

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

**Band:** 20 (1960)

**Artikel:** Théorie générale du voilement des plaques rectangulaires orthotropes, encastrées ou appuyées sur leur contour, munies de raidisseurs parallèles aux bords à grandes rigidité flexionnelle et torsionnelle

**Autor:** Massonnet, Ch. / Mazy, G. / Tanghe, A.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-17561>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 12.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# **Théorie générale du voilement des plaques rectangulaires orthotropes, encastrées ou appuyées sur leur contour, munies de raidisseurs parallèles aux bords à grandes rigidités flexionnelle et torsionnelle**

*Allgemeine Theorie des Ausbeulens von eingespannten oder einfach gelagerten, rechteckigen orthotropen Platten, die mit zu den Kanten parallelen Aussteifungen großer Biegungs- und Torsionssteifigkeit versehen sind*

*General Theory of the Buckling of Orthotropic, Rectangular Plates, Clamped or Freely Supported at the Edges, Provided with Stiffeners, Parallel to the Edges, Having Considerable Flexural and Torsional Rigidities*

CH. MASSONNET

Professeur ordinaire à  
l'Université de Liège

G. MAZY

Assistant à l'Université  
de Liège

A. TANGHE

Ancien assistant à l'Uni-  
versité de Liège

## **1. Introduction**

Durant les cinquante dernières années, on a vu se développer, sous l'impulsion du professeur S. TIMOSHENKO, la théorie du voilement des plaques rectangulaires librement posées sur leur contour, soumises à compression, flexion et cisaillement dans leur plan, et éventuellement renforcées par des raidisseurs dont on a généralement négligé la rigidité torsionnelle. L'essentiel de ces recherches est reproduit dans l'ouvrage de S. TIMOSHENKO intitulé «Théorie de la Stabilité Élastique».

La condition d'appui simple de la plaque sur son contour a été choisie, non pas parce qu'elle représente le mieux la réalité, mais bien parce qu'elle se prête à une analyse mathématique particulièrement simple vu que la déformée de la plaque peut, dans ce cas, se représenter par une série double de FOURIER de la forme

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b}. \quad (1,1)$$

Les expériences d'un des auteurs [1,2] ont montré que les tensions critiques des panneaux d'âme d'une poutre à âme pleine étaient appréciablement supérieures à celles données par la théorie de TIMOSHENKO.

Par ailleurs, le professeur DÖRNEN a proposé [3] de constituer les semelles des grandes poutres soudées à âme pleine de profils tubulaires réalisés par l'emploi de grandes cornières, comme l'indique la figure 1.1. Cette disposition nous paraît intéressante, parce qu'elle réalise un encastrement quasi-parfait de l'âme de la poutre sur ses bords horizontaux, en même temps qu'elle réduit la hauteur de cette âme. Il doit en résulter une augmentation très substantielle de la stabilité au voilement, surtout si l'on renforce l'âme (fig. 1.1) par des raidisseurs tubulaires obtenus par soudure de cornières ou de demi-tubes, comme l'a proposé F. W. BORNSCHEUER [4].

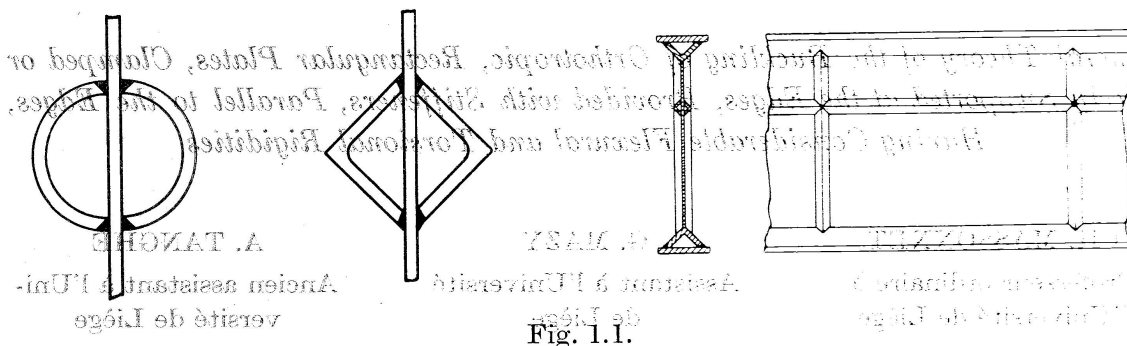


Fig. 1.1.

Enfin, la technique moderne utilise de plus en plus des ponts mixtes formés d'une dalle en béton associée à des poutres dissymétriques en double té. Pour tirer pleinement parti du béton de la dalle, on précontraint le pont par des câbles qui soumettent la poutre mixte à des efforts de compression excentrique. Dans ces conditions, l'âme est sollicitée par des tensions de compression dont le diagramme est trapézoïdal et l'on est conduit à la renforcer par un assez grand nombre de raidisseurs à peu près équidistants. L'étude théorique de la stabilité individuelle de ces raidisseurs étant pratiquement impossible, la manière la plus simple de dimensionner au voilement des âmes raidies de cette façon est de répartir la rigidité des raidisseurs horizontaux continûment sur toute la hauteur de l'âme et de considérer cette dernière comme une plaque orthogonalement anisotrope possédant une rigidité  $D_x$  dans le sens des  $x$ , supérieure à la rigidité  $D_y$  dans le sens des  $y$ .

Le but de la présente note est tout d'abord d'établir une méthode générale permettant de calculer les tensions critiques de voilement d'une plaque rectangulaire orthotrope, encastree ou appuyée sur son contour, renforcée par des raidisseurs possédant à la fois des rigidités flexionnelles et torsionnelles sensibles. Ensuite, de donner une série de résultats numériques obtenus en appliquant cette méthode et en effectuant les calculs à l'aide de l'ordinateur IBM 650 du Centre de Calcul de l'Université de Liège.

## PREMIÈRE PARTIE: THÉORIE GÉNÉRAL

**2. Principe de la méthode — notations**

L'étude du voilement des plaques encastrées sur un ou plusieurs bords a été entreprise par la méthode de RITZ [5, 6], la méthode de TREFFTZ, dite encore des multiplicateurs de LAGRANGE [7] et le calcul des différences (8).

La méthode de RITZ a été appliquée en adoptant pour le déplacement normal  $w$  d'un point du feuillet moyen de la plaque une série double de la forme

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} f_m(x) f_n(y). \quad (2,1)$$

IGUCHI a construit [5] des fonctions  $f_m(x)$  et  $f_n(y)$  satisfaisant aux conditions d'appui simple ou d'encastrement parfait aux extrémités de l'intervalle. Malheureusement, ces fonctions ne jouissent d'aucune propriété d'orthogonalité, de sorte que les calculs sont d'une complexité extrême; ils n'ont été exécutés par IGUCHI que dans le cas de la plaque comprimée uniformément. Un progrès marquant a été réalisé par NÖLKE [6], qui a envisagé le problème de voilement de la plaque fléchie et adopté pour  $f_m$  et  $f_n$  la suite des déformées vibratoires propres d'une barre encastrée ou appuyée à ses deux extrémités.

On sait que ces déformées jouissent des propriétés d'orthogonalité suivantes:

$$\int_0^l f_m(x) f_n(x) dx = 0; \quad \int_1^l f_m''(x) f_n''(x) dx = 0, \quad \text{si } m \neq n \quad \text{!}(2,2)$$

qui ont pour effet de diminuer considérablement le nombre d'intégrales à calculer.

On peut se demander si les fonctions vibratoires propres sont bien celles qui sont les plus adéquates pour résoudre le problème de voilement. A ce propos, il faut rappeler brièvement la méthode énergétique de calcul des tensions critiques de voilement. Cette méthode consiste à exprimer que, à l'état critique, l'équilibre est indifférent.

Désignons par  $\Delta \mathcal{E}$  l'accroissement d'énergie totale de la plaque en équilibre, pour une déformation virtuelle compatible avec les conditions d'appui; on sait que

$$\Delta \mathcal{E} = \Delta V - \Delta T \quad (2,3)$$

où  $\Delta V$  est l'énergie potentielle de flexion mise en jeu par la déformation de voilement et  $\Delta T$  le travail des forces extérieures appliquées dans le plan de la plaque. D'après le théorème du minimum de l'énergie totale,  $\Delta \mathcal{E}$  est toujours moindre pour la déformation réelle de la plaque que pour toute autre déformation virtuelle. D'autre part, pour que l'équilibre de la plaque soit indifférent, il faut que  $\Delta \mathcal{E}$  soit nul pour la déformée virtuelle envisagée. On peut

résumer la discussion qui précède en disant que, au moment du voilement, on a

$$\Delta \mathcal{E} = \text{minimum} = \text{zéro}.$$

En définitive, la méthode de l'énergie, due à RAYLEIGH, RITZ et TIMOSHENKO, consiste à exprimer les conditions de minimum de  $\Delta \mathcal{E}$  sous la forme

$$\frac{\partial(\Delta \mathcal{E})}{\partial a_{mn}} = 0 \quad \text{quels que soient } m \text{ et } n. \quad (2,4)$$

Ces conditions représentent des équations linéaires et homogènes par rapport aux paramètres  $a_{mn}$ . Ce système d'équations doit être compatible, ce qui exige que le déterminant des coefficients des inconnues  $a_{mn}$  s'annule. Cela fournit une équation qui permet de calculer la tension critique de voilement.

L'inspection des expressions de  $\Delta V$  et  $\Delta T$  qui seront étudiées en détail au par. 3 ci-après, montre que ces expressions ne contiennent que des carrés et produits des dérivées partielles premières et secondes du déplacement transversal  $w$ , à l'exclusion de l'inconnue  $w$  elle-même.

Par conséquent, la méthode énergétique conduira à un minimum de calculs si les fonctions  $f_m, f_n$  intervenant dans le développement en série double (2,1) jouissent de propriétés d'orthogonalité de la forme:

$$\int_0^l f'_m(x) f'_n(x) dx = 0; \quad \int_0^l f''_m(x) f''_n(x) dx = 0, \quad \text{pour } m \neq n \quad (2,5)$$

de façon à entraîner l'annulation du maximum de termes rectangles dans l'évaluation de  $\Delta V$  et  $\Delta T$ .

Il existe effectivement une suite de fonctions satisfaisant aux deux conditions (2,5); ce sont les fonctions qui représentent les déformées de flambement successives d'une barre prismatique encastrée ou appuyée à ses deux extrémités.

En effet, l'un de nous a démontré par un calcul direct dans un mémoire antérieur [10] que les fonctions en question satisfaisaient effectivement aux conditions (2,5). Depuis lors, F. BLEICH [11] a établi les propriétés (2,5) en toute généralité.

Si l'on remarque que l'expression de la fonction  $f_m(x)$  ne contient que les lignes trigonométriques usuelles, on conviendra que le calcul des intégrales des produits de dérivées de  $f_m$  n'est en tout cas pas plus compliqué que le calcul des intégrales analogues relatives aux déformées vibratoires, puisque les expressions de ces dernières contiennent à la fois des lignes circulaires et des lignes hyperboliques.

#### *Notations*

- $a$       largeur de la plaque.  
 $b$       hauteur de la plaque.

$h$	épaisseur de la plaque.
$E$	module d'élasticité longitudinale
$\eta$	coefficient de Poisson
	} du métal utilisé.
$D = \frac{Eh^3}{12(1-\eta^2)}$	rigidité flexionnelle de la tôle.
$D_x$	rigidité flexionnelle moyenne dans le sens des $x$ d'une plaque nervurée <sup>1)</sup> .
$D_y$	rigidité flexionnelle moyenne dans le sens des $y$ d'une plaque nervurée.
$H \equiv D_1 + 2D_{xy}$	rigidité torsionnelle moyenne d'une plaque nervurée.
$\sigma_0$	tension de flexion pure au point $y = 0$ .
$\sigma$	tension uniforme de compression pure ou tension de flexion pure à un niveau quelconque: $\sigma = \sigma_0 \left(1 - \frac{2y}{b}\right)$ .
$\tau$	tension de cisaillement, supposée uniformément répartie.
$\sigma_{cr}^0$	tension critique dans la sollicitation par flexion pure.
$\sigma_{cr}$	tension critique dans la sollicitation par compression pure.
$\tau_{cr}^0$	tension critique dans la sollicitation par cisaillement pur.
$\sigma_{cr}$	} tensions critiques dans la sollicitation simultanée par flexion pure et
$\tau_{cr}$	
$w$	déplacement d'un point du feuillet moyen normalement à ce feuillet.
$a_{mn}$	coefficient intervenant dans l'expression (2,1) de ce déplacement.
$v$	nombre de raidisseurs verticaux.
$h$	nombre de raidisseurs horizontaux.
$I_v$	moment d'inertie d'un raidisseur vertical.
$I_h$	moment d'inertie d'un raidisseur horizontal.
$\Omega_h$	aire de la section d'un raidisseur horizontal.
$C_v, C_h$	rigidité torsionnelle d'un raidisseur vertical/horizontal.
$c$	abscisse d'un raidisseur vertical.
$d$	ordonnée d'un raidisseur horizontal.
$\Delta \mathcal{E}$	variation de l'énergie totale de la plaque pendant le flambement.
$\alpha = \frac{a}{b} \sqrt{\frac{D_y}{D_x}}$	rapport des côtés généralisé <sup>2)</sup> .
$\beta = \frac{H}{\sqrt{D_x D_y}}$	paramètre de torsion de la plaque orthotrope.
$\sigma_e = \frac{\pi^2 \sqrt{D_x D_y}}{b^2 h}$	tension critique de référence d'Euler <sup>2)</sup> .

1) Le présent mémoire expose la théorie générale du voilement des plaques orthotropes, mais ne donne des applications numériques de la théorie que dans le cas particulier des plaques isotropes; il est donc inutile d'exposer ici la détermination détaillée des constantes  $D_x$ ,  $D_y$ ,  $H$ , pour laquelle on renvoie à S. TIMOSKENKO, Théorie de la Stabilité élastique, page 367.

2) Dans le cas d'une plaque isotrope, on a  $D_x = D_y = H = D$ ,  $\beta = 1$  et les paramètres  $\alpha$  et  $\sigma_e$  se réduisent aux valeurs classiques  $\alpha = \frac{a}{b}$  et  $\sigma_e = \frac{\pi^2 D}{b^2 h}$ , utilisées dans la théorie des plaques isotropes. On a de même alors:  $\gamma = \frac{EI}{bD}$  et  $\theta = \frac{C}{bD}$ .

