Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

Band: 21 (1961)

Artikel: La prise en compte des imperfections inévitables dans la détermination des systèmes hyperstatiques en acier sollicités au flambement

Autor: Dutheil, Jean

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-18247

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 30.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

La prise en compte des imperfections inévitables dans la détermination des systèmes hyperstatiques en acier sollicités au flambement

Behandlung von statisch unbestimmten, auf Knicken beanspruchten Stahlkonstruktionen unter Berücksichtigung der unvermeidlichen Mängel

Taking Unavoidable Imperfections Into Account in the Design of Statically Indeterminate Systems Made of Steel Subjected to Compressive Forces

JEAN DUTHEIL
Paris

I. Introduction

La détermination des systèmes hyperstatiques dont certains éléments sont sollicités au flambement, se fait classiquement dans l'hypothèse de pièces idéalement parfaites, exemptes de toutes imperfections géométriques et de structure, et soumises à des charges parfaitement centrées.

Quand un système n'est pas trop complexe, on arrive à déterminer la contrainte critique de la barre la plus sollicitée, soit directement, soit en calculant la longueur de flambement qui résulte de la formation de certains points d'inflexion. On ramène ainsi le problème complexe au problème fondamental de la barre bi-articulée.

Cependant, les barres ou éléments constructifs du système, présentent des imperfections inévitables de toutes sortes. Il en résulte des perturbations qui ont une influence, à la fois sur la position des points d'inflexion réels ou fictifs, donc sur la longueur de flambement, et sur la stabilité propre de la barre bi-articulée qui, en définitive, conditionne celle du système tout entier.

Dans les systèmes hyperstatiques, les imperfections ont donc deux influences distinctes, et si depuis longtemps on a étudié la seconde, il faut reconnaître qu'on s'est fort peu préoccupé de la première. Cependant, la longueur de flambement intervient à la puissance deux dans le calcul de la charge critique.

Il y a donc là une incertitude et on peut se demander si elle est vraiment

couverte par les coefficients de sécurité couramment admis pour les barres bi-articulées. Nous allons tout d'abord essayer de répondre à cette question.

Dans ce qui suit, nous nous plaçerons dans la zone dite élastique, c'est-à-dire en supposant que la contrainte de compression dans les différentes barres du système, ne dépasse pas la limite de proportionnalité. Nous éliminerons ainsi toutes les contestations qui pourraient surgir d'une prise de position au sujet d'une quelconque théorie de module réduit.

Dans cette zone élastique, on applique classiquement un coefficient de sécurité unique par rapport à la contrainte critique d'Euler, qu'il s'agisse d'une barre bi-articulée, ou d'un système hyperstatique.

Prenons l'exemple concret de la poutre continue sur appuis rigides, représentée sur la fig. 1.

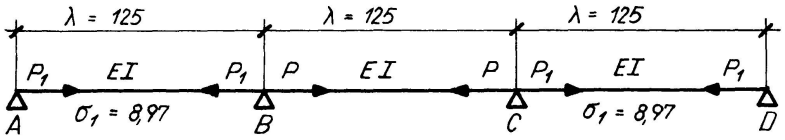


Fig. 1.

Cette poutre idéalement parfaite à section constante en acier A 37 est symétrique à trois travées égales. L'élancement de chaque travée calculée en supposant des appuis simples, est $\lambda = 125$.

Les deux travées extrêmes sont soumises chacune à une contrainte de compression invariable $\sigma_1 = 8{,}97$ kg/mm². Nous nous proposons de déterminer la contrainte critique σ_{cr} de la travée centrale. En élasticité, c'est un problème classique dont la solution est:

$\sigma_{cr} = 19{,}2$ kg/mm² correspondant à un élancement de flambement $\lambda_f = 103{,}8$. On remarque que cette contrainte est égale à la limite de proportionnalité généralement admise pour l'acier A 37, on se situe donc bien dans la zone élastique. Théoriquement, tant que cette contrainte n'est pas atteinte dans la travée centrale, la poutre reste rigoureusement rectiligne en équilibre stable.

Examinons maintenant le comportement d'une poutre identique mais réelle, avec ses imperfections inévitables. En supposant la contrainte de compression nulle dans la travée centrale, la contrainte σ_1 appliquée dans les travées latérales produit un fléchissement d'ensemble de la poutre suivant la fig. 2.

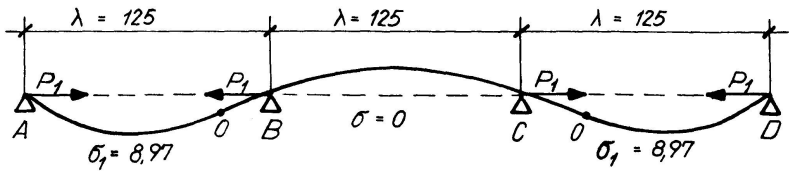


Fig. 2.

La travée centrale non comprimée créant un encastrement élastique des travées extrêmes, il apparaît dans chacune d'elles un point d'inflexion 0.

Lorsqu'on charge progressivement la travée centrale, l'encastrement élastique des travées latérales diminue lui-même progressivement, et les points 0 se rapprochent des appuis B et C. Lorsque la contrainte de compression dans la travée centrale atteint la même valeur 8,97 que dans les travées latérales, les points d'inflexion 0 sont en coïncidence avec les appuis B et C, et les trois travées travaillent comme si elles étaient bi-articulées, la déformée se composant de 3 demi-ondes de sinusoïde, suivant fig. 3.

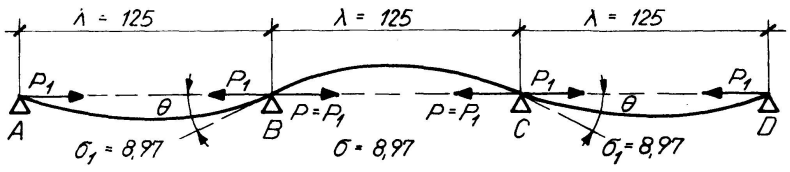


Fig. 3.

En admettant pour le moment que dans cet état la poutre soit encore stable, si l'on continue à charger la travée centrale, elle fonctionne en poutre encastrée élastiquement, et on voit apparaître dans ladite travée, deux points d'inflexion qui s'éloigneraient des appuis B et C à mesure que la charge continue à croître. Puis sous une certaine charge, l'affaissement se produirait.

Il est important de remarquer que la travée centrale ne commence à fonctionner en poutre encastrée élastiquement, que lorsque ses extrémités ont subi une certaine rotation (fig. 3). *Son degré d'encastrement réel est donc plus faible que dans l'hypothèse de la poutre idéalement parfaite.*

Pour chiffrer l'influence de cette rotation sur la charge supportable par la poutre, il faut évidemment abandonner l'hypothèse de la poutre idéalement parfaite. Si l'on se réfère aux Règles CM 56, on trouve que précisément 8,97 est la contrainte limite d'affaissement correspondant à l'élancement 125.

Dans l'état correspondant à la fig. 3, il faut donc considérer que la limite élastique 24 kg/mm² apparaît dans la section médiane des travées, et que la contrainte $\sigma = 8{,}97$ dans la travée centrale, est la contrainte limite d'affaissement de la poutre.

Cela signifie que sous l'effet des imperfections limites qui peuvent se présenter, la travée centrale sera bi-articulée quand elle atteindra la ruine.

On peut en conclure que les imperfections limites ont pour effet d'annuler l'encastrement élastique de la travée centrale, *donc de porter l'élancement de flambement à 125 au lieu de 103,8.*

Or, la contrainte critique d'Euler qui est de 19,2 pour l'élancement 103,8, se réduit à 13,27 pour l'élancement 125. Le coefficient de sécurité généralement appliqué sans l'intervention du vent étant de 2,5, il en résulte que la contrainte limite admissible calculée dans l'hypothèse de la poutre idéalement parfaite, soit:

$$\frac{19,2}{2,5} = 7,7$$

devrait être réduite en fait à:

$$\frac{13,27}{2,5} = 5,3,$$

si l'on s'en tient au principe de la sécurité par rapport à la contrainte critique d'Euler.

Cela signifie que pour obtenir cette contrainte limite 5,3 en partant du calcul classique, il faudrait, pour tenir compte des imperfections, appliquer un coefficient de sécurité:

$$\frac{19,2}{5,30} = 3,62.$$

Le coefficient de sécurité 2,5 serait donc dans cet exemple, notoirement insuffisant.

Il faut cependant remarquer que la prise en compte des imperfections est incompatible avec la notion de sécurité par rapport à la charge critique d'Euler, car il n'est plus question de charge critique mais de charge limite d'affaissement.

Si l'on se refère aux Règles CM 56, la contrainte limite d'affaissement étant de 8,97, le coefficient de sécurité applicable sans intervention du vent est 1,5. La contrainte limite admissible ressort donc à:

$$\frac{8,97}{1,5} = 5,98.$$

Si elle est notablement supérieure à 5,05, cela provient d'une conception plus rationnelle de la sécurité des barres bi-articulées, conception probabiliste en accord avec l'expérience et la statistique mathématique.

Pour aboutir à cette contrainte limite admissible, il faudrait dans l'hypothèse des barres idéalement parfaites, appliquer un coefficient de sécurité de:

$$\frac{19,2}{5,98} = \underline{3,21}$$

encore très sensiblement supérieur à 2,5.

Considérons maintenant une poutre analogue à celle de la fig. 1, mais l'élancement de chaque travée étant de 146,5 au lieu de 125. De plus, le moment d'inertie des travées latérales est triplé, par exemple en accolant 3 profilés identiques, la travée centrale n'en comportant qu'un. Le rayon de giration dans le plan de flambement des travées latérales reste ainsi le même que le rayon de giration de la travée centrale, de sorte qu'à trois travées égales, correspondent trois élancements égaux.

Les travées latérales sont soumises à une contrainte de compression invariable $\sigma_1 = 6,81$. Par un calcul analogue à celui qui précède, on trouve par les Règles CM 56 une contrainte limite admissible de:

$$\frac{6{,}81}{1{,}5} = 4{,}61.$$

Le calcul classique dans l'hypothèse d'une poutre idéalement parfaite, donne toujours une contrainte critique de 19,2 dans la travée centrale. Pour obtenir la même sécurité que par les Règles CM 56, il faudrait donc appliquer un coefficient de sécurité:

$$\frac{19{,}2}{4{,}61} = \underline{4{,}17}.$$

Les imperfections ont pour effet dans ce cas, de faire passer l'élancement de flambement de 103,8 à 146,5.

On peut concevoir qu'on augmente indéfiniment l'inertie des travées extrêmes par le moyen que nous avons exposé, c'est-à-dire en conservant le même rayon de giration aux trois travées. Si l'élancement de chaque travée est de 207,6, et la contrainte de compression invariable dans les travées latérales $\sigma_1 = 3{,}56$, on aboutit alors aux résultats suivants:

Poutre idéalement parfaite: la travée centrale est parfaitement encastrée aux deux extrémités, son élancement de flambement est donc:

$$\frac{207{,}6}{2} = 103{,}8$$

et sa contrainte critique: 19,2.

