

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen  
**Band:** 20 (1960)

**Artikel:** Die Berechnung der aus Pfählen mit krummen Arbeitslinien bestehenden Roste  
**Autor:** Gruber, Ernst  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-17555>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 08.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Die Berechnung der aus Pfählen mit krummen Arbeitslinien bestehenden Roste

*Calculation of Groups of Piles with a Non-Linear Relationship Between Force and Penetration*

*Calcul des groupes de pieux avec relation effort-pénétration non linéaire*

ERNST GRUBER

Dr.-Ing. habil., Oberregierungsbaurat, Hannover

### 1. Allgemeines

1.1. In der Folge werden mit Hilfe einer rasch konvergierenden Iteration beliebige Pfahlroste berechnet, bei welchen die elastischen Eindringungen  $\Delta_i$  der einzelnen Pfähle nach krummen Kraft-Setzungslinien zunehmen. In der Regel wird dieses Anwachsen rascher als linear erfolgen.

1.2. Für einen beliebigen Punkt  $v$  dieser Arbeitslinien stellt die 1. Ableitung  $E_{i,v} = \left(\frac{dP_i}{d\Delta_i}\right)_{\Delta_i=\Delta_{i,v}}$  den zur Pfahlkraft  $P_{i,v}$  und zur Eindringung  $\Delta_{i,v}$  gehörigen Elastizitätsmodul  $E_{i,v}$  dar (Fig. 1).

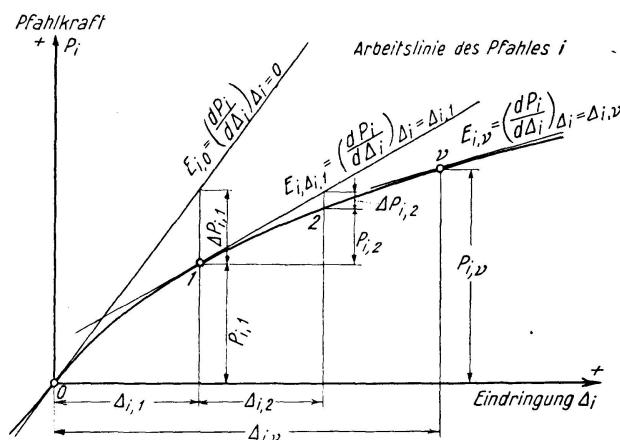


Fig. 1.

## 2. Pfähle mit axialer und seitlicher Widerstandsfähigkeit

2.1. Wir betrachten 3 zueinander senkrecht stehende, von einem Punkt  $i$  ausgehende Pfähle  $i$ ,  $i_1$  und  $i_2$  mit nur axialer Widerstandsfähigkeit, für welche 3 verschiedene Arbeitslinien vorhanden sein sollen (Fig. 2). In  $i$  übertragen die 3 Pfähle ihre axialen Widerstände auf den steifen Fundamentkörper.

2.2. Dringt der Punkt  $i$  nur in der Richtung eines der 3 Pfähle ein, so entsteht nur in diesem Pfahl eine axiale Kraft, während die beiden anderen spannungslos bleiben. Verschiebt sich nun  $i$  um den zu den 3 Richtungen  $i$ ,  $i_1$  und  $i_2$  geneigten Vektor  $\mathfrak{U}_i$ , so ergeben sich die Beträge der 3 Pfahlkräfte zu

$$P_i = E_i \Delta_i, \quad \mathfrak{P}_i = P_i \mathfrak{p}_i, \quad (1 \text{ a, b})$$

$$P_{i,1} = E_{i,1} \Delta_{i,1} = E_{i,1} \Delta_{i,12} \cos \mu_{i,1}, \quad P_{i,2} = E_{i,2} \Delta_{i,2} = E_{i,2} \Delta_{i,12} \cos \mu_{i,2}, \quad (2, 3)$$

woraus für  $\mu_{i,1} = \mu_{i,2} = 0$  zunächst

$$A_{i,1} = E_{i,1} \Delta_{i,12}, \quad A_{i,2} = E_{i,2} \Delta_{i,12} \quad (4 \text{ a, b})$$

folgt. Daraus erhalten wir weiter

$$\begin{aligned} \left( \frac{E_{i,1} \Delta_{i,12} \cos \mu_{i,1}}{E_{i,1} \Delta_{i,12}} \right)^2 + \left( \frac{E_{i,2} \Delta_{i,12} \cos \mu_{i,2}}{E_{i,2} \Delta_{i,12}} \right)^2 = \\ \cos^2 \mu_{i,1} + \cos^2 \mu_{i,2} = \left( \frac{P_{i,1}}{A_{i,1}} \right)^2 + \left( \frac{P_{i,2}}{A_{i,2}} \right)^2 = 1. \end{aligned} \quad (5)$$

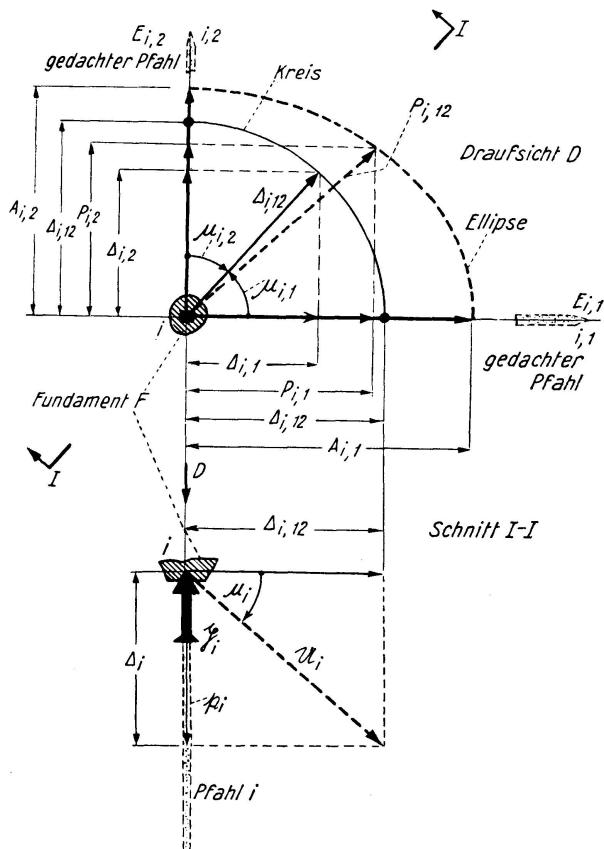


Fig. 2.

Dabei bedeuten im Sinne von (1.2) die  $E_i$ ,  $E_{i,1}$  und  $E_{i,2}$  die zu den Verschiebungen  $\Delta_i$ ,  $\Delta_{i,1}$  und  $\Delta_{i,2}$  gehörigen Elastizitätsmodule. Bewegt sich also die Spitze des Verschiebungsvektors  $\Delta_{i,12}$  auf einem Kreis, so wandert die Spitze des dazugehörigen Kraftvektors  $P_{i,12}$  auf einer Ellipse mit den Hauptachsen  $A_{i,1}$  und  $A_{i,2}$ .

Betrachten wir  $i_1$  und  $i_2$  als gedachte Hilfspfähle, so können wir auf diese Weise die Wirkung eines Pfahles  $i$  beschreiben, dessen Schaft eine axiale und dessen Kopf eine seitliche, mit der Richtung stetig veränderliche Widerstandsfähigkeit besitzt.

2.3. Ist der seitliche Widerstand nach allen Richtungen gleich groß, was fast immer der Fall sein wird, so setzen wir

$$E_{i,1} = E_{i,2} = E_{i,h}, \quad \Delta_{i,12} = \Delta_{i,h}, \quad P_{i,12} = P_{i,h}, \quad (6 \text{ a, b, c})$$

wodurch die Ellipse (5) in einen Kreis mit dem Radius  $E_{i,h} \Delta_{i,h}$  übergeht und die Richtungen von  $\Delta_{i,h}$  und  $P_{i,h}$  für jeden Winkel  $\mu_i$  zusammenfallen.

2.4. Bei Hinzuziehung der nötigen Hilfspfähle können wir also unsere weiteren Untersuchungen auf Roste beschränken, die nur aus Pfählen mit rein axialer Widerstandsfähigkeit bestehen, ohne dadurch die Allgemeingültigkeit der nun folgenden Methoden zu verschmälern.

### 3. Die Ermittlung der Pfahlkräfte eines räumlichen Pfahlwerkes

3.1.1. Wir betrachten eine Anzahl beliebig gerichteter Pfähle, welche mit ihren beliebig liegenden oberen Kopfenden  $i$  an einem steifen Fundamentkörper so gelenkig angeschlossen sind, daß sie im Sinne von (2.4) bei einer Belastung nur mit einer axialen Widerstandsfähigkeit reagieren können. Wird nun dieses räumliche Pfahlwerk gleichzeitig von beliebig vielen zueinander windschiefen Lasten  $\mathfrak{R}_i$  ergriffen, so führt es eine elastische räumliche Bewegung aus, welche wegen der hohen Steifigkeit, die wir für unsere Bauwerke fordern müssen, so gering sein wird, daß wir sie bei Vernachlässigung der kleinen Größen 2. und höherer Ordnung rechnungsmäßig als infinitesimale Werte behandeln können. Nehmen wir nun noch den die Pfähle verbindenden Fundamentkörper als unendlich steif an, so wird diese Bewegung durch 2 zueinander windschiefe Drehvektoren  $\mathfrak{D}_v = d_v \mathfrak{d}_v$  und  $\mathfrak{D}_\mu = d_\mu \mathfrak{d}_\mu$ , kurz «Drehkreuz»  $\mathfrak{D}_v; \mathfrak{D}_\mu$  genannt, beschrieben (Fig. 3). Bekanntlich gibt es hiervon unendlich viele, die aber alle einander gleichwertig sind.

Dabei bezeichnen wir einen Vektor mit einem großen gotischen, seinen zugehörigen Einheitsvektor mit den gleichnamigen kleinen gotischen, und seinen absoluten Betrag mit den gleichnamigen kleinen oder großen lateinischen Buchstaben, eine Bezeichnungsweise, die wir auch in Hinkunft einhalten wollen.

3.1.2. Jeder Pfahlkopf verschiebt sich also um einen Vektor  $\mathfrak{U}_i$ , der sich durch geometrische Addition der Drehungen  $\mathfrak{D}_\nu$  und  $\mathfrak{D}_\mu$  zu

$$\mathfrak{U}_i = [\mathfrak{D}_\nu \mathfrak{R}_{\nu, i}] + [\mathfrak{D}_\mu \mathfrak{R}_{\mu, i}] = d_\nu [\mathfrak{d}_\nu \mathfrak{R}_{\nu, i}] + d_\mu [\mathfrak{d}_\mu \mathfrak{R}_{\mu, i}] \quad (7)$$

ergibt, wobei die mit  $[ ]$  bezeichneten vektoriellen Produkte, entsprechend ihrer Definition, von der Wahl der Bezugspunkte  $0_{\nu, \mu}$  unabhängig sind. Daraus folgt die axiale Verschiebung des Pfahlkopfes  $i$  als Projektion von  $\mathfrak{U}_i$  auf die Pfahlrichtung  $\mathfrak{p}_i$ , so daß sich bei der nunmehr rein axialen Widerstandsfähigkeit die zugehörige Pfahlkraft zu

$$\mathfrak{P}_i = P_i \mathfrak{p}_i = E_i (\mathfrak{p}_i [\mathfrak{R}_{\nu, i} \mathfrak{D}_\nu] + \mathfrak{p}_i [\mathfrak{R}_{\mu, i} \mathfrak{D}_\mu]) \mathfrak{p}_i \quad (8)$$

ergibt, wobei  $E_i$  den Elastizitätsmodul des Pfahles  $i$  im Sinne von (1.2) bedeutet.