$\left. \begin{array}{l} k_\sigma \\ k_{\sigma_0} \\ k_\tau \end{array} \right\}$  coefficients de voilement définis par les relations  $\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{cr} = k_\sigma \sigma_e. \\ \sigma_{cr}^0 = k_{\sigma_0} \sigma_e. \\ \tau_{cr}^0 = k_\tau \sigma_e. \end{array} \right.$   
 $\left. \begin{array}{l} \gamma_v \\ \gamma_h \end{array} \right\}$  rigidités flexionnelles relatives d'un raidisseur<sup>2)</sup>, définies par  $\gamma = \frac{EI}{b\sqrt{D_x D_y}}$ .  
 $\delta$  section relative d'un raidisseur horizontal définie par  $\frac{\Omega_h}{bh}$ .

$i, j, m, n, p, q$  indices sommatoires.

$A, B, C, E, F$  intégrales intervenant dans l'expression de la variation d'énergie totale de la plaque.

$\theta_v = \frac{C_v}{b\sqrt{D_x D_y}}$   
 $\theta_h = \frac{C_h}{b\sqrt{D_x D_y}}$  } rigidité torsionnelle relative d'un raidisseur<sup>2)</sup>.

### 3. Etablissement de l'équation de l'énergie pour une plaque rectangulaire fixée de façon quelconque sur ses bords

L'équation de l'énergie s'écrit:

$$\Delta \mathcal{E} \equiv V_{\text{plaque}} + V_{\text{flexion raidisseurs}} + V_{\text{torsion raidisseurs}} - T_{\sigma \text{ comp. plaque}} - T_{\sigma_0 \text{ flex. plaque}} - T_{\tau \text{ plaque}} - T_{\sigma \text{ raidisseurs horizontaux}} = 0.$$

On va examiner successivement les expressions détaillées des divers termes de cette équation.

L'énergie potentielle de la plaque a pour expression générale [12, 13]:

$$V_{\text{plaque}} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[ D_x \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2 D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_y \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4 D_{xy} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

Dans le cas particulier de plaques appuyées ou encastrées sur un contour rigide, on sait par le théorème de Gauss que

$$\iint_{00}^{ab} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy = 0.$$

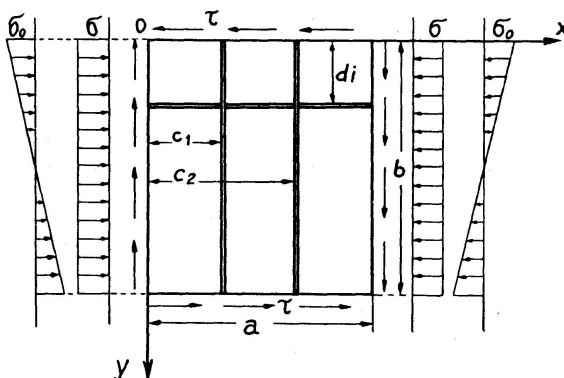


Fig. 3.1.

En tenant compte de cette relation et de ce que, par définition,  $H = D_1 + 2D_{xy}$ , on peut écrire  $V$  sous la forme plus simple:

$$V_{\text{plaque}} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[ D_x \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2H \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_y \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy. \quad (3,1)$$

Pour un raidisseur horizontal d'ordonnée  $y = d_i$ , on a

$$V_{\text{flexion}} = \frac{E I_h}{2} \int_0^a \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=d_i}^2 dx \quad (3,2)$$

et

$$V_{\text{torsion}} = \frac{C_h}{2} \int_0^a \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{y=d_i}^2 dx = \frac{C_h}{2} \int_0^a \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{y=d_i}^2 dx \quad (3,3)$$

en désignant par  $C_h$  la rigidité torsionnelle du raidisseur horizontal et par  $\psi = \frac{\partial w}{\partial y}$  l'angle de torsion de la section courante du raidisseur.

Les formules applicables à un raidisseur vertical d'abscisse  $x = c_i$  s'écrivent par analogie

$$V_{\text{flexion}} = \frac{E I_v}{2} \int_0^b \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=c_i}^2 dy \quad (3,4)$$

et

$$V_{\text{torsion}} = \frac{C_v}{2} \int_0^b \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{x=c_i}^2 dy. \quad (3,5)$$

Le travail effectué par les tensions normales de compression uniforme  $\sigma$  a pour expression

$$T_\sigma = \sigma h \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy. \quad (3,6)$$

Le travail effectué par les tensions normales de flexion pure réparties suivant la loi

$$\sigma(y) = \sigma_0 \left( 1 - \frac{2y}{b} \right),$$

représentée à la figure 3.1, a pour expression:

$$T_{\sigma_0} = \frac{\sigma_0 h}{2} \int_0^a \int_0^b \left( 1 - \frac{2y}{b} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy. \quad (3,7)$$

Le travail effectué par les tensions de cisaillement pur  $\tau$  vaut

$$T_\tau = \tau h \int_0^a \int_0^b \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy. \quad (3,8)$$



Enfin, le travail de la force de compression  $\Omega_i \left[ \sigma_0 \left( 1 - \frac{2d_i}{b} \right) + \sigma \right] = \Omega_i \sigma(d_i)$  appliquée à un raidisseur horizontal d'ordonnée  $y = d_i$  s'écrit:

$$T_{\sigma \text{ raidisseur}} = \frac{\Omega_i \sigma(d_i)}{2} \int_0^a \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{y=d_i}^2 dx. \quad (3,9)$$

Comme on l'a déjà dit dans l'introduction, on représente dans cette étude la déformée de la plaque par une série double de la forme

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} f_m(x) f_n(y). \quad (3,10)$$

On a directement

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} f'_m(x) f_n(y),$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} f''_m(x) f_n(y)$$

$$\text{et de même} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} f_m(x) f'_n(y), \quad (3,11)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} f_m(x) f''_n(y).$$

$$\text{Enfin,} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} f'_m(x) f'_n(y).$$

Nous allons étudier ci-après quelles sont les intégrales qui se présentent dans le calcul des expressions (3,1) à (3,9).

Commençons par l'expression (3,6); en y remplaçant  $\frac{\partial w}{\partial x}$  par sa valeur (3,11), elle s'écrit

$$T_{\sigma} = \frac{\sigma h}{2} \iint_0^a \left( \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} f'_m(x) f_n(y) \right)^2 dx dy.$$

Dans le développement du carré de la somme double, tous les termes rectangles par rapport à  $f'$ , c'est-à-dire les termes contenant le produit  $f'_i f'_j$  ( $i \neq j$ ) disparaissent en vertu de la relation d'orthogonalité

$$\int_0^a f'_i(x) f'_j(x) dx = 0. \quad (i \neq j) \quad (3,7)$$

On peut donc écrire

$$T_{\sigma} = \frac{\sigma h}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left\{ \int_0^a f_m'^2(x) dx [a_{mp} a_{mq} \int_0^b f_p(y) f_q(y) dy] \right\}. \quad (3,12)$$

L'évaluation de ce terme exige donc le calcul des deux intégrales suivantes:

$$A_m \equiv \frac{2l}{\pi^2} \int_0^l f_m'^2(x) dx, \quad (3,13)$$

$$E_{mn} \equiv \frac{1}{l} \int_0^l f_m(x) f_n(x) dx. \quad (3,14)$$

Moyennant les notations  $A_m$  et  $E_{mn}$ , l'expression (3,12) s'écrit:

$$T_\sigma = \frac{\pi^2 \sigma h b}{4a} \sum_m \sum_p \sum_q a_{mp} a_{mq} A_m E_{pq}. \quad (3,15)$$

Passons maintenant au terme  $T_{\sigma_0}$  donné par l'expression (3,7); en y remplaçant  $\frac{\partial w}{\partial x}$  par sa valeur (3,11) et en tenant compte de la formule (2,5) comme ci-dessus, on obtient:

$$T_{\sigma_0} = \frac{\sigma_0 h}{2} \sum_m \sum_p \sum_q a_{mp} a_{mq} \int_0^a f_m'^2(x) dx \left(1 - \frac{2y}{b}\right) f_p(y) f_q(y) dy.$$

On voit que l'évaluation de ce terme fait intervenir l'expression (3,15) ainsi que l'expression nouvelle

$$F_{mn} \equiv \frac{1}{l} \int_0^l \left(1 - \frac{2x}{l}\right) f_m(x) f_n(x) dx. \quad (3,16)$$

En introduisant les notations (3,13) et (3,16) dans l'expression de  $T_{\sigma_0}$  cette dernière devient

$$T_{\sigma_0} = \frac{\tau^2 \sigma_0 h b}{4a} \sum_m \sum_n \sum_p a_{mn} a_{mp} A_m F_{np}. \quad (3,17)$$

De même, en remplaçant  $\frac{\partial w}{\partial x}$  et  $\frac{\partial w}{\partial y}$  par leurs valeurs (3,11) dans l'expression (3,8), il vient successivement:

$$\begin{aligned} T_\tau &= \tau h \int_0^a \int_0^b [\sum_m \sum_n a_{mn} f_m'(x) f_n(y)] [\sum_p \sum_q a_{pq} f_p(x) f_q'(y)] dx dy \\ &= \tau h \sum_m \sum_n \sum_p \sum_q a_{mn} a_{pq} \int_0^a f_p(x) f_m'(x) dx \int_0^b f_n(y) f_q'(y) dy. \end{aligned} \quad (3,18)$$

L'évaluation de ce terme exige le calcul de l'intégrale

$$C_{mn} = \int_0^l f_m(x) f_n'(x) dx. \quad (C_{mn} \neq C_{nm}) \quad (3,19)$$

Moyennant cette notation, l'expression (3,18) prend la forme

$$T_\tau = \tau h \sum_m \sum_n \sum_p \sum_q a_{mn} a_{pq} C_{pm} C_{nq}. \quad (3,20)$$

Enfin, le terme  $T_{\text{raidisseur horizontal}}$  devient, en remplaçant  $w$  par sa valeur explicite (3,10) dans l'expression (3,9):

$$\begin{aligned} T_{raid.horiz.} &= \frac{\Omega_i}{2} \left[ \sigma + \sigma_0 \left( 1 - \frac{2d_i}{b} \right) \right] \int_0^a \left[ \sum_m \sum_n a_{mn} f'_m(x) f'_n(d_i) \right]^2 dx \\ &= \frac{\Omega_i}{2} \left[ \sigma + \sigma_0 \left( 1 - \frac{2d_i}{b} \right) \right] \sum_m \sum_n \sum_p a_{mn} a_{mp} f_n(d_i) f_p(d_i) \int_0^a f_m'^2(x) dx. \end{aligned}$$

Ce terme peut s'écrire, moyennant la notation (3,13)

$$T_{raid.horiz.} = \frac{\pi^2 \Omega_i}{4a} \left[ \sigma + \sigma_0 \left( 1 - \frac{2d_i}{b} \right) \right] \sum_m \sum_n \sum_p a_{mn} a_{mp} f_n(d_i) f_p(d_i) A_m. \quad (3,21)$$

Il ne nécessite pas le calcul d'intégrales nouvelles.

Passons maintenant aux termes représentant les énergies potentielles des diverses parties du système.

Le terme  $V_{plaque}$  donné par l'expression (3,1) s'écrit sous la forme explicite:

$$\begin{aligned} V_{plaque} &= \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \{ D_x \left[ \sum_m \sum_n a_{mn} f''_m(x) f_n(y) \right] \left[ \sum_p \sum_q a_{pq} f''_p(x) f_q(y) \right] \right. \\ &\quad + 2H \left[ \sum_m \sum_n a_{mn} f''_m(x) f_n(y) \right] \left[ \sum_p \sum_q a_{pq} f_p(x) f''_q(y) \right] \\ &\quad \left. + D_y \left[ \sum_m \sum_n a_{mn} f_m(x) f''_n(y) \right] \left[ \sum_p \sum_q a_{pq} f_p(x) f''_q(y) \right] \right\} dx dy. \end{aligned} \quad (3,22)$$

Or, on sait que l'on a

$$\int_0^l f'_m(x) f'_n(x) dx = 0. \quad (m \neq n)$$

En intégrant par parties, on peut encore écrire cette formule sous la forme

$$[f_m(x) f'_n(x)]_0^l - \int_0^l f_m(x) f''_m(x) dx = 0,$$

mais le terme intégré est nul, parce qu'on a toujours

$$f_m(0) = f_m(a) = 0.$$

Par conséquent, les fonctions  $f$  satisfont encore à la relation générale d'orthogonalité

$$\int_0^l f_m(x) f''_n(x) dx = 0 \quad \text{pour } m \neq n. \quad (3,23)$$

De plus, si  $m=n$ , on a

$$\int_0^a f_m(x) f''_m(x) dx = - \int_0^a f_m'^2(x) dx = - \frac{\pi^2 A m}{2l}. \quad (3,24)$$

Si nous développons à présent l'expression (3,22) de  $V_{plaque}$  donnée ci-dessus, nous trouvons

$$\begin{aligned} V_{plaque} &= \frac{D_x}{2} \sum_m \sum_n \sum_p \left[ \int_0^a f_m'^2(x) dx a_{mn} a_{mp} \int_0^b f_n(y) f_p(y) dy \right] \\ &\quad + H \sum_m \sum_n \left[ a_{mn}^2 \int_0^a f_m(x) f''_m(x) \int_0^b f_n(y) f''_n(y) dy \right] \\ &\quad + \frac{D_y}{2} \sum_m \sum_n \sum_p \left[ a_{mn} a_{pn} \int_0^a f_m(x) f_p(x) dx \int_0^b f_n'^2(y) dy \right]. \end{aligned}$$

En utilisant les notations (3,13) et (3,14) et en posant de plus

$$B_m = \frac{2l^3}{\pi^4} \int_0^l f_m''^2(x) dx, \quad (3,25)$$

on peut écrire l'expression de  $V_{\text{plaque}}$  sous la forme condensée suivante:

$$V_{\text{plaque}} = \frac{\pi^4}{4} \left\{ D_x \frac{b}{a^3} \sum_m \sum_n \sum_p a_{mn} a_{mp} E_{np} + \frac{H}{ab} \sum_m \sum_n a_{mn}^2 A_m A_n \right. \\ \left. + D_y \frac{a}{b^3} \sum_m \sum_n \sum_p a_{mn} a_{pn} B_n E_{mp} \right\}. \quad (3,26)$$

L'énergie potentielle de flexion d'un raidisseur horizontal s'écrit, en remplaçant  $w$  par son expression développée (3,10)

$$V_{\text{flex.raid.h.}} = \frac{E I_h}{2} \int_0^a \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=d_i} = \frac{E I_h}{2} \int_0^a \left[ \sum_m \sum_n a_{mn} f_m''(x) f_n(d_i) \right]^2 dx \\ = \frac{E I_h}{2} \sum_m \sum_n \sum_p a_{mn} a_{mp} f_n(d_i) f_p(d_i) \int_0^a f_m''^2(x) dx.$$

Grâce à la notation (3,25), cela peut s'écrire

$$V_{\text{flex.raid.h.}} = \frac{\pi^4 E I_h}{4} \frac{1}{a^3} \sum_m \sum_n \sum_p a_{mn} a_{mp} f_n(d_i) f_p(d_i) B_m. \quad (3,27)$$

Pour un raidisseur vertical, on aurait de même

$$V_{\text{flex.raid.v.}} = \frac{\pi^4 E I_v}{4} \frac{1}{b^3} \sum_m \sum_n \sum_p a_{mn} a_{pn} f_m(c_i) f_p(c_i) B_n. \quad (3,28)$$

On vérifierait aisément que les énergies potentielles de torsion de ces mêmes raidisseurs s'écrivent respectivement:

$$V_{\text{torsion raid.h.}} = \frac{\pi^2 C_h}{4a} \sum_m \sum_n \sum_p a_{mn} a_{mp} f'_n(d_i) f'_p(d_i) A_m, \quad (3,29)$$

$$V_{\text{torsion raid.v.}} = \frac{\pi^2 C_v}{4b} \sum_m \sum_n \sum_p a_{mn} a_{pn} f'_m(c_i) f'_p(c_i) A_n. \quad (3,30)$$

En résumé, il faut calculer les cinq intégrales sans dimensions  $A_m$ ,  $B_m$ ,  $C_{mn}$ ,  $E_{mn}$  et  $F_{mn}$ , définies respectivement par les formules (3,13), (3,25), (3,19), (3,14) et (3,16).