Poutre réelle: contrainte limite d'affaissement 3,56, donc contrainte limite admissible:

$$\frac{3{,}56}{1{,}5} = 2{,}38.$$

Le coefficient de sécurité à appliquer pour aboutir à cette même contrainte limite admissible est alors:

$$\frac{19{,}2}{2{,}38} = 8{,}07.$$

Les imperfections ont alors pour effet de majorer l'élancement de flambement de 103, 8 à 207,6 c'est-à-dire du simple au double.

Il s'agit bien entendu dans ce dernier exemple, d'un cas limite tout théorique. Mais le coefficient 4,17 précédemment calculé correspond à un cas qui peut se présenter en pratique.

On peut donc affirmer que certains systèmes rendent nécessaire l'application d'un coefficient de sécurité compris entre 4 et 8, si, restant dans l'hypothèse des pièces idéalement parfaites, on veut être certain de couvrir les incertitudes provenant de l'influence des imperfections sur la longueur de flambement.

Par contre, les imperfections produisant un effet analogue à celui d'une réduction de raideur, peuvent avoir dans beaucoup de cas, une influence favorable sur la longueur de flambement. Nous en donnerons des exemples.

Il conviendrait alors pour avoir une sécurité rationnelle, de diminuer le coefficient 2,5 pour le réduire à 1,9 environ.

Cette énorme variation du coefficient de sécurité de 1,9 à 8, à laquelle on aboutit ainsi, mesure l'influence des imperfections.

Devant ce résultat, il n'y a qu'une conclusion possible: l'hypothèse des pièces idéalement parfaites est beaucoup trop loin de la réalité, pour permettre un calcul rationnel des systèmes.

Les avantages qu'on prête ordinairement à cette méthode, la rigueur mathématique et la simplicité, deviennent du second ordre devant ses inconvénients du point de vue de la sécurité.

Le but de la présente note est de proposer une nouvelle méthode, permettant la prise en compte rationnelle des imperfections dans tous les cas, et qui éliminant toutes les incertitudes que nous venons de mettre en lumière, permet l'application d'un coefficient de sécurité unique dans tous les cas. Ce coefficient est d'ailleurs égal à celui qui est admis pour les autres modes de sollicitation et on aboutit ainsi à une conception cohérente de la sécurité.

Il en résulte, comme nous allons le montrer, à la fois une garantie de la sécurité et une économie appréciable pour la Construction Métallique, sans aucune complication de calculs.

II. Exposé des principes de la méthode

La méthode repose sur les principes fondamentaux qui sont à la base des articles traitant du flambement dans les Règles françaises CM 56.

Elle constitue une généralisation de ces articles en étendant leur application aux systèmes hyperstatiques.

1. Nouvel aspect du problème du flambement d'une barre prismatique bi-articulée

Nous supposons connus les principes fondamentaux qui sont à la base de la solution donnée à ce problème dans les Règles CM 56.

Nous rappellerons seulement que la loi qui lie la flèche f d'une barre prismatique en acier d'élancement donné à sa contrainte de compression σ s'exprime par:

$$f = \frac{c\,\sigma\,\sigma_k}{\sigma_k - \sigma\,(1+c)}\,\frac{W}{P_k}, \tag{1}$$

σ_k contrainte critique d'Euler,
P_k charge critique d'Euler,
Ω aire de la section,
W module de flexion dans le plan de flambement,
c coefficient expérimental caractérisant le degré d'imperfection.

On remarque que $\sigma = 0$ entraîne $f = 0$, de sorte que cette loi ne prend en compte ni excentricité éventuelle de la charge, ni flèche initiale. Pratiquement en effet, les barres constituant une construction sont toujours partiellement

encastrées, et le flambement joue entre deux points d'inflexion qui sont des rotules parfaites.

Par ailleurs, on suppose que les barres mises en œuvre sont correctement dressées, alors la petite flèche initiale qui peut subsister est négligeable devant les imperfections de structure.

Il faut considérer en effet que lorsqu'on dresse une barre, on ne fait que transformer des imperfections géométriques en imperfections de structure, et que lorsqu'on charge la barre, la flèche résiduelle qui apparaît à la décharge n'est que l'expression de la transformation inverse.

Le coefficient c a été déterminé par des expériences et une étude statistique sur les barres de fabrication industrielles, qui a permis de fixer sa valeur à *0,3*.

Partant de là et de la relation (1), on peut calculer la contrainte limite d'affaissement *par la formule:*

$$\begin{aligned} \sigma_s &= \sigma_4 - \sqrt{\sigma_4^2 - \sigma_k \sigma_F}, \\ \sigma_4 &= \tfrac{1}{2}(\sigma_k + 1{,}3\,\sigma_F), \end{aligned} \tag{2}$$

σ_F est la limite d'élasticité conventionnelle de l'acier consideré.

On peut donc, au moyen de cette formule, tracer la courbe représentant la variation de la contrainte limite d'affaissement en fonction de l'élancement $\sigma_s = f(\lambda)$.

Le coefficient $c = 0{,}3$ a été choisi de telle manière que la probabilité de constater un point d'essai en-dessous de cette courbe est sensiblement la même que de constater dans une barre une limite élastique inférieure à la limite élastique conventionnelle.

Cette conception permet l'application d'un coefficient de sécurité unique, égal à celui des autres modes de sollicitation, soit 1,5 sans vent, et 1,33 avec vent.

Ceci étant posé, on peut considérer le problème sous un autre angle. On peut exprimer la contrainte limite d'affaissement sous la forme:

$$\sigma_s = \frac{\pi^2 E_s}{\lambda^2}. \tag{3}$$

La contrainte limite d'affaissement peut donc être considérée comme la contrainte critique d'Euler, d'une barre identique à la barre réelle, mais idéalement parfaite et présentant un *module fictif* E_s qu'on peut calculer en partant de (3) puisqu'on connaît σ_s en fonction de λ par (2). On peut ainsi tracer la courbe $A\,B$ représentant $E_s = f(\sigma_s)$ sur la fig. 4.

Remarquons qu'il résulte de (3) que pour un élancement donné λ, la variation de E_s en fonction de σ_s est linéaire. Cette variation peut se représenter par une droite telle que $O\,C$ qui correspond à l'élancement λ. Son point d'intersection C avec la courbe $A\,B$, donne les valeurs de E_s et σ_s correspondant à l'élancement λ.

On peut tracer une infinité de droites telles que $O\,C$, chacune d'elles cor-

respondant à un élancement compris entre O et l'infini. L'élancement O correspond à l'axe des abscisses, l'élancement infini à l'axe des ordonnées.

On peut donc, au moyen du diagramme de la fig. 4 obtenir immédiatement les valeurs de σ_s et E_s correspondant à un élancement donné.

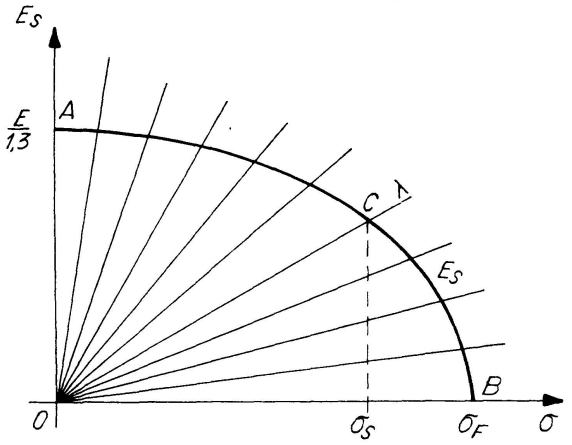


Fig. 4.

Ce qu'il convient de retenir, *c'est qu'on a ainsi étendu la formule d'Euler aux barres réelles avec leurs imperfections*, par le moyen d'un *module fictif* expérimental. Ceci permet de ramener le calcul des barres réelles à celui des barres idéalement parfaites tout en tenant compte des imperfections.

2. *Application aux systèmes hyperstatiques*

Nous allons montrer qu'on peut aussi calculer un système hyperstatique avec prise en compte des imperfections, en le considérant comme idéalement parfait, sous réserve de substituer le module fictif E_s au module réel.

Considérons (fig. 5) une poutre sur 4 appuis rigides, symétrique, dont la travée centrale seule est comprimée.

La *méthode directe*, c'est-à-dire l'application des principes fondamentaux des Règles CM 46, permet de déterminer la contrainte maximum sous une charge quelconque P.

L'expérience montre que la poutre réelle fléchit même sous une faible charge, et que deux points d'inflexion C et D prennent naissance dans la travée AB. La portion de poutre CD comprise entre points d'inflexion, est une barre bi-articulée sur rotules parfaites, de longueur l_f, sa déformée est une demi-onde de sinusoïde. Les tronçons CA et DB sont des tronçons d'une

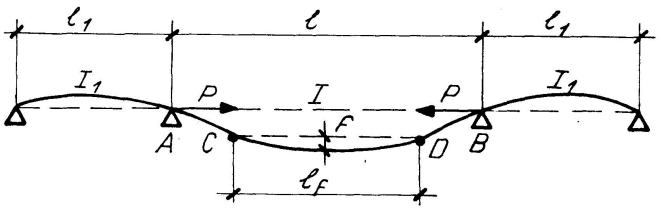


Fig. 5.

demi-onde identique. Si f est la flèche de la barre CD, on peut exprimer les rotations sur appuis dans la travée centrale par:

$$\vartheta_1 = \frac{\pi}{l_f} f \cos \pi \frac{l - l_f}{2 l_f}.$$

On peut aussi exprimer la rotation sur les mêmes appuis des travées latérales par:

$$\vartheta_2 = P f \frac{l_1 (1 + c)}{3 E I_1} \sin \pi \frac{l - l_f}{2 l_f}.$$

En écrivant que ces deux rotations sont égales, on aboutit à l'équation:

$$\operatorname{tg} \pi \frac{l - l_f}{2 l_f} = \frac{3}{\pi} \frac{l_f}{l_1} \frac{I_1}{I} \frac{E_0}{E} \frac{\sigma_{kf}}{\sigma}. \tag{4}$$

Dans laquelle:

$E_0 = E/1{,}3$,
σ_{kf} = contrainte critique d'Euler correspondant à la longueur l_f,
σ = contrainte de compression dans la travée centrale $= P/\Omega$.

Cette équation donne la longueur de flambement l_f correspondant à la charge P. On connaît alors la contrainte et la déformation en tous points de la poutre.

Pour appliquer la *méthode des modules fictifs*, on suppose que la travée centrale est soumise à sa charge limite d'affaissement P_s. On connaît alors par la courbe de la fig. 4, le module E_s dans la travée centrale, et le module $E/1{,}3$ dans les travées latérales qui correspond à $\sigma = 0$. On considère la poutre comme idéalement parfaite, et on aboutit à l'équation:

$$\operatorname{tg} \pi \frac{l - l_f}{2 l_f} = \frac{3}{\pi} \frac{l_f}{l_1} \frac{I_1}{I} \frac{E_0}{E_s}, \tag{5}$$

équation qui donne la longueur de flambement correspondant à la charge limite d'affaissement P_s considérée comme charge critique.

Il est facile de voir que les deux équations (4) et (5) donnent la même contrainte limite d'affaissement.

Si en effet dans l'équation (4) on se place dans le cas où σ est la contrainte limite d'affaissement, on peut poser:

$$\sigma = \frac{\pi^2 E_s}{\lambda_f^2}$$

et puisque par ailleurs $\sigma_{kf} = \dfrac{\pi^2 E}{\lambda_f^2}$.