Ein Drehvektor gilt dann als positiv, wenn ein gegen seine Spitze Blickender die Drehung im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers wahrnimmt. Eine Pfahlkraft hingegen wird als positiv gezählt, wenn der Pfahl *gegen* den Fundamentkörper *drückt*. Beide Vereinbarungen wollen wir auch für später festhalten.

3.1.3. Für die folgenden Darlegungen sei auf die allgemein gültigen Identitäten der Vektoralgebra

$$[\mathfrak{l} \mathfrak{m}] = -[\mathfrak{m} \mathfrak{l}]; \quad \mathfrak{l} [\mathfrak{m} \mathfrak{n}] = \mathfrak{n} [\mathfrak{l} \mathfrak{m}] = \mathfrak{m} [\mathfrak{n} \mathfrak{l}] \quad (9 \text{ a, b, c, d})$$

hingewiesen, von denen die 3 letzteren durch zyklische Vertauschungen zusammenhängen.

Das statische Moment von  $\mathfrak{P}_i$  um eine beliebige Achse  $\mathfrak{x}$  beträgt nun bei Bedachtnahme auf (9)

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{x}, i} = m_{\mathfrak{x}, i} \mathfrak{x} = (\mathfrak{x} [\mathfrak{R}_{\mathfrak{x}, i} \mathfrak{P}_i]) \mathfrak{x} = (\mathfrak{P}_i [\mathfrak{x} \mathfrak{R}_{\mathfrak{x}, i}]) \mathfrak{x}. \quad (10)$$

Summiert man  $m_{\mathfrak{x}, i}$  über alle Pfähle  $i$ , so folgt wieder mit (9)

$$\begin{aligned} \sum m_{\mathfrak{x}, i} &= \sum_i \mathfrak{P}_i [\mathfrak{x} \mathfrak{R}_{\mathfrak{x}, i}] = \sum_i P_i \cdot \mathfrak{p}_i [\mathfrak{x} \mathfrak{R}_{\mathfrak{x}, i}] = \\ &= \sum_i P_i \cdot \mathfrak{x} [\mathfrak{R}_{\mathfrak{x}, i} \mathfrak{p}_i] = \sum_i P_i \cdot x_i \quad (\text{Fig. 3}). \end{aligned} \quad (11)$$

Dabei bedeutet nach (10)  $x_i$  den absoluten Betrag des statischen Momentes einer im Pfahl  $i$  wirkenden Kraft  $\mathfrak{p}_i = 1$  um die Achse  $\mathfrak{x}$ . Bezieht man  $x_i$  nicht auf den Bezugspunkt  $O_{\mathfrak{x}}$ , sondern auf  $O'_{\mathfrak{x}}$  (Fig. 3), so folgt

$$m_{\mathfrak{x}, i} - m'_{\mathfrak{x}, i} = \mathfrak{P}_i \{ [\mathfrak{x} \mathfrak{R}_{\mathfrak{x}, i}] - [\mathfrak{x} \mathfrak{R}'_{\mathfrak{x}, i}] \} = \mathfrak{P}_i [\mathfrak{x} (\mathfrak{R}_{\mathfrak{x}, i} - \mathfrak{R}'_{\mathfrak{x}, i})] = \mathfrak{P}_i [\mathfrak{x} (k \mathfrak{x})], \quad (12)$$

woraus sich ergibt, daß der Wert  $x_i$  wieder von dem auf der Achse  $\mathfrak{x}$  liegenden Bezugspunkt  $O_{\mathfrak{x}}$  unabhängig ist.

Setzt man in den letzten Teil von (11) für  $P_i$  den Wert von (8) ein, so ergibt sich

$$\sum_i m_{\mathfrak{x}, i} = \sum_i [\mathfrak{R}_{\nu, i} \mathfrak{D}_\nu] \cdot x_i E_i \mathfrak{p}_i + \sum_i [\mathfrak{R}_{\mu, i} \mathfrak{D}_\mu] \cdot x_i E_i \mathfrak{p}_i. \quad (13)$$

3.1.4. Wir nennen nun

$$\mathfrak{W}_{\xi, i} = x_i E_i \mathfrak{p}_i = w_{\xi, i} \mathfrak{p}_i \quad (14)$$

das zum Pfahl  $i$  und zur Achse  $\xi$  gehörige «Gewicht». Dieses ist ein in der Pfahlachse  $i$  wirkender Vektor mit dem absoluten Betrag

$$w_{\xi, i} = x_i E_i. \quad (15)$$

Es wird also zunächst aus (13)

$$\sum_i m_{\xi, i} = \sum_i \mathfrak{W}_{\xi, i} [\mathfrak{R}_{\nu, i} \mathfrak{D}_{\nu}] + \sum_i \mathfrak{W}_{\xi, i} [\mathfrak{R}_{\mu, i} \mathfrak{D}_{\mu}]. \quad (16)$$

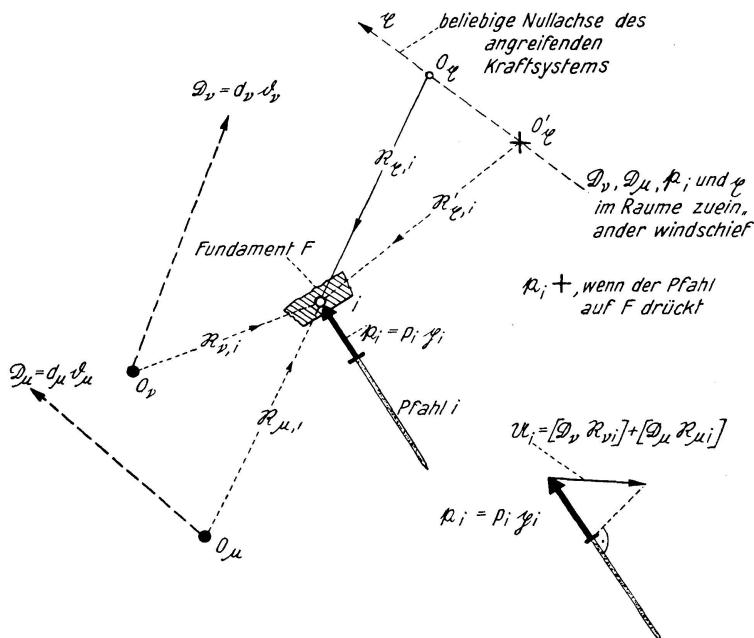


Fig. 3.

Ist die Summe der statischen Momente aller angreifenden Lasten  $\mathfrak{R}_i$  um die Achse  $\xi$  gleich Null, so nennt man letztere eine «Nullachse» des angreifenden Lastensystems. Da sich die  $\mathfrak{R}_i$  und die  $\mathfrak{P}_i$  gegenseitig in ihrer Wirkung aufheben müssen, wird für jede dieser Nullachsen

$$\sum_i m_{\xi, i} = 0, \quad (17)$$

so daß sich mit (9) aus (16) und (17)

$$d_{\nu} \cdot \sum_i \mathfrak{d}_{\nu} [\mathfrak{W}_{\xi, i} \mathfrak{R}_{\nu, i}] + d_{\mu} \cdot \sum_i \mathfrak{d}_{\mu} [\mathfrak{W}_{\xi, i} \mathfrak{R}_{\mu, i}] \equiv 0 \quad (18)$$

ergibt. Dabei stellen die Faktoren der skalaren Drehwinkel  $d_{\nu}$  bzw.  $d_{\mu}$  die Summe der statischen Momente aller Gewichte  $\mathfrak{W}_{\xi, i}$  um die Einheitsvektoren  $\mathfrak{d}_{\nu}$  bzw.  $\mathfrak{d}_{\mu}$  der Drehachsen  $\mathfrak{D}_{\nu}$  bzw.  $\mathfrak{D}_{\mu}$  dar.

3.2. Ein räumliches System mit den Einzelkräften  $\mathfrak{R}_i$  läßt sich stets auf ein aus 2 windschiefen Kräften bestehendes Kraftkreuz zurückführen, und zwar nicht auf ein bestimmtes, sondern auf unendlich viele, die aber alle untereinander gleichwertig sind. Von diesen vielen Kraftkreuzen kann man

aber ein bestimmtes eindeutig festlegen, wenn man verlangt, daß die eine der beiden Wirkungslinien *durch* einen Punkt  $E$  geht und die andere *in* einer Ebene  $e$  liegt.

Der Einfachheit halber wählen wir für  $e$  die horizontale Zeichenebene  $z$  und für  $E$  den unendlich fernen Punkt  $Z$ , der durch den zu  $z$  normalen Einheitsvektor  $\mathfrak{z}$  bestimmt ist.

In diesem Sinne wollen wir in Hinkunft von «waagrecht» und «lotrecht» bzw. von «horizontal» und «vertikal» sprechen.

Bestimmen wir den Schnittpunkt  $K_i = [z \mathfrak{A}_i]$ , zerlegen  $\mathfrak{A}_i$  in eine durch  $K_i$  gehende Vertikal- und Horizontal-Komponente  $\mathfrak{A}_{i,z}$  und  $\mathfrak{A}_{i,h}$  und ermitteln die durch  $Z$  gehende Resultierende  $\mathfrak{A}_z$  aller  $\mathfrak{A}_{i,z}$  und die in  $z$  liegende Resultierende  $\mathfrak{A}_h$  aller  $\mathfrak{A}_{i,h}$ , so erhalten wir das gesuchte orthogonale «Kraftkreuz»  $\mathfrak{A}_z; \mathfrak{A}_h$ .

Diese Reduktion kann man auch auf jedes der oben erwähnten unendlich vielen einander gleichwertigen «Kraftkreuze» anwenden.

Dabei bedeutet [ ] das geometrische Gebilde, welches durch Verbindung der darinstehenden Elemente entsteht, eine Bezeichnung, die wir auch in Hinkunft beibehalten wollen.

3.3.1. Legt man durch die in  $z$  liegende und  $\mathfrak{K}_3$  schneidende Achse  $\mathfrak{x}_h$  eine lotrechte Ebene  $\epsilon_{x_3}$  und legt in ihr durch  $X$  eine gegen  $\mathfrak{x}_h$  um  $\beta_x$  geneigte Achse  $\mathfrak{x}$ , so ist diese eine Nullachse, da sie  $\mathfrak{K}_3$  und  $\mathfrak{K}_h$  schneidet. Dreht man  $\epsilon_{x_3}$  um  $\mathfrak{K}_3$  von  $0$  bis  $\pi$  und verändert  $\beta_x$  gleichfalls von  $0$  bis  $\pi$ , so erfassen wir auf diese Weise sämtliche derartigen Nullachsen (Fig. 4).

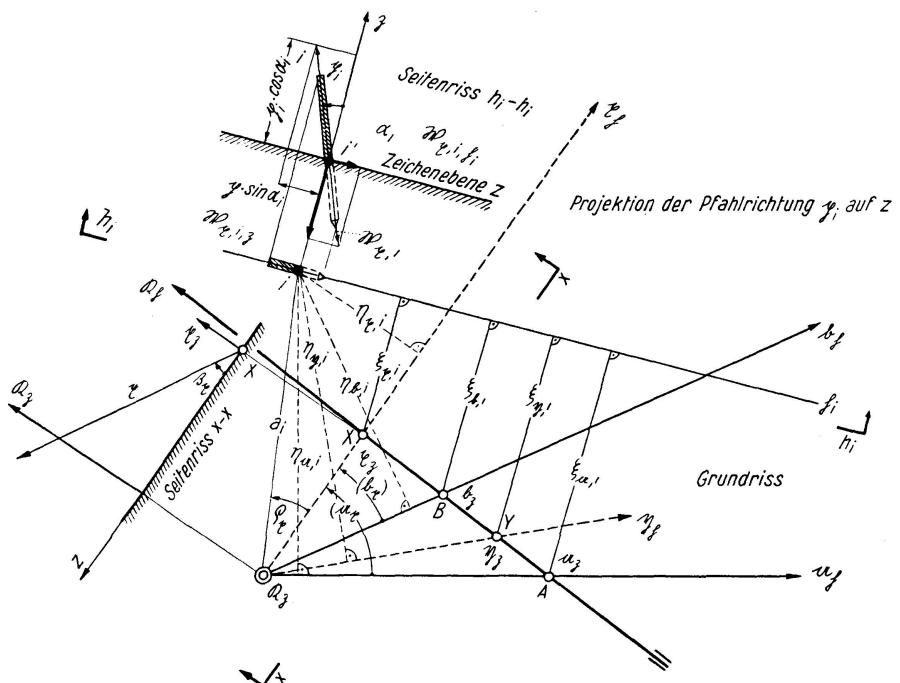


Fig. 4.