Parmi ces intégrales, les deux premières sont à un seul indice et leurs valeurs numériques seront données dans des tables à simple entrée. Les trois dernières sont à deux indices et nécessiteront des tables à double entrée.

On remarquera que  $E_{mn} = E_{nm}$ ,  $F_{mn} = F_{nm}$ , mais que  $C_{mn} \neq C_{nm}$ . Moyennant ces notations, le critère de l'énergie s'écrit sous la forme:

$$\begin{aligned}
\delta(V - T) \equiv & \delta \left[ -\frac{\pi^2 \sigma h b}{4a} \sum_m \sum_n \sum_p a_{mn} a_{mp} A_m E_{np} \right. \\
& - \frac{\pi^2 \sigma_0 h b}{4a} \sum_m \sum_n \sum_p a_{mn} a_{mp} A_m F_{np} - \tau h \sum_m \sum_n \sum_p \sum_q a_{mn} a_{pq} C_{pm} C_{nq} \\
& - \sum_{i=1}^h \frac{\pi^2 \Omega_i}{4a} \left[ \sigma + \sigma_0 \left( 1 - 2 \frac{d_i}{b} \right) \right] \sum_m \sum_n \sum_p a_{mn} a_{mp} f_n(d_i) f_p(d_i) A_m \\
& + \frac{\pi^4}{4} \left\{ \frac{b}{a^3} D_x \sum_m \sum_n \sum_p a_{mn} a_{mp} B_m E_{np} + \frac{a}{b^3} D_y \sum_m \sum_n \sum_p a_{mn} a_{pn} B_n E_{np} \right. \\
& \quad \left. + \frac{H}{ab} \sum_m \sum_n a_{mn}^2 A_m A_n \right\} \tag{3,31} \\
& + \sum_{i=1}^v \frac{\pi^4 E I_i}{4b^3} \sum_m \sum_n \sum_p a_{mn} a_{pn} f_m(c_i) f_p(c_i) B_n \\
& + \sum_{i=1}^h \frac{\pi^4 E I_i}{4a^3} \sum_m \sum_n \sum_p a_{mn} a_{mp} f_n(d_i) f_p(d_i) B_m \\
& + \sum_{i=1}^v \frac{\pi^2 C_{iv}}{4b^3} \sum_m \sum_n \sum_p a_{mn} a_{pn} b f'_m(c_i) b f'_p(c_i) A_n \\
& \left. + \sum_{i=1}^h \frac{\pi^2 C_{ih}}{4a^3} \sum_m \sum_n \sum_p a_{mn} a_{mp} a f'_n(d_i) a f'_p(d_i) A_m \right] = 0.
\end{aligned}$$

#### 4. Détermination des tensions critiques de voilement

En vue de ne travailler que sur des quantités non dimensionnelles, nous introduirons les symboles sans dimensions ci-après:

$$\begin{aligned}
\sigma_e &= \frac{\pi^2 \sqrt{D_x D_y}}{b^2 h}, & k_\sigma &= \frac{\sigma}{\sigma_e}, & k_{\sigma_0} &= \frac{\sigma_0}{\sigma_e}, & k_\tau &= \frac{\tau}{\sigma_e}, \\
\gamma &= \frac{E I}{b \sqrt{D_x D_y}}, & \delta &= \frac{\Omega}{b h}, & \theta &= \frac{C}{b \sqrt{D_x D_y}}, & \alpha &= \frac{a^4}{b} \sqrt{\frac{D_y}{D_x}}, \tag{4,1} \\
\beta &= \frac{H}{\sqrt{D_x D_y}}.
\end{aligned}$$

Nous multiplierons ensuite tous les termes de l'expression (3,31) par  $\frac{2ab}{\pi^4 \sqrt{D_x D_y}}$ ; cette expression prend alors la forme suivante:

$$\begin{aligned}
 \delta \left\{ -\frac{k_\sigma}{2} \sum_m \sum_n \sum_p a_{mn} a_{mp} A_m E_{np} - \frac{k_{\sigma_0}}{2} \sum_m \sum_n \sum_p a_{mn} a_{mp} A_m F_{np} \right. \\
 - \frac{2k_\tau \alpha}{\pi^2} \sum_m \sum_n \sum_p \sum_q a_{mn} a_{pq} C_{pm} C_{nq} \\
 - \sum_{i=1}^h \frac{\delta_i}{2} \left[ k_\sigma + k_{\sigma_0} \left( 1 - 2 \frac{d_i}{b} \right) \right] \sum_m \sum_n \sum_p a_{mn} a_{mp} f_n(d_i) f_p(d_i) A_m \\
 + \left[ \frac{1}{2\alpha^2} \sum_m \sum_n \sum_p a_{mn} a_{mp} B_m E_{np} + \frac{\alpha^2}{2} \sum_m \sum_n \sum_p a_{mn} a_{pn} B_n E_{mp} \right. \\
 + \frac{\beta}{2} \sum_m \sum_n a_{mn}^2 A_m A_n \left. \right] + \sum_{i=1}^v \frac{\alpha^4}{2} \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} \gamma_{iv} \sum_m \sum_n \sum_p a_{mn} a_{pn} f_m(c_i) f_p(c_i) B_n \\
 + \sum_{i=1}^h \frac{\gamma_{ih}}{2\alpha^2} \sqrt{\frac{D_y}{D_x}} \sum_m \sum_n \sum_p a_{mn} a_{mp} f_n(d_i) f_p(d_i) B_m \\
 + \sum_{i=1}^v \frac{\alpha \theta_{iv}}{2} \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} \sum_m \sum_n \sum_p a_{mn} a_{pn} \frac{b}{\pi} f'_m(c_i) \frac{b}{\pi} f'_p(c_i) A_n \\
 \left. + \sum_{i=1}^h \frac{\theta_{ih}}{2\alpha^2} \sqrt{\frac{D_y}{D_x}} \sum_m \sum_n \sum_p a_{mn} a_{mp} \frac{a}{\pi} f'_n(d_i) \frac{a}{\pi} f'_p(d_i) A_m \right\} = 0,
 \end{aligned} \tag{4,2}$$

ce qui peut s'écrire plus simplement<sup>3)</sup>

$$\delta W = 0 \tag{4,2'}$$

en désignant par  $W$  la quantité entre accolades.

Notons en passant que la dissymétrie par rapport à  $\alpha$  des termes relatifs aux énergies de flexion et de torsion des raidisseurs provient de la dissymétrie des notations  $\gamma$  et  $\theta$  qui contiennent  $b$  pour les deux types de raidisseurs.

La condition  $\delta W = 0$  ne sera satisfaite que si toutes les dérivées partielles de  $W$  par rapport aux coefficients  $a_{mn}$  sont nulles, c'est-à-dire si l'on a :

$$\frac{\partial W}{\partial a_{mn}} = 0, \text{ quels que soient } m \text{ et } n. \tag{4,3}$$

En appliquant l'opération de dérivation à l'expression entre accolades de la formule (4,2) on trouve l'équation fondamentale suivante

$$\begin{aligned}
 -k_\sigma \sum_p a_{mp} A_m E_{np} - k_{\sigma_0} \sum_p^{(p+n)imp} a_{mp} A_m F_{np}, \\
 - \frac{4\alpha k_\tau}{\pi^2} \sum_p^{(m+p)imp} \sum_q^{(n+q)imp} a_{pq} C_{pm} C_{nq},
 \end{aligned} \tag{4,4}$$

<sup>3)</sup> La barre horizontale reliant deux signes  $\sum$  signifie que les indices correspondant à ces sommes doivent toujours être de parités différentes, car les intégrales  $F$  et  $C$  sont nulles quand leurs deux indices sont de même parité.

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^h \delta_i \left[ k_\sigma + k_{\sigma_0} \left( 1 - \frac{2d_i}{b} \right) \right] \sum_p a_{mp} f_n(d_i) f_p(d_i) A_m \\
& + \frac{B_m}{\alpha^2} \sum_p a_{mp} E_{np} + \alpha^2 B_n \sum_p a_{pn} E_{mp} + \beta A_m A_n a_{mn} \\
& + \alpha B_n \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} \sum_{i=1}^v \gamma_{iv} \sum_p f_m(c_i) f_p(c_i) a_{pn}, \\
& + \frac{1}{\alpha} A_n \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} \sum_{i=1}^v \theta_{iv} \sum_p \frac{a}{\pi} f'_m(c_i) \frac{a}{\pi} f'_p(c_i) a_{pn}, \\
& + \frac{1}{\alpha^2} B_m \sqrt{\frac{D_y}{D_x}} \sum_{i=1}^h \gamma_{ih} \sum_p f_n(d_i) f_p(d_i) a_{mp}, \\
& + A_m \sqrt{\frac{D_y}{D_x}} \sum_{i=1}^h \theta_{ih} \sum_p \frac{b}{\pi} f'_n(d_i) \frac{b}{\pi} f'_p(d_i) a_{mp}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Remarque au sujet de la dérivation: Lorsqu'on calcule par exemple

$$\delta \left\{ - \frac{k_\sigma}{2} \sum_m \sum_n \sum_p a_{mn} a_{mp} A_m E_{np} \right\},$$

il importe de tenir compte du fait que, dans la somme sur  $p$ , l'indice  $p$  prend la valeur  $n$ .

Les équations (4,4) forment un système d'équations linéaires et homogènes par rapport aux inconnues  $a_{mn}$ . Pour qu'il y ait voilement, il faut que la plaque puisse rester en équilibre dans une forme voilée, c'est-à-dire que le système d'équations (4.4) admette pour les coefficients  $a_{mn}$  une solution non composée de tous zéros. Cela n'aura lieu que si le système (4,4) est compatible, ce qui exige que le déterminant  $\Delta$  des coefficients des inconnues  $a_{mn}$  soit égal à zéro.

La condition

$$\Delta = 0$$

fournit l'équation qui permet de calculer la grandeur des tensions critiques de voilement.

### 5. Calcul des intégrales $A, B, C, E, F$

Rappelons d'abord que les fonctions  $f_m(x)$  choisies dans le développement en série double représentant  $w$  sont les déformées de flambement successives d'une barre prismatique comprimée suivant son axe.

Dans ce qui suit, nous considérons d'abord les plaques appuyées sur leurs bords parallèles ou encastrées sur ces bords.

Dans le premier cas, on a l'expression classique

$$f_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}. \tag{5,1}$$

Dans le second cas, on a, d'après la théorie du flambement de la barre biencastée

$$f_n(x) = 1 - \cos \frac{(n+1)}{l} \pi x \quad \text{si } n \text{ est impair,} \quad (5,2)$$

$$f_n(x) = \frac{\sin k_n \left( \frac{2x}{l} - 1 \right)}{\sin k_n} + 1 - \frac{2x}{l} \quad \text{si } n \text{ est pair.} \quad (5,3)$$

Les valeurs de  $k_n$  intervenant dans l'expression (5,3) sont les racines de l'équation transcendante  $k = \text{tg } k$ .

Cette équation admet une infinité de racines dont les 16 premières sont reproduites ci-après:

$n$	$k_n$	$n$	$k_n$
2	4,4934	18	29,8116
4	7,7253	20	32,9564
6	10,9041	22	36,1006
8	14,0662	24	39,2444
10	17,2208	26	42,3879
12	20,3713	28	46,5311
14	23,5195	30	48,6741
16	26,6661	32	51,8170

Les 4 premières déformées correspondant aux équations (5.2) et (5.3) sont représentées à la figure 5.1.

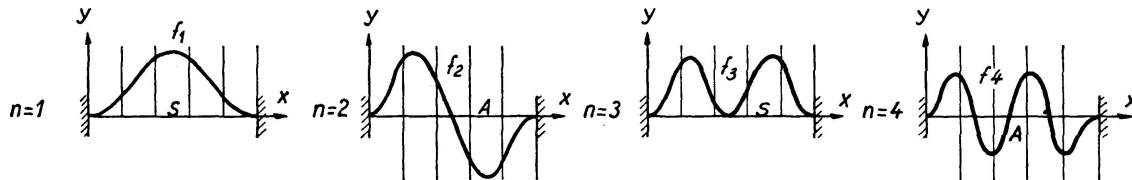


Fig. 5.1.

On va calculer les valeurs des intégrales  $A, B, C, E, F$  pour les deux combinaisons ci-après d'appuis d'extrémité

- 5.1: Appuis simples aux deux extrémités;
- 5.2: Encastremets aux deux extrémités.