$\dfrac{\sigma_{kf}}{\sigma} = \dfrac{E}{E_s}$ d'où: $\dfrac{E_0}{E} \dfrac{\sigma_{kf}}{\sigma} = \dfrac{E_0}{E_s}$.

Remarque: Dans le cas d'une poutre idéalement parfaite, l'équations déterminant l_f s'écrirait:

$$\operatorname{tg} \pi \frac{l-l_f}{2 l_f} = \frac{3}{\pi} \frac{l_f}{l_1} \frac{I_1}{I} \frac{E}{E'}. \tag{6}$$

E' étant le module réduit. On voit que cette équation n'est pas plus facile à résoudre que (4) et (5), sauf cependant dans la zone élastique où $E' = E$. Mais les équations (4) et (5) aboutissent à une solution plus économique puisque

$$\frac{E_s}{E_0} > 1,$$

ce qui conduit à une longueur de flambement inférieure à celle qui résulte de (6).

Par ailleurs, l'équation (6) résout plus complètement le problème car elle donne la contrainte et la déformation sous une charge axiale quelconque.

Cette concordance entre la méthode directe et la méthode des modules fictifs que nous avons mis en évidence dans cet exemple simple, est valable pour tous les systèmes hyperstatiques.

On peut d'ailleurs simplifier les calculs au moyen de formules approchées (voir Annexe).

La longueur de flambement de la poutre représentée fig. 5, s'obtiendrait très facilement par:

$$l_f = l \frac{1 + 1{,}66\,\alpha}{2 + 1{,}66\,\alpha}$$

avec

$$\alpha = \frac{l_1}{l} \frac{I}{I_1} \frac{E_s}{E_0}. \tag{7}$$

Avec une telle formule, la méthode des modules fictifs devient extrêmement simple.

Si les travées latérales étaient elles-mêmes comprimées sous des charges identiques, la contrainte de compression étant σ_1 il suffirait pour appliquer la formule (7) de prendre:

$$\alpha = \frac{l_1}{l} \frac{I}{I_1} \frac{E_s}{E_0} \chi_1 \quad \text{avec} \quad \chi_1 = \frac{1 - 0{,}371 \frac{\sigma_1}{\sigma'_{k1}}}{1 - \frac{\sigma_1}{\sigma'_{k1}}},$$

$$\sigma'_{k1} = \sigma_{k1} \frac{E_{s1}}{E}.$$

σ_{k1} contrainte critique d'Euler des travées latérales supposées bi-articulées, E_{s1} module fictif correspondant à σ_1 sur la courbe de la fig. 4.

Des investigations systématiques nous ont cependant permis de constater que l'application du module fictif aux barres d'un système qui ne flambent pas mais qui au contraire soutiennent la barre la plus sollicitée, donne pour la charge limite d'affaissement de cette dernière des résultats légèrement différents de ceux provenant de la méthode directe. L'erreur commise varie de 0 à $+5\%$, ce qui est admissible pour des problèmes de ce genre. D'ailleurs, il suffit de réduire la contrainte limite d'affaissement de 2,5% pour obtenir une approximation de $\pm 2{,}5\%$.

La méthode des modules fictifs a l'avantage de permettre l'emploi des équations classiques avec lesquelles les projeteurs sont familiarisés. Dans de nombreux cas, elle est plus simple que la méthode directe, surtout avec les formules simplifiées.

Par contre, pour les problèmes de flambement composé (pièces simultanément fléchies et comprimées), elle n'offre aucun avantage sur la méthode directe.

3. *Généralisation de la méthode des modules fictifs*

Il convient de remarquer que la méthode des modules fictifs permet, au même titre que la méthode directe, de calculer la contrainte et la déformation dans un système hyperstatique sous une charge quelconque. La courbe AB de la fig. 4 correspond en effet à une contrainte maximum au bord de la section médiane égale à la limite conventionnelle d'élasticité σ_F.

Mais on peut tracer une courbe analogue correspondant à une contrainte maximum σ_m, et qui représentera la variation $E'_s = f(\sigma)$ correspondant à la contrainte maximum σ_m (fig. 6).

Si l'on se sert de cette courbe AD au lieu de la courbe AB, pour l'application de la méthode des modules fictifs, on obtiendra la charge qui produit dans la poutre la contrainte maximum σ_m.

On pourra tracer autant de courbes analogues à AD que l'on voudra, chacune d'elles correspondant à une contrainte maximum déterminée, et les droites issues de 0 représentant les élancements, on obtient ainsi un abaque ayant l'allure de la fig. 7 qui permet de résoudre par la méthode des modules fictifs, tous les problèmes pouvant être résolus par la méthode directe.

Ce diagramme est fondamental car il concentre tous les renseignements nécessaires à tous les problèmes de flambement et permet la résolution d'un grand nombre de ces problèmes sans aucun calcul.

On pourra d'ailleurs combiner ce diagramme avec celui des formules simplifiées, et on pourra ainsi donner à certains problèmes complexes, des solutions simples.

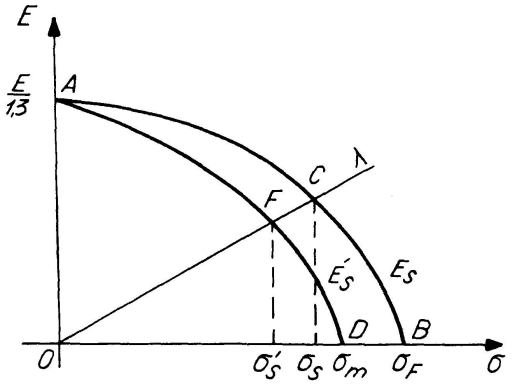


Fig. 6.

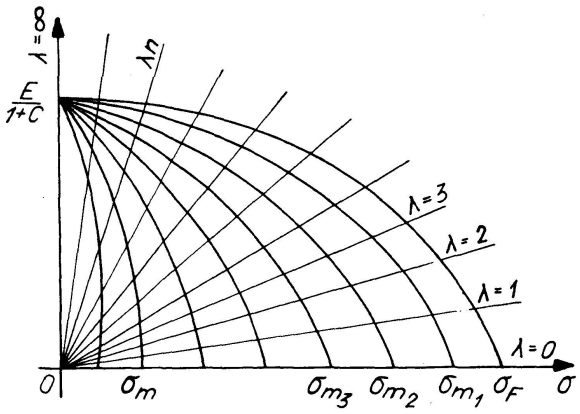


Fig. 7.

III. Application aux barres bi-articulées

1. Barres composées de membrures assemblées par treillis ou barrettes

Nous passons sous silence la facilité avec laquelle le diagramme (7) permet de résoudre à simple lecture, tous les problèmes relatifs aux barres prismatiques.

Cependant, son emploi est particulièrement intéressant dans le cas du calcul des barres à treillis ou barrettes, problème qui dans l'hypothèse de pièces idéalement parfaites, ne peut être résolu correctement.

Connaissant l'élancement λ_t du tronçon de membrure, le point de rencontre D de la droite représentant λ_t avec la courbe AB (relative à la contrainte maximum σ_F), donne sur sa verticale le point C qui correspond à la contrainte limite d'affaissement σ_{st}, du tronçon de membrure (fig. 8). On assimile alors la poutre à treillis à une poutre prismatique dont la limite conventionnelle d'élasticité serait σ_{st}.

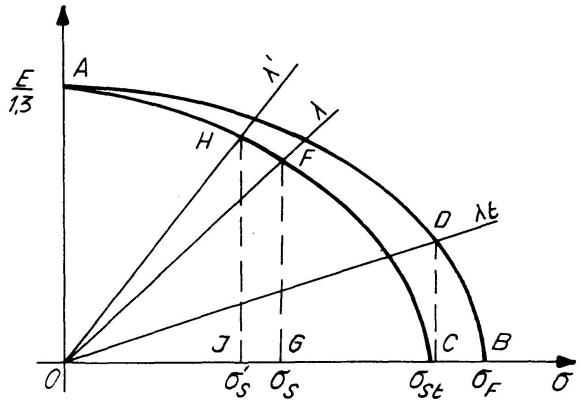


Fig. 8.

La courbe de base est donc AC. Le point de rencontre F de cette courbe avec la droite OF représentant l'élancement d'ensemble de la poutre à treillis, détermine en G la contrainte limite d'affaissement de la poutre à treillis.

Nous avons ainsi négligé la déformation complémentaire d'effort tranchant, ce qui d'ailleurs est admissible dans la plupart des barres à treillis.

Cependant, dans les poutres à barrettes, il est presque toujours nécessaire de prendre en compte cette déformation complémentaire. On calcule alors classiquement l'âme équivalente, qui conduit à un élancement fictif $\lambda' > \lambda$.

Le point de rencontre H de la courbe AC avec la droite OH représentant l'élancement λ', détermine alors en J, la contrainte limite d'affaissement σ_s' de la poutre, compte tenu de l'effort tranchant.

2. Barres prismatiques soumises à une compression excentrée

Il s'agit de problèmes de flambement composé, car le fléchissement se produit sous une charge quelconque, même dans l'hypothèse d'une pièce

idéalement parfaite. Dans cette hypothèse, on peut évidemment calculer la charge qui produit la contrainte maximum σ_F dans la poutre. Cependant, la difficulté commence quand il s'agit d'appliquer un coefficient de sécurité. Suivant la grandeur de l'excentricité, la sollicitation va du flambement simple à la flexion simple, le coefficient de sécurité devrait donc être variable de 2,5 à 1,5. Mais suivant quelle loi? Il est évident que sur ces bases ce problème ne peut être résolu correctement.

La prise en compte des imperfections par la méthode directe lui apporte une solution rationnelle sans que la difficulté soit augmentée.

1. Les excentricités sont de même signe:

Soit une barre AB de longueur l, soumise à une charge excentrée, les excentricités en A et B étant respectivement ϵ_A et ϵ_B. On sait que si l'on rapporte la déformée à deux axes de coordonnées tels que l'axe des abscisses

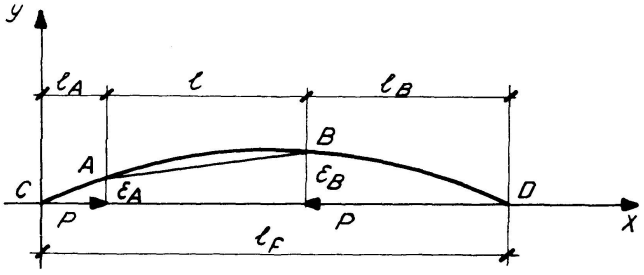


Fig. 9.

coïncide avec la ligne d'action de la charge, l'équation de la déformée est celle d'une demi-onde de sinusoïde de longueur l_f, soit:

$$y = f \sin \frac{\pi}{l_f} x.$$

La flèche s'exprime par:

$$f = c\,\sigma \frac{W}{P_{kf}} \frac{\sigma_{kf}}{\sigma_{kf} - \sigma(1+c)}.$$

On doit avoir: pour $x = A$ $y = \epsilon_A$

,, $x = B$ $y = \epsilon_B$

ce qui conduit toutes réductions faites aux deux équations:

$$\begin{aligned} \frac{c\,\sigma}{\sigma_{kf} - \sigma(1+c)} \sin \pi \frac{l_A}{l_f} &= m_A, \\ \frac{c\,\sigma}{\sigma_{kf} - \sigma(1+c)} \sin \pi \frac{l_B}{l_f} &= m_B, \end{aligned} \tag{8}$$

qui avec: $$l_A + l_B + l = l_f$$

permettent de déterminer l_f pour une valeur quelconque σ de la contrainte de compression.

m_A et m_B sont les coefficients d'excentricité,

$$m_A = \frac{\epsilon_A V}{\rho^2}, \qquad m_B = \frac{\epsilon_B V}{\rho^2}$$

ou encore:

$$m_A = \frac{\sigma_{fA}}{\sigma}, \qquad m_B = \frac{\sigma_{fB}}{\sigma}, \qquad \sigma_{fA} \text{ et } \sigma_{fB}$$

étant les contraintes de flexion en A et B.

