

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

**Band:** 20 (1960)

**Artikel:** Theorie der allgemein gekrümmten Schalen

**Autor:** Bölcseki, E.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-17552>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 08.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# **Theorie der allgemein gekrümmten Schalen**

*Theory of Shells of any Shape*

*Théorie des voiles de forme quelconque*

E. BÖLCSKEI, Budapest

## **1. Ziel der Abhandlung**

Das Ziel der vorliegenden Abhandlung ist, die auf das räumliche Achsenkreuz bezogenen allgemeinen Gleichgewichts- und Formänderungsgleichungen der gekrümmten Schalen (gekrümmten Platten) herzuleiten. Es wird eine beliebige Belastung, eine allgemeine Form der Mittelfläche und eine konstante Stärke vorausgesetzt.

## **2. Berechnungsgrundlagen**

Bei unseren Berechnungen setzen wir folgendes voraus:

- a) Im Vergleich zu den anderen beiden Abmessungen soll die Schalenstärke gering sein.
- b) Ein auf der Normalen der Mittelfläche befindlicher Punkt fällt nach der Formänderung in die Normale der deformierten Mittelfläche.
- c) Die Formänderungen sind gering gegenüber der Schalenstärke.
- d) Homogener und isotroper Stoff, der dem Hookeschen Gesetz unterworfen ist, d. h. daß ein linearer Zusammenhang zwischen den Dehnungen und Spannungen besteht.
- e) Auf die Mittelfläche senkrechte Spannungen sind gering und werden vernachlässigt.

### 3. Geometrische Charakteristiken der Mittelfläche

Die Gleichung der Mittelfläche der unbelasteten gekrümmten Schale sei

$$z = f(x, y).$$

Bezeichnen wir wie üblich die ersten Differentialquotienten mit

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{und} \quad q = \frac{\partial f}{\partial y},$$

und die zweiten Differentialquotienten mit

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Der Ortsvektor eines Punktes  $A$  der Mittelfläche (Fig. 1) und der absolute Wert dieses Vektors seien

$$\bar{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad |\bar{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

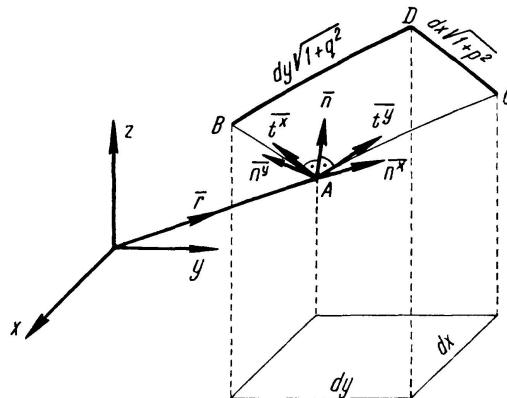


Fig. 1.

$\bar{t}^x$  bzw.  $\bar{t}^y$  sind die Tangentenvektoren der parallel zu den Ebenen  $zx$  bzw.  $zy$  liegenden Schnittkurven der Mittelfläche. Ihre Projektionen und absoluten Werte sind

$$\bar{t}^x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ p \end{bmatrix}, \quad |\bar{t}^x| = \sqrt{1+p^2}; \quad \bar{t}^y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ q \end{bmatrix}, \quad |\bar{t}^y| = \sqrt{1+q^2}. \quad (1)$$

Der Normalvektor der Oberfläche ergibt sich als ein Vektorprodukt der Vektoren  $\bar{t}^x$  und  $\bar{t}^y$ . Die Projektionen und der absolute Wert des Normalvektors sind daher

$$\bar{n} = \bar{t}^x \bar{t}^y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -p \\ -q \\ 1 \end{bmatrix}, \quad |\bar{n}| = \sqrt{1+p^2+q^2} = T. \quad (2)$$

In unseren weiteren Berechnungen werden wir den auf die Vektoren  $\bar{t}^y$  und  $\bar{n}$  senkrechten Vektor  $\bar{n}^y$  und den auf die Vektoren  $\bar{t}^x$  und  $\bar{n}$  senkrechten Vektor  $\bar{n}^x$  brauchen. Diese Vektoren und ihre absoluten Werte lassen sich in der Form

$$\bar{n}^x = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -p & -q & 1 \\ 1 & 0 & p \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -pq \\ 1+p^2 \\ q \end{bmatrix}, \quad \bar{n}^y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & q \\ -p & -q & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1+q^2 \\ -pq \\ p \end{bmatrix},$$

$$|\bar{n}^x| = T\sqrt{1+p^2}; \quad |\bar{n}^y| = T\sqrt{1+q^2}. \quad (3)$$

anschreiben. Das sich über das rechteckige Element  $dx dy$  der Ebene befindliche Element der Mittelfläche ist ein Flächenelement allgemeiner Form. Dieses Flächenelement kann in der Tangentialebene der Mittelfläche als Parallelogramm mit den Seitenlängen  $dx\sqrt{1+p^2}$  bzw.  $dy\sqrt{1+q^2}$  betrachtet werden. Seine zu den Koordinatenebenen  $xz$  bzw.  $yz$  parallelen Seiten schließen den Winkel  $\alpha$  ein. Für diesen Winkel lassen sich die Beziehungen

$$\cos \alpha = \frac{pq}{\sqrt{1+p^2}\sqrt{1+q^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{T}{\sqrt{1+p^2}\sqrt{1+q^2}} \quad (4)$$

anschreiben. Die Schale hat die Dicke  $v$ , in Richtung der Flächennormale gemessen. Das Schalenelement, das zu dem soeben beschriebenen Flächenelement gehört, ist nicht prismatisch, sondern stellt infolge der doppelten Krümmung ein «schartenförmiges» Element mit Ausbreitung in Richtung der konvexen Seite dar. Der in Richtung der Schalenstärke parallel der tangentialen Ebene der Mittelfläche genommene Schnitt wird ebenfalls eine Parallelogrammenform aufweisen, wo der durch die Seiten eingeschlossene Winkel dem entsprechenden Winkel der Mittelfläche gleich, die Seitenlänge aber ungleich ist. Die Seitenlänge des über der Mittelfläche in Höhe  $v$  befindlichen Flächenelements ist nämlich durch die Formeln

$$ds^{xx} = dx\sqrt{1+p^2}\frac{R^x+v}{R^x}, \quad ds^{yy} = dy\sqrt{1+q^2}\frac{R^y+v}{R^y} \quad (5)$$

darstellbar, wo  $R_x$  bzw.  $R_y$  Krümmungshalbmesser einer durch die Tangentenvektoren  $\bar{t}^x$  bzw.  $\bar{t}^y$  der Mittelfläche und durch den Normalvektor  $n$  bestimmten Ebene sind, d. i. in beiden Fällen einer Normalebene. Die Krümmung der Normalquerschnitte ist im allgemeinen durch die Gleichung

$$\frac{1}{R} = \frac{ra^2 + 2sab + tb^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

zu bestimmen, wo  $a, b, c$  Richtungskosinus der Tangente des Normalquerschnittes bedeuten. Die Krümmung des bei  $\bar{t}^x$  bzw.  $\bar{t}^y$  liegenden Normalquerschnitts ist daher

$$-\frac{1}{R^x} = \frac{r}{(1+p^2)T}, \quad -\frac{1}{R^y} = \frac{t}{(1+q^2)T}. \quad (6)$$

#### 4. Gleichgewichtsgleichungen

Fassen wir das Gleichgewicht des aus der Mittelfläche  $z=f(x, y)$  herausgeschnittenen Elementes mit Hilfe eines Grundrisses  $dx dy$  ins Auge. Seien die auf die Schalenoberfläche wirkenden und in der tangentialen Ebene der Oberfläche liegenden, den Ebenen  $xz$  bzw.  $yz$  parallelen wirklichen Normalkräfte mit  $N^x$  bzw.  $N^y$  bezeichnet. Die spezifischen Werte der in der Tangentialebene auftretenden Querkräfte gleicher Richtung seien durch  $N^{xy}$  bzw.  $N^{yx}$

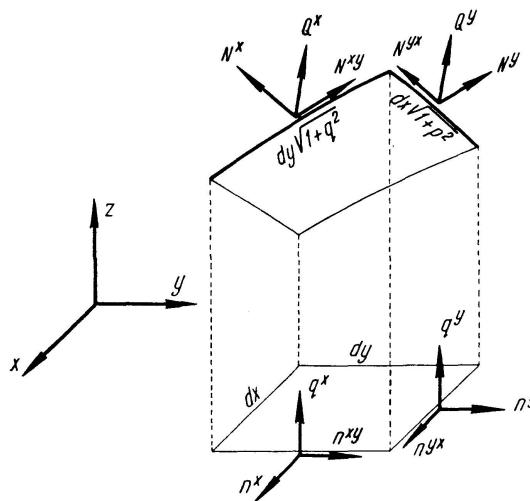


Fig. 2.