5.1. Appuis simples aux deux extrémités

Toutes les intégrales intervenantes ont été calculées par TIMOSHENKO dans son livre «Théorie de la Stabilité Elastique». On a:

$$f_m(x) = \sin \frac{m \pi x}{l}, \quad f'_m(x) = \frac{m \pi}{l} \cos \frac{m \pi x}{l}, \quad f''_m(x) = - \left( \frac{m \pi}{l} \right)^2 \sin \frac{m \pi x}{l},$$



$$A_m \equiv \frac{2l}{\pi^2} \int_0^l \frac{m^2 \pi^2}{l^2} \cos^2 \frac{m \pi x}{l} dx = m^2,$$

$$B_m \equiv \frac{2l^3}{\pi^4} \int_0^l \frac{m^4 \pi^4}{l^4} \sin^2 \frac{m \pi x}{l} dx = m^4,$$

$$C_{mn} = -C_{nm} \equiv \int_0^l \frac{m \pi}{l} \sin \frac{m \pi x}{l} \cos \frac{n \pi x}{l} dx$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } (m \pm n) \text{ est pair,} \\ \frac{2mn}{m^2 - n^2} & \text{si } (m \pm n) \text{ est impair,} \end{cases}$$

$$E_{mn} = E_{nm} \equiv \frac{1}{l} \int_0^l \sin \frac{m \pi x}{l} \sin \frac{n \pi x}{l} dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ 1/2 & \text{si } m = n, \end{cases}$$

$$F_{mn} = F_{nm} \equiv \frac{1}{l} \int_0^l \left(1 - \frac{2x}{l}\right) \sin \frac{m \pi x}{l} \sin \frac{n \pi x}{l} dx$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{pour } m \neq n \text{ et } (m \pm n) \text{ pair,} \\ \frac{8}{\pi^2} \frac{mn}{(m^2 - n^2)^2} & \text{pour } m \neq n \text{ et } (m \pm n) \text{ impair,} \\ 0 & \text{pour } m = n. \end{cases}$$

### 5.2. Encastremets parfaits aux deux extrémités

Par des calculs laborieux, mais sans difficulté spéciale, on obtient les expressions ci-après des intégrales  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $E$ ,  $F$ :

$$A_m \equiv \frac{2l}{\pi^2} \int_0^l f_m'^2(x) dx = \left(\frac{2k_m}{\pi}\right)^2,$$

$$B_m \equiv \frac{2l^3}{\pi^4} \int_0^l f_m''^2(x) dx = \left(\frac{2k_m}{\pi}\right)^4,$$

$$C_{mn} = -C_{nm} \equiv \int_0^l f_m(x) f_n'(x) dx$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } (m \pm n) \text{ est pair,} \\ \frac{2k_{pair}^2}{k_{impair}^2 - k_{pair}^2} & \text{si } (m \pm n) \text{ est impair et } m \text{ impair,} \\ \frac{-2k_{pair}^2}{k_{impair}^2 - k_{pair}^2} & \text{si } (m \pm n) \text{ est impair et } m \text{ pair.} \end{cases}$$

$$E_{mn} = E_{nm} \equiv \frac{1}{l} \int_0^l f_m(x) f_n(x) dx$$

$$= \begin{cases} 1/3 & \text{si } m, n \text{ sont pairs et différents,} \\ 1 & \text{si } m, n \text{ sont impairs et différents,} \\ 5/6 & \text{si } m, n \text{ sont pairs et égaux,} \\ 3/2 & \text{si } m, n \text{ sont impairs et égaux,} \\ 0 & \text{si } (m+n) \text{ est impair.} \end{cases}$$

$$F_{mn} = F_{nm} \equiv \frac{1}{l} \int_0^l \left(1 - \frac{2x}{l}\right) f_m(x) f_n(x) dx$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } (m+n) \text{ est pair,} \\ \frac{2 k_{\text{impair}}^2}{(k_{\text{impair}}^2 - k_{\text{pair}}^2)^2} - \frac{2}{k_{\text{impair}}^2} + \frac{1}{3} & \text{si } (m+n) \text{ est impair.} \end{cases}$$

Envisageons maintenant une plaque encastree sur un bord vertical et appuyee sur le bord parallele. On peut toujours considerer une telle plaque comme la moitie d'une plaque parfaitement encastree sur ses deux bords verticaux, possedant la longueur  $2a$  et presentant une ligne nodale verticale mediane.

Pour realiser cette ligne nodale, il faut n'adopter dans le developpement du deplacement

$$w = \sum_m \sum_n a_{mn} f_m(x) f_n(y),$$

que des deforme'es antisymetriques presentant un point d'inflexion en leur milieu.

En remplaçant  $l$  par  $2l$  dans l'expression (5,3) de la deformee antisymetrique, on trouve, pour la partie utile de la fonction  $f_m$  correspondant a la demi-plaque de gauche:

$$f_n(x) = \frac{\sin k_n \left(\frac{x}{l} - 1\right)}{\sin k_n} + 1 - \frac{x}{l} \quad (0 \leq x \leq l).$$

On constate ainsi que les integrales relatives a une plaque dont les bords paralleles, l'un encastree, l'autre appuyee, sont les memes que celles d'une plaque encastree sur deux bords paralleles, mais que l'intervalle d'integration est moitie moindre. Or, les integrales  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $E$  et  $F$  etant sans dimensions, elles ont meme valeur quelle que soit la longueur  $l$  de l'intervalle. Il resulte de cette remarque que les valeurs  $A_m$  et  $B_m$  et celles de  $E_{mn}$  si  $m$  et  $n$  sont pairs et differents ou egaux sont celles indiquees au littera 5.2 ci-dessus.

Par contre, on n'a plus, dans le cas actuel,

$$\left. \begin{matrix} C_{mn} \\ F_{mn} \end{matrix} \right\} = 0 \quad \text{si } (m+n) \text{ est pair,}$$

car la nullité de ces intégrales provenait uniquement de ce que l'intégration portait sur un produit de deux fonctions *antisymétrique dans l'intervalle*  $(0, 2l)$ . Il nous faut donc effectuer le calcul de ces deux intégrales, que nous désignerons par les notations  $C'_{mn}$  et  $F'_{mn}$  pour rappeler que l'intervalle d'intégration n'est que la moitié de celui considéré plus haut.

Par des calculs laborieux, mais sans difficulté, on trouve les formules ci-après: pour  $m$  pair,  $n$  pair,

$$\begin{aligned}
 C'_{mn} &\equiv \int_0^l \left[ \frac{\sin k_m \left(\frac{x}{l} - 1\right)}{\sin k_m} + 1 - \frac{x}{l} \right] \left[ \frac{k_n \cos k_n \left(\frac{x}{l} - 1\right)}{\sin k_n} - 1 \right] dx = -C'_{mn} \\
 &= \frac{\cos k_{2n} - \cos k_{2m}}{2(\cos k_{2n} + \cos k_{2m})} + \frac{1}{k_{2n}^2} \frac{1 - \cos k_{2n}}{\cos k_{2n}} - \frac{1}{k_{2m}^2} \frac{1 - \cos k_{2m}}{\cos k_{2m}}, \\
 F'_{mn} = F'_{nm} &\equiv \frac{1}{l} \int_0^l \left( 1 - \frac{2x}{l} \right) \left[ \frac{\sin k_m \left(\frac{x}{l} - 1\right)}{\sin k_m} + 1 - \frac{x}{l} \right] \left[ \frac{\sin k_n \left(\frac{x}{l} - 1\right)}{\sin k_n} + 1 - \frac{x}{l} \right] dx \\
 &= -\frac{5}{6} + \frac{2(k_{2m}^2 + 2 + k_{2n}^2) \sin k_{2m} \sin k_{2n} - 4k_{2m} k_{2n}}{(k_{2m}^2 - k_{2n}^2)^2} - \frac{2}{k_{2m}^2} \frac{(1 - \cos k_{2m})^2}{\sin k_{2m}} \\
 &\quad - \frac{2}{k_{2n}^2} \frac{(1 - \cos k_{2n})^2}{\sin k_{2n}}.
 \end{aligned}$$

## 6. Expression explicitée de l'équation aux $a_{mn}$ dans le cas d'une plaque ayant un appui simple sur deux bords parallèles ou sur les quatre bords

Vu la forme particulièrement simple que prennent les intégrales définies  $A$  à  $F$  dans le cas du double appui simple, il est intéressant de remplacer dans l'équation générale (4,4), les symboles  $A$  à  $F$  par leurs valeurs explicites trouvées au par. 5.1. On obtient ainsi:

### 6.1. L'équation aux $a_{mn}$ pour une plaque rectangulaire simplement appuyée sur tout son contour

$$\begin{aligned}
 & - \frac{k_\sigma}{2} m^2 a_{mn} - \frac{8k_{\sigma_0}}{\pi^2} \sum_p^{(4)} \frac{m^2 n p}{(n^2 - p^2)^2} a_{mp} \\
 & + \frac{16k_\tau}{\pi^2} \alpha \sum_p^{(5)} \sum_q^{(5)} \frac{m n p q}{(m^2 - p^2)(n^2 - q^2)} a_{pq} \\
 & - k_{\sigma_0} \sum_{i=1}^h \delta_i \left( 1 + \frac{k_\sigma}{k_{\sigma_0}} - \frac{2d_i}{b} \right) \sum_p m^2 \sin \frac{m \pi d_i}{b} \sin \frac{p \pi d_i}{b} a_{mp}
 \end{aligned} \tag{6,1}$$

4) La somme s'étend à toutes les combinaisons d'indices  $n, p$  pour lesquelles  $(n+p)$  est impair.

5) Les sommes doivent s'étendre à toutes les combinaisons d'indices pour lesquelles  $(m+p)$  et  $(n+q)$  sont impairs.

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \left( \frac{m^2}{\alpha} + n^2 \alpha \right)^2 a_{mn} + (\beta - 1) m^2 n^2 a_{mn} \\
 & + \alpha \sqrt[4]{\frac{D_x}{D_y}} \sum_{i=1}^v \gamma_{iv} n^4 \sum_p \sin \frac{m \pi c_i}{a} \sin \frac{p \pi c_i}{a} a_{pn} \\
 & + \frac{1}{\alpha^2} \sqrt{\frac{D_y}{D_x}} \sum_{i=1}^h \gamma_{ih} m^4 \sum_p \sin \frac{n \pi d_i}{b} \sin \frac{p \pi d_i}{b} a_{mp} \\
 & + \sqrt[4]{\frac{D_x}{D_y}} \sum_{i=1}^v \frac{\theta_{iv}}{\alpha} m n^2 \sum_p p \cos \frac{m \pi c_i}{a} \cos \frac{p \pi c_i}{a} a_{pn} \\
 & + \sqrt{\frac{D_y}{D_x}} \sum_{i=1}^h \theta_{ih} m^2 n \sum_p p \cos \frac{n \pi d_i}{b} \cos \frac{p \pi d_i}{b} a_{mp} = 0.
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Cette équation généralise celle qui a été établie par une autre méthode par MILOSAVLJEVITCH [14].

6.2. *L'équation aux  $a_{mn}$  pour une plaque rectangulaire parfaitement encadrée sur ses bords horizontaux et simplement appuyée sur ses bords verticaux*

$$\begin{aligned}
 & - k_\sigma m^2 \sum_p E_{np} a_{mp} - k_{\sigma_0} m^2 \sum_p^4 F_{np} a_{mp} \\
 & + \frac{8 \alpha k_\tau}{\pi^2} \sum_p^5 \sum_q^5 \frac{m p}{m^2 - p^2} C_{np} a_{pq} \\
 & - k_{\sigma_0} m^2 \sum_{i=1}^h \delta_i \left( 1 + \frac{k_\sigma}{k_{\sigma_0}} - \frac{2 d_i}{b} \right) \sum_p f_n(d_i) f_p(d_i) a_{mp} \\
 & + \frac{m^4}{\alpha^2} \sum_p E_{np} a_{mp} + \frac{\alpha^2}{2} B_n a_{mn} + \beta m^2 A_n a_{mn} \\
 & + \alpha B_n \sqrt[4]{\frac{D_x}{D_y}} \sum_{i=1}^v \gamma_{iv} \sum_p \sin \frac{m \pi c_i}{a} \sin \frac{p \pi c_i}{a} a_{pn} \\
 & + \frac{A_n}{\alpha} \sqrt[4]{\frac{D_x}{D_y}} \sum_{i=1}^v \theta_{iv} \sum_p m p \cos \frac{m \pi c_i}{a} \cos \frac{p \pi c_i}{a} a_{pn} \\
 & + \frac{m^4}{\alpha^2} \sqrt{\frac{D_y}{D_x}} \sum_{i=1}^h \gamma_{ih} \sum_p f_n(d_i) f_p(d_i) a_{mp} \\
 & + m^2 \sqrt{\frac{D_y}{D_x}} \sum_{i=1}^h \theta_{ih} \sum_p \frac{b}{\pi} f'_n(d_i) \frac{b}{\pi} f'_p(d_i) a_{mp} = 0.
 \end{aligned} \tag{6,2}$$

## 7. Remarques sur le fractionnement des équations aux $a_{mn}$

### 7.1. Généralités

Dans son livre sur la stabilité élastique, le professeur TIMOSHENKO a montré que:

a) Dans le cas d'une plaque simplement appuyée sur son contour et soumise à flexion pure, les équations aux  $a_{mn}$  se fractionnaient en divers groupes; dans chacun de ces groupes, l'indice  $m$  conserve une valeur fixe. Le groupe d'ordre  $m$  correspond à une déformée de voilement dont une coupe horizontale a pour équation

$$w = K \sin \frac{m \pi x}{a}.$$

Il suffit donc d'étudier le cas où  $m = 1$  et de ne conserver, dans les équations aux  $a_{mn}$ , que les paramètres  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ .

b) Dans le cas d'une plaque simplement appuyée sur son contour et soumise à cisaillement pur, les équations aux  $a_{mn}$  se fractionnent en deux groupes; le premier contient toutes les inconnues  $a_{mn}$  pour lesquelles  $(m \pm n)$  est pair; le second, celles pour lesquelles  $(m \pm n)$  est impair.

Il est intéressant de chercher la raison profonde de ce fractionnement et de voir si des propriétés analogues existent dans le cas d'une plaque encastree sur deux bords parallèles ou bien sur ses quatre bords.

### 7.2. Fractionnement des équations aux $a_{mn}$ en plusieurs groupes ne contenant chacun que des coefficients $a_{mn}$ d'indice $m$ constant

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un tel fractionnement se produise est que la déformée de voilement soit de la forme

$$w(x, y) = f(x)g(y) \quad (7,1)$$

et possède par conséquent des lignes nodales verticales et horizontales correspondant respectivement aux zéros des fonctions  $f(x)$  et  $g(y)$ .

L'équation aux dérivées partielles du voilement des plaques s'écrit, dans le cas où cette plaque est soumise sur ses bords verticaux à des tensions  $\sigma_x$  de flexion composée

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + h \sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (7,2)$$

La fonction  $w$  doit satisfaire aux conditions d'appui de la plaque sur son pourtour. De plus, si cette plaque comporte des raidisseurs horizontaux ou verticaux,  $w$  doit satisfaire à des conditions de continuité le long de chaque raidisseur.

En remplaçant  $w$  par son expression (7,1) dans l'équation (7,2), on trouve la relation

$$D_x f^{IV} g + 2 H f'' g'' + D_y f g^{IV} + h \sigma_x f'' g = 0 \quad (7,3)$$

où les primes, secondes, etc. représentent des dérivées premières, secondes, etc..., des fonctions  $f$  et  $g$  par rapport à la seule variable dont elles dépendent.