Connaissant l_f on connaît la déformation et la contrainte en tous points de la demi-onde de sinusoïde, et en particulier sur la partie de longueur l qui correspond à la barre $A\,B$.

Cas particulier où les deux excentricités sont égales: Les deux équations (8) se réduisent à une seule,

$$\frac{c\,\sigma}{\sigma_{kf} - \sigma\,(1+c)} \sin \pi \frac{l_f - l}{2\,l_f} = m. \tag{9}$$

Dans ce cas particulier, la contrainte maximum σ_m se produit toujours au milieu de la barre, et on peut la calculer directement par une formule approchée:

$$\sigma_m = \sigma\,(k + m\,\chi) \tag{10}$$

dans laquelle:

$$k = \frac{\mu - 1}{\mu - (1+c)}, \qquad \mu = \frac{\sigma_k}{\sigma}, \qquad \chi = \frac{1 + 0{,}274 \frac{\sigma\,(1+c)}{\sigma_k}}{1 - \frac{\sigma\,(1+c)}{\sigma_k}}$$

pour l'acier on prend $c = 0{,}3$.

Cette formule simplifiée donne des résultats en très bonne concordance avec l'équation (9).

Cas particulier ou l'une des excentricités est nulle: Les équations se réduisent encore à une seule:

$$\frac{c\,\sigma}{\sigma_{kf} - \sigma\,(1+c)} \sin \pi \frac{l - l_f}{l_f} = m. \tag{11}$$

2. Les deux excentricités sont de signes contraires:

On aboutit de la même façon aux deux équations:

$$\begin{aligned} \frac{c\,\sigma}{\sigma_{kf} - \sigma\,(1+c)} \sin \pi \frac{l_A}{l_f} &= m_A, \\ \frac{c\,\sigma}{\sigma_{kf} - \sigma\,(1+c)} \sin \pi \frac{l_B}{l_f} &= m_B, \end{aligned} \tag{12}$$

qui avec:

$$l_A + l_B = l$$

permettent de déterminer les trois inconnues l_A, l_B, l_f.

On connaît alors la déformation et la contrainte en chaque point de la barre.

Applications numériques: On a considéré 3 barres d'élancement 80, dont les schémas sont donnés ci-dessous, et on a calculé la contrainte limite d'affaissement σ_s par les formules qui précèdent, et la contrainte de ruine σ_r dans l'hypothèse de barres idéalement parfaites. Etant donné que les excentricités sont très petites, on a calculé dans ce dernier cas la contrainte admissible avec le coefficient de sécurité 2,5.

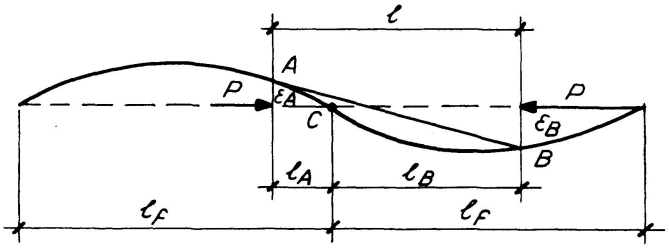
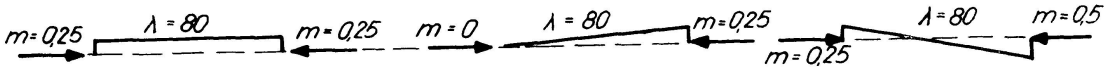


Fig. 10.



$$\sigma_s = 12{,}95, \qquad \sigma_s = 14{,}35, \qquad \sigma_s = 13{,}96,$$

$$\sigma_r = 15{,}52, \qquad \sigma_r = 17{,}85, \qquad \sigma_r = 16,$$

$$\frac{12{,}95}{1{,}5} = 8{,}65, \qquad \frac{14{,}35}{1{,}5} = 9{,}55, \qquad \frac{13{,}96}{1{,}5} = 9{,}3,$$

$$\frac{15{,}52}{2{,}5} = 6{,}22, \qquad \frac{17{,}85}{2{,}5} = 7{,}15, \qquad \frac{16}{2{,}5} = 6{,}4.$$

Les contraintes admissibles obtenues en prenant en compte les imperfections, sont supérieures à celles qui correspondent aux barres idéalement parfaites, respectivement de 39%, 34%, et 45%.

3. *Barres à inertie variable*

Considérons le cas le plus simple et le plus courant d'une poutre symétrique à un étage d'inertie (fig. 11), soumise à une charge axiale P.

La méthode directe permet la détermination de la déformation et de la contrainte en tous points de la poutre, pour une valeur quelconque de P.

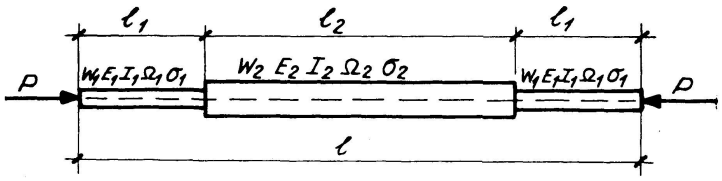


Fig. 11.

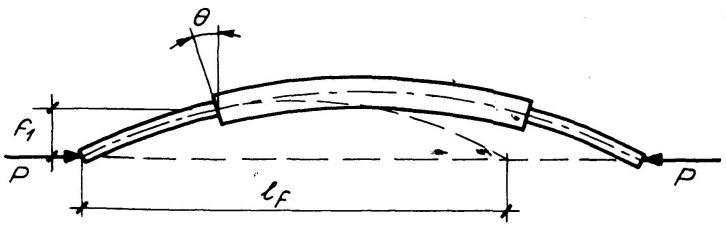


Fig. 12.

Les tronçons extrêmes étant soumis à une charge axiale ont une déformée sinusoïdale, suivant une demi-onde de longueur l_f. Dès qu'on connaît l_f, le problème est résolu, car on connaît alors le moment au changement de section et le tronçon central est fléchi et comprimé, problème connu.

Pour déterminer l_f, on écrit que les rotations des deux tronçons au changement de section sont égales.

Tronçons extrêmes

$$\vartheta_1 = \frac{\pi}{l_f} c\, \sigma_1 \chi_{of} \frac{W_1}{P_{kf}} \cos \pi \frac{l_1}{l_f},$$

$$\sigma_1 = \frac{P}{\Omega_1}, \qquad \chi_{of} = \frac{\sigma_{kf}}{\sigma_{kf} - \sigma(1+c)}.$$

Tronçon central

$$\vartheta_2 = \frac{M\, l_2 (1+c)}{2\, E\, I_2} \chi_2 + \frac{\pi}{l_2} c\, \sigma_2 \chi_{o2} \frac{W_2}{P_{\chi 2}},$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{\Omega_2}, \qquad \chi_{o2} = \frac{\sigma_{k2}}{\sigma_{k2} - \sigma_2 (1+c)},$$

$$\chi_2 = \frac{1 - 0{,}178 \frac{\sigma_2 (1+c)}{\sigma_{k2}}}{1 - \frac{\sigma_2 (1+c)}{\sigma_{k2}}}.$$

M moment au changement de section.

Si f_1 est la flèche au changement de section: $M = P f_1$

$$f_1 = c\, \sigma_1 \frac{W_1}{P_{kf}} \chi_{of} \sin \pi \frac{l_1}{l_f}.$$

Toutes réductions faites et en écrivant que $\vartheta_1 = \vartheta_2$ on aboutit à l'équation:

$$\frac{\pi \frac{l_1}{l_f}}{\operatorname{tg} \pi \frac{l_1}{l_f}} = \frac{\pi \frac{l_1}{l_f}}{\sin \pi \frac{l_1}{l_f}} \frac{l_2}{l_f} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \frac{\chi_{o2}}{\chi_{of}} \frac{I_1}{I_2} \frac{W_2}{W_1} + \frac{\pi^2 (1+c)}{2} \frac{l_1}{l_2} \frac{\sigma_2}{\sigma_{k2}} \chi_2. \tag{13}$$

χ_{02}, χ_{0f}, χ_2 ayant les valeurs données ci-dessus.

Cette équation permet de déterminer l_f pour une valeur quelconque de la charge P, et le problème est alors complètement résolu.

Il y a pratiquement deux sections qui demandent une vérification. On peut faire cette vérification au moyen d'inégalités analogues à celles posées dans les Règles CM 56 pour une barre à section constante. On aboutit à:

a) *Vérification au changement de section:*

$$\sigma_1 + \sigma_1 (k_1 - 1) \sin \pi \frac{l_1}{l_f} \leqq R. \tag{14}$$

R contrainte admissible

$$k_1 = \frac{\mu_1 - 1}{\mu_1 - 1{,}3}, \qquad \mu_1 = \frac{\sigma_{kf}}{\nu\,\sigma_1},$$

ν coefficient de sécurité: 1,5 sans vent, 1,33 avec vent.

b) *Vérification de la section médiane:*

$$\sigma_2 k_2 + \chi_2 \frac{W_1}{W_2} \sigma_1 (k_1 - 1) \sin \pi \frac{l_1}{l_f} \leqq R, \tag{15}$$

$$k_2 = \frac{\mu_2 - 1}{\mu_2 - 1{,}3}, \qquad \mu_2 = \frac{\sigma_{k2}}{\nu\,\sigma_2}, \qquad \chi_2 = \frac{\mu_2 + 0{,}356}{\mu_2 - 1{,}3}.$$

Méthode des modules fictifs: Elle permet de déterminer la charge limite d'affaissement, soit par les formules classiques relatives aux pièces idéalement parfaites, soit par la formule simplifiée. Cette dernière donne la valeur de l_f par:

$$l_f = 2\,l_1 \sqrt{1 + 0{,}8\,\alpha} \tag{16}$$

avec

$$\alpha = \frac{3}{2} \frac{l_2}{l_1} \frac{E_{s1}}{E_{s2}} \frac{I_1}{I_2}, \qquad \chi = \frac{1 - 0{,}178 \frac{\sigma_2}{\sigma'_{k2}}}{1 - \frac{\sigma_2}{\sigma'_{k2}}}.$$

E_{s1} et E_{s2} sont les modules fictifs pris sur la courbe de la fig. 7.

On se donne une valeur de σ_s, on connaît E_{s1}, E_{s2}, χ, ce qui permet de calculer α et l_f. La valeur essayée σ_s est valable quand elle représente la contrainte limite d'affaissement qui correspond à l_f, pour une barre bi-articulée. La valeur de σ_s ainsi trouvée, doit être réduite de 2,5%. Elle dispense de la vérification des sections.