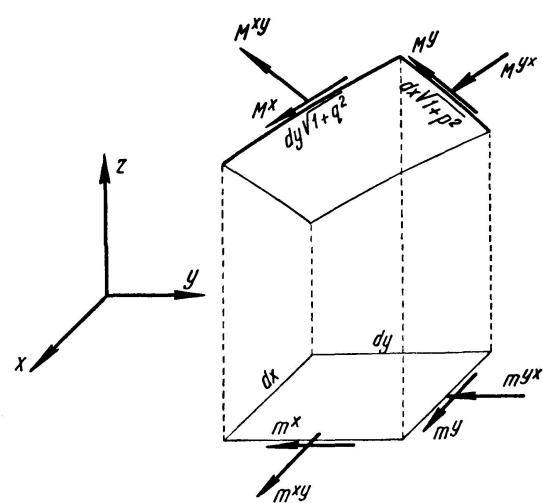


Fig. 3.

Tabelle I

Absoluter Wert des Kraftvektors	Richtungscosinus		
	$x$	$y$	$z$
	des Einheitsvektors		
$N^x \sqrt{1+q^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$	0	$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$
$N^{xy} \sqrt{1+q^2}$	0	$\frac{1}{\sqrt{1+q^2}}$	$\frac{q}{\sqrt{1+q^2}}$
$Q^x \sqrt{1+q^2}$	$-\frac{p}{T}$	$-\frac{q}{T}$	$\frac{1}{T}$
$N^y \sqrt{1+p^2}$	0	$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$	$\frac{q}{\sqrt{1+p^2}}$
$N^{yx} \sqrt{1+p^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$	0	$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$
$Q^y \sqrt{1+p^2}$	$-\frac{p}{T}$	$-\frac{q}{T}$	$\frac{1}{T}$

Tabelle II

Absoluter Wert des Momenten- vektors	Richtungscosinus		
	x	y	z
	des Einheitsvektors		
$-M^x \sqrt{1+q^2}$	0	$\frac{1}{\sqrt{1+q^2}}$	$\frac{q}{\sqrt{1+q^2}}$
$M^{xy} \sqrt{1+q^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$	0	$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$
$N^{xy} T$	$-\frac{p}{T}$	$-\frac{q}{T}$	$\frac{1}{T}$
$-Q^x \sqrt{1+p^2} \sqrt{1+q^2}$	$-\frac{p q}{T \sqrt{1+p^2}}$	$\frac{1+p^2}{T \sqrt{1+p^2}}$	$\frac{q}{T \sqrt{1+p^2}}$
$M^y \sqrt{1+p^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$	0	$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$
$-M^{yx} \sqrt{1+p^2}$	0	$\frac{1}{\sqrt{1+q^2}}$	$\frac{q}{\sqrt{1+q^2}}$
$-N^{yx} T$	$-\frac{p}{T}$	$-\frac{q}{T}$	$\frac{1}{T}$
$Q^y \sqrt{1+p^2} \sqrt{1+q^2}$	$\frac{1+q^2}{T \sqrt{1+q^2}}$	$-\frac{p q}{T \sqrt{1+q^2}}$	$\frac{p}{T \sqrt{1+q^2}}$

ausgedrückt. Weiter benötigen wir noch die zur Oberflächennormalen  $n$  parallelen Querkräfte  $Q^x$  bzw.  $Q^y$  (Fig. 2). Die wirklichen Biegungsmomente (Fig. 3) werden auf analoge Weise erklärt und bezeichnet. Seien  $M^x$  und  $M^y$  wirkliche Momente, welche die Biegung in der Richtung  $x$  bzw.  $y$  hervorrufen, deren Vektoren senkrecht auf die entsprechende Biegungsebene stehen.  $M^{xy}$  bzw.  $M^{yx}$  sind die auf analoge Weise erklärten Torsionsmomente.

Das Gleichgewicht der auf das jetzt beschriebene Schalenelement wirkenden Kräfte wird durch drei Projektions- und drei Momentengleichungen ausgedrückt. Um das Schreiben zu erleichtern, haben wir die auf das Schalen-element wirkenden Kräfte in der Tabelle I, die Momente in der Tabelle II zusammengestellt, wobei die Größen der Kräfte bzw. Momente sowie die Projektionen der Richtungsvektoren angegeben sind.

Es sei die in Richtung  $x$ ,  $y$  bzw.  $z$  gemessene Intensität der auf die Koordinatenebenen bezogenen Belastung der Schalenfläche durch die Belastungsfunktionen

$$x_0(x, y); \quad y_0(x, y), \quad z_0(x, y)$$

charakterisiert.

Zwecks Vereinfachung unserer Berechnungen werden die Gleichgewichtsgleichungen nicht mit den wirklichen Kräften bzw. Momenten, sondern mit den sog. reduzierten Kräften bzw. Momenten aufgestellt. Die reduzierten Kräfte bzw. Momente bedeuten die in der waagrechten Ebene gemessene Intensität der Projektion in Richtung  $x$ ,  $y$ ,  $z$  der wirklichen Kräfte bzw. Momente. Die reduzierten Kräfte bzw. Momente werden mit den entsprechenden kleinen Buchstaben und den gleichen Indizes bezeichnet.

Die reduzierten Kräfte werden auf Grund der Fig. 2 aus den wirklichen Kräften mit Hilfe der nachstehenden Formeln berechnet:

$$\begin{aligned} n^x &= N^x \frac{\sqrt{1+q^2}}{\sqrt{1+p^2}}, & n^y &= N^y \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1+q^2}}, \\ n^{xy} &= N^{xy}, & n^{yx} &= N^{yx}, \\ q^x &= Q^x \frac{\sqrt{1+q^2}}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, & q^y &= Q^y \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1+p^2+q^2}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Die reduzierten Momente können auf Grund der Fig. 3 mit Hilfe der untenstehenden Beziehungen aus den wirklichen Momenten berechnet werden.

$$\begin{aligned} m^x &= M^x, & m^y &= M^y, \\ m^{xy} &= M^{xy} \frac{\sqrt{1+q^2}}{\sqrt{1+p^2}}, & m^{yx} &= M^{yx} \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1+q^2}}, \end{aligned} \quad (8)$$

Auf Grund der Tabellen I bzw. II können wir die Gleichgewichtsgleichungen der Kräfte bzw. Momente anschreiben. Zwecks Abkürzung führen wir aber sofort die reduzierten Kräfte bzw. Momente ein.

$$\begin{aligned} n_x^x + n_y^{yx} - (p q^x)_x - (p q^y)_y + x_0 &= 0, \\ n_x^{xy} + n_y^y - (q q^x)_x - (q q^y)_y + y_0 &= 0, \\ (p n^x)_x + (q n^y)_y + (q n^{xy})_x + (p n^{yx})_y + q_x^x + q_y^y + z_0 &= 0; \\ m_x^{xy} + m_y^y - p(n^{xy} - n^{yx}) + p q q^x + (1 + q^2) q^y &= 0, \\ m_x^x + m_y^{yx} + q(n^{xy} - n^{yx}) + (1 + p^2) q^x + p q q^y &= 0, \\ -(q m^x)_x + (p m^{xy})_x + (p m^y)_y - (q m^{yx})_y + (n^{xy} - n^{yx}) - q q^x + p q^y &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Nach Durchführung der Operationen in den Gleichungen und nach Abzug des  $p$ -fachen der ersten und des  $q$ -fachen der zweiten Gleichung von der dritten ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} n_x^x + n_y^{yx} - (p q^x)_x - (p q^y)_y + x_0 &= 0, \\ n_x^{xy} + n_y^y - (q q^x)_x - (q q^y)_y + y_0 &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$r n^x + s(n^{xy} + n^{yx}) + t n^y + T(T q^x)_x + T(T q^y)_y + z_0 - p x_0 - q y_0 = 0;$$

$$\begin{aligned} m_x^{xy} + m_y^y - p(n^{xy} - n^{yx}) + p q q^x + (1 + q^2) q^y &= 0, \\ m_x^x + m_y^{yx} + q(n^{xy} - n^{yx}) + (1 + p^2) q^x + p q q^y &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$r m^{xy} - s(m^x - m^y) - t m^{yx} + T^2(n^{xy} - n^{yx}) = 0.$$