3.3.2. Um für den in Fig. 4 dargestellten Pfahl  $i$  die zu  $\xi$  gehörigen «Gewichte» zu ermitteln, müssen wir zunächst nach (3.1.4) in der Pfahlachse  $i$  die Kraft  $p_i = 1$  anbringen, welche wir entsprechend (3.2) zweckmäßigerweise in die  $\mathfrak{z}$ -Komponente  $1 \cdot \cos \alpha_i$  und in die in der Horizontalprojektion  $\mathfrak{h}_i$  der Pfahlrichtung  $\mathfrak{p}_i$  wirkenden  $\mathfrak{h}_i$ -Komponente  $1 \cdot \sin \alpha_i$  zerlegen.

Dabei zählt der Winkel  $\alpha_i$ , unter dem der Pfahl  $i$  gegen  $\mathfrak{z}$  geneigt ist, positiv, wenn  $1 \cdot \sin \alpha_i$  um  $\mathfrak{R}_z$  im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers dreht. Der Pfahl  $i$  schneidet  $z$  im Punkte  $i'$ , der im allgemeinen nicht mit dem Pfahlkopf  $i$  identisch ist.

3.3.3. Die Momente dieser Hilfskraft um die beiden aufeinander senkrecht stehenden Achsen  $\mathfrak{x}_h$  und  $\mathfrak{x}_z$  lauten nun

$$m_{\xi, h, i} = \eta_{\xi, i} \cos \alpha_i \cdot \mathfrak{x}_h \quad \text{und} \quad m_{\xi, z, i} = \xi_{\xi, i} \sin \alpha_i \cdot \mathfrak{x}_z, \quad (19, 20)$$

woraus sich weiter das Moment um die allgemeine Achse  $\xi$  als Summe der beiden Projektionen von (19) und (20) auf  $\xi$  zu

$$m_{\xi, i} = (\eta_{\xi, i} \cos \alpha_i \cdot \cos \beta_{\xi} + \xi_{\xi, i} \sin \alpha_i \cdot \sin \beta_{\xi}) \xi \quad (21)$$

ergibt (Fig. 4). Nach (3.1.4) folgt daraus für das zu  $i'$  und  $\xi$  gehörige «Gewicht»

$$W_{\xi, i} = E_i (\eta_{\xi, i} \cos \alpha_i \cdot \cos \beta_{\xi} + \xi_{\xi, i} \sin \alpha_i \cdot \sin \beta_{\xi}) p_i, \quad (22)$$

für dessen durch  $i'$  gehende Vertikalkomponente

$$W_{\xi, z, i} = E_i (\eta_{\xi, i} \cos^2 \alpha_i \cdot \cos \beta_{\xi} + \xi_{\xi, i} \sin \alpha_i \cos \alpha_i \cdot \sin \beta_{\xi}) \mathfrak{z} \quad (23)$$

und für dessen in  $\mathfrak{h}_i$  wirkende Horizontalkomponente

$$W_{\xi, h, i} = E_i (\eta_{\xi, i} \cos \alpha_i \sin \alpha_i \cdot \cos \beta_{\xi} + \xi_{\xi, i} \sin^2 \alpha_i \cdot \sin \beta_{\xi}) \mathfrak{h}_i. \quad (24)$$

3.3.4. Ersetzt man in (22, 23, 24) den Index  $\xi$  durch  $\mathfrak{a}$  bzw.  $\mathfrak{b}$ , so erhalten wir für die zur Achse  $\mathfrak{a}$  bzw.  $\mathfrak{b}$  gehörigen «Gewichte» die analogen Ausdrücke (25, 26, 27) bzw. (28, 29, 30), die wir aber der Kürze halber nicht gesondert anschreiben wollen.

3.3.5. Zwischen den zu den 3 Stellungen  $\xi$ ,  $\mathfrak{a}$ ,  $\mathfrak{b}$  gehörigen Abständen  $\eta$  und  $\xi$  besteht je eine lineare Abhängigkeit. Mit den in Fig. 4 festgelegten Vorzeichen folgt zunächst

$$\eta_{\mathfrak{a}, i} = a_i \sin [\rho_{\xi} + (\mathfrak{a} \xi)]; \quad \eta_{\mathfrak{b}, i} = a_i \sin [\rho_{\xi} + (\mathfrak{b} \xi)]; \quad \eta_{\xi, i} = a_i \sin \rho_{\xi}.$$

Eliminiert man daraus  $a_i$  und  $\rho_{\xi}$ , so ergibt sich schließlich

$$\eta_{\xi, i} = \eta_{\mathfrak{a}, i} \frac{\sin (\xi \mathfrak{b})}{\sin (\mathfrak{a} \mathfrak{b})} - \eta_{\mathfrak{b}, i} \frac{\sin (\xi \mathfrak{a})}{\sin (\mathfrak{a} \mathfrak{b})} = \eta_{\mathfrak{a}, i} b_{\xi} - \eta_{\mathfrak{b}, i} a_{\xi}. \quad (31)$$

Ebenso folgt aus gewöhnlichen Proportionen die zu (31) duale lineare Abhängigkeit der  $\xi$  zu

$$\xi_{\xi, i} = \xi_{a, i} \frac{X B}{A B} - \xi_{b, i} \frac{X A}{A B} = \xi_{a, i} B_{\xi} - \xi_{b, i} A_{\xi}. \quad (32)$$

Setzt man (31, 32) in (23, 24) ein, so wird

$$\begin{aligned} \mathfrak{W}_{\xi, \mathfrak{z}, i} &= E_i [(\eta_{a, i} \cos^2 \alpha_i \cdot b_{\xi} - \eta_{b, i} \cos^2 \alpha_i \cdot a_{\xi}) \cos \beta_{\xi} \\ &\quad + (\xi_{a, i} \sin \alpha_i \cos \alpha_i \cdot B_{\xi} - \xi_{b, i} \sin \alpha_i \cos \alpha_i \cdot A_{\xi}) \sin \beta_{\xi}] \mathfrak{z}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{W}_{\xi, \mathfrak{h}, i} &= E_i [(\eta_{a, i} \cos \alpha_i \sin \alpha_i \cdot b_{\xi} - \eta_{b, i} \cos \alpha_i \sin \alpha_i \cdot a_{\xi}) \cos \beta_{\xi} \\ &\quad + (\xi_{a, i} \sin^2 \alpha_i \cdot B_{\xi} - \xi_{b, i} \sin^2 \alpha_i \cdot A_{\xi}) \sin \beta_{\xi}] \mathfrak{h}_i. \end{aligned} \quad (34)$$

3.3.6. Ersetzt man in (33, 34)  $\xi$  durch  $\mathfrak{h}$  und  $X$  durch  $Y$ , so ergeben sich die zur  $\mathfrak{h}$ -Achse gehörigen Gewichte.

3.3.7. Wollen wir nur alle in  $z$  liegenden und durch  $\mathfrak{R}_{\mathfrak{z}}$  gehenden  $\xi_{\mathfrak{h}}$ -Achsen erfassen, so müssen wir in (33, 34)  $\beta_{\xi} = 0$  setzen. Bilden wir dann die Resultierende der übrigbleibenden Gewichte  $\mathfrak{W}_{\xi, \mathfrak{z}, i, 0}$  bzw.  $\mathfrak{W}_{\xi, \mathfrak{h}, i, 0}$ , so ergibt sich nach (3.2) das «Kreuz»

$$\mathfrak{B}_{\xi, 0} = \mathfrak{B}_{a, \eta} b_{\xi} - \mathfrak{B}_{b, \eta} a_{\xi}, \quad (35)$$

$$\mathfrak{H}_{\xi, 0} = \mathfrak{H}_{a, \eta} b_{\xi} - \mathfrak{H}_{b, \eta} a_{\xi}, \quad (36)$$

wobei die  $\mathfrak{B}_{\mathfrak{b}, \eta}$  die Resultierenden der in den  $i'$  wirkenden und durch  $Z$  gehenden Kräfte

$$\mathfrak{B}_{\mathfrak{b}, \eta, 0} = E_i \eta_{\mathfrak{b}, i} \cos^2 \alpha_i \quad (37, 38)$$

und die  $\mathfrak{H}_{\mathfrak{b}, \eta}$  die Resultierenden der in den  $\mathfrak{h}_i$  wirkenden und in  $z$  liegenden Kräfte

$$\mathfrak{H}_{\mathfrak{b}, \eta, 0} = E_i \eta_{\mathfrak{b}, i} \cos \alpha_i \sin \alpha_i \quad (39, 40)$$

sind.

3.3.8. Wollen wir uns hingegen nur auf die in der durch  $\mathfrak{R}_{\mathfrak{h}}$  gehenden senkrechten Ebene  $\epsilon_{\mathfrak{h}, \mathfrak{z}}$  liegenden lotrechten Achsen  $\xi_{\mathfrak{z}}$  beschränken, so müssen wir in (33, 34)  $\beta_{\xi} = \pi/2$  setzen. Bilden wir dann analog die Resultierenden der übrigbleibenden Gewichte  $\mathfrak{W}_{\xi, \mathfrak{z}, i, \pi/2}$  bzw.  $\mathfrak{W}_{\xi, \mathfrak{h}, i, \pi/2}$ , so ergibt sich nach (3.2) das «Kreuz»

$$\mathfrak{B}_{\xi, \pi/2} = \mathfrak{B}_{a, \xi} B_{\xi} - \mathfrak{B}_{b, \xi} A_{\xi}, \quad (41)$$

$$\mathfrak{H}_{\xi, \pi/2} = \mathfrak{H}_{a, \xi} B_{\xi} - \mathfrak{H}_{b, \xi} A_{\xi}, \quad (42)$$

wobei die  $\mathfrak{B}_{\mathfrak{b}, \xi}$  die Resultierenden der in  $i'$  wirkenden und durch  $Z$  gehenden Kräfte

$$\mathfrak{B}_{\mathfrak{b}, \xi, \pi/2} = E_i \xi_{\mathfrak{b}, i} \sin \alpha_i \cos \alpha_i \quad (43, 44)$$

und die  $\mathfrak{H}_{\mathfrak{b}, \xi, \pi/2}$  die Resultierenden der in den  $\mathfrak{h}_i$  wirkenden und in  $z$  liegenden Kräfte

$$\mathfrak{H}_{\mathfrak{b}, \xi, \pi/2} = E_i \xi_{\mathfrak{b}, i} \sin^2 \alpha_i \quad (45, 46)$$

sind.

3.3.9. Aus Fig. 4 ergibt sich durch zweimalige Anwendung des sin-Lehrsatzes der Trigonometrie und durch nachherige Division

$$\frac{XB}{XA} = \frac{\sin(\xi b)}{\sin(\xi a)} \frac{\sin \rho_A}{\sin \rho_B} = \frac{A_\xi}{B_\xi} = \frac{a_\xi}{b_\xi}. \quad (47)$$

3.3.10. Die linken Seiten der (35, 36, 41, 42) stellen jeweils die Resultierenden der beiden rechtsstehenden Summanden dar. Bezeichnet man allgemein  $V_{\mu, \nu} = [z \mathfrak{V}_{\mu, \nu}]$  und dreht im Sinne von (3.3.1) die Ebene  $\epsilon_{\xi, \beta}$  um  $\mathfrak{R}_\beta$  und bewegt entsprechend mit ihr  $\xi_h$  bzw.  $X$ , so verschiebt sich  $V_{\xi, 0}$  bzw.  $V_{\xi, \pi/2}$  auf der Punktreihe  $g_0 = [V_{a, \eta} V_{b, \eta}]$  bzw.  $g_{\pi/2} = [V_{a, \xi} V_{b, \xi}]$ , und  $\mathfrak{H}_{\xi, 0}$  bzw.  $\mathfrak{H}_{\xi, \pi/2}$  dreht sich um den Schnittpunkt  $G_0 = [\mathfrak{H}_{a, \eta} \mathfrak{H}_{b, \eta}]$  bzw.  $G_{\pi/2} = [\mathfrak{H}_{a, \xi} \mathfrak{H}_{b, \xi}]$ .