Application numérique: acier 37

l = 650 cm	I_1 = 2140 cm^4	I_2 = 5366 cm^4
l_1 = 130 cm	Ω_1 = 8270 mm^2	Ω_2 = 14990 mm^2
l_2 = 390 cm	ρ_1 = 5,08 cm	ρ_2 = 6 cm
	W_1 = 214 cm^3	W_2 = 447 cm^3

On demande la charge limite admissible P_a (sans vent).

Méthode directe: Avec $\sigma_1 = 16{,}2$, d'où $\sigma_2 = 8{,}95$, l'équation (13) s'écrit

$$\frac{\pi \frac{l_1}{l_f}}{\operatorname{tg} \pi \frac{l_1}{l_f}} = \frac{\pi \frac{l_1}{l_f}}{\sin \pi \frac{l_1}{l_f}} + \frac{2{,}35}{l_f \chi_{of}} + 0{,}49.$$

La solution est $l_f = 426$ cm correspondant à $\lambda_f = 84$.

La vérification par les formules (14) et (15) donne les contraintes maxima suivantes:

Changement de section	24,01 kg/mm^2
Section médiane	14,9 kg/mm^2

donc $$P_s = 16{,}2 \times 8270 = 134\,000 \text{ kg},$$

et $$P_a = \frac{134\,000}{1{,}5} = \underline{89\,500 \text{ kg}}.$$

Méthode des modules fictifs: L'application des formules simplifiées (16) donne $\sigma_s = 16{,}7$ soit avec réduction de 2,5%: 16,25.

$$P_s = 16{,}25 \times 8270 = 134\,100 \text{ kg},$$

$$P_a = \frac{134\,100}{1{,}5} = \underline{89\,500 \text{ kg}}$$

valeur égale à la précédente.

La méthode des modules fictifs est ici nettement plus simple que la méthode directe. Cependant, la méthode directe permet de déterminer les proportions de la barre, pour une meilleure utilisation du métal.

Pièce idéalement parfaite: Par la méthode classique avec le module réduit, on trouve:

$$P_{cr} = 185\,000 \text{ kg}$$

et $$P_a = \frac{185\,000}{2{,}5} = \underline{74\,000 \text{ kg}}.$$

La valeur obtenue ci-dessus lui est supérieure de 21%.

IV. Application aux systèmes hyperstatiques dont les nœuds sont fixés

1. Poutres continues sur appuis rigides

Il s'agit de déterminer la contrainte limite admissible dans la travée la plus sollicitée. Dans le cas le plus général, cette travée est une poutre à encastrements élastiques dissymétriques.

La méthode directe permet la résolution complète du problème, mais avec un volume de calcul assez important. La méthode des modules fictifs permet d'arriver au résultat plus simplement.

On peut opérer alors de deux façons, soit par les équations classiques, soit par la formule simplifiée. Cette dernière est de beaucoup la plus rapide.

Soit $A\,B$ la barre la plus sollicitée de la poutre continue. A gauche du point A, la barre $A\,B$ est liée à une poutre continue d'un certain nombres de travées dont certaines peuvent être comprimées. Nous désignons cette poutre par le système (I) (fig. 13).

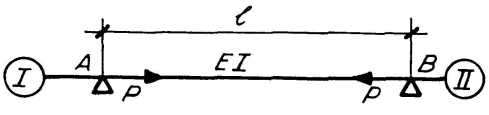


Fig. 13.

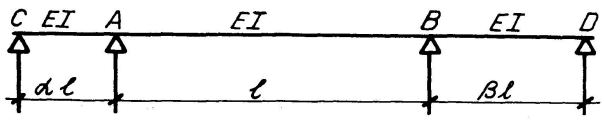


Fig. 14.

De même, à droite de B, la poutre $A\,B$ est liée à un système (II).

Du point de vue de l'encastrement élastique en A, on peut assimiler le système (I) à un prolongement de la poutre $A\,B$ sur une longueur αl (fig. 14). De même, le système (II) s'assimile à un prolongement de la poutre $A\,B$ sur une longueur βl.

Si ϑ_1 est la souplesse en A du système (I) et ϑ_2 la souplesse en B du système (II), on calcule α et β par:

$$\frac{\alpha l}{3\,E\,I} = \vartheta_1, \qquad \frac{\beta l}{3\,E\,I} = \vartheta_2.$$

Les formules simplifiées (voir annexe I), permettent alors d'obtenir très simplement la longueur de flambement.

Dans le cas de dissymétrie, la simplification est considérable car par la méthode classique, on arrive à deux équations simultanées, très pénibles à résoudre.

Exemples d'application:

1. Poutre fig. 1 (introduction). Cette poutre constitue un cas particulier qu'on résout facilement comme nous l'avons indiqué. Il s'agit ici simplement de montrer que la méthode des modules fictifs aboutit bien au même résultat.

La longueur de flambement est donnée par:

$$l_f = l\frac{1+1{,}66\,\alpha}{2+1{,}66\,\alpha}.$$

La souplesse en B et C des poutres latérales est:

$$\vartheta = \frac{l}{3\,E_{s1}\,I}\;\chi_1,$$

avec
$$\chi_1 = \frac{1-0{,}371\frac{\sigma_1}{\sigma'_k}}{1-\frac{\sigma_1}{\sigma'_k}}, \qquad \sigma'_k = \sigma_k\frac{E_{s1}}{E}.$$

Pour calculer α on pose:

$$\frac{\alpha l}{3\,E_s\,I} = \frac{l}{3\,E_{s1}\,I}\chi_1$$

d'où:
$$\alpha = \frac{E_s}{E_{s1}}\chi_1.$$

Les trois travées étant soumises à la même contrainte 8,97, leur module fictif pris sur la courbe (Annexe II) est le même, soit $E_s = 14\,200$. La contrainte critique d'Euler pour l'élancement 125 est $\sigma_k = 13{,}27$, d'où

$$\sigma'_k = 13{,}27 \times \frac{14\,300}{21\,000} = 8{,}97,$$

donc $\frac{\sigma_1}{\sigma'_k} = 1$ et $\chi_1 = \infty$ d'où il résulte $\alpha = \infty$

et $l_f = l$. Ce qui correspond bien au résultat donné dans l'introduction.

2. Quatre poutres continues à moment d'inertie constant, mais à section variable: Les quatres poutres étudiées en acier 37 sont conformes à la fig. 15.

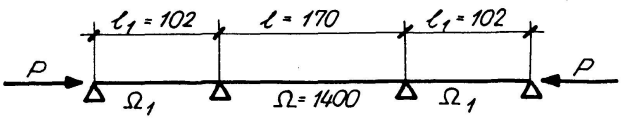


Fig. 15.

Le moment d'inertie constant est le même pour les 4 poutres: $I = 30$ cm^4. La section de la travée centrale est la même pour les 4 poutres $\Omega = 1400$ mm^2. Seule la section Ω_1 des travées latérales est variable d'une poutre à l'autre:

Poutre I $\Omega_1 = 1700$ mm^2	*Poutre III* $\Omega_1 = 1000$ mm^2
Poutre II $\Omega_1 = 1400$ mm^2	*Poutre IV* $\Omega_1 = 700$ mm^2

La poutre est soumise à une charge axiale P à ses deux extrémités. On demande la charge limite admissible pour chaque poutre (sans intervention du vent).

Méthode des modules fictifs: Nous donnerons, à titre d'exemple, le calcul relatif à la poutre I.

Essayons $\sigma = 15{,}4, \qquad \sigma_1 = 15{,}4 \times \frac{16}{17} = 12{,}7.$

A ces deux contraintes, correspondent les modules

$$E_s = 11\,500, \qquad E_{s1} = 12\,800 \quad \text{(voir Annexe II)}.$$

L'élancement de la travée latérale étant 76,7

$$\sigma_{k1} = 35{,}4,$$

$$\sigma'_{k1} = 35{,}4 \times \frac{12\,800}{21\,000} = 21{,}6,$$

$$\chi = \frac{1 - 0{,}371 \frac{12{,}7}{21{,}6}}{1 - \frac{12{,}7}{21{,}6}} = 1{,}9, \qquad \alpha = \frac{l_1}{l} \frac{E_s}{E_{s1}} = 0{,}6 \times \frac{11{,}5}{12{,}8} \times 1{,}9 = 1{,}022,$$

$$l_f = l \frac{1 + 1{,}66\,\alpha}{2 + 1{,}66\,\alpha} = 0{,}73, \qquad l_f = 170 \times 0{,}73 = 124 \text{ cm},$$

$$\lambda_f = \frac{124}{1{,}66} = 85.$$

A cette valeur de l'élancement correspond bien une contrainte limite d'affaissement $\sigma_s = 15{,}4$.

La charge limite d'affaissement est donc:

$$P_s = 15{,}4 \times 1400 = \underline{21\,600 \text{ kg}}$$

et la charge limite admissible est:

$$\frac{21{,}6\,t \times 0{,}975}{1{,}5} = \underline{14{,}05\,\mathrm{t}}.$$

Nous donnons ci-après les résultats pour les 4 poutres:

Poutre I: $P_s = 21{,}6\ \mathrm{t}$, $P_a = \dfrac{21{,}6 \times 0{,}975}{1{,}5} = \underline{14{,}05\,\mathrm{t}}$.

Poutre II: $P_s = 20{,}85\,\mathrm{t}$, $P_a = \dfrac{20{,}85 \times 0{,}975}{1{,}5} = \underline{13{,}55\,\mathrm{t}}$.

Poutre III: $P_s = 18{,}6\ \mathrm{t}$, $P_a = \dfrac{18{,}6 \times 0{,}975}{1{,}5} = \underline{12{,}10\,\mathrm{t}}$.

Poutre IV: $P_s = 15{,}15\,\mathrm{t}$, $P_a = \dfrac{15{,}15 \times 0{,}975}{1{,}5} = \underline{9{,}85\,\mathrm{t}}$.

Pièces idéalement parfaites: Nous avons fait le calcul de ces mêmes poutres par la méthode classique, avec une loi de variation du module réduit,

$$E' = E\,H, \qquad \frac{1}{H} = 0{,}5 + \frac{0{,}5\,(\sigma_F - \sigma_p)}{\sqrt{(\sigma_F - \sigma_p)^2 - (\sigma - \sigma_F)^2}}.$$

Quant au coefficient de sécurité, si on en applique la loi

$$\nu = 1{,}5 + (2{,}5 - 1{,}5)\left(\frac{\lambda_f}{103{,}8}\right)^2$$

on aboutit aux résultats suivants:

Poutre I: $P_k = 31{,}64\,\mathrm{t}$, $P_a = \dfrac{31{,}64}{2{,}073} = 15{,}3\ \mathrm{t}$.

Poutre II: $P_k = 30{,}8\ \mathrm{t}$, $P_a = \dfrac{30{,}8}{2{,}182} = 14{,}75\,\mathrm{t}$.

Poutre III: $P_k = 23{,}4\ \mathrm{t}$, $P_a = \dfrac{23{,}4}{2{,}5} = 9{,}36\,\mathrm{t}$.

Poutre IV: $P_k = 16{,}66\,\mathrm{t}$, $P_a = \dfrac{16{,}66}{1{,}685} = 9{,}9\ \mathrm{t}$.