Werden die Werte  $q^x$  und  $q^y$  mit der ersten und zweiten Gleichung von (12) bestimmt und in die Gleichungen (11) bzw. in die dritte Gleichung von (12) eingesetzt, so erhalten wir folgende vier Beziehungen:

$$\begin{aligned} & \left[ n^x + p q (n^{xy} - n^{yx}) + \frac{p(1+q^2)}{T^2} (m_x^x + m_y^x) - \frac{p^2 q}{T^2} (m_x^{xy} + m_y^y) \right]_x \\ & + \left[ n^{yx} - p^2 (n^{xy} - n^{yx}) - \frac{p^2 q}{T^2} (m_x^x + m_y^x) + \frac{p(1+p^2)}{T^2} (m_x^{xy} + m_y^y) \right]_y + x_0 = 0, \\ & \left[ n^{xy} + q^2 (n^{xy} - n^{yx}) + \frac{q(1+q^2)}{T^2} (m_x^x + m_y^x) - \frac{q^2 p}{T^2} (m_x^{xy} + m_y^y) \right]_x \\ & + \left[ n^y - p q (n^{xy} - n^{yx}) - \frac{q^2 p}{T^2} (m_x^x + m_y^x) + \frac{q(1+p^2)}{T^2} (m_x^{xy} + m_y^y) \right]_y + y_0 = 0, \quad (13) \\ & r n^x + s (n^{xy} + n^{yx}) + t n^y \\ & + T \left[ -\frac{1+q^2}{T} (m_x^x + m_y^x) + \frac{p q}{T} (m_x^{xy} + m_y^y) - q T (n^{xy} - n^{yx}) \right]_x \\ & + T \left[ \frac{p q}{T} (m_x^x + m_y^x) - \frac{1+p^2}{T} (m_x^{xy} + m_y^y) + p T (n^{xy} - n^{yx}) \right]_y \\ & + z_0 - p x_0 - q y_0 = 0, \\ & r m^{xy} - s (m^x - m^y) - t m^{yx} + T^2 (n^{xy} - n^{yx}) = 0. \end{aligned}$$

In der Gleichung (13) finden wir nur noch die folgenden 8 Unbekannten:

$$\begin{aligned} & n^x, n^y, n^{xy}, n^{yx} \\ & m^x, m^y, m^{xy}, m^{yx} \end{aligned}$$

### 5. Prüfung der Formänderung

Prüfen wir die Bewegungen eines über der Mittelfläche der Schalenform  $z=f(x,y)$  in Höhe  $v$  befindlichen Punktes. Die Bewegungen der Mittelfläche in den Richtungen  $x, y, z$  werden durch die Bewegungsfunktionen

$$\xi = \xi(x, y); \quad \eta = \eta(x, y); \quad \zeta = \zeta(x, y)$$

charakterisiert. Nach Eintreten der Formänderung geht der über der Mittelfläche in der Höhe  $v$  liegende Punkt in die Stellung  $P'$  über (Fig. 4). Die Bewegung  $\overline{PP'} = \bar{e}^v$  setzt sich aus zwei Komponenten zusammen. Die erste Komponente ergibt sich aus der reinen Verschiebung, welche durch die Bewegungsfunktionen charakterisiert werden kann. Die zweite Komponente stellt eine durch die Verdrehung des Mittelflächennormalvektors entstehende Bewegung dar, deren Komponenten mit den Funktionen  $E, H, Z$  ausgedrückt werden können.

Der Ortsvektor des Punktes  $P$  ist

$$\bar{P} = \bar{r} + \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|} v$$

und derjenige des Punktes  $P'$  ist

$$\bar{P}' = \bar{r} + \bar{\rho} + \frac{\bar{n}'}{|\bar{n}'|} v,$$

wobei  $e^v$  der Bewegungsvektor,  $\bar{n}$  der Normalvektor der ursprünglichen Fläche und  $\bar{n}'$  der Normalvektor der deformierten Fläche sind. Der Bewegungsvektor ist daher

$$\bar{P}\bar{P}' = e^v = \bar{\rho} + \left[ \frac{\bar{n}'}{|\bar{n}'|} - \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|} \right] v.$$

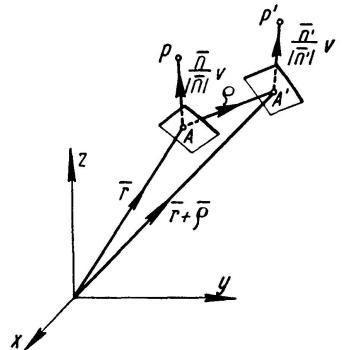


Fig. 4.

Die in diesen Vektorgleichungen ausgedrückten Größen können auf Grund der Flächentheorie bestimmt werden.

Im deformierten Zustand ist der Normalvektor der Fläche

$$\bar{n}' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 + \xi_x & \eta_x & p + \zeta_x \\ \xi_y & 1 + \eta_y & q + \zeta_y \end{vmatrix},$$

oder, was dasselbe ist

$$\bar{n}' = \begin{bmatrix} -p + (q\eta_x - p\eta_y - \zeta_x) \\ -q + (-q\xi_x + p\xi_y + \zeta_y) \\ 1 + (\xi_x + \eta_y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p \\ -q \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}.$$

Der absolute Wert dieses Vektors ist

$$|\bar{n}'| = \sqrt{1 + p^2 + q^2 + 2(-pA - qB + C) + A^2 + B^2 + C^2}.$$

Vernachlässigen wir im Ausdruck  $|\bar{n}|$  die zweiten Potenzen der die Formänderungsglieder enthaltenden Größen  $A, B, C$  — als zweitrangig geringe Größen —, so erhalten wir die Beziehung

$$|\bar{n}'| = T \left( 1 + \frac{-pA - qB + C}{T^2} \right).$$

Setzen wir die obigen Größen in die Matrix des Verschiebungsvektors ein, so gelangen wir zu der Beziehung

$$\bar{e}^v = \begin{bmatrix} \xi + \frac{1}{T}(-p+A)\left(1+\frac{pA+qB-C}{T^2}\right)v + \frac{p}{T}v \\ \eta + \frac{1}{T}(-q+B)\left(1+\frac{pA+qB-C}{T^2}\right)v + \frac{q}{T}v \\ \zeta + \frac{1}{T}(1+C)\left(1+\frac{pA+qB-C}{T^2}\right)v - \frac{1}{T}v \end{bmatrix}$$

oder

$$\bar{e}^v = \begin{bmatrix} \xi + \frac{v}{T^3}\{(1+q^2)(p\xi_x+q\eta_x-\zeta_x) - pq(p\xi_y+q\eta_y-\zeta_y)\} \\ \eta + \frac{v}{T^3}\{-pq(p\xi_x+q\eta_x-\zeta_x)+(1+p^2)(p\xi_y+q\eta_y-\zeta_y)\} \\ \zeta + \frac{v}{T^3}\{p(p\xi_x+q\eta_x-\zeta_x)+q(p\xi_y+q\eta_y-\zeta_y)\} \end{bmatrix}.$$

Das erste Glied dieses Ausdruckes bedeutet die reine Verschiebung, das zweite aber jene Bewegung, welche infolge der Verdrehung der Flächennormale entstanden ist. Bezeichnen wir letztere — wie bereits gesagt — mit den entsprechenden griechischen Majuskeln, so erhalten wir die Beziehungen

$$e^v = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} \Xi \\ H \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \\ \chi \end{bmatrix}.$$

## 6. Spezifische Dehnungen und Winkelveränderung

Bestimmen wir die bei einem in der Höhe  $v$  liegenden Flächenelement des untersuchten parallelogrammähnlichen Schalenelements auftretenden spezifischen Dehnungen. Unter spezifischer Dehnung verstehen wir — auch im System der schiefen Winkel — den Quotient der untersuchten Projektion des Verschiebungsvektors und der ursprünglichen Seitenlänge, oder

$$\epsilon^{xv} = \frac{\bar{e}^v}{|\bar{t}^{xv}|} \frac{\bar{t}^x}{|\bar{t}^x|},$$

$$\text{wo } \bar{r}^v = \begin{bmatrix} x - \frac{p}{T}v \\ y - \frac{q}{T}v \\ z + \frac{1}{T}v \end{bmatrix}, \quad \bar{t}^{xv} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{v}{T^3}\{r(1+q^2) - pq s\} \\ 0 - \frac{v}{T^3}\{s(1+q^2) - pq t\} \\ p - \frac{v}{T^3}\{pr + qs\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - v D \\ 0 - v E \\ p - v F \end{bmatrix}.$$

Die Länge, bzw. der absolute Wert dieses Vektors ergibt sich nach Vernachlässigung der quadratischen Glieder zu

$$\begin{aligned}
|\bar{t}^{xx}| &= \sqrt{1 - 2vD + p^2 - 2vpF} = \sqrt{1+p^2} \sqrt{1 - \frac{2v}{1+p^2}(D+pF)} \\
&= \sqrt{1+p^2} \left\{ 1 - \frac{v}{(1+p^2)T^3} r(1+p^2+q^2) \right\} \\
&= \sqrt{1+p^2} \left\{ 1 - \frac{r}{(1+p^2)T} v \right\} = \sqrt{1+p^2} \frac{R^x + v}{R^x}.
\end{aligned}$$