3.3.11. Zieht man neben der  $\xi$ -Stellung noch eine  $\eta$ -Stellung in Betracht, so müssen die statischen Momente der Kräfte  $\mathfrak{H}_{a, \eta} b_\xi$  und  $-\mathfrak{H}_{b, \eta} a_\xi$  bzw.  $\mathfrak{H}_{a, \eta} b_\eta$  und  $-\mathfrak{H}_{a, \eta} a_\eta$  um einen beliebigen Punkt der Resultierenden  $\mathfrak{H}_{\xi, 0}$  bzw.  $\mathfrak{H}_{\eta, 0}$  einander gleich sein. Es folgt daher aus (36), wenn die zu  $\xi$  und  $\eta$  gehörigen Abstände der Momentenpunkte von  $G_0$  gleich  $c$  sind,

$$\mathfrak{H}_{a, \eta} b_\xi c \sin(\mathfrak{H}_{\xi, 0} \mathfrak{H}_{a, \eta}) = -\mathfrak{H}_{b, \eta} a_\xi c \sin(\mathfrak{H}_{\xi, 0} \mathfrak{H}_{b, \eta}), \quad (48)$$

$$\mathfrak{H}_{a, \eta} b_\eta c \sin(\mathfrak{H}_{\eta, 0} \mathfrak{H}_{a, \eta}) = -\mathfrak{H}_{b, \eta} a_\eta c \sin(\mathfrak{H}_{\eta, 0} \mathfrak{H}_{b, \eta}), \quad (49)$$

woraus durch Division das Doppelverhältnis

$$\begin{aligned} (\mathfrak{H}_{a, \eta} \mathfrak{H}_{b, \eta} \mathfrak{H}_{\xi, 0} \mathfrak{H}_{\eta, 0}) &= \frac{\sin(\mathfrak{H}_{\xi, 0} \mathfrak{H}_{a, \eta})}{\sin(\mathfrak{H}_{\xi, 0} \mathfrak{H}_{b, \eta})} \cdot \frac{\sin(\mathfrak{H}_{\eta, 0} \mathfrak{H}_{a, \eta})}{\sin(\mathfrak{H}_{\eta, 0} \mathfrak{H}_{b, \eta})} = \\ \frac{a_\xi}{b_\xi} : \frac{a_\eta}{b_\eta} &= \frac{\sin(\xi a)}{\sin(\xi b)} : \frac{\sin(\eta a)}{\sin(\eta b)} = (a_h b_h \xi_h \eta_h) \end{aligned} \quad (50)$$

folgt, ein Wert, der sich wegen

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{c \sin(\mathfrak{H}_{\xi, 0} \mathfrak{H}_{a, \eta})}{c \sin(\mathfrak{H}_{\eta, 0} \mathfrak{H}_{a, \eta})} = \frac{V_{\xi, 0} V_{a, \eta}}{V_{\eta, 0} V_{b, \eta}}$$

auch aus (35), wegen (47) auch aus (41, 42) jeweils durch die zugehörigen analogen Betrachtungen und aus Fig. 4 auch für die Abstände  $\xi$  und  $\eta$  ergibt. Dementsprechend gelten für die Büschel  $G_0$  und  $G_{\pi/2}$ , für die Punktreihen  $g_0$  und  $g_{\pi/2}$  und für die Abstände  $\eta_i$  und  $\xi_i$  die Projektivitäten

$$\begin{aligned} (\mathfrak{H}_{a, \eta} \mathfrak{H}_{b, \eta} \mathfrak{H}_{\xi, 0} \mathfrak{H}_{\eta, 0}) \barwedge (\mathfrak{H}_{a, \xi} \mathfrak{H}_{b, \xi} \mathfrak{H}_{\xi, 0} \mathfrak{H}_{\eta, 0}) \barwedge (V_{a, \eta} V_{b, \eta} V_{\xi, 0} V_{\eta, 0}) \barwedge \\ (V_{a, \xi} V_{b, \xi} V_{\xi, 0} V_{\eta, 0}) \barwedge (\xi_{a, i} \xi_{b, i} \xi_{\xi, i} \xi_{\eta, i}) \barwedge (\eta_{a, i} \eta_{b, i} \eta_{\xi, i} \eta_{\eta, i}). \end{aligned} \quad (51)$$

3.3.12. Betrachtet man in (33, 34) die Stellung  $\xi_h$  als konstant,  $\beta_\xi$  hingegen als variabel, so folgt mit Hilfe von (35, 36, 41, 42) diesmal das «Kreuz»

$$\mathfrak{V}_\xi = \mathfrak{V}_{\xi, 0} \cos \beta_\xi + \mathfrak{V}_{\xi, \pi/2} \sin \beta_\xi; \quad \mathfrak{H}_\xi = \mathfrak{H}_{\xi, 0} \cos \beta_\xi + \mathfrak{H}_{\xi, \pi/2} \sin \beta_\xi, \quad (52, 53)$$

d. h.  $\mathfrak{V}_\xi$  liegt auf der Geraden  $g_\xi = [V_{\xi, 0} V_{\xi, \pi/2}]$  und  $\mathfrak{H}_\xi$  geht durch den Punkt

$G_{\mathfrak{x}} = [\mathfrak{H}_{\mathfrak{x},0}, \mathfrak{H}_{\mathfrak{x},\pi/2}]$ . Setzen wir das eine Mal  $\beta_{\mathfrak{x}} = 0$  und das andere Mal  $\beta_{\mathfrak{x}} = \pi/2$ , so erhalten wir wieder die  $\mathfrak{B}_{\mathfrak{x},0}$ ,  $\mathfrak{H}_{\mathfrak{x},0}$  bzw. die  $\mathfrak{B}_{\mathfrak{x},\pi/2}$ ,  $\mathfrak{H}_{\mathfrak{x},\pi/2}$  der (35, 36, 41, 42), welche den Projektivitäten (51) als zugeordnete Elemente angehören. Sie liegen also auf den Punktreihen  $g_0$  und  $g_{\pi/2}$  bzw. gehen durch die Büschelzentren  $G_0$  und  $G_{\pi/2}$ .

3.3.13. Nennen wir in Hinkunft  $g_x = [V_{x, \pi/2} \ V_{x, 0}]$  die Stellungsgerade und  $G_x = [\mathfrak{H}_{x, \pi/2} \ \mathfrak{H}_{x, 0}]$  den dazugehörigen Stellungspunkt, so können wir aussagen:

«Die Stellungsgeraden  $g_x$  umhüllen einen Kegelschnitt  $K_v$ , der die beiden Geraden  $g_0$  und  $g_{\pi/2}$  berührt, und die Stellungspunkte  $G_x$  liegen auf einem Kegelschnitt  $K_h$ , der durch die beiden Punkte  $G_0$  und  $G_{\pi/2}$  geht.  $K_v$  und  $K_h$  sind zueinander dual und liegen in  $z$ . Die Tangenten  $g_x$  an  $K_v$  sind dabei den Punkten  $G_x$  des  $K_h$  ein-eindeutig zugeordnet.  $g_0$  und  $g_{\pi/2}$  bzw.  $G_0$  und  $G_{\pi/2}$  sind dabei selbst Stellungsgerade bzw. Stellungspunkte (Fig. 5).»

Wir haben die vorhandenen Gesetzmäßigkeiten so weit aufgedeckt, daß wir für die zu jeder Achse  $\mathfrak{x}$  gehörigen Gewichte (22) das diesen letzteren gleichwertige auf  $z$  und  $Z$  bezogenen «Kreuz»  $\mathfrak{V}_x$ ;  $\mathfrak{H}_x$  bestimmen können.

3.4. Wir wollen nun diejenigen Stellungen der Nullachsen  $\mathfrak{x}$  finden, für welche die «Kreuze»  $\mathfrak{B}_x$ ;  $\mathfrak{H}_x$  «Einzelkräfte»  $\mathfrak{R}_x$  werden.

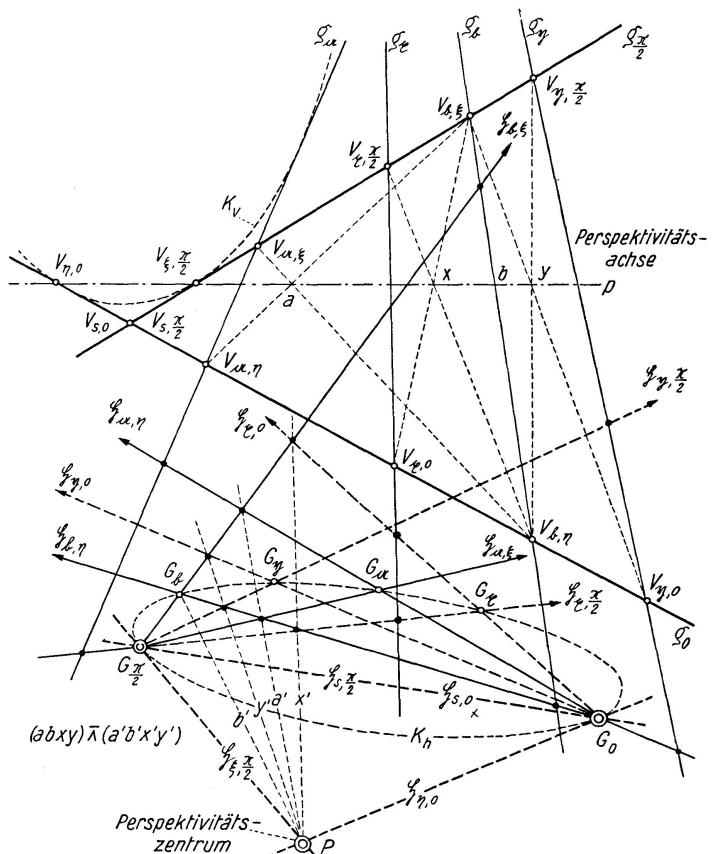


Fig. 5.