Si la plaque est appuyée sur ses bords verticaux, elle admet toujours une solution de la forme

$$w = \sin \frac{m \pi x}{a} g(y). \quad (7,4)$$

En effet, on a alors

$$f(x) = \sin \frac{m \pi x}{a}; \quad f''(x) = -\frac{m^2 \pi^2}{a^2} f(x); \quad f^{IV}(x) = \frac{m^4 \pi^4}{a^4} f(x).$$

En remplaçant dans l'égalité (7,3), on voit que celle-ci est vérifiée à condition que la fonction  $g(y)$  satisfasse à l'équation différentielle ordinaire

$$D_y g^{IV} - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} H g'' + \left[ \frac{m^4 \pi^4}{a^4} D_x - \frac{m^2 \pi^2}{a^2} h \sigma_x \right] g = 0, \quad (7,5)$$

ainsi qu'aux conditions d'appui existant sur les bords horizontaux de la plaque et aux conditions de continuité le long des raidisseurs éventuels. Les raidisseurs horizontaux, étant fléchis suivant la loi sinusoïdale

$$w(x, y_0) = g(y_0) \sin \frac{m \pi x}{a}, \quad (7,6)$$

n'apportent aucune entrave à une déformée de la forme (7,4). Par contre, des raidisseurs verticaux rendent la solution (7,4) inapplicable, parce qu'ils constituent pour une bande horizontale de plaque d'ordonnée  $y_0$  des appuis élastiques supplémentaires, et que cette bande ne se déforme plus suivant la loi simple (7,4).

Si la plaque est encastrée sur ses bords verticaux, le fractionnement ne se produit plus; en effet, si  $f(x)$  est une fonction de flambement, on a bien  $f^{IV} + K f'' = 0$  comme dans le cas du sinus; mais on n'a plus  $f'' + k f = 0$ , à cause des moments d'encastrement, mais bien  $f'' + K f + C x + D = 0$ , de sorte que l'expression (7,1) n'est plus une solution de l'équation (7,2).

En conclusion de cette discussion, nous pouvons énoncer le théorème suivant:

*Un fractionnement des équations aux  $a_{mn}$  en groupes séparés correspondant chacun à une valeur particulière de l'indice  $m$  se produit lorsque la plaque orthotrope soumise à la flexion composée sur ses bords verticaux est simplement appuyée sur ces bords et ne possède que des raidisseurs horizontaux. La plaque peut avoir un mode d'appui quelconque sur ses deux bords horizontaux.*

7.3 Dans la suite de ce paragraphe, on se limitera aux plaques *isotropes* pour lesquelles  $D_x = D_y = H = D$ . On peut se demander à propos de ces plaques dans quelles circonstances le système d'équations aux  $a_{mn}$  se sépare en deux systèmes distincts, contenant l'un les inconnues  $a_{mn}$  telles que  $(m+n)$  est pair, et l'autre les inconnues telles que  $(m+n)$  est impair.

Pour résoudre ce problème, il faut tout d'abord remarquer que *toute fonction*

$$w(x, y) = a_{mn} f_m(x) g_n(y)$$

représente une déformée de voilement symétrique par rapport aux diagonales du rectangle si  $(m+n)$  est pair et antisymétrique par rapport à ces diagonales si  $(m+n)$  est impair. En effet, les équations des diagonales  $OE$  et  $FG$  sont respectivement

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} \quad \text{et} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Si  $(m+n)$  est pair,  $m$  et  $n$  sont pairs ensemble ou impairs ensemble, donc les fonctions  $f_m$  et  $g_n$  sont symétriques ensemble ou antisymétriques ensemble.

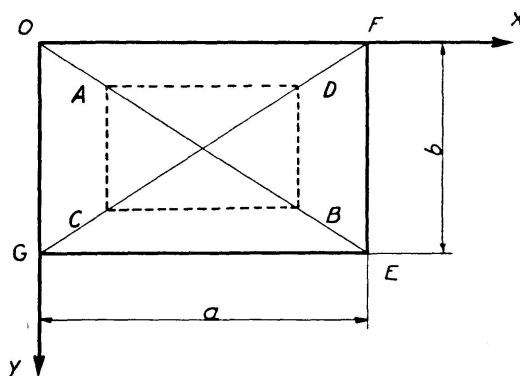


Fig. 7.1.

Les points  $A, B, C, D$  de la figure 7.1 ont respectivement pour coordonnées:

$$A \begin{cases} x \\ \frac{b}{a}x \end{cases}; \quad B \begin{cases} a-x \\ b-\frac{b}{a}x \end{cases}; \quad C \begin{cases} x \\ b-\frac{bx}{a} \end{cases}; \quad D \begin{cases} a-x \\ \frac{b}{a}x \end{cases}.$$

Supposons d'abord  $f_m$  et  $g_n$  symétriques ensemble; on a alors

$$f_m(x) = f_m(a-x); \quad g_n\left(x\frac{b}{a}\right) = g_n\left(b-\frac{bx}{a}\right),$$

d'où  $w(A) = w(B); \quad w(C) = w(D)$ .

Si  $f_m$  et  $g_n$  sont antisymétriques ensemble, les antisymétries neutralisent leurs effets, et l'on a encore

$$w(A) = w(B); \quad w(C) = w(D).$$

Par des considérations analogues, on peut voir que, lorsque  $(m+n)$  est impair, on a

$$w(A) = -w(B); \quad w(C) = -w(D) \quad \text{c. q. f. d.}$$

Ce point étant établi, nous allons démontrer que:

*Dans le cas d'une plaque isotrope sollicitée au cisaillement pur et en outre à des efforts de compression uniforme  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$ , le système d'équations aux  $a_{mn}$  se fractionne en deux systèmes indépendants, quel que soit le mode d'appui de la plaque sur son contour, pourvu qu'il soit le même sur les paires de bords parallèles. Le premier système contient les inconnues  $a_{mn}$  pour lesquelles  $(m+n)$  est pair; le second, celles pour lesquelles  $(m+n)$  est impair.*

En effet, on peut décomposer la série double

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} f_m(x) g_n(y),$$

représentant  $w$  en ses composantes symétrique  $w_s$  et antisymétrique  $w_a$

$$w = w_s + w_a,$$

$w_s$  est la série double partielle contenant les termes pour lesquels  $(m+n)$  est pair; de même,  $w_a$  est la série double contenant les termes restants de  $w$ , pour lesquels  $(m+n)$  est impair.

Dans le cas particulier de sollicitation par compression sur les quatre côtés et cisaillement pur, le critère de l'énergie s'écrit:

$$\begin{aligned} \delta(V - T) \equiv \delta \left\{ \frac{D}{2} \iint \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dx dy - \frac{h}{2} \iint \left[ \sigma_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \sigma_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + 2\tau \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy \right\} = 0. \end{aligned} \quad (7,7)$$

Or, on a

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \Delta w = \Delta w_s + \Delta w_a.$$

d'où

$$\Delta^2 w = \Delta^2 w_s + \Delta^2 w_a + 2 \Delta w_s \Delta w_a.$$

De même

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 &= \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_a}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial w_s}{\partial x} \frac{\partial w_a}{\partial x}, \\ \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 &= \left( \frac{\partial w_s}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_a}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial w_s}{\partial y} \frac{\partial w_a}{\partial y}. \end{aligned}$$

En remplaçant dans le critère de l'énergie (7,7), il vient

$$\begin{aligned} \delta(V - T) = \delta \left\{ V_s + V_a + D \iint \Delta w_s \Delta w_a dx dy - T_s - T_a \right. \\ \left. - h \iint \left[ \sigma_x \frac{\partial w_s}{\partial x} \frac{\partial w_a}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial w_s}{\partial y} \frac{\partial w_a}{\partial y} + \tau \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} \frac{\partial w_a}{\partial y} + \frac{\partial w_a}{\partial x} \frac{\partial w_s}{\partial y} \right) \right] dx dy \right\} = 0. \end{aligned} \quad (7,8)$$



Or, les dérivées premières de fonctions symétriques sont antimétriques et vice-versa; comme  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau$  sont constants par hypothèse, la dernière intégrale double de l'équation (7,8) s'applique à des produits de fonctions symétriques par des fonctions antimétriques et est par conséquent nulle. Quant au Laplacien  $\Delta w$ , il représente physiquement la courbure moyenne  $\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$  de la plaque déformée et il a les mêmes propriétés de symétrie que  $w$ , d'où il résulte que  $\iint \Delta w_s \Delta w_a dx dy = 0$ . En définitive, le critère de l'énergie s'écrit:

$$\delta \{V_s + V_a - T_s - T_a\} = 0.$$

On peut toujours poser  $\sigma_x = k \sigma_{x0}$ ,  $\sigma_y = k \sigma_{y0}$ ,  $\tau = k \tau_0$ , d'où le critère de l'énergie s'écrit

$$\delta \{V_s + V_a - k(t_s + t_a)\} = 0.$$

L'intensité critique du coefficient de voilement  $k$  est donc donnée par

$$k = \frac{V_s + V_a}{t_s + t_a}. \quad (7,9)$$

Si l'on avait adopté pour  $w$  une déformée symétrique  $w_s$ , on aurait trouvé

$$k = k_s = \frac{V_s}{t_s}.$$

De même, si on avait adopté une déformée antimétrique  $w_a$ , on aurait trouvé

$$k = k_a = \frac{V_a}{t_a}.$$

La formule (7,9) peut s'écrire

$$k = \frac{V_s}{t_s} \frac{1 + \frac{V_a}{V_s}}{1 + \frac{t_a}{t_s}} = k_s \frac{\frac{t_s}{t_a} + \frac{V_a}{V_s} \frac{t_s}{t_a}}{\frac{t_s}{t_a} + 1} = k_s \frac{\frac{t_s}{t_a} + \frac{k_a}{k_s}}{\frac{t_s}{t_a} + 1}.$$

Si l'on a  $k_a > k_s$ ,  $k > k_s$  et  $k_s$  est la valeur minimum de  $k$  qu'il faut adopter; la déformée de voilement est alors symétrique par rapport aux deux diagonales de la plaque.

Si, au contraire, on a  $k_a < k_s$ , on voit facilement que

$$k_a \leq k \leq k_s,$$

$k_a$  est alors la valeur minimum de  $k$  et la déformée de voilement est antimétrique.

*Corollaire:* Si les tensions de cisaillement considérées dans la démonstration ci-dessus s'annulent, la plaque est soumise à compression simple dans les directions  $x$  et  $y$ .

Les produits  $\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}$  intervenant dans les formules (7,7) et (7,8) disparaissent.

Dans ces conditions, on peut d'abord fractionner  $w$  en  $w_s$  et  $w_a$  comme indiqué ci-dessus, puis ensuite fractionner chacune de ces deux déformées en leurs composantes  $w_I$  et  $w_{II}$  respectivement symétrique et antisymétrique par rapport à la médiane verticale du panneau.

On obtient ainsi au total quatre types de déformées, caractérisés respectivement par les relations:

$$\left. \begin{array}{l} 1. w_A = w_B = w_C = w_D \\ 2. w_A = -w_B = -w_C = w_D \end{array} \right\} \text{symétriques par rapport à la médiane verticale}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3. w_A = w_B = -w_C = -w_D \\ 4. w_A = -w_B = w_C = -w_D \end{array} \right\} \text{antisymétriques par rapport à la médiane verticale}$$

A ce fractionnement des formes de voilement correspond le fractionnement de l'expression

$$w(x, y) = \sum_m \sum_n a_{mn} f_m(x) g_n(y),$$

en quatre expressions  $w_1, w_2, w_3, w_4$ , correspondant respectivement aux restrictions suivantes sur les indices  $m, n$ :

1.  $m$  et  $n$  pairs.
2.  $m$  pair,  $n$  impair.
3.  $m$  impair,  $n$  impair.
4.  $m$  impair,  $n$  pair.

Il en résulte également que la matrice des coefficients numériques des inconnues se fractionne en quatre sous-matrices qu'il faut étudier séparément.

## DEUXIÈME PARTIE: APPLICATIONS NUMÉRIQUES DE LA THÉORIE

### 8. Plaques non raidies sollicitées en compression pure, en flexion ou en cisaillement pur

8.1. Compression pure dans le sens des  $x$  ( $\sigma_x$ ), les quatre bords étant encastrés

Le système général d'équations aux  $a_{mn}$  (4.4) prend ici la forme

$$\begin{aligned} & -k_\sigma \sum_p a_{mp} A_m E_{np} + \frac{1}{\alpha^2} B_m \sum_p a_{mp} E_{np} \\ & + \alpha^2 B_n \sum_p a_{pn} E_{mp} + A_m A_n a_{mn} = 0. \end{aligned} \quad (8,1)$$

Rappelons que, par suite du corollaire du par. 7.3, l'équation (8,1) se fractionne en quatre systèmes indépendants. Appelons 1, 2, 3 et 4 chacun de ceux-ci. La déformée qui se produira réellement sous l'action de  $\sigma_x$  est celle qui est associée à la plus petite valeur de  $k_\sigma$ .

Les systèmes d'équations homogènes peuvent s'écrire sous forme matricielle

$$(A)k_{\sigma} + (B) = 0, \quad (8,2)$$

la matrice  $(A)$  provenant du travail des forces de compression et la matrice  $(B)$  de l'énergie de flexion de la plaque.

Pour obtenir la plus petite valeur du coefficient  $k_{\sigma}$ , nous multiplions la

Tableau I

$\alpha$	$k_{\sigma_1}$	$k_{\sigma_2}$	$k_{\sigma_3}$	$k_{\sigma_4}$
0,3	47,20	93,10	100,80	56,40
0,5	19,45	35,40	44,00	32,65
0,6	15,00	26,80	34,95	30,05
0,8	11,20	—	—	—
1	10,20	11,70	25,30	26,70
1,35	—	8,90	—	—
1,65	8,40	8,35	21,90	24,60
2	7,95	—	23,50	27,60
3	8,45	7,50	—	—

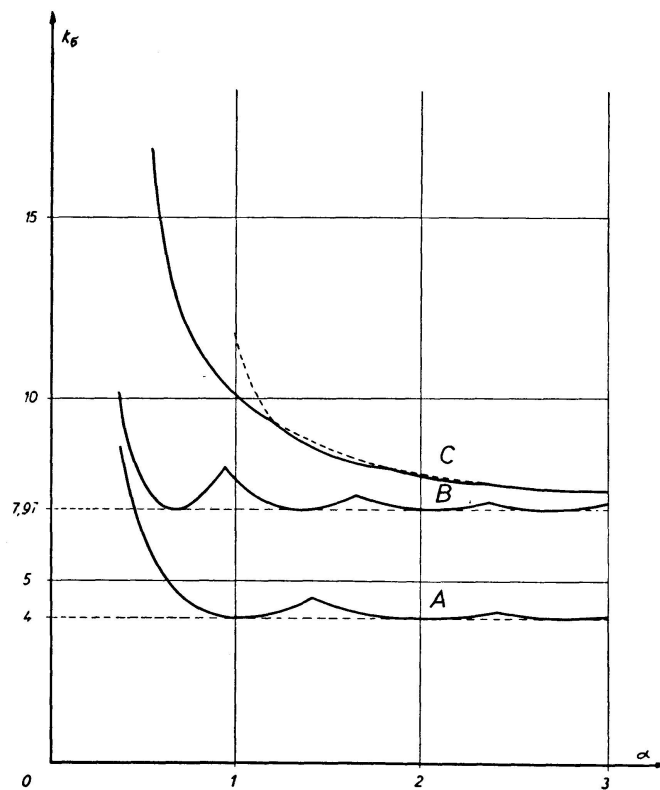


Fig. 8.1. A: Plaque appuyée.  
 B: Plaque appuyée et encadrée sur les bords non sollicités.  
 C: Plaque encadrée.

relation (8,2) par la matrice inverse de  $(B)$  ce qui donne

$$(B)^{-1}(A) = -\frac{(1)}{k_\sigma}.$$

Les valeurs propres de  $(B)^{-1}(A)$  sont alors les inverses de  $k_\sigma$  que nous voulons déterminer.