Die gesuchte spezifische Dehnung ist daher

$$\epsilon^{xx} = \frac{R^x}{R^x + v} \left\{ \frac{\xi_x + p\zeta_x}{1+p^2} + v \frac{E_x + pZ_x}{1+p^2} \right\}. \quad (14)$$

Auf Grund eines ähnlichen Gedankenganges findet man

$$\epsilon^{yy} = \frac{R^y}{R^y + v} \left\{ \frac{\eta_y + q\zeta_y}{1+q^2} + v \frac{H_y + qZ_y}{1+q^2} \right\}. \quad (15)$$

Wir haben noch den Wert der Winkeländerung zu bestimmen. Unter Winkeländerung verstehen wir die Verzerrung des durch die Achsen eingeschlossenen Winkels des schiefwinkligen Koordinatensystems. Dies setzt sich aus zwei Teilen zusammen (Fig. 5).

$$\gamma = \gamma^{1v} + \gamma^{2v}, \quad \gamma^{1v} = \frac{\bar{e}^{xx}}{|\bar{t}^{xx}|} \frac{\bar{n}^x}{|\bar{n}^x|}, \quad \gamma^{2v} = \frac{\bar{e}^{yy}}{|\bar{t}^{yy}|} \frac{\bar{n}^y}{|\bar{n}^y|}.$$

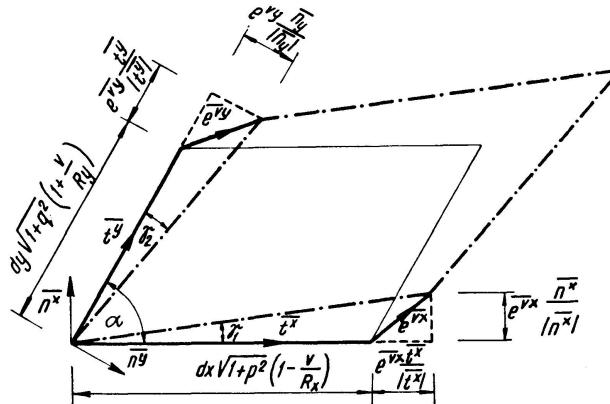


Fig. 5.

Daher ist

$$\gamma^{1v} = \frac{R^x}{R^x + v} \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} [\xi_x + vE_x, \eta_x + vH_x, \zeta_x + vZ_x] \frac{1}{T\sqrt{1+p^2}} \begin{bmatrix} -pq \\ 1+p^2 \\ q \end{bmatrix}$$

und nach der Entwicklung haben wir

$$\gamma^{1v} = \frac{R^x}{R^x + v} \frac{1}{T(1+p^2)} [-pq\xi_x + (1+p^2)\eta_x + q\zeta_x + v\{-pqE_x + (1+p^2)H_x + qZ_x\}].$$

Mit einem ähnlichen Gedankengang ergibt sich

$$\gamma^{2v} = \frac{R^y}{R^y + v} \frac{1}{T(1+q^2)} [(1+q^2)\xi_y - pq\eta_y + p\zeta_y + v\{(1+q^2)E_y - pqH_y + pZ_y\}]. \quad (16)$$

## 7. Verschiebungsgleichungen

Die Winkelverzerrungskomponenten können auch in der nachstehenden Form angeschrieben werden:

$$\begin{aligned}\gamma^{1v} + \frac{p q}{T} \epsilon^{xv} &= \frac{R^x}{R^x + v} \frac{1}{T} \{\eta_x + q\zeta_x + v(H_x + qZ_x)\}, \\ \gamma^{2v} + \frac{p q}{T} \epsilon^{yv} &= \frac{R^y}{R^y + v} \frac{1}{T} \{\xi_y + p\zeta_y + v(E_y + pZ_y)\}.\end{aligned}$$

Auf diese Weise können wir letzten Endes folgende vier Beziehungen für die spezifischen Dehnungen und Winkelverzerrungskomponenten anschreiben:

$$\begin{aligned}\xi_x + p\zeta_x + v(E_x + pZ_x) &= \frac{R^x + v}{R^x} (1 + p^2) \epsilon^{xv}, \\ \eta_y + q\zeta_y + v(H_y + qZ_y) &= \frac{R^y + v}{R^y} (1 + q^2) \epsilon^{yv}, \\ \eta_x + q\zeta_x + v(H_x + qZ_x) &= \frac{R^x + v}{R^x} (T\gamma^{1v} + pq\epsilon^{xv}), \\ \xi_y + p\zeta_y + v(E_y + pZ_y) &= \frac{R^y + v}{R^y} (T\gamma^{2v} + pq\epsilon^{yv}).\end{aligned}$$

Führen wir die Bezeichnungen

$$\begin{aligned}P &= \frac{R^x + v}{R^x} (1 + p^2) \epsilon^{xv}, & Q &= \frac{R^y + v}{R^y} (1 + q^2) \epsilon^{yv}, \\ S_1 &= \frac{R^x + v}{R^x} (T\gamma^{1v} + pq\epsilon^{xv}), & S_2 &= \frac{R^y + v}{R^y} (T\gamma^{2v} + pq\epsilon^{yv})\end{aligned} \quad (17)$$

ein. Wenn wir aus der Summe der nach  $xy$  differenzierten dritten und vierten Gleichungen die nach  $y$  zweimal differenzierte erste bzw. nach  $x$  zweimal differenzierte zweite Gleichung abziehen, gelangen wir zu der Beziehung

$$r\chi_{yy} - 2s\chi_{xy} + t\chi_{xx} = (s_1 + s_2)_{xy} - P_{yy} - Q_{xx}. \quad (18)$$

Es besteht ferner auch die Beziehung

$$\phi_x = P - p\chi_x \quad (19)$$

sowie die Beziehung

$$\psi_y = Q - q\chi_y. \quad (20)$$

Mit Hilfe dieser drei Gleichungen können wir die Formänderung der Schalenfläche immer bestimmen, vorausgesetzt, daß die spezifischen Dehnungen  $\epsilon^{xx}$ ,  $\epsilon^{yy}$ ,  $\gamma^v$  und die Winkelverzerrung bereits bekannt sind. Aus diesem können nämlich mit Kenntnis der Schalenflächenkonstanten die Werte  $P$ ,  $Q$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  ermittelt werden und nach Einsetzen dieser in die obigen Gleichungen verbleiben nur noch die Verschiebungsfunktionen  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  unbekannt. Wir erhalten daher schließlich drei Differentialgleichungen, aus welchen die drei unbekannten Verschiebungsfunktionen erhalten werden können. Nach deren Bestimmung können die gesuchten Bewegungen der Mittelfläche  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  aus dem Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\phi &= \xi + \frac{v}{T^3} (1+q^2) (p \xi_x + q \eta_x - \zeta_x) - \frac{v}{T^3} p q (p \xi_y + q \eta_y - \zeta_y), \\ \psi &= \eta - \frac{v}{T^3} p q (p \xi_x + q \eta_x - \zeta_x) + \frac{v}{T^3} (1+p^2) (p \xi_y + q \eta_y - \zeta_y), \\ \chi &= \zeta + \frac{v}{T^3} p (p \xi_x + q \eta_x - \zeta_x) + \frac{v}{T^3} q (p \xi_y + q \eta_y - \zeta_y)\end{aligned}\quad (21)$$

unter Beachtung der entsprechenden Randbedingungen errechnet werden.

## 8. Spezifische innere Kräfte und Momente

Untersuchen wir jenen Teil der Schale, der sich über dem Element vom Grundriß  $dx dy$  befindet und durch Ebenen aus der Platte herausgeschnitten wird, welche parallel zu den tangentialen Vektoren der Mittelfläche und dem Normalvektor stehen.

Die auf den ausgeschnittenen Flächen der Platte wirkenden spezifischen Kräfte werden durch die Beziehungen

$$\begin{aligned}N^x &= \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{R^y + v}{R^y} \sigma^x dv, & M^x &= \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{R^y + v}{R^y} v \sigma^x dv, \\ N^y &= \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{R^x + v}{R^x} \sigma^y dv, & M^y &= \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{R^x + v}{R^x} v \sigma^y dv, \\ N^{xy} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{R^y + v}{R^y} \tau^{xy} dv, & M^{xy} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{R^y + v}{R^y} v \tau^{xy} dv, \\ N^{yx} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{R^x + v}{R^x} \tau^{yx} dv, & M^{yx} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{R^x + v}{R^x} v \tau^{yx} dv, \\ Q^x &= \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{R^y + v}{R^y} \tau^{xz} dv, & Q^y &= \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{R^x + v}{R^x} \tau^{yz} dv.\end{aligned}\quad (22)$$

bestimmt. In diesen Gleichungen bedeuten  $\sigma^x, \sigma^y, \tau^{xy}, \tau^{yx}, \tau^{xz}, \tau^{yz}$  die im schiefwinkligen System angegebenen Spannungen.