3.4.1. Geht man von (52, 53) aus und verbindet die Punkte  $V_{\xi,0}$ ,  $V_{\xi}$ ,  $V_{\xi,\pi/2}$  mit  $G_{\xi}$ , so erhält man ein Büschel, welches mit dem schon bestehenden Büschel  $\mathfrak{H}_{\xi,0}$ ,  $\mathfrak{H}_{\xi}$ ,  $\mathfrak{H}_{\xi,\pi/2}$  projektiv ist. Wir legen einen beliebigen durch  $G_{\xi}$  gehenden Steinerschen Kreis, der die beiden vorherigen Büschel in den wieder zueinander projektiven Punktreihen  $1, 2, 3$  und  $1', 2', 3'$  schneidet. Betrachtet man nun  $1$  bzw.  $1'$  als Scheitel der beiden Büschel  $13', 12'$  bzw.  $1'3, 1'2$ , so sind diese zueinander perspektiv, da sie den Strahl  $11'$  bzw.  $1'1$  miteinander gemeinsam haben. Sie besitzen eine Perspektivitätsachse, die sich aus  $[[13'][1'3]] \cdot [[12'][1'2]]$  ergibt. Sie schneidet den Steinerschen Kreis in I und II, woraus sich für die beiden auf  $g_{\xi}$  liegenden konlokalen Punktreihen  $V_{\xi}$  und  $H_{\xi}$  die beiden Doppelpunkte  $R_{\xi,1} = [g_{\xi}[G_{\xi} \text{ I}]]$  und  $R_{\xi,2} = [g_{\xi}[G_{\xi} \text{ II}]]$  ergeben. Durch die letzteren werden in der durch  $\mathfrak{g}_{\xi}$  gehenden lotrechten Ebene 2 Nullachsen  $\xi_1$  und  $\xi_2$  festgelegt, die sich auf  $\mathfrak{g}_{\xi}$  schneiden und mit  $\mathfrak{g}_{\delta}$  2 getrennte Punkte gemeinsam haben. Die nach (52, 53) dazugehörigen  $\mathfrak{V}_{\xi,1}$  und  $\mathfrak{H}_{\xi,1}$  bzw.  $\mathfrak{V}_{\xi,2}$  und  $\mathfrak{H}_{\xi,2}$  schneiden sich also auf  $g_{\xi}$  in den Doppelpunkten  $R_{\xi,1}$  bzw.  $R_{\xi,2}$ . Die beiden «Kreuze»  $\mathfrak{V}_{\xi,1}; \mathfrak{H}_{\xi,1}$  und  $\mathfrak{V}_{\xi,2}; \mathfrak{H}_{\xi,2}$  reduzieren sich also auf die beiden durch  $R_{\xi,1}$  und  $R_{\xi,2}$  gehenden «Einzelkräfte»  $\mathfrak{R}_{\xi,1}$  und  $\mathfrak{R}_{\xi,2}$  mit den Vertikalkomponenten  $\mathfrak{V}_{\xi,1}$ ,  $\mathfrak{V}_{\xi,2}$  und den Horizontalkomponenten  $\mathfrak{H}_{\xi,1}$ ,  $\mathfrak{H}_{\xi,2}$ . Die beiden letzteren schneiden sich dabei in dem zu  $g_{\xi}$  gehörigen Stellungspunkt  $G_{\xi}$  (Fig. 6).

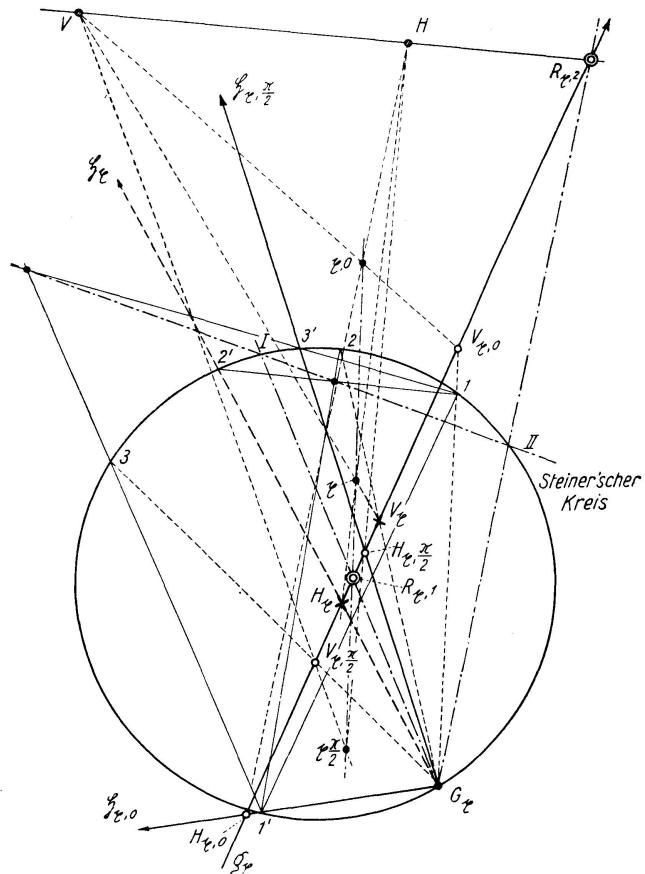


Fig. 6.

3.4.2. Führt man diese Betrachtung für eine 2. Stellung  $\mathfrak{y}$  durch, so ergeben sich 2 weitere Nullachsen  $\mathfrak{y}_1$  und  $\mathfrak{y}_2$  mit den beiden dazugehörigen Einzelkräften  $\mathfrak{R}_{\mathfrak{y},1}$  und  $\mathfrak{R}_{\mathfrak{y},2}$  (Fig. 4).

3.4.3. Da die geometrische Summe der Momente zweier Ersatzkräfte eines gegebenen Kräftesystems um eine beliebige Momentenachse gleich ist der geometrischen Summe der Momente der gegebenen Kräfte um dieselbe Momentenachse, wird (18) dann erfüllt, wenn z. B. die Richtungslinie einer zu einem Doppelpunkt  $\mathfrak{R}_{\mathfrak{x},\rho}$  im vorhergehenden Sinne gehörigen Einzelkraft  $\mathfrak{R}_{\mathfrak{x},\rho}$  beide Achsen eines nach (3.1.1) existierenden «Drehkreuzes»  $\mathfrak{D}_\nu; \mathfrak{D}_\mu$  schneidet. Dann, und nur dann, verschwindet nämlich jeder der beiden Summanden von (18) voneinander unabhängig, und zwar für jeden absoluten Betrag  $d_\nu$  bzw.  $d_\mu$  der Drehvektoren  $\mathfrak{D}_\nu$  bzw.  $\mathfrak{D}_\mu$ .

3.4.4. Nach (3.4.2) liegen nun die zu den Achsenpaaren  $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$  bzw.  $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2$  gehörigen Einzelkräfte  $\mathfrak{R}_{\mathfrak{x},1}, \mathfrak{R}_{\mathfrak{x},2}$  bzw.  $\mathfrak{R}_{\mathfrak{y},1}, \mathfrak{R}_{\mathfrak{y},2}$  vor, welche im allgemeinen zueinander windschief sein werden. Erinnern wir uns daran, daß es stets 2 windschiefe Gerade  $\mathfrak{d}_{\mathfrak{x},\mathfrak{y},1}$  und  $\mathfrak{d}_{\mathfrak{x},\mathfrak{y},2}$  gibt, von welchen jede alle der 4 obigen Resultierenden schneidet, so erkennen wir in den beiden ersten die Achsen des (18) im Sinne von (3.4.3) erfüllenden Drehkreuzes  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{x},\mathfrak{y},1}, \mathfrak{D}_{\mathfrak{x},\mathfrak{y},2}$ .

Es erzeugen nämlich z. B. die  $\mathfrak{R}_{\mathfrak{x},1}, \mathfrak{R}_{\mathfrak{x},2}, \mathfrak{R}_{\mathfrak{y},1}$  eine Regelfläche 2. Ordnung, welche dann von  $\mathfrak{R}_{\mathfrak{y},2}$  in  $M_1$  bzw.  $M_2$  geschnitten wird. Legt man durch  $M_1$  eine Gerade, welche z. B.  $\mathfrak{R}_{\mathfrak{x},1}$  und  $\mathfrak{R}_{\mathfrak{x},2}$  schneidet, so ergibt sich die Gerade  $\mathfrak{d}_{\mathfrak{x},\mathfrak{y},1}$ , welche zur Kontrolle auch von  $\mathfrak{R}_{\mathfrak{y},1}$  geschnitten werden muß. Von  $M_2$  ausgehend findet man analog die 2. Achse  $\mathfrak{d}_{\mathfrak{x},\mathfrak{y},2}$ .

Es seien die beiden Geraden  $m_I$  und  $m_{II}$  zu finden, welche von jeder der 4 vorgegebenen Geraden  $a, b, c, m$  geschnitten werden.

Wir legen z. B. durch die Gerade  $b$  eine beliebige Ebene  $\beta_i$  und bestimmen die Schnittpunkte  $A_i = [\beta_i a]$  und  $C_i = [\beta_i c]$ . Die Verbindungsgerade  $[A_i C_i]$  muß dann auch die Gerade  $b$  im Punkte  $B_i$  schneiden (Zeichenkontrolle). Drehen wir  $\beta_i$  um  $b$ , so erhalten wir eine die Geraden  $a, b, c$  schneidende 1. Geradenschar  $[A_i C_i] = i_1$  ( $i = a, b, \dots, m$ ). Wählen wir aus  $i_1$  2 beliebige Gerade  $[A_k C_k] = k_1$  und  $[A_l C_l] = l_1$  und legen die Ebenen  $[k_1 a], [k_1 b], [k_1 c]$  und  $[l_1 a], [l_1 b], [l_1 c]$ , so entstehen so 2 projektive Ebenenbüschel mit den Achsen  $k_1$  und  $l_1$ , welche eine 2. Geradenschar  $a_1, b_1, c_1, \dots$  erzeugen. Da  $k_1$  und  $l_1$  ganz beliebig aus der Schar  $i_1$  herausgegriffen wurden, schneidet jedes Element  $n$  der Schar  $a, b, c, \dots$  alle Elemente der anderen Schar  $a_1, b_1, c_1, \dots$  und umgekehrt. Sie bilden eine Regelfläche  $R$ .

Wir bestimmen nun weiter die 3 Schnittpunkte  ${}^1m_{k_1}, {}^2m_{k_1}, {}^3m_{k_1}$  der 4. der vorgegebenen Geraden  $m$  mit den 3 Ebenen  $[k_1 a], [k_1 b], [k_1 c]$  des Büschels um  $k_1$  und die Schnittpunkte  ${}^1m_{l_1}, {}^2m_{l_1}, {}^3m_{l_1}$  der 3 Ebenen  $[l_1 a], [l_1 b], [l_1 c]$  des Büschels um  $l_1$ . Da die Ebenenbüschel um  $k_1$  und  $l_1$  projektiv sind, bilden diese Schnittpunkte  ${}^{1,2,3}m_{k_1}$  und  ${}^{1,2,3}m_{l_1}$  auf  $m$  2 konlokale projektive Punktreihen mit 2 Doppelpunkten  $M_1$  und  $M_2$ , die wir als Schnittpunkte von  $m$  mit der Regelfläche  $R$  erkennen, so daß  $R$  vom 2. Grade sein muß (hyperbolisches Paraboloid). Die  $M_1$  und  $M_2$  bestimmt man am besten wieder mit Hilfe des Steinerschen Kreises.

Die Schnittpunkte  ${}^{1,2,3}m_{k_1}$  und  ${}^{1,2,3}m_{l_1}$  findet man am einfachsten, indem man durch

$m$  eine beliebige Ebene  $\mu$  legt und die 3 Schnittlinien  ${}^{1,2,3}s_{k_1}$  mit  $[k_1 a]$ ,  $[k_1 b]$ ,  $[k_1 c]$  des Büschels um  $k_1$  bestimmt, welche alle 3 durch den Schnittpunkt  $[\mu k_1]$  gehen müssen. Im Schnittpunkt der  ${}^{1,2,3}s_{k_1}$  mit  $m$  liegen dann  ${}^{1,2,3}m_{k_1}$ . Genau so verfahren wir mit dem Büschel um  $l_1$ .

Legt man nun durch  $M_1$  und eine der vorgegebenen Geraden, z. B.  $a$ , eine Ebene  $\mu_I$  und bestimmt die Schnittpunkte  $[\mu_I b]$  und  $[\mu_I c]$ , so müssen diese mit  $M_2$  in einer Geraden  $m_I$  liegen. Letztere muß außerdem noch die Gerade  $a$  schneiden. Dadurch haben wir eine weitere Zeichenkontrolle zur Hand. Zum 2. Doppelpunkt  $M_2$  gehört natürlich auch eine 2. Gerade  $m_{II}$ .