Nous calculons les valeurs propres à l'aide du programme I.B.M.:  $(V + VP)M$  n° 5.2.5.  $B$  qui donne la *plus grande valeur* propre de n'importe quelle matrice carrée et par conséquent le plus petit  $k_\sigma$  que nous recherchons. Ces calculs ont été effectués pour différentes valeurs de  $\alpha$  avec 4 composantes en  $m$  et 4 composantes en  $n$  de l'équation (8,1).

On en trouve les résultats dans le tableau I ci-avant, traduit graphiquement à la figure 8.1.

On constate que la précision des courbes 1 et 2 est bonne jusqu'à  $\alpha = 2$ ; passé cette limite, elles amorcent une remontée qui n'est due qu'à la limitation à 4 du nombre des composantes  $f_m(x)$  de la déformée.

Pour les courbes 3 et 4, on ne peut se fier à leurs résultats que pour  $\alpha$  plus petit que 1,5. Leur intérêt étant assez limité, nous n'avons pas cherché à augmenter leur précision.

## 8.2. Flexion pure et flexion composée de plaques encastrees sur les quatre bords

L'équation de l'énergie qui régit le phénomène de voilement se déduit de l'équation générale (4,4) et s'écrit

$$\begin{aligned} -k_{\sigma_0} \sum_p^{(n+p)\text{impair}} a_{mp} A_m F_{np} + \frac{1}{\alpha^2} B_m \sum_p a_{mp} E_{np} \\ + \alpha^2 B_n \sum_p a_{pn} E_{mp} + A_m A_n a_{mn} = 0. \end{aligned} \quad (8,3)$$

En flexion pure comme en flexion composée, on ne bénéficie plus d'aucune séparation du système d'équations. Aussi est-on obligé dans ce cas de se limiter aux 4 premières composantes de la déformée  $m, n = 1, 2, 3, 4$ , car même ainsi on doit manipuler des matrices de  $16 \times 16$  éléments.

Notons qu'un changement de signe des sollicitations n'affecte pas la stabilité de la plaque. Tout  $k_\sigma$  est alors accompagné d'une valeur égale mais de signe contraire.

Dans ce cas, la recherche des valeurs propres de  $(B)^{-1}(A)$  par approximations successives n'est plus applicable; c'est pourquoi, nous les avons élevées au carré.

Les matrices résultantes ont alors pour valeurs propres les carrés de celles de  $(B)^{-1}(A)$ . La valeur que nous cherchons est à présent une racine double, ce qui n'entraîne aucune complication pour la résolution.

Pour les plaques soumises à flexion composée, nous devons ajouter à l'équation (8,3), le terme  $-k_\sigma \sum_p a_{mp} A_m E_{np}$  du travail des forces de compression pure.

Posons  $\sigma_{comp} = \sigma_0 + \sigma$  et  $\sigma_{tr} = \sigma - \sigma_0$ ; la flexion composée peut être alors caractérisée univoquement par le coefficient  $s = \frac{\sigma_{comp} - \sigma_{tr}}{\sigma_{comp}}$  ( $s=2$  en flexion pure).

Nous convenons de prendre comme tension de référence la plus grande des deux valeurs  $\sigma_{comp}$  ou  $\sigma_{tr}$ .

Ce sera donc  $\sigma_{comp}$ , si  $s$  est plus petit que 2 et  $\sigma_{tr}$  si  $s$  est plus grand que deux.

Les valeurs propres de  $(B)^{-1}(A)$  n'étant plus cette fois égales et de signes opposés, nous ne devons plus élever la matrice au carré.

Les valeurs calculées sont indiquées au tableau II et sont traduites par les courbes de la figure 8.2. On trouve au par. 9 des courbes similaires pour les plaques encastées-appuyées.

Tableau II

$\alpha$	$s = 2/3$	$s = 1$	$s = 4/3$	$s = 2$
	$k_\sigma$	$k_\sigma$	$k_\sigma$	$k_{\sigma_0}$
0,3	64,85	74,95	78,45	118,00
0,5	28,25	34,90	41,45	70,65
0,8	16,60	21,40	28,55	61,75
1,2	14,35	18,45	24,70	52,65
1,65	12,45	16,10	22,25	46,20
2	11,90	15,45	21,25	44,80

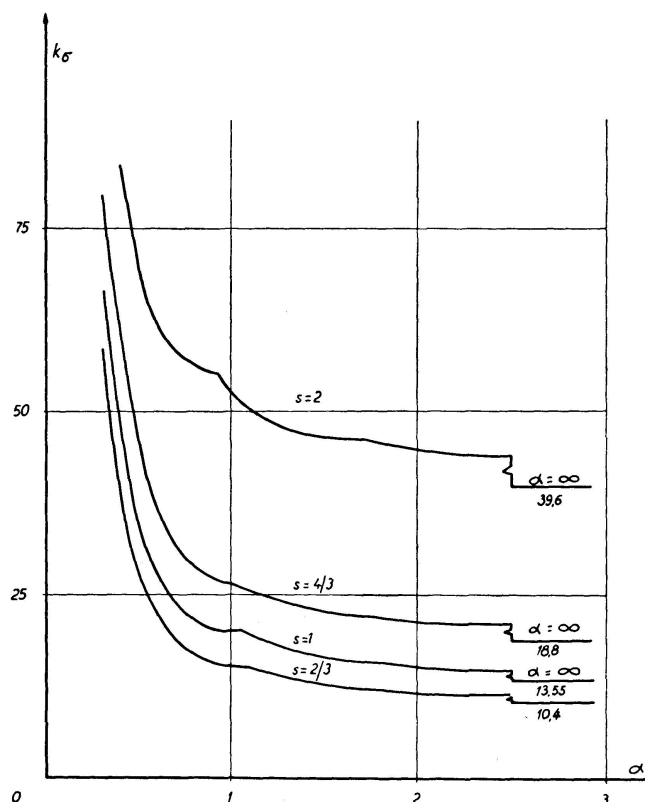


Fig. 8.2.

8.3. Cisaillement pur

L'équation qui régit le phénomène de voilement par cisaillement pur se déduit de la relation générale (4,4) et s'écrit

$$\begin{aligned}
 & -k_{\tau} \frac{4\alpha}{\pi^2} \sum_p^{(m+p)\text{impair}} \sum_q^{(n+q)\text{impair}} a_{pq} C_{pm} C_{nq} + \frac{1}{\alpha^2} B_m \sum_p a_{mp} E_{np} \\
 & + \alpha^2 B_n \sum_p a_{pn} E_{mp} + A_m A_n a_{mn} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{8,4}$$

En vertu de la démonstration du par. 7.3, le système d'équations aux  $a_{mn}$  se subdivise en deux systèmes partiels. Le premier caractérisant les déformées symétriques par rapport au centre de la plaque et l'autre les déformées anti-symétriques par rapport à ce point.

Les résultats ont été obtenus par une méthode identique à celle de la

Tableau III

$\alpha$	Plaques encastrées		Plaques enc. et app.	
	$k_{\tau s}$	$k_{\tau a}$	$k_{\tau s}$	$k_{\tau a}$
0,3	112,50	114,50	66,65	62,25
0,45	51,25	49,95	32,40	32,70
0,7	24,15	25,45	18,50	21,50
1	14,90	17,20	12,70	14,30

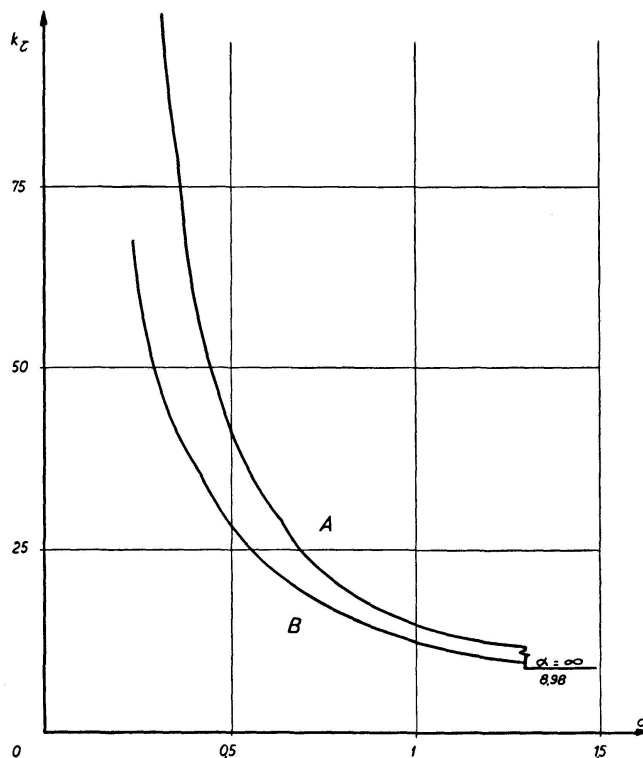


Fig. 8.3.

flexion pure, pour des plaques encastrées sur leur pourtour ou bien appuyées sur les bords verticaux et encastrées sur les bords horizontaux.

Ils sont consignés au tableau III et traduits par les courbes de la figure 8.3.

## 9. Plaques encastrées sur leurs bords horizontaux et appuyées sur leurs bords verticaux, munies de raidisseurs horizontaux et sollicitées en flexion pure

### 9.1. Généralités

L'étude du dimensionnement de l'âme et des raidisseurs d'une poutre à âme pleine, dans sa partie sollicitée en flexion pure, a été entreprise par Chwalla [15, 16] en 1936. L'un de nous a complété cette étude [17] en supposant que le raidisseur optimum était placé au milieu de la zone comprimée.

Ces résultats ont été revus par STÜSSI, CH. et P. DUBAS [18, 19]. Ils sont arrivés à la conclusion que, dans le cas de plaques rectangulaires appuyées sur les 4 bords, le raidisseur optimum était situé au cinquième supérieur de la plaque.

C'est en effet à cet endroit que la déformée de deuxième ordre de la plaque présente une ligne nodale et il a été montré que c'est la position optimum, de même que la stabilité optimum de la plaque raidie doit être prise égale à celle correspondant à la deuxième forme de voilement de la plaque non raidie, soit  $k = 129,4$  dans le cas étudié par STÜSSI.

CERADINI [20] a complété cette recherche en l'étendant aux plaques appuyées sur leurs bords sollicités et encastrées sur les autres. On rappellera ici quelques-uns des résultats qu'il a obtenus.

- a) Le  $k_{\sigma \min}$  de la première forme de voilement des plaques encastrées et appuyées vaut 39,85 (NÖLKE: 39,61) contre 23,88 pour les plaques appuyées. Cependant, l'augmentation du  $k_{\sigma}$  de la 2e forme de voilement est plus faible; on ne passe en effet que de 129,4 à 162.
- b) La position optimum du raidisseur est à présent aux 2/9es supérieurs.
- c) Pour une plaque de rapport  $\alpha = 2/3$ , CERADINI trouve que le  $\gamma$  optimum vaut 9,45.

Cette valeur de  $\gamma$  est pratiquement égale à la valeur  $\gamma = 9,35$  correspondant à un raidisseur placé au 1/5 sur une plaque appuyée. On voit que l'encastrement des bords horizontaux et le placement du raidisseur aux 2/9es ont pour effet de faire passer  $k_{\sigma}$  de 129,4 à 162, c'est-à-dire d'augmenter la stabilité de 25 pour cent.

### 9.2. Considérations sur les raidisseurs tubulaires strictement rigides

Aucune des études signalées précédemment ne prend en compte la rigidité torsionnelle des raidisseurs; leurs auteurs ne considèrent, en effet, que des raidisseurs formés de profils ouverts.

Cependant, des raidisseurs comme ceux de la fig. 1.1 sont loin de rentrer dans cette catégorie, car alors que pour un raidisseur rectangulaire épais ( $b/h = 1/5$ ) et symétrique,

$$\frac{\theta}{\gamma} = \frac{1}{1+\eta} \cdot 2 \cdot \frac{1}{5^2} = 0,0625,$$

on obtient pour un raidisseur formé de deux cornières

$$\frac{\theta}{\gamma} \cong \frac{3 G d^3 e}{2 E d^3 e} = \frac{3}{4(1+\eta)} = 0,586$$

et pour un raidisseur en forme de tube

$$\frac{\theta}{\gamma} \cong \frac{8 \pi G d^3 e}{4 \pi E d^3 e} = \frac{1}{1+\eta} = 0,781.$$

Nous supposons connue la notion de raidisseur strictement rigide caractérisé par la valeur  $\gamma^*$  de sa rigidité relative. Lorsqu'un tel raidisseur présente en outre une rigidité torsionnelle non négligeable, ses propriétés dépendent des deux paramètres  $\theta$  et  $\gamma$  et BORNSCHEUER [4] a montré que la définition de  $\theta^*$  et  $\gamma^*$  devient plus complexe.

Ainsi, dans le cas de la flexion pure, on ne peut plus affirmer que la position optimum du raidisseur est encore fixée par la ligne nodale horizontale de la déformée du second ordre car, même s'il est situé à l'ordonnée correspondante, il est encore tordu lors du voilement.

Aussi avons-nous adopté comme principe de base que la position à donner au raidisseur est telle que, si les panneaux qu'il détermine sur la plaque étaient indépendants et encastrés sur leurs bords horizontaux (les autres étant appuyés) ils auraient tous deux la même stabilité. Notons que cette hypothèse est correcte dans le cas d'un raidisseur infiniment rigide, car alors les deux panneaux partiels se comportent comme s'ils étaient complètement indépendants. En ce qui concerne le coefficient de voilement  $k_\sigma^*$  de la plaque raidie, nous adoptons la valeur commune des deux panneaux partiels. Nous déterminons ensuite le  $\gamma^*$  du raidisseur caractérisé par  $\delta$  et  $\theta/\gamma$  qui donne à la plaque la même stabilité qu'un raidisseur infiniment rigide. Il s'agit ici d'une rigidité optimum de troisième espèce selon la classification proposée par BORNSCHEUER et CHWALLA [4, 15]. L'hypothèse de calcul ci-dessus s'est révélée correcte, car nous avons trouvé des valeurs finies pour  $\gamma^*$ .