### 9. Das Hookesche Gesetz in schiefwinkligen Koordinaten

Ein im Grundriß rechteckiges Flächenelement wird auf der Schalenfläche in Wirklichkeit die Form eines schiefwinkligen Parallelogramms aufweisen. Wir benötigen daher die Zusammenhänge zwischen den im Koordinatensystem  $xy$  mit einem Öffnungswinkel  $\alpha$  gegebenen  $\sigma^x, \sigma^y$  bzw.  $\tau^{xy}$  Spannungen sowie den im selben System festgesetzten Dehnungen  $\epsilon^x, \epsilon^y$  und der Winkelverzerrung  $\gamma$ . Das ist das Hookesche Gesetz, dessen Gültigkeit für die schiefwinkligen Koordinaten durch P. LARDY bestimmt wurde [3]. Diese Beziehungen — unter Weglassen der Herleitungen — führen wir im folgenden an:

$$\begin{aligned}\epsilon^x &= \frac{1}{E \sin \alpha} [\sigma^x + (\cos^2 \alpha - \mu \sin^2 \alpha) \sigma^y + 2 \tau \cos \alpha], \\ \epsilon^y &= \frac{1}{E \sin \alpha} [\sigma^x (\cos^2 \alpha - \mu \sin^2 \alpha) + \sigma^y + 2 \tau \cos \alpha], \\ \gamma &= \frac{1+\mu}{E} [\sigma^x \cos \alpha + \sigma^y \cos \alpha + 2 \tau].\end{aligned}$$

Wollen wir die Spannungen mit Hilfe der spezifischen Dehnungen bzw. der Winkelveränderung aus diesen Gleichungen ausdrücken, so ist das Gleichungssystem mit drei Unbekannten für die Spannungen zu lösen.

Drücken wir die Winkelfunktionen mit den partialen Differentialquotienten der Mittelflächengleichung aus, so erhalten wir die Beziehungen

$$\begin{aligned}\sigma^x &= \frac{E}{1-\mu^2} \frac{\sqrt{1+p^2} \sqrt{1+q^2}}{T^2} \{(\epsilon^x + \mu \epsilon^y) T - \gamma p q\}, \\ \sigma^y &= \frac{E}{1-\mu^2} \frac{\sqrt{1+p^2} \sqrt{1+q^2}}{T^2} \{(\mu \epsilon^x + \epsilon^y) T - \gamma p q\}, \\ \tau &= \frac{E}{2(1-\mu^2)} \frac{1}{T^2} \{\gamma [2(1+p^2)(1+q^2) - (1+\mu) T^2] - (1+\mu)(\epsilon^x + \epsilon^y) p q T\}.\end{aligned}\tag{23}$$

### 10. Spezifische innere Kräfte und Momente in Abhängigkeit der Formänderung

Setzen wir die Beziehungen der spezifischen Dehnungen (14), (15) bzw. der Winkelveränderung (16) in die Formel der Spannungen ein, so erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned}\sigma^x &= \alpha \frac{R^x}{R^x + v} (\delta^x + v \Delta^x) + \alpha \frac{R^y}{R^y + v} (\vartheta^x + v \Theta^x), \\ \sigma^y &= \alpha \frac{R^x}{R^x + v} (\delta^y + v \Delta^y) + \alpha \frac{R^y}{R^y + v} (\vartheta^y + v \Theta^y), \\ \tau &= \frac{\alpha}{2} \frac{R^x}{R^x + v} (\delta^{xy} + v \Delta^{xy}) + \frac{\alpha}{2} \frac{R^y}{R^y + v} (\vartheta^{xy} + v \Theta^{xy}).\end{aligned}$$

WO

$$\begin{aligned}\delta^x &= \frac{\sqrt{1+p^2} \sqrt{1+q^2}}{T^3} [(1+q^2) \xi_x - p q \eta_x + p \zeta_x], \\ \Delta^x &= \frac{\sqrt{1+p^2} \sqrt{1+q^2}}{T^3} [(1+q^2) \Xi_x - p q H_x + p Z_x], \\ \vartheta^x &= \frac{\sqrt{1+p^2} \sqrt{1+q^2}}{(1+q^2) T^3} [-(1+q^2) p q \xi_y + (p^2 q^2 + \mu T^2) \eta_y - (p^2 q - \mu q T^2) \zeta_y], \\ \Theta^x &= \frac{\sqrt{1+p^2} \sqrt{1+q^2}}{(1+q^2) T^3} [-(1+q^2) p q \Xi_y + (p^2 q^2 + \mu T^2) H_y - (p^2 q - \mu q T^2) Z_y], \\ \delta^y &= \frac{\sqrt{1+p^2} \sqrt{1+q^2}}{(1+p^2) T^3} [(p^2 + q^2 + \mu T^2) \xi_x - p q (1+p^2) \eta_x - (p q^2 - \mu p T^2) \zeta_x], \\ \Delta^y &= \frac{\sqrt{1+p^2} \sqrt{1+q^2}}{(1+p^2) T^3} [(p^2 q^2 + \mu T^2) \Xi_x - p q (1+p^2) H_x - (p q^2 - \mu p T^2) Z_x], \\ \vartheta^y &= \frac{\sqrt{1+p^2} \sqrt{1+q^2}}{T^3} [-p q \xi_y + (1+p^2) \eta_y + q \zeta_y], \\ \Theta^y &= \frac{\sqrt{1+p^2} \sqrt{1+q^2}}{T^3} [-p q \Xi_y + (1+p^2) H_y + q Z_y], \\ \delta^{xy} &= \frac{1}{(1+p^2) T^3} \{ [T^2 (1-\mu) + 2 p^2 q^2] [-p q \xi_x + (1+p^2) \eta_x + q \zeta_x] \\ &\quad - (1+\mu) p q T^2 (\xi_x + p \zeta_x) \}, \\ \Delta^{xy} &= \frac{1}{(1+p^2) T^3} \{ [T^2 (1-\mu) + 2 p^2 q^2] [-p q \Xi_x + (1+p^2) H_x + q Z_x] \\ &\quad - (1+\mu) p q T^2 (\Xi_x + p Z_x) \}, \\ \vartheta^{xy} &= \frac{1}{(1+q^2) T^3} \{ [T^2 (1-\mu) + 2 p^2 q^2] [(1+q^2) \xi_y - p q \eta_y + p \zeta_y] \\ &\quad - (1+\mu) p q T^2 (\eta_y + q \zeta_y) \}, \\ \Theta^{xy} &= \frac{1}{(1+q^2) T^3} \{ [T^2 (1-\mu) + 2 p^2 q^2] [(1+q^2) \Xi_y - p q H_y + p Z_y] \\ &\quad - (1+\mu) p q T^2 [H_y + q Z_y) \}.\end{aligned}\tag{24}$$

Auf Grund obiger Angaben bestimmen wir im weiteren die Werte der tatsächlichen spezifischen Kräfte und Momente

$$\begin{aligned}
N^x &= \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{R^y + v}{R^y} \sigma^x d v, \\
&= \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{R^y + v}{R^y} \frac{R^x}{R^x + v} (\delta^x + v \Delta^x) d v + \alpha \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{R^y + v}{R^y} \frac{R^y}{R^y + v} (\vartheta^x + v \Theta^x) d v.
\end{aligned}$$