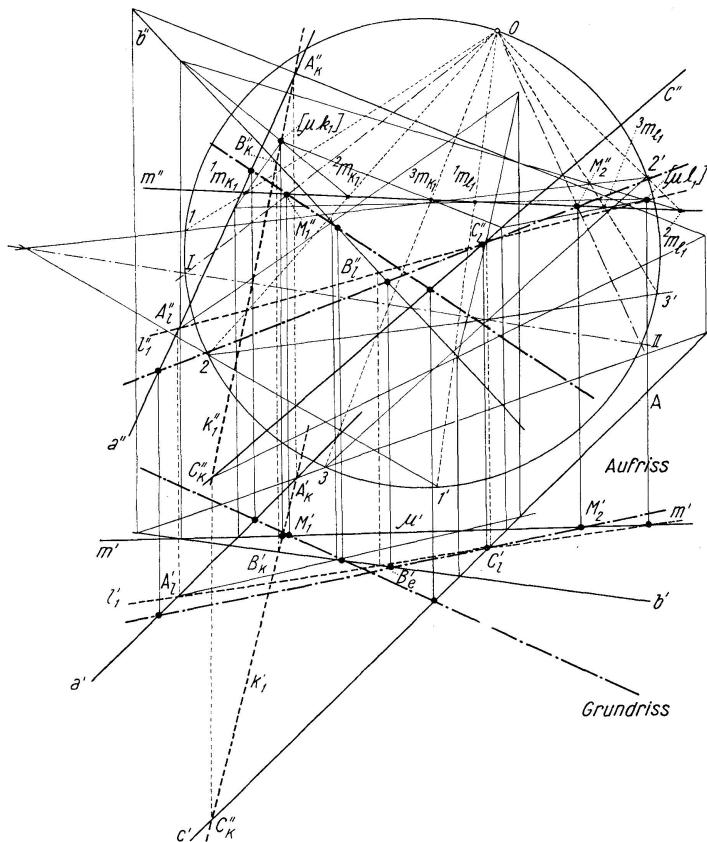


Fig. A.

Man kann die Bestimmung der Doppelpunkte  $M_I$  und  $M_{II}$  auch noch unabhängig im Grundriß durchführen, wodurch eine weitere Kontrolle gegeben ist.

Die Konstruktion wurde in Fig. A mit einem Zirkel und zwei Zeichendreiecken üblicher Genauigkeit durchgeführt.

3.4.5. Nach den bisherigen Darlegungen sind die Momentensummen aller Pfahlkräfte  $\mathfrak{P}_i$  um jede der 4 Nullachsen  $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2$ , von denen sich nur jeweils 2, und zwar  $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$  und  $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2$ , auf  $\mathfrak{K}_h$  schneiden, gleich Null. Damit sind von den 6 für ein räumliches Kräftesystem nötigen Gleichgewichtsbedingungen bereits 4 erfüllt. Nun bestimmen wir mit Hilfe der beiden vorhin gefundenen Achsen des Drehkreuzes  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 1}$ ;  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 2}$  nach (7) die Verschiebungen  $\mathfrak{U}_i$  der Pfahlköpfe  $i$  und daraus nach (8) die Pfahlkräfte  $\mathfrak{P}_i$  als lineare Funktion der beiden absoluten Beträge  $d_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 1}$  und  $d_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 2}$  der Drehvektoren  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 1}$  und  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 2}$ .

Projizieren wir die so ausgedrückten  $\mathfrak{P}_i$  und das angreifende Kraftkreuz  $\mathfrak{K}_z; \mathfrak{K}_h$  auf 2 beliebige Richtungen, z. B. auf  $\mathfrak{d}_{x,y,1}$  und  $\mathfrak{d}_{x,y,2}$  oder auf  $\mathfrak{K}_z$  und  $\mathfrak{K}_h$  selbst, so müssen wegen des vorhandenen Gleichgewichtes diese beiden Projektionssummen verschwinden. Es ergeben sich auf diese Weise für die Bestimmung der noch unbekannten absoluten Beträge  $d_{x,y,1}$  und  $d_{x,y,2}$  2 lineare Gleichungen (54, 55), so daß nun 6 von einander unabhängige Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sind. Die beiden letztgenannten Beziehungen schreiben wir aber der Kürze halber nicht gesondert an. Die endgültigen Werte für die  $\mathfrak{P}_i$  ergeben sich schließlich unter Heranziehung der so gefundenen Beträge  $d_{x,y,1}$  und  $d_{x,y,2}$  aus (7) und (8).

3.4.6. Es sei noch besonders darauf hingewiesen, daß wir für die Bestimmung der *Richtungslinien*  $\mathfrak{d}_{x,y,1}$  und  $\mathfrak{d}_{x,y,2}$  des Drehkreuzes  $\mathfrak{D}_{x,y,1}; \mathfrak{D}_{x,y,2}$  nur die *Richtungslinien*  $\mathfrak{k}_z$  und  $\mathfrak{k}_h$  des angreifenden Kraftkreuzes  $\mathfrak{K}_z; \mathfrak{K}_h$  heranziehen mußten. Die absoluten Werte der beiden Einzelkräfte des letzteren benötigten wir erst für die Berechnung der beiden Beträge  $d_{x,y,1}$  und  $d_{x,y,2}$ .

3.4.7. Da wir in Fig. 4 die Stellungen  $x$  und  $y$  beliebig wählen können, gehören zu einem Lastkreuz  $\mathfrak{K}_z; \mathfrak{K}_h$  unendlich viele Drehkreuze  $\mathfrak{D}_{x,y,1}; \mathfrak{D}_{x,y,2}$ . Zwischen Dreh- und Kraftvektoren besteht bekanntlich eine vollständige Formal-Analogie, d.h., man kann auf die ersteren (3.2) anwenden. Man bestimmt also die beiden Schnittpunkte  $D_{x,y,1} = [z \mathfrak{D}_{x,y,1}]$  und  $D_{x,y,2} = [z \mathfrak{D}_{x,y,2}]$ , zerlegt  $\mathfrak{D}_{x,y,1}; \mathfrak{D}_{x,y,2}$  in die Vertikalkomponenten  $\mathfrak{D}_{x,y,1;v}; \mathfrak{D}_{x,y,2;v}$  bzw. in die Horizontalkomponenten  $\mathfrak{D}_{x,y,2;h}; \mathfrak{D}_{x,y,2;h}$  und ermittelt die Resultierende  $\mathfrak{D}_{x,y,z}$  bzw.  $\mathfrak{D}_{x,y,h}$  der beiden obigen Vertikal- bzw. Horizontalkomponenten. Wir erhalten so zunächst zu jedem  $\mathfrak{D}_{x,y,1}; \mathfrak{D}_{x,y,2}$  ein orthogonales Drehkreuz  $\mathfrak{D}_{x,y,z}; \mathfrak{D}_{x,y,h}$ , wobei  $\mathfrak{D}_{x,y,z}$  durch  $Z$  geht und  $\mathfrak{D}_{x,y,h}$  in  $z$  liegt. Da aber aus elastostatischen Gründen jedes Lastkreuz  $\mathfrak{K}_z; \mathfrak{K}_h$  nach (3.1.1) nur ein und dieselbe infinitesimale Bewegung auslösen kann, sind alle  $\mathfrak{D}_{x,y,1}; \mathfrak{D}_{x,y,2}$  einander gleichwertig, und alle  $\mathfrak{D}_{x,y,z}; \mathfrak{D}_{x,y,h}$  sind mit ein und demselben orthogonalen Drehkreuz  $\mathfrak{D}_z; \mathfrak{D}_h$  identisch. Daraus folgt, daß alle Verbindungslinien  $[D_{x,y,1} D_{x,y,2}]$  sich im Schnittpunkt  $D_x = [z \mathfrak{D}_x]$  schneiden und alle Schnittpunkte  $[\mathfrak{D}_{x,y,1;h} \mathfrak{D}_{x,y,2;h}]$  auf der in  $z$  liegenden Drehachse  $\mathfrak{D}_h$  liegen müssen. Dadurch ist auch der Zusammenhang der einander gleichwertigen Drehkreuze  $\mathfrak{D}_{x,y,1}; \mathfrak{D}_{x,y,2}$  gekennzeichnet.

3.4.8. Wendet man (3.4.5) und (3.4.6) auf das nun eindeutig festgelegte orthogonale Drehkreuz  $\mathfrak{D}_z; \mathfrak{D}_h$  an, so kann man zunächst aussagen: «Zu einem Lastkreuz  $\mathfrak{K}_z; \mathfrak{K}_h$  gehört also nur ein einziges auf  $z$  und  $Z$  bezogenes Drehkreuz  $\mathfrak{D}_z; \mathfrak{D}_h$ . Dabei entsprechen sich die Richtungslinienpaare  $\mathfrak{k}_z, \mathfrak{k}_h$  und  $\mathfrak{d}_z, \mathfrak{d}_h$  einander eindeutig. Zwischen den Drehwinkeln  $d_z, d_h$  und den absoluten Größen  $k_z, k_h$  der Lasten  $\mathfrak{K}_z$  und  $\mathfrak{K}_h$  bestehen daneben wieder 2 lineare, den (54, 55) analoge Gleichungen.»

3.4.9. Bestimmen wir aus einem zu 2 beliebigen Achsenpaaren  $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$  und  $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2$  gehörigen windschiefen Drehkreuz  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 1}; \mathfrak{D}_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 2}$  nach (7, 8) die Pfahlkräfte  $\mathfrak{P}_i$  und projizieren im Sinne von (3.4.5) diese und das Lastkreuz  $\mathfrak{K}_{\mathfrak{z}}; \mathfrak{K}_{\mathfrak{h}}$  auf eine zu  $\mathfrak{K}_{\mathfrak{h}}$  und  $\mathfrak{K}_{\mathfrak{z}}$  normale Achse  $\mathfrak{n}_{\mathfrak{h}}$ , so folgt

$$d_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 1} a_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 1} + d_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 2} a_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 2} = 0,$$

wobei  $a_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 1}$  und  $a_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 2}$  nur von der Richtung der  $\mathfrak{n}_{\mathfrak{h}}$ , den  $E_i$  und der geometrischen Anordnung des Pfahlwerkes abhängen. Das Verhältnis der beiden Drehwinkel

$$d_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 1} : d_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 2} = -a_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 2} : a_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 1}$$

ist also unabhängig von der Wahl der beiden Absolutbeträge  $k_{\mathfrak{z}}$  und  $k_{\mathfrak{h}}$ , da die dazugehörigen Richtungslinien  $\mathfrak{f}_{\mathfrak{z}}$  und  $\mathfrak{f}_{\mathfrak{h}}$  senkrecht auf  $\mathfrak{n}_{\mathfrak{h}}$  stehen. Ist  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 1}$  bzw.  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 2}$  gegen  $z$  unter den Winkeln  $\alpha_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 1}$  bzw.  $\alpha_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 2}$  geneigt, so betragen die Vertikal- bzw. Horizontalkomponenten von  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 1}$  und  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 2}$

$$\mathfrak{D}_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 1; v} = d_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 1} \sin \alpha_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 1} \cdot \mathfrak{h}; \quad \mathfrak{D}_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 2; v} = d_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 2} \sin \alpha_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 2} \cdot \mathfrak{h}$$

bzw.

$$\mathfrak{D}_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 1; h} = d_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 1} \cos \alpha_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 1} \cdot \mathfrak{h}_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 1}; \quad \mathfrak{D}_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 2; h} = d_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 2} \sin \alpha_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 2} \cdot \mathfrak{h}_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 2},$$

wenn  $\mathfrak{h}_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 1}$  und  $\mathfrak{h}_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 2}$  die Einheitsvektoren der durch die Fußpunkte  $D_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 1}$  und  $D_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 2}$  gehenden Vertikalprojektionen von  $\mathfrak{d}_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 1}$  und  $\mathfrak{d}_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 2}$  bedeuten. Durch Division der beiden obigen Gleichungspaare folgt, daß auch die Verhältnisse der Vertikal- und Horizontalkomponenten von den beiden Absolutbeträgen  $k_{\mathfrak{z}}$  und  $k_{\mathfrak{h}}$  unabhängig sind, womit in Verbindung mit (3.4.7) nun auch der 2. Teil des in (3.4.8) ausgedrückten Lehrsatzes *direkt* bewiesen ist.