La recherche du  $d_i/b$  optimum a nécessité l'obtention préalable de nombreuses courbes  $k_\sigma = f(\alpha)$  relatives à des plaques encastrées-appuyées soumises à flexion composée, le coefficient caractéristique  $s$  qui intervient dans la loi de répartition  $\sigma = \sigma^* \left(1 - \frac{sy}{b}\right)$  pouvant être supérieur à 2.

Pour ces calculs, nous avons utilisé la technique décrite au par. 8.2 et nous avons bénéficié en outre du théorème démontré au par. 7.2 qui permet de ne considérer que les coefficients  $a_{1n}$  dans le cas de plaques appuyées sur leurs bords sollicités.



Tableau IV

$\alpha$	$\frac{d_i}{b} = 0$		$\frac{d_i}{b} = 0,15$		$\frac{d_i}{b} = 0,25$		$\frac{d_i}{b} = 0,333$		$\frac{d_i}{b} = 0,5$	
	$s=0$ $k_\sigma$	$s=2$ $k_{\sigma_0}$	$s=0,3$ $k_{\sigma'}$	$s=2,429$ $k_{\sigma''}$	$s=0,5$ $k_{\sigma'}$	$s=3$ $k_{\sigma''}$	$s=0,667$ $k_{\sigma'}$	$s=4$ $k_{\sigma''}$	$s=1$ $k_{\sigma'}$	$s=\infty$ $k_{\sigma''}$
0,10	—	—	—	—	—	—	—	1240	—	$\infty$
0,15	—	—	—	172	—	303	—	595	—	$\infty$
0,25	18,8	55,95	21,8	101,5	24,4	198,5	—	565	35,6	$\infty$
0,35	11,2	43,5	14,0	86,3	14,75	188,5	16,15	715	21,35	$\infty$
0,50	7,75	40,15	9,05	90,1	10,25	225	11,45	875	14,8	$\infty$
0,75	7,1	48,85	8,40	126,0	9,40	359	10,60	1580	13,95	$\infty$
1,00	8,5	66,9	10,15	186,0	11,50	560	12,90	2560	16,50	$\infty$
$k_{\sigma min}$	7	40,05	8,15	85,5	9,3	186	10,4	500	13,55	$\infty$

Pour  $d_i/b = 0,2$ , on a encore trouvé:  $k_{\sigma' min} = 8,7$  et  $k_{\sigma'' min} = 112$ .

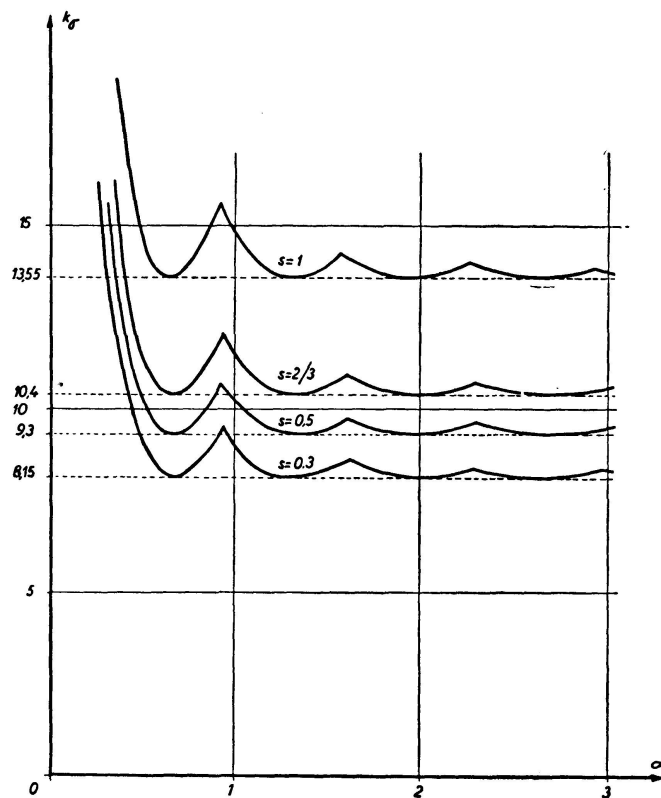


Fig. 9.1.

Nous nous sommes limités aux 6 premières composantes de la déformée dans la direction des  $y$  et nous avons pu estimer à environ 1 % l'écart par excès entre les valeurs exactes et celles que nous avons calculées.

En flexion pure, par exemple,  $k_{\sigma_0 min} = 39,61$  pour  $\alpha = 0,47$  (6) tandis que nous trouvons  $k_{\sigma_0 min} = 40,05$  soit un écart de 1,1 pour 100.

Notons que, pour 8 composantes, l'écart vaut encore 0,7 pour 100.

L'erreur étant sensiblement la même pour tous les points calculés, celle que nous commettons sur la détermination du  $d_i/b$  optimum est négligeable.

Rappelons en passant que les valeurs  $\gamma^*$  de la rigidité optimum s'appliquent à une plaque idéalement plane.

Les recherches expérimentales d'un des auteurs [1, 2 et 21] ont montré que, pour obtenir, sur les panneaux d'âmes légèrement courbes des poutres industrielles, des raidisseurs restant pratiquement rectilignes jusqu'à la ruine, il fallait multiplier  $\gamma^*$  par un coefficient valant de 3 à 6. Ce résultat expérimental a été depuis expliqué théoriquement par CERADINI [20].

Le tableau IV ci-avant contient les valeurs que nous avons obtenues ou que nous avons tirées de l'ouvrage de KOLLBRUNNER [22]. Ces résultats sont traduits par les courbes des figures 9.1 et 9.2.

Nous appelons  $k_\sigma$ , le coefficient de stabilité du panneau  $a d_i$  et  $k_{\sigma'}$ , celui du panneau  $a(b - d_i)$  (fig. 3.1); le panneau  $a b$  est soumis à flexion pure et les coefficients  $k_\sigma$  sont rapportés à la plus grande tension appliquée au panneau complet.

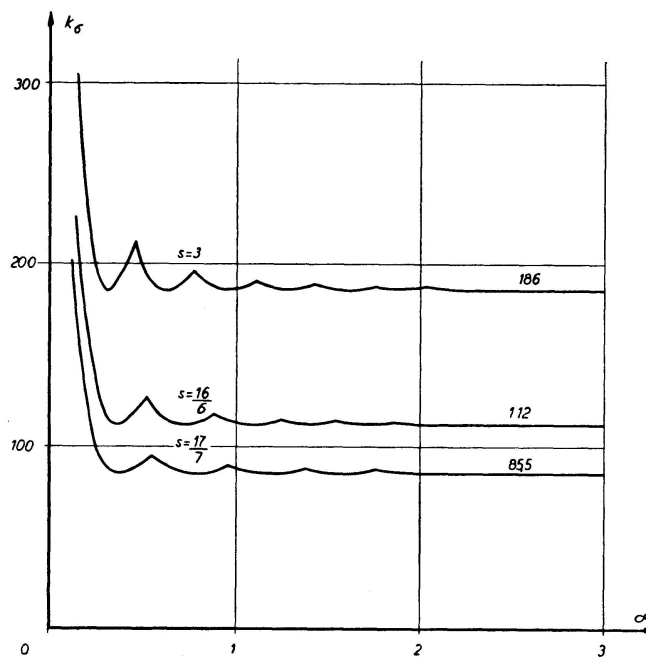


Fig. 9.2.

### 9.3. Détermination de la position optimum du raidisseur et calcul de $\gamma^*$

Rappelons que la tension critique d'Euler s'écrit  $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 D}{b^2 h}$ . Nous prendrons cette valeur comme tension de référence pour chacun des panneaux partiels (fig. 3.1)

$$\alpha = \frac{a}{b}; \quad \alpha_1 = \frac{a}{d_i} = \alpha \frac{b}{d_i}; \quad \alpha_2 = \frac{a}{b-d_i} = \alpha \frac{b}{b-d_i}.$$

Les tensions critiques d'Euler des panneaux partiels s'écrivent respectivement

$$\sigma_{cr1} = \frac{\pi^2 D}{d_i^2 h} = \sigma_{cr} \left( \frac{b}{d_i} \right)^2, \quad \sigma_{cr2} = \frac{\pi^2 D}{(b-d_i)^2 h} = \sigma_{cr} \left( \frac{b}{b-d_i} \right)^2.$$

Appelons  $k_{\sigma_1}$  et  $k_{\sigma_2}$  les coefficients de stabilité au voilement des panneaux 1 et 2, ces  $k_{\sigma}$  étant rapportés à la tension critique d'Euler.

Tableau V

$\frac{d_i}{b}$	$\alpha=2$		$\alpha=0,25$	
	$k_{\sigma_1}$	$k_{\sigma_1}$	$k_{\sigma_2}$	$k_{\sigma_2}$
0	$\infty$	40	$\infty$	60
0,15	362	118	376	118
0,2	217,5	175	220	175
0,25	149	330	163	330
0,333	93,5	1125	95,5	1970
0,5	54,2	$\infty$	59,2	$\infty$

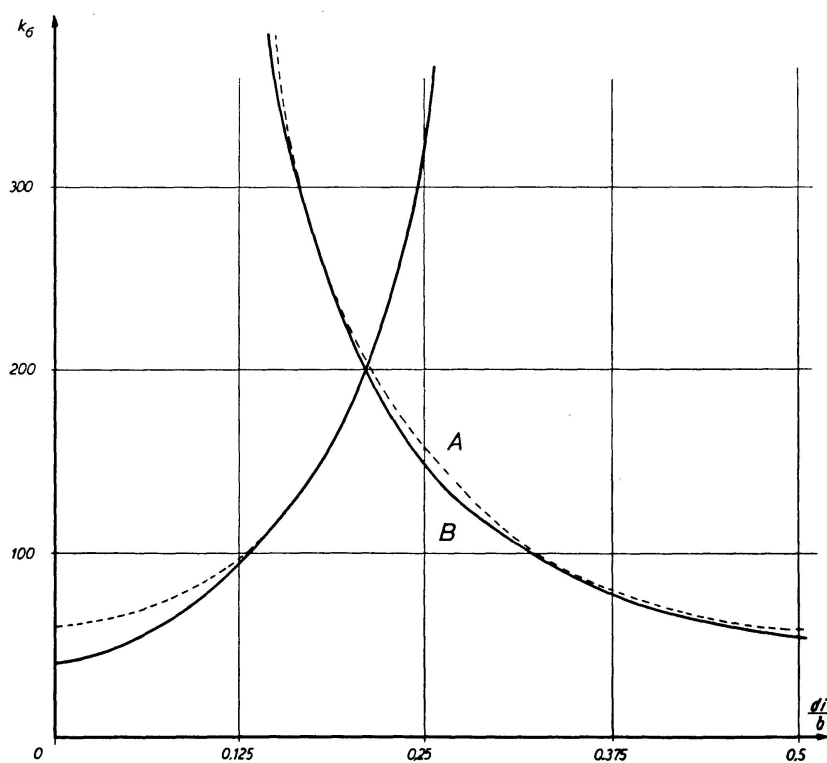


Fig. 9.3.

$$k_{\sigma_1} = k_{\sigma'} \left( \frac{b}{d_i} \right)^2 \quad \text{et} \quad k_{\sigma_2} = k_{\sigma''} \left( \frac{b}{b-d_i} \right)^2.$$

La valeur optimum du  $d_i/b$  sera donc fixée par la relation  $k_{\sigma_1} = k_{\sigma_2}$ .

Nous avons fait ces calculs, soit en adoptant pour  $k_{\sigma'}$  et  $k_{\sigma''}$  leurs valeurs minima, ce qui correspond à un  $\alpha$  très grand, soit en prenant les valeurs exactes de  $k_{\sigma'}$  et  $k_{\sigma''}$  pour un panneau de  $\alpha = 0,25$  (valeur voisine du  $\alpha$  donnant le  $k_{\sigma \min}$  de la deuxième forme de voilement).

Les résultats de ces calculs sont consignés dans le tableau V et traduits par les courbes de la figure 9.3.

On constate que les deux valeurs de  $\alpha$  donnent sensiblement la même position pour le raidisseur et le même  $k_{\sigma}$ , à savoir  $d_i/b$  optimum = 0,21,  $k_{\sigma}^* = 200$ .

En pratique, les plaques qu'il faut raidir sont souvent en même temps cisailées et fléchies. Le raidisseur à  $d_i/b = 0,21$  n'est plus intéressant dans ce cas; aussi avons-nous envisagé des raidisseurs au 1/4 supérieur ( $k_{\sigma}^* = k_{\sigma_1} \cong 150$ ) et au 1/3 supérieur ( $k_{\sigma}^* = k_{\sigma_2} \cong 95$ ).

Pour déterminer les courbes  $\gamma^* = f(\alpha)$ , nous utilisons l'équation générale aux  $a_{mn}$  (6,2) des plaques encastées et appuyées.

Cette relation s'écrit dans notre cas:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha^2} \sum_p m^4 E_{np} a_{mp} + m^2 A_n a_{mn} + \frac{\alpha^2}{2} B_n a_{mn} \\ & + \frac{\gamma}{\alpha^2} \sum_p m^4 f_n(d_i) f_p(d_i) a_{mp} + \theta \sum_p m^2 \frac{b^2}{\pi^2} f'_n(d_i) f'_p(d_i) a_{mp} \\ & - k_{\sigma_0} \sum_p m^2 F_{np} a_{mp} \\ & - k_{\sigma_0} \delta \left( 1 - \frac{2d_i}{b} \right) \sum_p m^2 f_n(d_i) f_p(d_i) a_{mp} = 0. \end{aligned} \quad (9,1)$$

Notons d'abord que, pour calculer  $\gamma^*$ , nous pouvons, en accord avec le théorème 7.2, ne considérer que  $m = 1$  dans la relation (9,1).

Nous allons voir que la valeur  $\gamma^*$  peut se déterminer directement. En effet, partons de  $\gamma = 0$ , donc de la série des déformées de voilement par flexion pure de la plaque non raidie; un raidisseur de rigidité croissante fait augmenter continûment la stabilité de chacune de ces formes, sauf s'il correspond à une ligne nodale, auquel cas le  $k_{\sigma}$  de cette forme de voilement ne change pas.

Au cours de cette évolution, toutes les valeurs correspondant initialement à des  $k_{\sigma} < k_{\sigma}^*$  passent par  $k_{\sigma}^*$  pour une valeur positive de  $\gamma$ .