Führen wir die vorgeschriebenen Integrationen durch:

$$\begin{aligned}
N^x &= \alpha \frac{R^x}{R^y} \delta^x \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{R^y + v}{R^x + v} d v + \alpha \frac{R^x}{R^y} \Delta^x \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{R^y + v}{R^x + v} v d v + \alpha \vartheta^x \int_{-h/2}^{+h/2} d v + \alpha \Theta^x \int_{-h/2}^{+h/2} v d v \\
&= \text{I} + \text{II} + \text{III} + \text{IV},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{I} &= \alpha \frac{R^x}{R^y} \delta^x \left[ v + (R^y - R^x) \log \left( 1 + \frac{v}{R^x} \right) \right]_{-h/2}^{h/2} \\
&= \alpha \frac{R^x}{R^y} \delta^x \left[ h + (R^y - R^x) \log \frac{1 + \frac{h}{2R^x}}{1 - \frac{h}{2R^x}} \right] \\
&= \alpha \frac{R^x}{R^y} \delta^x \left[ h + (R^y - R^x) \left( \frac{h}{R^x} + \frac{h^3}{12R^{x3}} + \dots \right) \right] \\
&\cong \alpha \frac{R^x}{R^y} \delta^x \left[ h \frac{R^y}{R^x} + \frac{h^3}{12} \frac{R^y - R^x}{R^{x3}} \right] \\
&= \alpha h \delta^x + \alpha \frac{h^3}{12} \frac{1}{R^x} \left( \frac{1}{R^x} - \frac{1}{R^y} \right) \delta^x,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{II} &= \alpha \frac{R^x}{R^y} \Delta^x \int_{-h/2}^{+h/2} \left\{ v + (R^y - R^x) \frac{v}{R^x + v} \right\} d v \\
&= \alpha \frac{R^x}{R^y} \Delta^x \left[ \frac{v^2}{2} + (R^y - R^x) v - R^x \log \left( 1 + \frac{v}{R^x} \right) \right]_{-h/2}^{+h/2} \\
&= \alpha \frac{R^x}{R^y} \Delta^x (R^y - R^x) \left( h - R^x \log \frac{1 + \frac{h}{2R^x}}{1 - \frac{h}{2R^x}} \right) \\
&= \alpha \frac{R^x}{R^y} \Delta^x (R^y - R^x) \left[ h - R^x \left( \frac{h}{R^x} + \frac{h^3}{12R^{x3}} + \dots \right) \right] \\
&\cong \alpha \frac{h^3}{12} \left( \frac{1}{R^y} - \frac{1}{R^x} \right) \Delta^x,
\end{aligned}$$

$$\text{III} = \alpha h \vartheta^x,$$

$$\text{IV} = \alpha \Theta^x \left[ \frac{v^2}{2} \right]_{-h/2}^{+h/2} = 0.$$

Im Endresultat ist daher:

$$N^x = \alpha h (\delta^x + \vartheta^x) + \frac{\alpha h^3}{12} \left( \frac{1}{R^y} - \frac{1}{R^x} \right) \left( \Delta^x - \frac{\delta^x}{R^x} \right).$$

Mit einem ähnlichen Gedankengang können wir die Ausdrücke für die weiteren Kräfte und Momente bestimmen. Die Teilrechnungen weglassend, gelangen wir zuletzt zu folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} N^x &= L (\delta^x + \vartheta^x) + K \left( \frac{1}{R^y} - \frac{1}{R^x} \right) \left( \Delta^x - \frac{\delta^x}{R^x} \right), \\ N^y &= L (\delta^y + \vartheta^y) + K \left( \frac{1}{R^x} - \frac{1}{R^y} \right) \left( \Theta^y - \frac{\vartheta^y}{R^y} \right), \\ N^{xy} &= \frac{L}{2} (\delta^{xy} + \vartheta^{xy}) + \frac{K}{2} \left( \frac{1}{R^y} - \frac{1}{R^x} \right) \left( \Delta^{xy} - \frac{\delta^{xy}}{R^x} \right), \\ N^{yx} &= \frac{L}{2} (\delta^{xy} + \vartheta^{xy}) + \frac{K}{2} \left( \frac{1}{R^x} - \frac{1}{R^y} \right) \left( \Theta^{xy} - \frac{\vartheta^{xy}}{R^y} \right); \\ M^x &= -K \left[ \left( \frac{1}{R^y} - \frac{1}{R^x} \right) \delta^x + \Delta^x + \Theta^x \right], \\ M^y &= -K \left[ \left( \frac{1}{R^x} - \frac{1}{R^y} \right) \vartheta^y + \Delta^y + \Theta^y \right], \\ M^{xy} &= -\frac{K}{2} \left[ \left( \frac{1}{R^y} - \frac{1}{R^x} \right) \delta^{xy} + \Delta^{xy} + \Theta^{xy} \right], \\ M^{yx} &= -\frac{K}{2} \left[ \left( \frac{1}{R^x} - \frac{1}{R^y} \right) \vartheta^{xy} + \Delta^{xy} + \Theta^{xy} \right]. \end{aligned} \tag{25}$$

## 11. Allgemeine Differentialgleichung der gekrümmten Schalen

Anlässlich der Behandlung der Gleichgewichtsgleichungen haben wir bewiesen, daß eine Beziehung (13) zwischen den Unbekannten  $n^x, n^y, n^{xy}, n^{yx}, m^x, m^y, m^{xy}, m^{yx}$  besteht.

Setzen wir in diese auf die reduzierten Kräfte bzw. Momente bezogenen Gleichungen die mit den Verschiebungsfunktionen  $\xi, \eta, \zeta$  ausgedrückten und sodann entsprechend reduzierten Werte der tatsächlichen Kräfte bzw. Momente ein, so erhalten wir die Beziehungen

$$\begin{aligned} g(p, q, r, s, t, \xi, \eta, \zeta, x_0, y_0, z_0), \\ h(p, q, r, s, t, \xi, \eta, \zeta, x_0, y_0, z_0), \\ i(p, q, r, s, t, \xi, \eta, \zeta, x_0, y_0, z_0), \\ j(p, q, r, s, t, \xi, \eta, \zeta, x_0, y_0, z_0). \end{aligned} \tag{26}$$

In obigen vier Gleichungen kommen nur noch die Unbekannten  $\xi, \eta, \zeta$  vor.

Es stehen uns vier Gleichungen mit drei Unbekannten zur Verfügung; wir können aber beweisen, daß die vierte Gleichung zu einer Identität führt, so daß wir nach Weglassen dieser vierten Gleichung im Endresultat ein Differentialgleichungssystem aus drei Gleichungen mit drei Unbekannten erhalten. Mit den entsprechenden Randbedingungen lösen wir dieses Gleichungssystem und so können die Verschiebungsfunktionen  $\xi, \eta, \zeta$  bestimmt werden und in deren Kenntnis sind auf Grund der Endformeln des vorigen Kapitels die inneren Kräfte bestimmbar.

Dieses Differentialgleichungssystem kann damit auf gekrümmte Schalen beliebiger Form und beliebiger Belastung verwendet werden. Im Falle einer konkreten Aufgabe haben wir daher nur die ersten bzw. zweiten Differentialquotienten aus der Gleichung der fraglichen Fläche zu bilden und diese in obige Gleichung einzusetzen. Aus der so gewonnenen Gleichung können die Bewegungen und inneren Kräfte der Mittelfläche der untersuchten Schale bestimmt werden.

Somit haben wir die Aufgabenstellung der Einleitung erfüllt. Als Beweis für die Verwendbarkeit dieser Lösung führen wir im folgenden einige charakteristische Beispiele an. Obige Gleichung ist nämlich für die Behandlung von Problemen der Platten, Scheiben, Membranschalen und Schalen beliebiger Form geeignet.

## 12. Beispiele

### a) Die Differentialgleichung der ebenen Platte

Die Gleichung der Fläche ist in diesem Falle  $z = f(x, y) = 0$ , daher  $p = q = r = s = t = 0$ .

Die Belastung sei  $z_0 = p(x, y)$ ,  $y_0 = 0$ ,  $x_0 = 0$ . Demzufolge gestalten sich die Gleichgewichtsgleichungen wie folgt:

$$q_x^x + q_y^y + p(x, y) = 0, \quad m_x^x + m_y^{yx} + q^x = 0, \quad m_x^{xy} + m_y^y + q^y = 0.$$

Wir setzen die nach  $x$  differenzierte zweite und nach  $y$  differenzierte dritte Gleichung in die erste Gleichung ein:

$$-m_{xx}^x - 2m_{xy}^{xy} - m_{yy}^y + p(x, y) = 0.$$

Die Momente sind

$$m^x = K(\zeta_{xx} + \mu\zeta_{yy}), \quad m^y = K(\zeta_{yy} + \mu\zeta_{xx}), \quad m^{xy} = (1 - \mu)K\zeta_{xy}.$$

Werden diese in die Gleichgewichtsgleichung eingesetzt, so ergibt sich die Beziehung

$$\zeta_{xxxx} + 2\zeta_{xxyy} + \zeta_{yyyy} = \frac{p(x, y)}{K}.$$

*b) Die Differentialgleichung einer Scheibe*

Die Mittelfläche der Scheibe ist eine Ebene, deren Gleichung  $z=0$  ist, daher  $p=q=r=s=t=0$ .