La fig. 16 donne la variation de la charge admissible en fonction du rapport des sections Ω/Ω_1. Le trait plein correspond à la méthode du module fictif, on remarque la décroissance régulière à mesure que la section des travées latérales décroît. Le trait pointillé est relatif à la méthode classique, on constate une variation désordonnée, et l'anomalie suivante: la charge admissible de la poutre IV est supérieure à celle de la poutre III, alors que sa section dans les travées latérales est moindre. C'est un exemple de l'incohérence de la sécurité à laquelle conduit l'hypothèse des pièces idéalement parfaites.

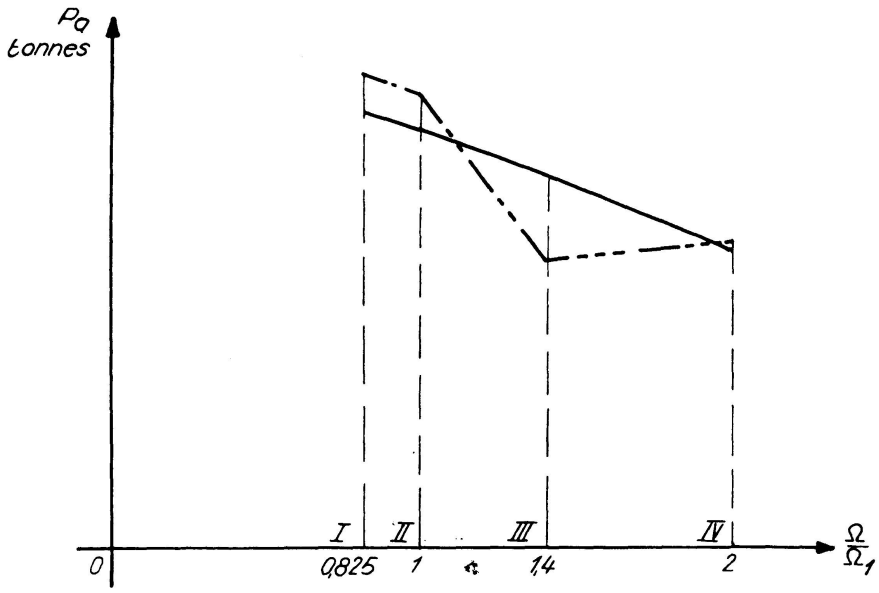


Fig. 16.

2. Systèmes triangulés

Les systèmes triangulés à nœuds rigides (poutres à treillis, fermes, etc. ...), peuvent se classer dans les systèmes à nœuds fixes. Si en effet leurs nœuds subissent un certain déplacement dans la déformation, il n'en résulte cependant que des effets secondaires. La méthode des modules fictifs, avec les formules simplifiées, s'appliquera alors très simplement pour déterminer la contrainte limite d'affaissement de la barre la plus sollicitée, compte tenu de ses encastrements élastiques. Pour les barres tendues liées à la barre étudiée, il sera suffisamment exact de porter comme module fictif:

$$E\left(0{,}77+\frac{\sigma}{\sigma_k}\right),$$

σ étant la contrainte de traction dans la barre,
σ_k la contrainte critique d'Euler de la barre supposée bi-articulée.

V. Application aux systèmes dont les nœuds subissent un déplacement

1. Béquille

Méthode directe: Proposons-nous de déterminer la longueur de flambement h_g sous une charge quelconque P appliquée à la béquille de la fig. 17.

Rapportée aux coordonnées $0x$ et $0y$ l'équation de la déformée est:

$$y = f \sin \pi \frac{x}{h_f},$$

h_f étant la longueur de flambement représentée fig. 18.

L'angle de rotation ϑ en B est donné par:

$$\vartheta = \frac{\pi}{h_f} f \cos \pi \frac{h}{h_f}.$$

Par ailleurs, si M est la valeur du moment en B, la relation φ en B de la traverse est:

$$\varphi = \frac{M b (1+c)}{3 E I_1}.$$

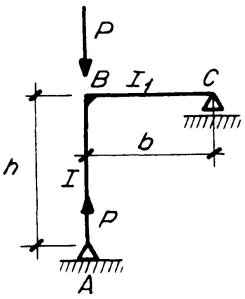


Fig. 17.

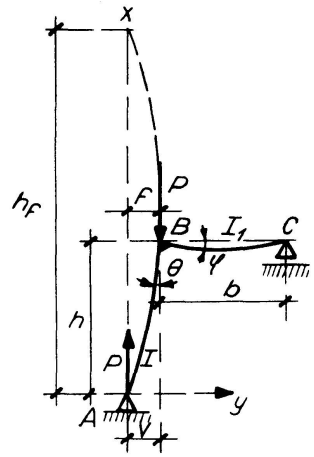


Fig. 18.

On doit avoir $\vartheta = \varphi$, en écrivant cette égalité et toutes réductions faites, on aboutit à l'équation:

$$\frac{\pi \frac{h}{h_f}}{\operatorname{tg} \pi \frac{h}{h_f}} = \frac{\pi^2}{3} \frac{b h}{h_f^2 f} \frac{I}{I_1} \frac{\sigma (1+c)}{\sigma_{kf}}, \tag{17}$$

σ contrainte de compression dans le poteau $\sigma = P/\Omega$,
σ_{kf} contrainte critique d'Euler correspondant à h_f.

L'équation (17) permet de calculer h_f pour une valeur quelconque de P. Une fois h_f connu, on connaît la déformation et la contrainte en tous points de la demi-onde de sinusoïde de longueur h_f et en particulier sur la hauteur du poteau.

Méthode des modules fictifs avec formule simplifiée. On détermine α par l'équation $\frac{\alpha h}{3 E_s I} = \frac{b}{3 E_0 I_1}$

$$\alpha = \frac{b}{h} \frac{I}{I_1} \frac{E_s}{E_0},$$

la longueur de flambement h_f est alors donnée par:

$$h_f = 2 h \sqrt{1 + 0{,}8 \alpha}.$$

Cette équation donne directement la contrainte limite d'affaissement. On essaie une valeur de σ_s, on connaît alors E_s on peut calculer α et h_f. La valeur

de σ_s essayée est valable quand elle est égale à la contrainte limite d'affaissement correspondant à la longueur h_f ainsi calculée.

2. *Béquille dont la tête est liée à un appui élastique*

La constante du ressort qui s'oppose au déplacement latéral du point B est:

$$\Delta = \frac{R}{v},$$

R étant l'effort correspondant au déplacement v.

La méthode directe permet de déterminer la longueur de flambement h_f correspondant à une charge P quelconque.

1. *Lorsque* $P > \Delta h$ on aboutit à l'équation:

$$\frac{\pi \frac{h}{h_f}}{\operatorname{tg} \pi \frac{h}{h_f}} = \frac{\pi^2}{3} \frac{b h}{h_f^2} \frac{I}{I_1} \frac{\sigma (1+c)}{\sigma_{kf}} - \frac{\Delta h}{P - \Delta h}. \tag{18}$$

La déformée est représentée fig. 20. La longueur de flambement est toujours $> h$.

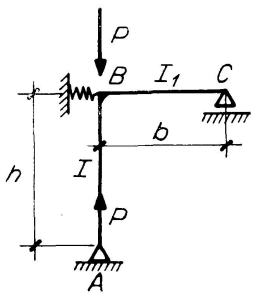


Fig. 19.

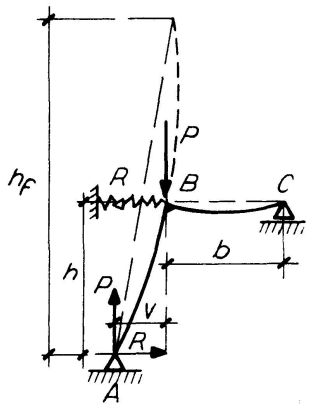


Fig. 20.

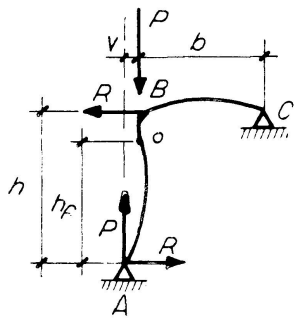


Fig. 21.

2. *Lorsque* $P < \Delta h$ l'équation est:

$$\frac{\pi \frac{h}{h_f}}{\operatorname{tg} \pi \frac{h - h_f}{h_f}} = \frac{\pi^2}{3} \frac{b h}{h_f^2} \frac{I}{I_1} \frac{\sigma (1+c)}{\sigma_{kf}} + \frac{\Delta h}{\Delta h - P}. \tag{19}$$

La déformée est représentée fig. 21, on a ici toujours $h_f < h$.

3. *Cas limite:* $P = \Delta h$. Pour $P = \Delta h$ le 2e membre de l'équation (19) devient infini, alors la plus petite solution est: $h_f = h$.

Le point d'inflexion 0 coïncide avec B.

Dans le cas d'une pièce idéalement parfaite, il suffit de substituer

$$\frac{E'}{E} \quad \text{à} \quad \frac{\sigma(1+c)}{\sigma_{kf}}$$

dans les équations (18) et (19).

Si on emploie la méthode des modules fictifs, il suffit de substituer

$$\frac{E_s}{E_0} \quad \text{à} \quad \frac{\sigma(1+c)}{\sigma_{kf}}$$

dans les mêmes équations.

La méthode des modules fictifs n'offre donc pas d'avantage marqué sur la méthode directe, qui elle-même n'est pas plus compliquée que la méthode classique.

3. Portique dont un seul poteau est chargé

Il s'agit de déterminer la charge limite d'affaissement du portique fig. 22.

Quoique la méthode directe puisse résoudre ce problème, il est cependant plus simple d'appliquer la méthode des modules fictifs qui permet l'emploi des équations classiques sous une forme commode, notamment avec l'emploi de la fonction:

$$\psi_{(u)} = \frac{3}{2u}\left(\frac{1}{2u} - \frac{1}{\operatorname{tg} 2u}\right)$$

dont la valeur est donnée par les tables en fonction de $2u$.

La contrainte limite d'affaissement P_s du portique représenté sur les figures 22 et 23 est alors déterminée par l'équation:

$$2\psi_{(u)} + 3\frac{E_s}{E_0}\frac{I_1}{I}\frac{b}{h} = \frac{\dfrac{\Delta h}{P'_{k1}}\left(2\dfrac{E_s}{E_0}\dfrac{I_1}{I_2} + 3\dfrac{E_s}{E_0}\dfrac{I_1}{I}\dfrac{b}{h}\right)}{\dfrac{P_s}{P'_{k1}} - \dfrac{\Delta h}{P'_{k1}}} \tag{20}$$

avec

$$\frac{\Delta h}{P'_{k1}} = \frac{\dfrac{6}{\pi^2}\dfrac{E_0}{E_s}\dfrac{I}{I_1}\dfrac{h}{b} + \dfrac{P_s}{P'_{k1}}}{2\dfrac{I}{I_2}\dfrac{h}{b} + 3} \quad \text{et} \quad P'_{k1} = \frac{\pi^2 E_s I_1}{h^2}.$$

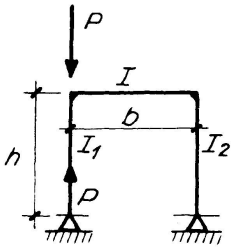


Fig. 22.