La valeur à adopter pour  $\gamma^*$  est donc la plus grande valeur de  $\gamma$  qui annule le déterminant déduit des équations (9,1).

Pour le raidisseur situé à  $d_i/b = 0,21$ , on peut obtenir deux valeurs positives de  $\gamma$  pour  $0,15 < \alpha < 0,3$  car, entre ces deux limites, le  $k_{\sigma}$  de la deuxième forme de voilement par flexion pure est inférieur à 200 (Réf. 20).

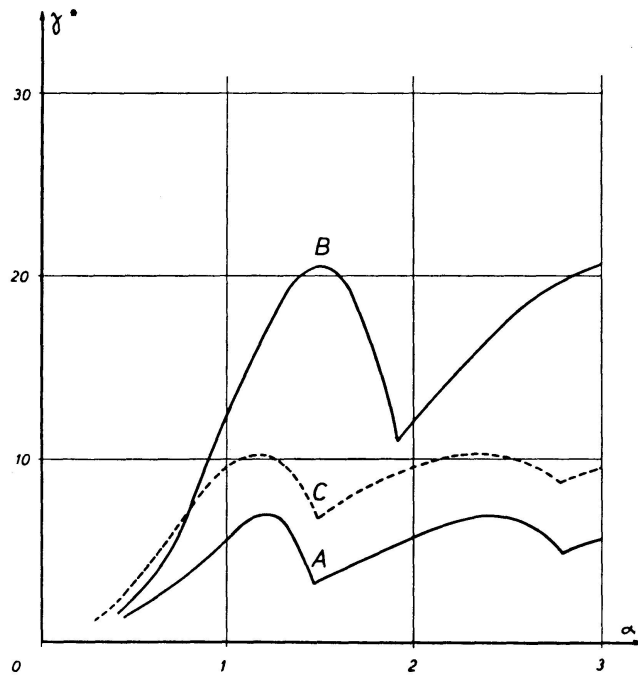
Les résultats que nous avons obtenus pour  $\theta = 0$  (raidisseurs à section

ouverte) et pour  $\theta/\gamma=0,8$  (raidisateurs en forme de tube) sont consignés dans le tableau VI et représentés par les courbes des figures 9.4 et 9.5.

Tableau VI

$\alpha$	$\frac{d_i}{b}=0,25$	$\frac{d_i}{b}=0,21, \frac{\theta}{\gamma}=0,8$		$\frac{d_i}{b}=0,25, \frac{\theta}{\gamma}=0,8$		$\frac{d_i}{b}=0,333, \frac{\theta}{\gamma}=0,8$	
	$\delta=\theta=0$	$\delta=0$	$\delta=0,15$	$\delta=0$	$\delta=0,15$	$\delta=0$	$\delta=0,15$
	$\gamma$	$\gamma$	$\gamma$	$\gamma$	$\gamma$	$\gamma$	$\gamma$
0,3	—	2,65	—	—	—	—	—
0,5	3,30	4,76	8,71	—	—	1,66	2,78
0,75	6,64	7,3	15,9	3,17	5,97	2,46	5,11
1	9,45	7,65	20,73	5,75	11,94	2,35	7,10
1,25	10,08	5,95	20,07	6,87	17,44	0,33	7,54
1,5	6,50	3,83	15,05	2,20	20,02	0	5,22

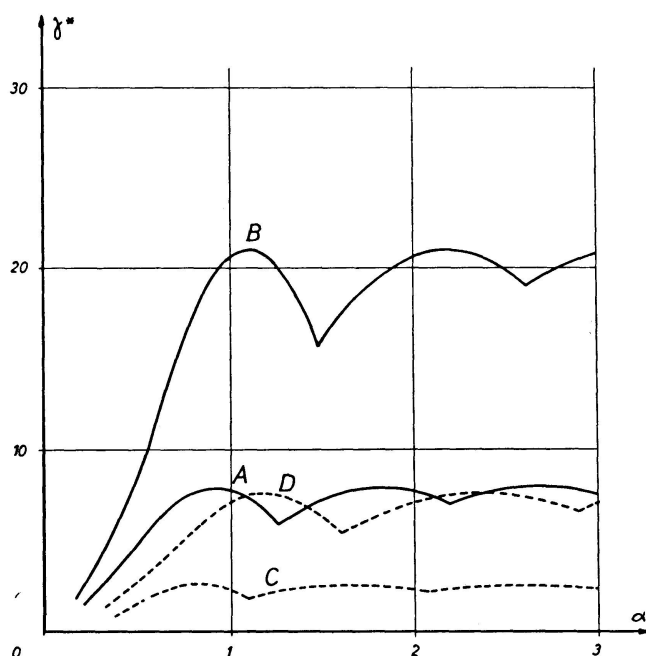
On peut interpoler linéairement entre les valeurs relatives à  $\delta=0$  et  $\delta=0,15$ . L'inspection des résultats précédents conduit aux conclusions suivantes:



$$\frac{d_i}{b} = 0,25 \left\{ \begin{array}{l} \text{A: } \delta = 0; \quad \frac{\theta}{\gamma} = 0,8 \\ \text{B: } \delta = 0,15; \quad \frac{\theta}{\gamma} = 0,8 \\ \text{C: } \delta = \theta = 0 \end{array} \right.$$

Fig. 9.4.

1. L'encastrement sur les bords horizontaux joue un rôle important puisque  $k_{\sigma}^*$  passe de 129 à 162.
2. Les raidisseurs tubulaires ont pour effet de relever nettement la stabilité puisque  $k_{\sigma}^{max}$  passe, pour une plaque encadrée-appuyée, de 162 pour  $\theta = 0$  à 200 pour  $\theta/\gamma = 0,8$ .
3. La rigidité torsionnelle  $\theta$  a, en outre, une grande influence sur les dimensions du raidisseur puisque, pour  $\theta/\gamma = 0,8$ , elle réduit la valeur de  $\gamma^*$  aux environs de 60 pour 100 de celle qui était nécessaire pour atteindre la même stabilité lorsque  $\theta$  était nul.
4. Notons encore que le premier feston de la courbe  $k_{\sigma_0} = f(\alpha)$  en flexion pure est beaucoup moins évasé dans le cas où les bords horizontaux sont encastres que lorsqu'ils sont appuyés.



$$\frac{\theta}{\gamma} = 0,8 \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{A: } \delta = 0; & \frac{d_i}{b} = 0,21 \quad \text{B: } \delta = 0,15; \frac{d_i}{b} = 0,21 \\ \text{C: } \delta = 0; & \frac{d_i}{b} = 0,333 \quad \text{D: } \delta = 0,15; \frac{d_i}{b} = 0,333. \end{array} \right.$$

Fig. 9.5.

De ce fait, on passe plus vite de la déformée sans ligne nodale à celle à une ligne nodale verticale et, par conséquent, la courbe  $\gamma^* = f(\alpha)$  passe par un maximum pour une valeur de  $\alpha$  beaucoup plus petite (environ 1) que pour les plaques appuyées pour lesquelles ce maximum se produit pour  $\alpha$  compris entre 2 et 3.

La valeur maximum de  $\gamma^*$  est donc plus faible pour les plaques encastres — appuyées que pour celles appuyées sur tout leur contour.

### Remerciements

Les auteurs expriment leurs vifs remerciements à Mr. LINSMANN, Directeur du Centre de Calcul de l'Université de Liège, pour l'aide importante qu'il leur a apportée dans l'emploi de l'ordinateur I.B.M. 650.

Des remerciements sont également dus à Monsieur J. ROOSEN, préparateur au Service de Résistance des Matériaux, qui a exécuté tous les travaux de mécanographie nécessaires à l'utilisation de l'ordinateur.

Les dépenses de personnel entraînées par l'exécution des calculs numériques ont été partiellement couvertes par un subside de la Commission pour l'Etude de la Construction Métallique (C.E.C.M.). Qu'elle trouve ici l'expression de nos remerciements.

### Bibliographie

1. C. MASSONNET, «Recherches expérimentales sur le voilement de l'âme de poutres à âme pleine». 4e Congrès de l'A.I.P.C., Cambridge et Londres, 1952, Public. Prélim., pp. 539—555.
2. C. MASSONNET, «Essais de voilement sur poutres à âme raidie». Mém. de l'A.I.P.C., Vol. 14, 1954, pp. 125—186.
3. A. DÖRNEN, «Geschweißter Stahlbau 1948. Wo stehen wir? Was läßt die Entwicklung erwarten?». Stahlbau-Tagung, Stuttgart 1948.
4. F. W. BORNSCHEUER, «Beitrag zur Berechnung ebener gleichmäßig gedrückter Rechteckplatten, versteift durch eine Längssteife». Dissertation, Darmstadt 1947.
5. S. IGUCHI, «Allgemeine Lösung der Knickungsaufgabe für rechteckige Platten». Ing.-Archiv., Vol. 7 (1936), pp. 207.
6. K. NÖLKE, «Biegungsbeulung der Rechteckplatte». Ing.-Archiv., Vol. 8 (1937), pp. 403—425.
7. B. BUDIANSKY et R. W. CONNOR, "Buckling stresses of clamped rectangular flat plates in shear". N.A.C.A. Technical Note No. 1559, Washington 1948.
8. W. MOHEIT, «Schubbeulung rechteckiger Platten mit eingespannten Rändern». Thesis, Techn. Hochschule Darmstadt, Leipzig 1939.
9. S. IGUCHI, «Die Knickung der rechteckigen Platte durch Schubkräfte». Ing.-Archiv, Vol. 9 (1938), pp. 1—12.
10. C. MASSONNET, «Les relations entre les modes normaux de vibration et la stabilité des systèmes élastiques». Bull. C.E.R.E.S., Liège, Vol. 1, 1940.
11. F. BLEICH, "Buckling strength of metal structures". McGraw Hill, New York 1952 (voir les pages 65 à 69).
12. S. P. TIMOSHENKO et S. WOINOWSKY-KRIEGER, "Theory of plates and shells", 2e édition. McGraw Hill Co., pp. 364—377, 1959.
13. E. CHWALLA, «Über die Grundgleichungen der allgemein-orthotropen Scheiben und Platten». Rendiconti del Corso di Perfezionamento del Politecnico di Milano, Vol. 7, 1957, pp. 17—60.
14. M. MILOSAVLJEVITCH, «Sur la stabilité des plaques rectangulaires renforcées par des raidisseurs et sollicitées à la flexion et au cisaillement». Mém. A.I.P.C., Vol. 8 (1947), pp. 141—161.
15. E. CHWALLA, «Dimensionnement des âmes renforcées horizontalement dans les poutres à âme pleine». 2e Congrès de l'A.I.P.C., Publ. Prélim. Berlin 1936, pp. 961 à 989.

16. E. CHWALLA, «Beitrag zur Stabilitätstheorie des Stegbleches vollwandiger Träger». Der Stahlbau, Heft 22, 22.—9. Oktober 1936.
17. C. MASSONNET, «La stabilité de l'âme des poutres munies de raidisseurs horizontaux et sollicitées par flexion pure». Mémoires de l'A.I.P.C., Vol. 6 (1940/41), pp. 233—240.
18. CH. DUBAS, «Le voilement de l'âme des poutres fléchies et raidies au cinquième supérieur». Mémoires de l'A.I.P.C. (1954), pp. 1 à 12.
19. F. STÜSSI, CH. et P. DUBAS, «Le voilement de l'âme des poutres fléchies avec raidisseur au cinquième supérieur». Mémoires de l'A.I.P.C. (1957), pp. 217 à 240.
20. G. CERADINI, «Sul dimensionamento delle costole longitudinali di irrigidimento dell'anima in travi a parete piena sollecitati a flessione e soggette a pericolo di instabilità per ingobbamento». Istituto di Scienza delle Costruzioni, Pubblicazioni N° II: 11, 12 et 16.
21. C. MASSONNET, «Recherches expérimentales sur le voilement de l'âme des poutres à âme pleine». Bulletin du C.E.R.E.S., Liège, Tome V, 1951, 67—240.
22. C. KOLLBRUNNER et M. MEISTER, «Ausbeulen — Theorie und Berechnung von Blechen». Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, pp. 168 à 170.

### Résumé

Les auteurs exposent d'abord une théorie générale du voilement d'une plaque rectangulaire orthotrope, munie éventuellement de raidisseurs horizontaux et verticaux possédant des rigidités flexionnelle et torsionnelle importantes.

La théorie est basée sur le critère de l'énergie et la déformée de voilement est représentée par une série double dont les composantes sont les déformées de flambement d'une barre prismatique biarticulée ou biencastrée.

Dans la deuxième partie du mémoire, cette théorie est appliquée à l'étude de plaques isotropes non raidies, ayant deux bords parallèles ou les quatre bords encastés et soumises à compression, flexion composée ou cisaillement. On étudie ensuite des plaques soumises à flexion pure, encastées sur les bords horizontaux et munies d'un raidisseur horizontal à section tubulaire d'ordonnée relative  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$  ou  $\frac{1}{5}$ .

### Zusammenfassung

Die Autoren entwickeln zuerst eine allgemeine Theorie des Beulens einer rechteckigen orthotropen Platte, die mit horizontalen und vertikalen Aussteifungen mit hoher Biege- und Torsionssteifigkeit versehen sein kann.

Die Theorie basiert auf dem Energiekriterium, und die Beulfläche wird durch eine doppelte Reihe dargestellt, deren Glieder die Ausbiegungen eines beidseitig gelenkig gelagerten oder beidseitig eingespannten prismatischen Knickstabes sind.

Im zweiten Teil der Abhandlung wird diese Theorie auf das Studium nicht ausgesteifter isotroper Platten angewendet, bei denen zwei parallele oder alle vier Ränder eingespannt sind und die durch Druck, zusammengesetzte Bie-



gung oder Schub beansprucht werden. Anschließend werden durch einfache Biegung beanspruchte Platten untersucht, die an den horizontalen Kanten eingespannt sind und mit einer horizontalen Längsaussteifung mit Kreisquerschnitt versehen sind, die in  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$  oder  $\frac{1}{5}$  der Steghöhe angeordnet sind.

### Summary

The authors, first of all, describe a general theory of buckling of an orthotropic, rectangular plate, which may be provided with horizontal and vertical stiffeners having considerable flexural and torsional rigidities.

The theory is based on the energy criterion and the deformation due to the buckling is represented by a double series whose components are the buckling deformations of a prismatic bar hinged at both ends or fixed at both ends.

In the second part of the paper this theory is applied to the study of isotropic plates without stiffeners, having two parallel edges, or all four edges, fixed and subjected to compression, to combined bending and compression or to shear. A study is then made of plates subjected to pure bending, clamped at the horizontal edges and provided with a horizontal stiffener having a tubular section of relative ordinate  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$  or  $\frac{1}{5}$ .