Die Belastung fällt in die Ebene der Scheibe. Daher haben wir

$$x_0 = x_0(x, y); \quad y_0 = y_0(x, y); \quad z_0(x, y) = 0.$$

Es tritt keine Biegung auf, so daß wir von vornherein wissen, daß

$$m^x = m^y = m^{xy} = m^{yx} = q^x = q^y = 0$$

ist. Gehen wir von der Formänderungsgleichung aus. Sie hat im Falle einer ebenen Platte die Form

$$(S_1 + S_2)_{xy} - P_{yy} - Q_{xx} = 0.$$

Die Formänderungen können durch die Beziehungen

$$\epsilon_{yy}^{xx} + \epsilon_{xx}^{yy} = \gamma_{xy}^y; \\ \epsilon^{xy} = \frac{1}{E} (n^x - \mu n^y), \quad \epsilon^{yy} = \frac{1}{E} (n^y - \mu n^x), \quad \gamma^y = \frac{2(1+\mu)}{E} n^{xy}$$

bestimmt werden. Werden diese in die Formänderungsgleichungen eingesetzt, so erhalten wir

$$n_{yy}^x - \mu n_{yy}^y + n_{xx}^y - \mu n_{xx}^x = 2(1+\mu) n_{xy}^{xy}.$$

Führen wir nun die Spannungsfunktion ein. Wie bereits bekannt ist

$$n^x = h F_{yy}; \quad n^{xy} = -h F_{xy}; \quad n^y = h F_{xx};$$

daher ist  $F_{xxxx} - 2\mu F_{xxyy} + F_{yyyy} = -2F_{xxyy} - 2\mu F_{xxyy}$

d. h.  $F_{xxxx} + 2F_{xxyy} + F_{yyyy} = 0$ .

Dies ist also die Differentialgleichung der Scheibe, anders gesagt jene des zweiachsigen Spannungszustandes.

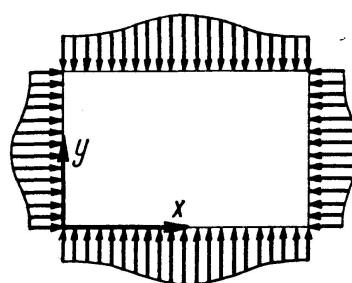


Fig. 6.

*c) Plattenbeulung*

Die gebeulte Platte (Fig. 6) hat ursprünglich eine ebene Fläche. Schreiben wir die Gleichgewichtsgleichungen für die gebeulte Form  $z=\zeta(x, y)$  auf und

nehmen wir an, daß die zweite Potenz dieser und deren Differentialquotienten gleich Null sind, so daß

$$\zeta^2 = \zeta_x^2 = \zeta_y^2 = \zeta_x \zeta_y = \dots = 0.$$

Die Gleichgewichtsgleichungen können in der Form

$$\begin{aligned} n_x^x + n_y^{yx} + x_0 &= 0, \\ n_x^{xy} + n_y^y + y_0 &= 0, \\ \zeta_{xx} n^x + 2 \zeta_{xy} n^{xy} + \zeta_{yy} n^y + q_x^x + q_y^y &= 0, \\ m_x^x + m_y^{yx} + q^x &= 0, \\ m_x^{xy} + m_y^y + q^y &= 0, \\ n^{xy} - n^{yx} &= 0 \end{aligned}$$

angeschrieben werden. Mit den Werten von  $q^x$  und  $q^y$  aus der vierten und fünften Gleichung in die dritte eingesetzt, erhalten wir die Beziehung

$$\zeta_{xx} n^x + 2 \zeta_{xy} n^{xy} + \zeta_{yy} n^y - m_x^x - 2 m_{xy}^{xy} - m_y^y = 0.$$

Im Falle unserer Annahmen ist

$$m^x = K(\zeta_{xx} + \mu \zeta_{yy}), \quad m^y = K(\zeta_{yy} + \mu \zeta_{xx}), \quad m^{xy} = (1 - \mu) K \zeta_{xy}.$$

Diese Ausdrücke in unsere obige Gleichung eingesetzt, erhalten wir die Beziehung

$$\zeta_{xx} n^x + 2 \zeta_{xy} n^{xy} + \zeta_{yy} n^y - K[\zeta_{xxxx} + 2 \zeta_{xxyy} + \zeta_{yyyy}] = 0$$

oder das Endresultat:

$$K(\Delta \Delta \zeta) - [\zeta_{xx} n^x + 2 \zeta_{xy} n^{xy} + \zeta_{yy} n^y] = 0.$$

Wie bekannt, ist dies die Differentialgleichung der Plattenbeulung.

#### d) Differentialgleichung von Membranschalen

Im Falle eines Membranspannungszustandes

$$m^x = m^y = m^{xy} = m^{yx} = q^x = q^y = 0$$

lauten daher die Gleichgewichtsgleichungen:

$$\begin{aligned} n_x^x + n_y^{yx} + x_0 &= 0, \\ n_y^y + n_x^{xy} + y_0 &= 0, \\ r n^x + s(n^{xy} + n^{yx}) + t n^y + z_0 - p x_0 - q y_0 &= 0. \end{aligned}$$

Es kann leicht eingesehen werden, daß

$$n^{xy} = n^{yx}.$$

Wenn die Spannungsfunktion eingeführt wird, erhalten wir das Endresultat

$$r F_{yy} - 2 s F_{xy} + t F_{xx} + (z_0 - p x_0 - q y_0) = 0.$$

Dies ist die wohlbekannte Differentialgleichung der Membranschalen.

e) Die Biegung einer Kreiszylinderschale

Gleichung und Differentialquotienten der Fläche lauten

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{R^2 - y^2}, \\ z_y &= q = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - y^2}}; \quad p = 0, \\ z_{yy} &= t = -\frac{R^2}{(\sqrt{R^2 - y^2})^3}; \quad s = 0; \quad r = 0. \end{aligned}$$

Die Krümmung ist

$$\frac{1}{R}.$$

Mit Rücksicht darauf, daß die durch W. FLÜGGE abgeleiteten Beziehungen in Zylinderkoordinaten angegeben sind, transformieren wir unsere obigen Formeln auf dieses Koordinatensystem (Fig. 7).

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{R^2 - y^2} = R \cos \beta, \\ y &= R \sin \beta, \\ z_y &= -\frac{y}{\sqrt{R^2 - y^2}} = -\operatorname{tg} \beta. \end{aligned}$$

Transformieren wir auch die Verschiebungen (Fig. 8)

$$\xi = u, \quad \eta = v \cos \beta + w \sin \beta, \quad \zeta = -v \sin \beta + w \cos \beta.$$

Nach Bildung der entsprechenden Differentialquotienten der Fläche und der Verschiebungsfunktion und nach Einsetzen in die Gleichungen (12) erhalten wir die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \delta^x &= \xi_x = u_x, & \vartheta^x &= \mu \frac{\eta_y + q \zeta_y}{1 + q^2} = \frac{\mu}{R} (w + v_\beta), \\ \delta^y &= \mu \xi_x = \mu u_x, & \vartheta^y &= \frac{\eta_y + q \zeta_y}{1 + q^2} = \frac{1}{R} (w + v_\beta), \\ \delta^{xy} &= (1 - \mu) \frac{\eta_x + q \zeta_x}{\sqrt{1 + q^2}} = (1 - \mu) v_x, & \vartheta^{xy} &= (1 - \mu) \frac{\zeta_y}{\sqrt{1 + q^2}} = (1 - \mu) \frac{u_\beta}{R}, \\ \Delta^x &= E_x = -w_{xx}, & \Theta^x &= \mu \frac{H_y + q Z_y}{1 + q^2} = \frac{\mu}{R^2} (v_\beta - w_{\beta\beta}), \\ \Delta^y &= \mu E_x = -\mu w_{xx}, & \Theta^y &= \frac{H_y + q Z_y}{1 + q^2} = \frac{1}{R^2} (v_\beta - w_{\beta\beta}), \\ \Delta^{xy} &= (1 - \mu) \frac{H_x + q Z_x}{\sqrt{1 + q^2}} \\ &= (1 - \mu) \frac{1}{R} (v_x - w_{\beta x}), & \Theta^{xy} &= (1 - \mu) \frac{E_y}{\sqrt{1 + q^2}} = -(1 - \mu) \frac{w_{\beta x}}{R}. \end{aligned}$$