3.5. Um die in (3.4.4) angedeutete allgemeine Konstruktion der Drehachsen  $\mathfrak{d}_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 1}, \mathfrak{d}_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 2}$  zu umgehen, wird man bestrebt sein, 4 Nullachsen mit den dazugehörigen 4 Resultierenden zu finden, welche paarweise in 2 Ebenen  $\sigma$  und  $\omega$  liegen, so daß sich dann auch die in den letzteren liegenden Resultierenden jeweils in den Punkten  $S$  und  $W$  schneiden. Die Achsen des gesamten Drehkreuzes ergeben sich in diesem Falle sehr einfach zu  $[\sigma \omega]; [SW]$ .

3.5.1. Wählt man in der Zeichenebene  $z$  einen beliebigen Punkt  $O_{\nu, 1}$  und legt von diesem die beiden möglichen Tangenten  $g_{\nu, 1}$  und  $g_{\nu, 2}$  an den Kegelschnitt  $K_{\nu}$ , so sind diese nach 3.3.13 Stellungsgerade (Fig. 7). Auf ihnen liegen die nach (3.4.1) bestimmten Doppelpunkte. Diese bilden das vollständige Vierseit  $R_{\nu, 1; 1}, R_{\nu, 1; 2}, R_{\nu, 2; 1}, R_{\nu, 2; 2}, P_{\nu, 1}, P_{\nu, 2}, O_{\nu, 1}$ , dessen Gegenseiten nach dem griechischen Geometer Pappus, der im 3. Jahrhundert n. Chr. in Alexandria lebte, von jeder Geraden in 3 Punktpaaren geschnitten werden, die einer Involution angehören. Wenden wir diesen Lehrsatz auf die Gerade  $P_{\nu, 2} O_{\nu, 1}$  an, so sind  $O_{\nu, 1}$  und  $P_{\nu, 2}$  Doppelpunkte und  $1' 1''$  ein entsprechendes Punktpaar. Projizieren wir diese Verwandtschaft von  $P_{\nu, 1}$  aus auf eine beliebige

durch  $O_{\nu,1}$  gehende Gerade  $n$ , so erhalten wir schließlich eine Involution  $J_\nu$  mit  $O_{\nu,1}$  bzw.  $O_{\nu,2}$  als Doppelpunkte und  $1_\nu, 1_\nu^*$  bzw.  $2_\nu, 2_\nu^*$  als 2 entsprechende Punktepaare. Verschieben wir den vorgewählten Punkt  $O_{\nu,1}$  auf  $n$  und bilden wieder im obigen Sinne die dazugehörigen Vierseite, so können die entsprechenden Punkte  $1_\nu$  und  $1_\nu^*$  und damit auch die beiden Doppelpunkte  $R_{\nu,1;2}, R_{\nu,2;2}$  reell nur beide auf einmal mit  $O_{\nu,1}$  zusammenfallen. Damit gleichzeitig treffen sich auch die Punkte  $2_\nu, 2_\nu^*, O_{\nu,2}, P_{\nu,2}$  im Schnittpunkt der Geraden  $[R_{\nu,1;1} R_{\nu,2;1}]$  mit  $n$ . Da sowohl  $O_{\nu,1}$  als auch  $n$  ganz beliebig gewählt werden können, gilt diese Betrachtung ganz allgemein, und es entstehen die in Fig. 7 rechts dargestellten Lageverhältnisse, aus denen sich ergibt, daß alle nach (3.4.1) gefundenen Doppelpunkte auf einem reellen Kegelschnitt  $K_D$  liegen, da ein solcher von jeder Geraden, die von einem auf ihm liegenden Punkt aus gelegt wird, nur in einem 2. Punkt geschnitten wird.

3.5.2. Für die konstruktive Auswertung dieser Erkenntnisse wählt man eine beliebige Stellungsgerade, z. B.  $g_x$  und bestimmt nach (3.4.1) die Doppellemente  $R_{\nu,1}, R_{\nu,2}$ . Legt man z. B. durch  $R_{\nu,1}$  die 2. Tangente an  $K_\nu$ , so ergibt sich eine weitere Stellungsgesetze  $g_y$  mit den Doppelpunkten  $R_{\nu,1}$  und  $R_{\nu,2}$ ,

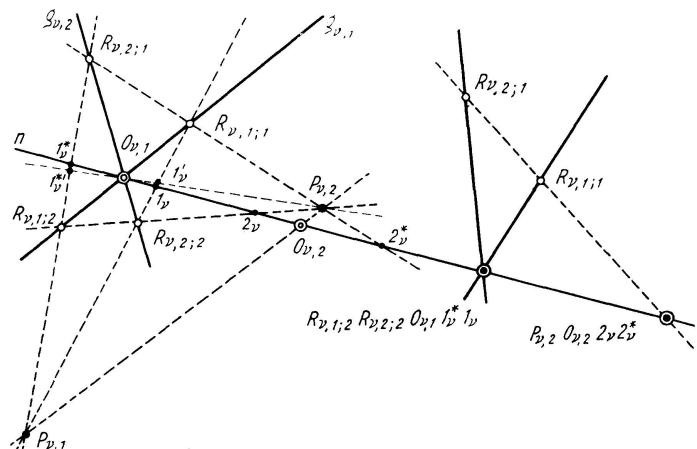


Fig. 7.

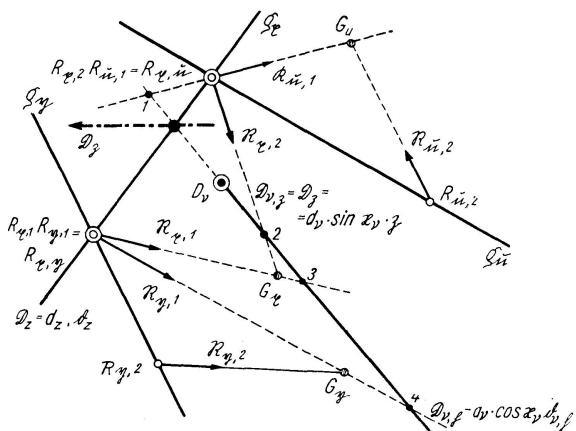


Fig. 8.

wobei  $R_{\xi,1}$  mit  $R_{\eta,1}$  in  $R_{\xi,\eta}$  auf  $g_\xi$  zusammenfällt, wo sich auch die dazugehörigen Resultierenden  $\mathfrak{R}_{\xi,1}$  und  $\mathfrak{R}_{\eta,1}$  schneiden. Legt man auch noch von  $R_{\xi,2}$  die 2. Tangente an  $K_v$ , so ergibt sich die 3. Stellungsgerade  $g_u$  mit den Doppelpunkten  $R_{u,1}$ ,  $R_{u,2}$ , wobei wieder  $R_{\xi,2}$  mit  $\mathfrak{R}_{u,1}$  in  $R_{\xi,u}$  auf  $g_\xi$  zusammenfällt. Dort schneiden sich auch die dazugehörigen Resultierenden  $\mathfrak{R}_{\xi,2}$ ,  $\mathfrak{R}_{u,1}$ , so daß für die  $\mathfrak{R}_{\xi,1}$ ,  $\mathfrak{R}_{\eta,1}$ ,  $\mathfrak{R}_{\xi,2}$ ,  $\mathfrak{R}_{u,1}$  die in (3.5) dargelegten einfachen Lageverhältnisse geschaffen sind (Fig. 8).

3.5.3. Will man von einem Punkte  $Q$  an  $K_v$  die beiden möglichen Tangenten legen, ohne ihn zu zeichnen, so verbindet man  $Q$  mit der Punktreihe  $g_0$  bzw.  $g_{\pi/2}$  und bringt diese Strahlen mit der Punktreihe  $g_{\pi/2}$  bzw.  $g_0$  zum Schnitt. Dadurch entstehen auf der letzteren 2 konlokale projektive Punktreihen, durch deren Doppelpunkte die beiden Tangenten gehen müssen.

3.5.4. Kennt man von 2 konlokalen projektiven Punktreihen schon einen der beiden Doppelpunkte, so sei im Zusammenhang mit (3.5.3) erinnert, daß man dann den 2. derselben auf lineare Weise finden kann. Man wählt auf einer durch den bereits bekannten Doppelpunkt gehenden Geraden die beiden Punkte  $V$  und  $H$  als Scheitel zweier projektiver Strahlenbüschel und erhält die dazugehörige Perspektivitätsachse aus

$$[[[VV_{\xi,0}] \cdot [HH_{\xi,0}]] \cdot [[VV_{\xi,\pi/2}] \cdot [HH_{\xi,\pi/2}]]].$$

Sie schneidet die Gerade  $g_\xi$  in dem 2. Doppelpunkt  $R_{\xi,\nu}$ . In  $\xi = [VV_\xi] \cdot [HH_\xi]$  haben wir eine scharfe Zeichenkontrolle in der Hand (Fig. 6).

3.5.5. Es gibt auch Sonderlagen, für welche Stellungspunkt und -gerade aufeinander fallen. Da aber dazu keine sich schneidenden Resultierenden  $\mathfrak{R}_v$  gehören, lohnt es sich nicht, diese Fälle weiter zu verfolgen.

3.6. Wir finden also das orthogonale Drehkreuz  $\mathfrak{D}_z$ ;  $\mathfrak{D}_h$  (3.4.8) einfach folgendermaßen:

1. Ersatz der angreifenden Kräfte  $\mathfrak{R}_i$  durch das auf  $z$  und  $Z$  bezogene Lastkreuz  $\mathfrak{R}_z$ ;  $\mathfrak{R}_h$  (3.2).
2. Bestimmung der zu den in  $z$  liegenden und  $\mathfrak{R}_z$  schneidenden waagrechten Achsen  $a_h$  und  $b_h$  gehörigen Gewichte (37, 38, 39, 40) bzw. der zu den in  $\epsilon_{h,z}$  liegenden und durch  $A$  und  $B$  gehenden lotrechten Achsen  $a_z$  und  $b_z$  gehörigen Gewichte (43, 44, 45, 46).
3. Ermittlung der 4 lotrechten Resultierenden  $\mathfrak{B}_{\frac{a}{b},\eta}$ ,  $\mathfrak{B}_{\frac{a}{b},\xi}$  der in den Punkten  $i'$  wirkenden lotrechten Gewichte (37), (38), (43), (44) nach den Regeln paralleler Kräfte bzw. der 4 waagrechten Resultierenden  $\mathfrak{H}_{\frac{a}{b},\eta}$ ,  $\mathfrak{H}_{\frac{a}{b},\xi}$  der in den Projektionen  $\mathfrak{h}_i$  wirkenden waagrechten Gewichte (39), (40), (45), (46) nach den Regeln für ebene Kräftesysteme.