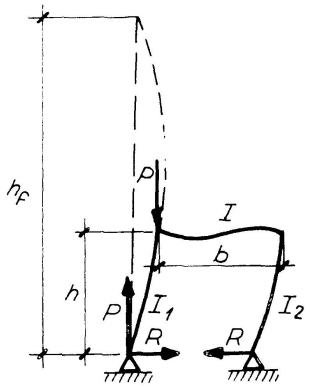


Fig. 23.

On essaye une valeur de P_s, on connaît alors E_s module fictif du poteau comprimé, et on peut calculer $\psi_{(u)}$ par (20). On calcul ensuite $2u = \pi\sqrt{P_s/P_{k1}}$

et on trouve sur la table la valeur $\psi'_{(u)}$ qui lui correspond. Pour que la valeur de P_s essayée soit bonne, il faut que $\psi_{(u)} = \psi'_{(u)}$.

En supposant $I = I_1 = I_2$ et $b = h$, l'équation (20) se simplifie et devient:

$$\psi_{(u)} + 1{,}5 \frac{E_s}{E_0} = \frac{1{,}52 + 2{,}5 \dfrac{P_s}{P'_{k1}} \dfrac{E_s}{E_0}}{4 \dfrac{P_s}{P'_{k1}} - 0{,}608 \dfrac{E_0}{E_s}}. \tag{21}$$

Exemple numérique:

$I = I_1 = I_2 = 2140$ cm^4.

$\Omega = 8270$ mm^2, $W = 214$, $\rho = 5{,}08$ cm, $h = b = 650$ cm.

Elancement du poteau $\frac{650}{5{,}08} = 128$, $\sigma_{k1} = 12{,}65$.

$P_{k1} = 12{,}65 \times 8270 = 105\,000$ kg.

On essaye $P_s = 28\,900$ kg, d'où $E_s = 15\,500$, $E_0 = 16\,200$.

$P'_{k1} = 105\,000 \times \frac{15{,}5}{21} = 77\,500$ kg, $\qquad \frac{P_s}{P'_{k1}} = 0{,}373$.

L'équation (21) donne $\psi_{(u)} = 1{,}39$.

$2u = \pi \sqrt{0{,}373} = 1{,}92$ sur la table on trouve $\psi'_{(u)} = 1{,}383$ valeur suffisamment voisine de $\psi_{(u)}$.

La charge limite d'affaissement est donc:

$$P_s = 28\,900 \times 0{,}975 = \underline{28\,200 \text{ kg}}.$$

Dans l'hypothèse d'une pièce idéalement parfaite, on trouverait avec les mêmes calculs:

$$P_{cr} = \underline{38\,000 \text{ kg}}.$$

Dans le premier cas, la charge limite admissible

$$P_a = \frac{28\,200}{1{,}5} = \underline{18\,800 \text{ kg}}.$$

Dans le second cas:

$$P_a = \frac{38\,000}{2{,}5} = \underline{15\,200 \text{ kg}}.$$

La précédente lui est supérieure de: 24%.

4. Poutres continues dont certains appuis sont élastiques

Soit une poutre sur trois appuis (fig. 24) à travées égales, dont les 2 appuis extrêmes sont rigides et l'appui central élastique. Il s'agit de déterminer la contrainte maximum correspondant à la charge P.

La méthode directe donne une solution simple, l'équation donnant la longueur de flambement

$$-\frac{\pi \frac{l}{l_f}}{\operatorname{tg} \pi \frac{l}{l_f}} = \frac{\frac{\Delta l}{2}}{P - \frac{\Delta l}{2}}. \tag{22}$$

Pour $P \leqq \frac{\Delta l}{2}$ équilibre suivant deux demi-ondes de sinusoïde, moment nul en B, $l_f = l$.

Pour $P > \frac{\Delta l}{2}$ équilibre suivant deux portions de demi-ondes tangentes en B sur l'horizontale: $l < l_f < 2\,l$.

Pour $\Delta = 0$, $l_f = 2\,l$.

Exemple d'application: La poutre représentée fig. 24 en acier 37 étant soumise à une charge axiale $P = 155\,000$ kg, on demande quelle est la section la plus sollicitée, et la contrainte maximum dans cette section.

$$\Omega = 11\,300 \text{ mm}^2, \quad \rho = 3{,}13 \text{ cm}, \quad I = 1160 \text{ cm}^4, \quad W = 149 \text{ cm}^3,$$

$$l = 250{,}4 \text{ cm} \quad \text{élancement} \quad \lambda = 80,$$

$$\frac{\Delta l}{2} = \frac{100\,000 \times 2{,}504}{2} = 125\,000 \text{ kg} \quad \text{donc} \quad P > \frac{\Delta l}{2}.$$

La forme d'équilibre est donc celle représentée sur la fig. 25. L'équation (22) donne comme solution

$$\frac{l}{l_f} = 0{,}825 \text{ ce qui correspond à un élancement}$$

$$\frac{80}{0{,}825} = 97.$$

Or, pour cet élancement, la charge $P = 155\,000$ kg est la charge limite d'affaissement, ce qui signifie que la contrainte maximum dans la poutre est 24 kg/mm².

Et puisque $$l_f = \frac{2{,}504}{0{,}825} = 3{,}04 \text{ mètres}$$

la section dangereuse se trouve à une distance des appuis rigides de:

$$\frac{3{,}04}{2} = 1{,}52 \text{ mètres}.$$

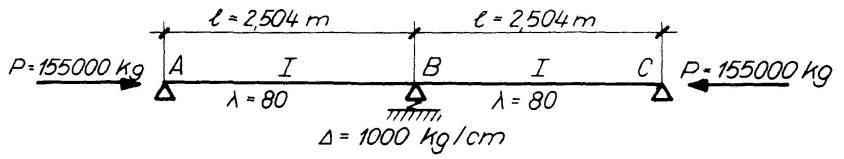


Fig. 24.

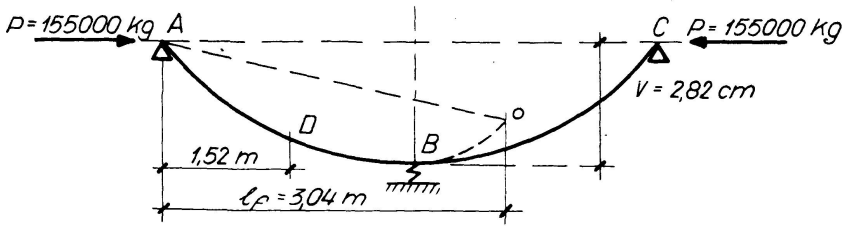


Fig. 25.

Dans l'hypothèse d'une poutre idéalement parfaite, on trouve $P = 195\,000$ kg, qui correspond à un élancement 112 (au lieu de 97).

Les charges limites sont donc respectivement, avec prise en compte des imperfections:

$$P_a = \frac{155\,000}{1{,}5} = 103\,400 \text{ kg}$$

sans imperfections:

$$P'_a = \frac{195\,000}{2{,}5} = 78\,000 \text{ kg}$$

la précédente lui est supérieure de: 32,5%.

VI. Conclusion

La notion d'encastrement, telle qu'on la conçoit dans un système supposé idéalement parfait, est profondément perturbée par les imperfections inévitables des systèmes réels.

Le fléchissement progressif des barres constitutives sous une charge croissante, entraîne des rotations aux nœuds, dont il est bien connu que même apparemment très faibles, elles ont cependant des conséquences importantes sur les moments d'encastrement.

Ce fléchissement progressif est un fait expérimental, et il est impossible en le négligeant, d'aboutir à une solution correcte.

Considérons par exemple un profilé HE 32 de 15,75 m de longueur, présentant ainsi l'élancement 207,6 envisagé dans l'un des exemples de l'Introduction. La contrainte critique d'Euler est de 4,83 kg/mm^2.

Même si l'on suppose cette barre idéalement parfaite, il faut qu'elle fléchisse avant de se ruiner. On calcule facilement que sous la contrainte 4,83, cette flèche doit être de 0,153 m avant que la limite élastique apparaisse au bord des ailes.

Les imperfections agissant dans le même sens qu'une diminution de raideur, la flèche de la pièce réelle sera plus grande. Par les Règles CM 56, on calcule une flèche limite de 0,222 m sous la contrainte limite d'affaissement 3,56 kg/mm^2.

Mais cette flèche apparaît progressivement à mesure que la charge croît en partant de 0. Admettre que sous une contrainte 3,56 qui est environ les $^3/_4$ de la contrainte critique d'Euler, la barre reste rigoureusement rectiligne, est donc une hypothèse en complète contradiction avec l'expérience.

Il en résulte que si l'on veut s'en tenir dans la zone élastique, à un coefficient de sécurité unique, il faut que ce coefficient soit très élevé, si l'on veut être certain de la sécurité dans tous les cas.

On a fait des progrès en Résistance des Matériaux du jour où l'on a considéré la limite d'élasticité conventionnelle comme critère de ruine, aux lieu et place de la limite de rupture.

On avait encore cependant le choix entre deux méthodes, soit considérer la valeur la plus probable c'est-à-dire sensiblement la valeur moyenne, soit une valeur inférieure telle que la probabilité de rencontrer une valeur plus faible soit petite. C'est cette seconde méthode qu'on a choisie avec raison, car on a éliminé ainsi des incertitudes, ce qui a permis de réduire le coefficient de sécurité.

C'est donc dans cette voie de la réduction des incertitudes qu'il faut ainsi s'engager dans la résolution des problèmes d'instabilité qui, en Construction Métallique, revêtent une importance toute particulière.

C'est ce qui a été fait dans les Règles CM 56, ce qui a permis de solutionner économiquement les problèmes relatifs aux barres bi-articulées, prismatiques ou à treillis, et au flambement composé. Cependant, le problème des systèmes hyperstatiques n'avait pas été abordé en envisageant la prise en compte des imperfections.

Or, nous l'avons montré, les principes fondamentaux qui sont à la base des Règles CM 46, concernant le flambement, s'adaptent particulièrement bien à une extension aux systèmes hyperstatiques. Avec l'emploi de formules simplifiées, du genre de celles que nous proposons, les calculs deviennent plus simples en moyenne, que par l'emploi de la méthode classique.

Il est donc possible d'étendre aux systèmes hyperstatiques sans qu'il n'en coûte rien, la conception cohérente de la sécurité à base probabiliste, déjà appliquée avec succès aux systèmes isostatiques, et dont les bases sont d'une solidité incontestable.

On peut estimer qu'il en résulterait une économie de matière pouvant se chiffrer en moyenne aux environs de 15 à 20% par rapport aux méthodes actuelles, avec cette différence considérable que la sécurité serait homogène et garantie dans tous les cas.

Annexe I. Simplification des calculs

1. Barre sur deux appuis encastrée élastiquement

Soit $A\,B$ une barre idéalement parfaite comprimée encastrée élastiquement en A sur un système (I) et en B sur un système (II).

La souplesse en A du système (I) est par définition sa rotation ϑ_1 sous l'effet d'un moment unité.

La souplesse en B du système (II) et la rotation ϑ_2 répondant à la même définition.