Werden diese in die Gleichung (25) eingesetzt, so erhalten wir die Ausdrücke für die tatsächlichen Kräfte und Momente

$$\begin{aligned}
 N^x &= L \left[ u_x + \frac{\mu}{R} (v_\beta + w) \right] + \frac{K}{R} (-w_{xx}), \\
 N^y &= L \left[ \mu u_x + \frac{1}{R} (v_\beta + w) \right] + \frac{K}{R} \left( \frac{w}{R^2} + \frac{w_{\beta\beta}}{R^2} \right), \\
 N^{xy} &= L \frac{1-\mu}{2} \left( v_x - \frac{u_\beta}{R} \right) + \frac{K}{2R} (1-\mu) \left( \frac{v_x}{R} - \frac{w_{\beta x}}{R} \right), \\
 N^{yx} &= L \frac{1-\mu}{2} \left( v_x - \frac{u_\beta}{R} \right) - \frac{K}{2R} (1-\mu) \left( -\frac{w_{\beta x}}{R} - \frac{u_\beta}{R^2} \right); \\
 M^x &= \frac{K}{R} \left( -u_x + R w_{xx} - \frac{\mu}{R} v_\beta + \frac{\mu}{R} w_{\beta\beta} \right), \\
 M^y &= \frac{K}{R} \left( \mu R w_{xx} + \frac{w_{\beta\beta}}{R} + \frac{w}{R} \right), \\
 M^{xy} &= \frac{K}{2R} (1-\mu) (-2v_x + 2w_{\beta x}), \\
 M^{yx} &= \frac{K}{2R} (1-\mu) \left( \frac{u_\beta}{R} + 2w_{\beta x} - v_x \right).
 \end{aligned}$$

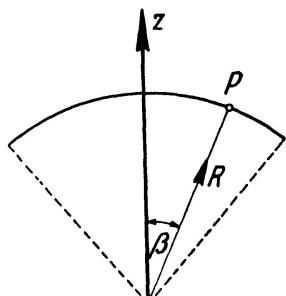


Fig. 7.

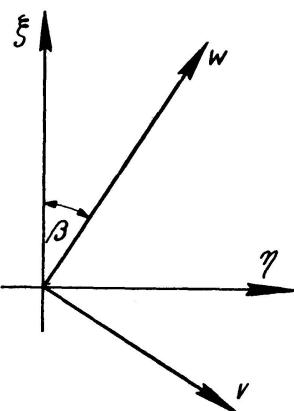


Fig. 8.

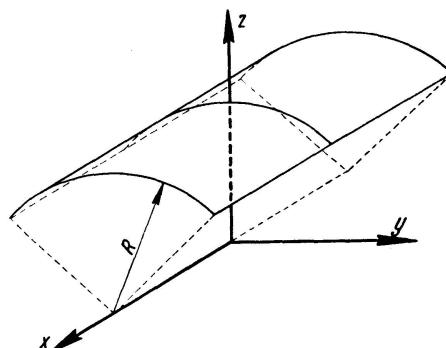


Fig. 9.

Wenn die letzteren in die Gleichgewichtsgleichung (13) eingesetzt werden, ergeben sich folgende drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 &R^2 u_{xx} + \frac{1-\mu}{2} u_{\beta\beta} + \mu R w_x + \frac{1+\mu}{2} R v_{\beta x} \\
 &+ \frac{K}{R^2 L} \left[ \frac{1-\mu}{2} u_{\beta\beta} - R^3 w_{xxx} + \frac{1-\mu}{2} R w_{x\beta\beta} \right] + \frac{x_0 R^2}{L} = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1+\mu}{2} R u_{\beta x} + v_{\beta \beta} + \frac{1-\mu}{2} R^2 v_{xx} + w_{\beta} \\
& + \frac{K}{R^2 L} \left[ \frac{3(1-\mu)}{2} R^2 v_{xx} - \frac{3-\mu}{2} R^2 w_{xx\beta} \right] + \frac{y_0 R^2}{L} = 0, \\
& \mu R u_x + v_{\beta} + w + \frac{K}{R^2 L} \left[ \frac{1-\mu}{2} R u_{x\beta\beta} - R^3 w_{xxx} - \frac{3-\mu}{2} R^2 v_{xx\beta} \right. \\
& \left. + R^4 w_{xxxx} + 2 R^2 w_{xx\beta\beta} + w_{\beta\beta\beta\beta} + 2 w_{\beta\beta} + w \right] + \frac{z_0 R}{L} = 0.
\end{aligned}$$

Die vierte Gleichung führt zu einer Identität, worüber man sich leicht überzeugen kann. Die Gleichungen sind mit dem durch W. FLÜGGE abgeleiteten Gleichungen vollkommen identisch. Dies ist zugleich eine Kontrolle der durch uns abgeleiteten Formeln.

### Literatur

1. W. FLÜGGE, «Statik und Dynamik der Schalen». Verlag von J. Springer, Berlin 1934.
2. K. GIRKMANN, «Flächentragwerke». Springer-Verlag, Wien 1946.
3. P. LARDY, «Die Elastizitätstheorie der parallelogrammförmigen Scheibe». Schweizerische Bauzeitung 1949, Nr. 3, p. 419—422.
4. E. BÖLCSKEI, «Deformation des voiles minces». Acta Technica Hungarica, Tom. V, Fasc. 4, p. 489—506.
5. W. S. WLASOW, «Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik». Akademie Verlag, Berlin 1958.
6. W. FUCHSSTEINER und A. SCHADER, «Allgemeine Schalengrundgleichungen». Beton- und Stahlbetonbau 1956. Jul. p. 145—153.

### Zusammenfassung

Die Abhandlung stellt die auf das rechtwinklige Koordinatensystem bezogenen, allgemeinen Gleichgewichts-Gleichungen der beliebig belasteten, allgemein gekrümmten, gleichmäßig dicken Schalen (Platten) unter Verwendung der sog. reduzierten Kräfte bzw. Momente auf. Unter den reduzierten Kräften bzw. Momenten werden die auf die  $xy$  Koordinatenebene bezogenen spezifischen Projektionskräfte, bzw. Momente verstanden. Mit den Verschiebungskomponenten  $\xi, \eta, \zeta$  der Richtungen  $x, y$  und  $z$  der Schalenmittelfläche werden die spezifischen Dehnungen und anschließend die Winkelverzerrungen beschrieben, sodann die spezifischen inneren Kräfte bzw. Momente unter Berücksichtigung des im schiefwinkligen Koordinatensystem gültigen Hookeschen Gesetzes bestimmt. Nach Einsetzen dieser Werte in die Gleichgewichtsgleichungen erhält man letztlich drei Differential-Gleichungen, in denen nur noch die drei Unbekannten  $\xi, \eta, \zeta$  der Verschiebung der Mittelfläche auftreten.

Dieses Differentialgleichungssystem kann auf gekrümmte Schalen beliebiger Form und beliebiger Belastung angewandt werden. Um die Verwendbarkeit der Berechnungsergebnisse zu beweisen, werden einige charakteristische Beispiele, wie die Ableitung der Differentialgleichungen von ebenen Platten, Scheiben, Membranschalen, Kreiszylinderschalen und des Beulens vorgeführt.

### Summary

The author derives general equations of equilibrium with reference to a system of rectangular coordinates, for shells of any shape and of uniform thickness, acted upon by any loads, by employing "reduced" forces and moments. This means the specific forces and moments in projection, with reference to the  $xy$  plane of the coordinates. The specific elongations and the angular deformations are expressed by means of the components  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  of the displacements of the median surface of the shell in the directions along  $x$ ,  $y$  and  $z$ , the author then determines the internal specific forces and moments by introducing Hooke's law, which is valid in the system of oblique coordinates. After the introduction of these values into the equilibrium equations, we obtain three differential equations in which only the three unknowns  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  expressing the displacements of the median surface, appear.

This system of differential equations may be applied to shells of any shape, acted upon by any load. In order to demonstrate the possible applications of the results of the calculation, the author gives some characteristic examples, such as the easy determination of the differential equations relating to flat plates, to thin walls, to shells not subjected to bending, to cylindrical shells and to the determination of buckling.

### Résumé

L'auteur établit les équations générales d'équilibre, rapportées à un système de coordonnées rectangulaires, pour des voiles de forme quelconque et d'épaisseur uniforme, soumis à des charges quelconques, en faisant appel aux forces et moments «réduits». Il faut entendre par là les forces et moments spécifiques en projection, rapportés au plan  $xy$  des coordonnées. Les allongements spécifiques et les déformations angulaires sont exprimés à l'aide des composantes  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  des déplacements de la surface médiane du voile suivant les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$ ; l'auteur détermine ensuite les forces et moments spécifiques internes en faisant intervenir la loi de Hooke, valable dans le système des coordonnées obliques. Après avoir introduit ces valeurs dans les équations d'équilibre, on obtient trois équations différentielles dans lesquelles n'appa-

raissent plus que les trois inconnues  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  exprimant les déplacements de la surface médiane.

Ce système d'équations différentielles peut être appliqué aux voiles de forme quelconque, soumis à une charge quelconque. Pour mettre en évidence les possibilités d'application des résultats du calcul, l'auteur présente quelques exemples caractéristiques, tels que la détermination simple des équations différentielles relatives aux plaques planes, aux parois minces, aux voiles sans flexion, aux voiles cylindriques et la détermination du voilement.