On voit que le système n'est guère plus simple et que la résolution ne demandera que légèrement moins de temps que celle du système donné par la méthode du polygone funiculaire (tableau XIII).

Tableau XVII. Méthode aux différences. Système d'équations pour le réseau à 8×8 mailles

		$F_{0,0}$	$F_{1,0}$	$F_{2,0}$	$F_{3,0}$	$F_{1,1}$	$F_{2,1}$	$F_{3,1}$	$F_{2,2}$	$F_{3,2}$	$F_{3,3}$	T. de charge
$\frac{1}{4} \times$	0,0	+1	-1									0,3125
1 ×	1,0	-1	+4	-1		-2						1,328906
1 ×	2,0		-1	+4	-1		-2					1,565625
1 ×	3,0			-1	+4			-2				1,960156
1 ×	1,1			-2		+4	-2					1,407813
2 ×	2,1				-2	-2	+8	-2	-2			3,289063
2 ×	3,1					-2	-2	+8		-2		4,078125
1 ×	2,2						-2	-2	+4	-2		1,88125
2 ×	3,2							-2	-2	+8	-2	4,551563
1 ×	3,3									-2	+4	2,670313

$$\cdot a/64 (2a)^2 g_0$$

Quant au tableau final XVIII, il contient les valeurs de quelques ordonnées $F_{m,n}$ et de quelques efforts $\bar{N}_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ (ou $\bar{N}_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$), valeurs calculées par la méthode du polygone funiculaire et celle aux différences — dans les deux cas pour 4×4 et 8×8 mailles — ainsi que par un procédé mathématique¹⁸⁾.

Sur la diagonale du carré, on a $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ par raison de symétrie et l'équation différentielle (4) donne dans notre cas directement:

$$\bar{N}_x = \bar{N}_y = \frac{1}{2} \cdot 1,25 a Z = 0,625 a g_0 \left[1 + 1,01 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \right) \right].$$

¹⁷⁾ Cette comparaison a déjà été faite par Z. PELKA pour le réseau à 4×4 mailles (Powłoki translacyjne, cité à la note 2, p. 24 sqq.). Quelques erreurs numériques se sont cependant glissées dans les calculs, surtout pour la méthode du polygone funiculaire, ce qui fausse la comparaison.

¹⁸⁾ Pour les ordonnées F , les valeurs de la dernière colonne, dites valeurs «exactes», ont été calculées par extrapolation pour $n=\infty$, à partir des réseaux du polygone funiculaire. Pour les efforts \bar{N}_y ou \bar{N}_x , on a utilisé le tableau 1 donné par E. TUNGL, op. cit. à la note 16. La dernière décimale n'est pas assurée.

Tableau XVIII. Comparaison de diverses méthodes

			Méthode du polygone funiculaire				Méthode aux différences finies				Solutions «exactes»
	x	y	4×4 mailles	%	8×8 mailles	%	4×4 mailles	%	8×8 mailles	%	
F $g_0 \cdot$ $\alpha(2a)^2$	0	0	0,120129	0,14	0,120286	0,01	0,107617	11,79	0,116942	2,87	0,12030
	0	$a/2$	0,097917	0,17	0,098070	0,01	0,088086	11,35	0,095459	2,75	0,09808
	$a/2$	$a/2$	0,081928	0,32	0,082170	0,02	0,073438	11,92	0,079835	2,95	0,08219
\bar{N}_y (\bar{N}_x) $g_0 \alpha$	$a/4$	0			-0,75407	0,0			-0,74991	0,5	-0,7538
	0	$a/4$			-0,57484	0,0			-0,57900	0,7	-0,5751
	$a/2$	0	-1,13977	0,1	-1,13829	0,0	-1,09688	3,8	-1,12463	1,2	-1,1384
	0	$a/2$	-0,42585	0,3	-0,42734	0,0	-0,46875	9,7	-0,44099	3,2	-0,4272
	$3/4a$	0			-1,75223	0,0			-1,73529	1,0	-1,7519
	0	$3/4a$			-0,20793	0,2			-0,22486	8,0	-0,2083
	$a/2$	$a/4$			-1,09710	0,0			-1,08557	1,1	-1,0972
	$a/4$	$a/2$			-0,54743	0,0			-0,55896	2,1	-0,5474
	$a/2$	$3/4a$			-1,69816	0,1			-1,66926	1,7	-1,6973
	$3/4a$	$a/2$			-0,57762	0,2			-0,60653	4,9	-0,5786

Nous n'avons donc pas considéré les points de la diagonale dans notre tableau (pour \bar{N}_y ou \bar{N}_x) puisque toutes les méthodes y donnent des valeurs exactes, pourvu que les calculs numériques le soient (voir aussi tableau XV et XVI).

Quant aux cisaillements T , pour les raisons exposées à l'exemple précédent, nous ne les avons pas déterminés puisque leur répartition ne peut pas être connue exactement tant que l'on ignore la part de charge reprise par flexion vers les coins.

L'examen du tableau XVIII conduit aux constatations suivantes:

- La méthode du polygone funiculaire a une *précision* étonnante; les valeurs déterminées à l'aide d'un réseau assez lâche, à 4×4 mailles, sont déjà suffisamment exactes pour les besoins de la pratique.
- La convergence est excellente; comme dans l'exemple précédent, elle est environ proportionnelle à n^4 , n désignant le nombre de mailles dans une direction.
- La précision de la méthode aux différences finies est de loin inférieure; pour un réseau à 8×8 mailles, les erreurs sont encore plus de dix fois plus grandes que celles correspondant à la méthode du polygone funiculaire, pour un réseau à 4×4 mailles seulement.
- La convergence de la méthode aux différences finies est lente puisque les erreurs y sont environ proportionnelles à $1/n^2$.