Prolongeons la barre AB de part et d'autre, de telle sorte que les poutres AC et BD sur deux appuis simples aient respectivement la même souplesse que les systèmes (I) et (II). On calculera α et β par:

$$\frac{\alpha l}{3EI} = \vartheta_1, \qquad \frac{\beta l}{3EI} = \vartheta_2 \quad \text{d'où}$$

$$\alpha = \vartheta_1 \frac{3EI}{l}, \qquad \beta = \vartheta_2 \frac{3EI}{l}.$$

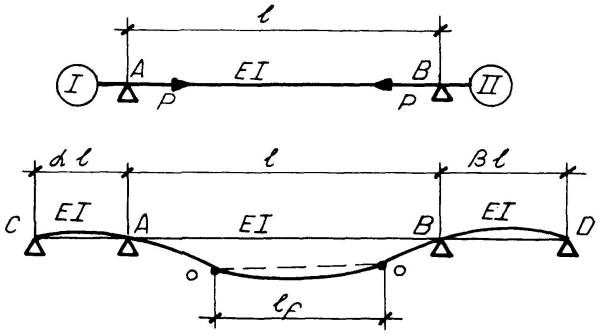


Fig. 26.

Dans la barre sur 4 appuis ainsi constituée, la travée AB est encastrée élastiquement au même degré que lorsqu'elle était liée aux systèmes (I) et (II).

La longueur de flambement l_f de la barre AB, qui correspond à sa charge critique, et qui une fois connue permet précisément le calcul de cette charge critique, peut s'obtenir par des formules simples, à 3% près.

Pour fixer les idées, supposons $\alpha < \beta$

1. Si $\alpha > 1$:

$$l_f = \frac{l}{2}\left(\frac{1+1{,}66\,\alpha}{2+1{,}66\,\alpha} + \frac{1+1{,}66\,\beta}{2+1{,}66\,\beta}\right). \tag{23}$$

2. Si $0 \leqq \alpha \leqq 1$:

Deux cas peuvent se présenter:

a) $\beta \leqq 3{,}5 + 16{,}5\,\alpha^2$

alors la longueur de flambement donnée par (23) reste valable.

b) $\beta > 3{,}5 + 16{,}5\,\alpha^2$.

On calcule l_f par la formule (29) et rectifie cette valeur par la formule:

$$l_f' = l_f - 0{,}16\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)(l - l_f). \tag{24}$$

Cas particuliers où $\alpha = \beta$

$$l_f = l\,\frac{1+1{,}66\,\alpha}{2+1{,}66\,\alpha}. \tag{25}$$

2. *Mât encastré élastiquement*

L'extrémité B du mât AB est libre, son pied est encastré élastiquement sur un système (I) dont la souplesse en A est ϑ. On substitue au système (I)

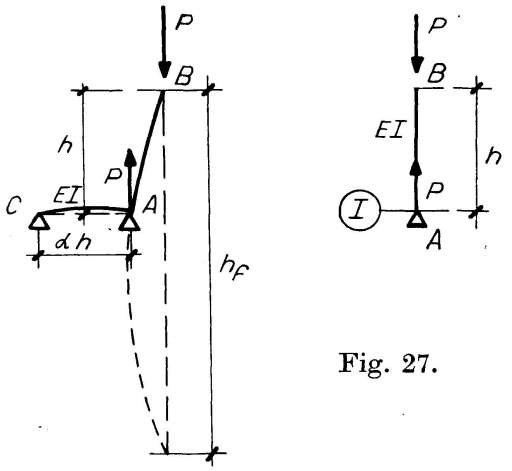


Fig. 27.

une barre sur deux appuis de même raideur EI que celle du mât, et dont la souplesse en A est la même que celle du système (I).

$$\frac{\alpha h}{3EI} = \vartheta, \qquad \alpha = \vartheta \frac{3EI}{h}.$$

La hauteur de flambement h_f est donnée à 2% près par:

$$h_f = 2h\sqrt{1+0{,}8\alpha}. \tag{26}$$

3. *Application des formules simplifiées*

Dans le calcul des souplesses des systèmes (I) et (II), il faut évidemment tenir compte des barres qui à l'intérieur de ces systèmes peuvent être comprimées (éventuellement tendues).

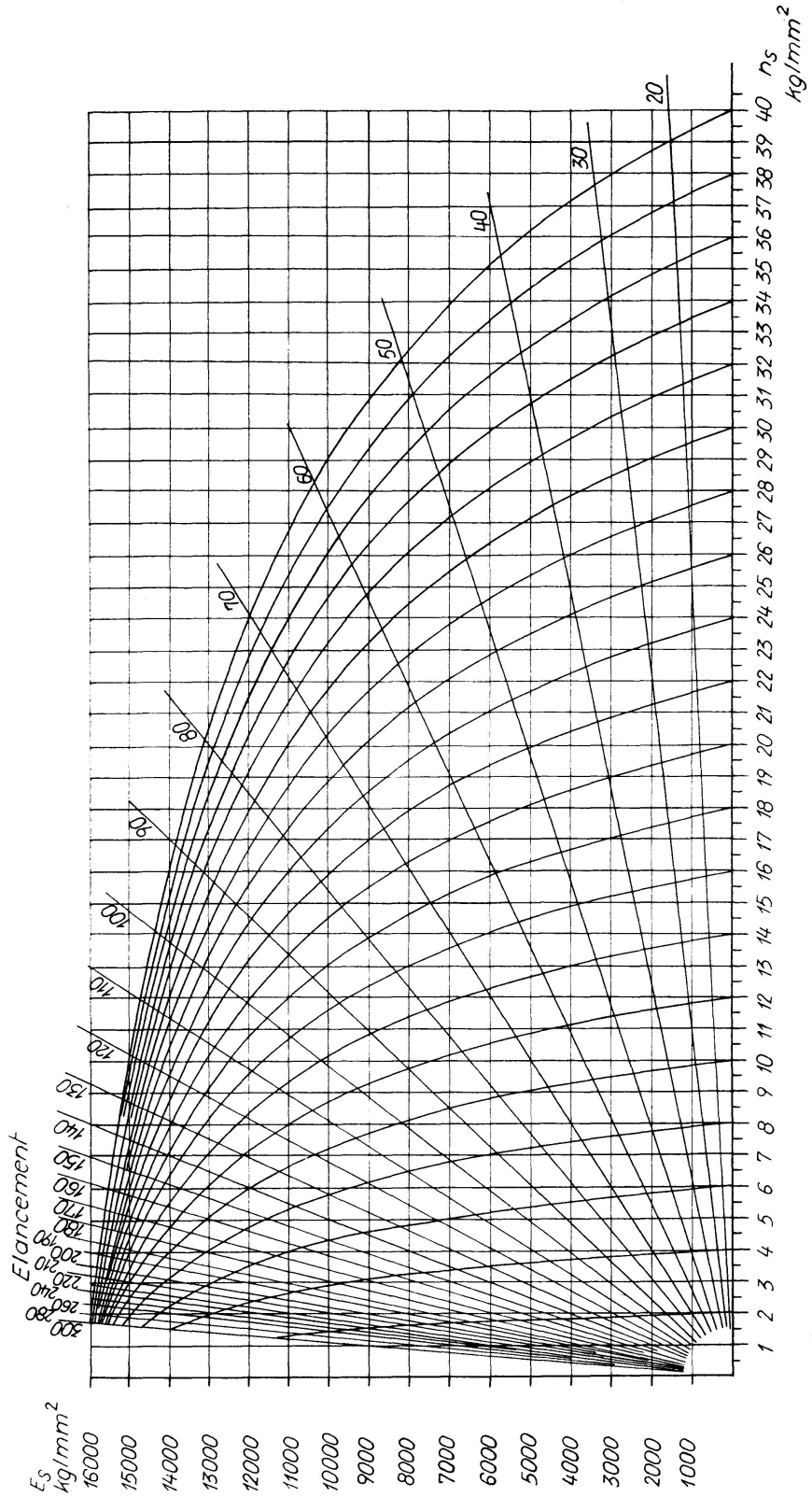
Dans l'hypothèse de systèmes idéalement parfaits dont toutes les barres sont en zone élastique, les calculs de α et β se font avec le module E. En zone plastique, il faut faire intervenir un module réduit E', pour toutes les barres comprimées au-delà de la limite de proportionnalité, y compris la barre AB.

Dans l'hypothèse des systèmes réels avec leurs imperfections, il faut pour toutes les barres comprimées, des systèmes (I) et (II), et pour la barre AB faire intervenir le module fictif E_s, qui a pour limite

$$E_0 = \frac{E}{1+c}$$

quand la compression est nulle.

Annexe II. Diagramme de flambement



Résumé

Jusqu'à présent, la détermination des systèmes hyperstatiques dont certains éléments sont soumis au flambement, se faisait classiquement dans l'hypothèse de barres idéalement parfaites.

L'auteur montre qu'une telle pratique peut être dans certains cas très dangereuse, car les perturbations qui proviennent des imperfections inévitables, ont une influence importante sur la position des points d'inflexion, et par suite, sur la longueur de flambement, laquelle intervient à la puissance deux. Il en résulte que pour que la sécurité soit assurée dans tous les cas, l'emploi de la méthode classique nécessiterait l'application d'un coefficient de sécurité de l'ordre de 8, ce qui serait prohibitif.

La conclusion, c'est qu'il est absolument nécessaire d'abandonner les méthodes classiques en prenant en compte systématiquement les imperfections. L'auteur propose une méthode qui reposant sur des bases solides, permet sans complications d'assurer la sécurité dans tous les cas tout en aboutissant à une économie moyenne de matière appréciable.

Zusammenfassung

Die Behandlung der statisch unbestimmten Systeme, deren Stäbe z. T. auf Knicken beansprucht sind, wurde bisher auf Grund der klassischen Annahme ideal fehlerloser Stäbe durchgeführt.

Der Verfasser zeigt, daß ein solches Verfahren in bestimmten Fällen sehr gefährlich sein kann, weil die Abweichungen infolge unvermeidlicher Mängel die Lage der Wendepunkte und somit die in der zweiten Potenz wirkende Knicklänge stark beeinflussen. Es folgt daraus, daß bei Anwendung des klassischen Verfahrens ein unannehmbarer Sicherheitsfaktor von etwa 8 notwendig wäre, um die Sicherheit in allen Fällen zu gewährleisten.

Der Verfasser schließt daraus, daß die klassischen Verfahren zugunsten einer systematischen Berücksichtigung der Mängel aufzugeben sind und schlägt ein wohlbegründetes Verfahren vor, welches die Sicherheit in allen Fällen gewährleistet und dabei zu einer merklichen mittleren Werkstoffersparnis führt.

Summary

The design of statically indeterminate systems, some members of which are compressed, has hitherto been carried out by assuming that these members are ideally perfect.

The author shows that such a practice may be very dangerous in some

cases, because the disturbances due to unavoidable imperfections have a considerable influence on the position of the points of contraflexure and consequently on the effective length, which intervenes as the 2nd power. It follows that safety cannot be ensured in all cases by using the conventional method, unless an excessively high safety factor, of the order of 8 could be accepted.

Hence it is absolutely necessary to abandon the conventional methods by taking the imperfections systematically into account. The author suggests a method established on reliable bases which enables safety to be ensured in all cases, without any complications, while at the same time it allows on an average, a considerable saving of metal to be made.