Précision de la méthode du polygone funiculaire

Les deux applications que nous venons de donner ne permettent pas en soi d'établir des règles générales pour la précision. Toutefois, de nombreux autres calculs effectués pour résoudre des problèmes bidimensionnels régis par d'autres équations différentielles — plaques minces et élasticité plane — conduisent au critère suivant:

Si l'intervalle entre deux points d'inflexion consécutifs correspond à

2	3	4	6	8	mailles
---	---	---	---	---	---------

la précision sera de l'ordre de 6 % 2 % 0,7 % 0,15 % 0,05 %

pour les valeurs des ordonnées F et des dérivées seconde \bar{N}_y ou \bar{N}_x . Pour les dérivées d'ordre impair, multiplier par $1,5 \div 2$.

Pour les conditions au contour (6), on peut admettre que l'intervalle à considérer est la longueur totale $2a$ ou $2b$; dans nos applications le nombre de mailles serait donc de 4, 6 ou 8. Les tableaux X et XVIII montrent que, pour l'équation (4) des voiles minces sans flexion, les erreurs sont en général inférieures¹⁹⁾. Les indications ci-dessus donnent donc une idée de l'ordre de précision que l'on peut attendre du réseau choisi.

Conclusions

La relation du polygone funiculaire peut être appliquée avec succès à la détermination du régime de membrane dans les voiles minces de translation. Pour ce faire, on substitue à l'équation différentielle (4) un système d'équations linéaires, guère plus compliqué que celui obtenu en utilisant la méthode aux différences finies, déjà proposée par PUCHER²⁰⁾ pour l'étude de ces voiles. La précision du polygone funiculaire est cependant de loin supérieure, ce qui permet, pour obtenir un même degré d'exactitude, de choisir un réseau comportant sensiblement moins de mailles et par conséquent de *réduire considérablement l'étendue des opérations numériques*.

Par rapport aux méthodes analytiques dites rigoureuses, la méthode du polygone funiculaire offre l'avantage de ne recourir qu'à des notions simples, familières à tout ingénieur, et de n'exiger que des opérations numériques élémentaires (résolution d'équations linéaires). De part son caractère numérique, ce procédé permet en outre d'étudier sans aucune difficulté des voiles de translation dont la surface moyenne est définie par n'importe quelles direc-

¹⁹⁾ Pour les efforts \bar{N}_y et \bar{N}_x qui, comme nous l'avons dit, remplissent toujours exactement l'équation (4), cela n'est vrai que pour la plus grande des valeurs car l'erreur relative de l'autre peut être grande si l'effort est petit.

²⁰⁾ A. PUCHER, Die Berechnung von doppelt gekrümmten Schalen mittels Differenzengleichungen. Der Bauingenieur, Bd. 18, 1937, p. 118.

trices et dont la charge est variable selon une loi quelconque (par exemple, poids propre d'un voile d'épaisseur variable ou, pour la solution complète considérant les flexions, la surcharge relative au régime de membrane, déduction faite de celle reprise par flexion locale). Lorsque l'on utilise un procédé analytique, par contre, on est souvent amené à fixer la forme du voile par des considérations de simplicité des développements mathématiques²¹⁾ ou à admettre des surcharges définies par une équation simple²²⁾, qui ne correspondent qu'imparfaitement aux données réelles. La méthode du polygone funiculaire laisse de ce point de vue toute liberté au constructeur de rechercher les formes les plus avantageuses et les plus économiques, compte tenu des conditions de chantier²³⁾.

Résumé

Les auteurs exposent l'application de la méthode du polygone funiculaire à la détermination du régime de membrane dans les voiles minces de translation. Pour résoudre l'équation aux dérivées partielles qui régit le problème, on y substitue un système d'équations linéaires, les inconnues étant les valeurs nodales de la fonction. Les opérations numériques sont donc analogues à celles que l'on rencontre dans la méthode bien connue aux différences finies mais la précision est de loin supérieure.

Zusammenfassung

Dieser Beitrag zeigt die Anwendung der Seilpolygonmethode auf die Bestimmung des Membranspannungszustandes in Translationsschalen. Die das Problem beherrschende partielle Differentialgleichung wird in ein lineares Gleichungssystem umgesetzt, in dem als Unbekannte die Knotenwerte der Funktion erscheinen. Die in diesem Lösungsweg vorkommenden numerischen Berechnungen sind somit den in der normalen Differenzenmethode auftretenden ähnlich, wobei die erreichte Genauigkeit aber weit höher liegt.

Summary

The authors describe the application of the funicular polygon method to the determination of the diaphragm state of stress in translational thin shells. The partial differential equation governing the problem is replaced by a system of linear equations in which the nodal values of the function appear as the unknowns. The numerical computations arising in this method of solution are therefore similar to those met with the well-known method of finite differences, but the accuracy attained is far greater.

²¹⁾ Voir par exemple P. CSONKA, Ein Beitrag zur zweckmäßigen Formgebung der Kappenschalen über rechteckigem Grundriß, Mémoires A.I.P.C., 16e volume, 1956, p. 71.

²²⁾ Voir E. TUNGL, article cité à la note 16.

²³⁾ A ce sujet, on pourra lire les remarques de B. LAFFAILLE, au début de l'article cité à la note 3.