4. Dadurch sind die durch (35) und (41) gekennzeichneten projektiven Punktreihen  $g_0$  und  $g_{\pi/2}$  bzw. die durch (36) und (42) gekennzeichneten projektiven Büschel um  $G_0$  und  $G_{\pi/2}$  festgelegt.
5. Bestimmung der auf  $g_0$  bzw.  $g_{\pi/2}$  liegenden Fußpunkte  $V_{\xi,0}$  bzw.  $V_{\xi,\pi/2}$  nach (35) bzw. (41) und der durch  $G_0$  bzw.  $G_{\pi/2}$  gehenden Strahlen  $\mathfrak{H}_{\xi,0}$  bzw.  $\mathfrak{H}_{\xi,\pi/2}$  nach (36) bzw. (42). Es ergibt sich daraus die Stellungsgerade  $g_\xi = [V_{\xi,0} V_{\xi,\pi/2}]$  bzw. der Stellungspunkt  $G_\xi = [\mathfrak{H}_{\xi,0} \mathfrak{H}_{\xi,\pi/2}]$ , wodurch die Punktreihe (52) und das Büschel (53) festgelegt werden, so daß die
6. Konstruktion der Doppelpunkte  $R_{\xi,1}$ ,  $R_{\xi,2}$  und der dazugehörigen Einzelkräfte  $\mathfrak{R}_{\xi,1}$ ,  $\mathfrak{R}_{\xi,2}$  nach (3.4.1) vorgenommen werden kann.
7. Wir können nun nach (3.5.2) unter Benutzung von (3.5.3), (3.5.4) und (3.5) ein Drehkreuz  $\mathfrak{D}_z; \mathfrak{D}_\nu$  finden, für welches die in  $z$  liegende Stellungsgerade  $g_\xi$  bereits eine Achse  $\mathfrak{d}_z$  ist, während die andere Achse  $\mathfrak{d}_\nu$  als Schnittlinie der beiden Ebenen  $[\mathfrak{R}_{\xi,1} \mathfrak{R}_{\eta,1}]$  und  $[\mathfrak{R}_{\xi,2} \mathfrak{R}_{\eta,1}]$  dazu windschief liegt. Wir zerlegen nun diese Drehachse  $\mathfrak{D}_\nu = d_\nu \mathfrak{d}_\nu$  in eine lotrechte bzw. waagrechte Komponente  $\mathfrak{D}_{\nu,\mathfrak{z}} = d_\nu \sin \kappa_\nu \cdot \mathfrak{z}$  bzw.  $\mathfrak{D}_{\nu,\mathfrak{h}} = d_\nu \cos \kappa_\nu \cdot \mathfrak{d}_{\nu,\mathfrak{h}}$ , wobei  $d_\nu$  den zu  $\mathfrak{D}_\nu$  gehörigen Drehwinkel,  $\kappa_\nu$  den Neigungswinkel der Richtung  $\mathfrak{d}_\nu$  gegen  $z$  und der Einheitsvektor  $\mathfrak{d}_{\nu,\mathfrak{h}}$  die Projektion von  $\mathfrak{d}_\nu$  auf  $z$  darstellt.
8. Drücken wir nun die Verschiebung  $\mathfrak{U}_i$  der Pfahlköpfe  $i$  durch die beiden waagrechten Drehungen  $\mathfrak{D}_z = d_z \mathfrak{d}_z$ ,  $\mathfrak{D}_{\nu,\mathfrak{h}} = d_\nu \cos \kappa_\nu \cdot \mathfrak{d}_{\nu,\mathfrak{h}}$  und durch die lotrechte Drehung  $\mathfrak{D}_{\nu,\mathfrak{z}} = d_\nu \sin \kappa_\nu \cdot \mathfrak{z}$  mittelst (7) aus, bestimmen daraus entsprechend (8) die dazugehörigen Pfahlkräfte  $\mathfrak{P}_i$  und projizieren die letzteren und das angreifende Lastkreuz  $\mathfrak{R}_\xi; \mathfrak{R}_\eta$  auf die beiden Richtungen  $\mathfrak{d}_z$  und  $\mathfrak{z}$ , so ergeben sich für die Bestimmung der beiden dazugehörigen unbekannten Drehwinkel  $d_z$  und  $d_\nu$  2 lineare Gleichungen, womit wir die Drehungen  $\mathfrak{D}_z = d_z \mathfrak{d}_z$  und  $\mathfrak{D}_\nu = d_\nu \mathfrak{d}_\nu$  angeben können. Zerlegen wir letztere in eine lotrechte Komponente  $\mathfrak{D}_{\nu,\mathfrak{z}} = \mathfrak{D}_z$  und in eine waagrechte Komponente  $\mathfrak{D}_{\nu,\mathfrak{h}}$  und bilden  $\mathfrak{D}_\eta = \mathfrak{D}_{\nu,\mathfrak{h}} + \mathfrak{D}_z$ , so erhalten wir endlich das orthogonale Drehkreuz  $\mathfrak{D}_z; \mathfrak{D}_\eta$ , aus dem wir wieder nach (8) die Pfahlkräfte  $\mathfrak{P}_i$  berechnen können.

Diese 8 Abschnitte können der Reihe nach in sich abgeschlossen und einzeln voneinander unabhängig überprüft werden.

Sie stellen kurze Lösungsvorgänge der elementaren Statik, der Kinematik und der Geometrie der Lage dar. Man kann sie zeichnerisch mit alleiniger Benutzung von Lineal und Zirkel durchführen.

Zu den 6 Freiheitsgraden des Problems gehören bekanntlich auch 6 Elastizitätsgleichungen, deren Aufstellung allein schon einen beträchtlichen Zeitaufwand erfordert. Da sie außerdem im allgemeinen sehr stark zusammenhängen, sind sie einer Iteration sehr schwer zugänglich. Ihre Auflösung ist daher sehr zeitraubend, da, um die Lösung verlässlich zu erhalten, die Ziffernrechnung sehr genau durchgeführt werden muß.

Nach unserem Wissen gibt es bis jetzt noch kein einfaches Verfahren, nach

welchem ganz allgemein räumliche Pfahlroste ohne Benutzung dieser zeitraubenden 6 Elastizitätsbedingungen berechnet werden können.

Als durchgreifende Kontrolle können in allen Fällen 6 von einander unabhängige Gleichgewichtsbedingungen des aus Pfahlkräften und Lasten bestehenden Kräftesystems benutzt werden.

Dieses Verfahren eignet sich dann besonders, wenn für ein und denselben Kraftangriff ein Pfahlrost für verschiedene Elastizitätsmodule mehrfach durchgerechnet werden soll.

3.6.1. Nach (3.3.13) kann es nie vorkommen, daß die zu 2 verschiedenen Stellungsgeraden  $g_\nu$  und  $g_\mu$  gehörigen Stellungspunkte  $G_\nu$  und  $G_\mu$  in einem Doppelpunkt  $G_{\nu,\mu}$  zusammenfallen. Dies wäre aber unbedingt erforderlich, wenn es gelingen soll, nach (3.4.1) 4 Resultierende zu finden, für welche die nach (3.4.4) zu bestimmenden Drehachsen schon die Achsen  $\mathfrak{d}_z$  und  $\mathfrak{d}_h$  des zum Lastkreuz  $\mathfrak{R}_z$ ;  $\mathfrak{R}_h$  gehörigen orthogonalen Drehkreuzes  $\mathfrak{D}_z$ ;  $\mathfrak{D}_h$  sein würden. Das heißt, wir können auf dem bisher gezeigten Wege das letztere nicht direkt, sondern nur auf dem Umweg über die schiefen Drehkreuze  $\mathfrak{D}_z$ ;  $\mathfrak{D}_\nu$  finden, außer wir erfüllen (18) durch Aufstellung der endlichen Momente der «Gewichte» um die Achsen  $\mathfrak{d}_z$  und  $\mathfrak{d}_h$  des dann noch zu suchenden orthogonalen Drehkreuzes. Die Entwicklung, die zu 6 linearen Gleichungen führt, wollen wir aber nicht im einzelnen durchführen, da wir ja letztere vermeiden wollen.

3.7. Betrachten wir  $g_0$  als Stellungsgerade und  $G_0$  als zugehörigen Stellungs-  
punkt, so erhalten wir nach (3.4.1) auf  $g_0$  die beiden Doppelpunkte  $R_{0,1}$ ,  $R_{0,2}$  mit dem durch diese gehenden Einzelkräfte  $\mathfrak{R}_{0,1}$ ,  $\mathfrak{R}_{0,2}$ . Mit den von  $g_\xi$  und  $G_\xi$  ebenfalls nach (3.4.1) herrührenden Einzelkräften  $\mathfrak{R}_{\xi,1}$ ,  $\mathfrak{R}_{\xi,2}$  verfügen wir über 4 Richtungslinien, aus denen wir nach (3.4.4) das Drehkreuz  $\mathfrak{D}_{\xi,0,1} = d_{\xi,0,1} \mathfrak{d}_{\xi,0,1}$ ;  $\mathfrak{D}_{\xi,0,2} = d_{\xi,0,2} \mathfrak{d}_{\xi,0,2}$  bestimmen können. Drehen wir in Fig. 4 den Kraftvektor  $\mathfrak{R}_h$  um  $X$ , so wird die Lage der beiden Achsen  $\mathfrak{d}_{\xi,0,1}$  und  $\mathfrak{d}_{\xi,0,2}$  nicht verändert. Stellen wir nun die beiden am Schluß von (3.4.5) beschriebenen Projektionsgleichungen (54, 55) auf, so gehört zu jedem Lastkreuz  $\mathfrak{R}_z$ ;  $\mathfrak{R}_h$ , für welches  $\mathfrak{R}_h$  durch  $X$  geht, ein und dieselben Drehkreuzachsen  $\mathfrak{d}_{\xi,0,1}$ ;  $\mathfrak{d}_{\xi,0,2}$ . Setzen wir demnach  $|\mathfrak{R}_h| \equiv 0$  und projizieren im Sinne von (3.4.9), so erhalten wir nur die Wirkung von  $\mathfrak{R}_z$  allein. Benutzen wir diesmal die zu  $g_{\pi/2}$  und  $G_{\pi/2}$  gehörigen  $\mathfrak{R}_{\pi/2,1}$ ,  $\mathfrak{R}_{\pi/2,2}$  und die aus  $g_\xi$  und  $G_\xi$  gefundenen  $\mathfrak{R}_{\xi,1}$ ,  $\mathfrak{R}_{\xi,2}$ , so erhalten wir wieder aus diesen 4 Richtungslinien das Drehkreuz  $\mathfrak{D}_{\xi,\pi/2,1} = d_{\xi,\pi/2,1} \mathfrak{d}_{\xi,\pi/2,1}$ ;  $\mathfrak{D}_{\xi,\pi/2,2} = d_{\xi,\pi/2,2} \mathfrak{d}_{\xi,\pi/2,2}$ . Verschieben wir den Fußpunkt von  $\mathfrak{R}_z$  auf  $\mathfrak{R}_h$  beliebig, so wird die Lage der beiden Achsen  $\mathfrak{d}_{\xi,\pi/2,1}$  und  $\mathfrak{d}_{\xi,\pi/2,2}$  nicht verändert. Stellen wir wieder für die beiden Projektionsgleichungen (54, 55) die analogen Betrachtungen wie vorhin an, so erkennen wir, daß zu jedem Lastkreuz  $\mathfrak{R}_z$ ;  $\mathfrak{R}_h$ , für welches der Fußpunkt von  $\mathfrak{R}_z$  auf  $\mathfrak{R}_h$  liegt, ein und dieselben Drehkreuzachsen  $\mathfrak{d}_{\xi,\pi/2,1}$ ;  $\mathfrak{d}_{\xi,\pi/2,2}$  gehören. Setzen wir demnach  $|\mathfrak{R}_h| \equiv 0$  und verfahren analog wie vorhin, so erhalten wir dann auch nur die Wirkung von  $\mathfrak{R}_z$  allein. Damit ist auch die Erledigung von angreifenden Einzelkräften und Drehmomenten geklärt.

#### 4. Sonderfälle

Das in (3.) abgeleitete Verfahren gilt ganz allgemein für jeden beliebigen räumlichen Pfahlrost. In der Folge werden daraus einige besonders wichtige Sonderfälle entwickelt, bei welchen ganz bedeutende Vereinfachungen eintreten.

4.1. Liegen alle Pfahlköpfe in einer Ebene, so daß jeweils  $i$  mit  $i'$  zusammenfällt, so wählen wir diese als Zeichenebene  $z$ . Es ergeben sich dadurch aber nur einige rechnerische Vereinfachungen bei der Bestimmung der Verschiebungen  $u_i$  nach (7) und bei der Aufstellung der Projektionsgleichungen (54, 55).

4.2. Handelt es sich um zu einander parallele Pfähle  $i$ , von denen jeder einen nach 2 zu einander senkrecht stehenden Richtungen verschiedenen seitlichen Widerstand besitzt (2.2), so wählen wir eine zu den Parallelpfählen normal stehende Ebene als Zeichenebene  $z$ . Es wird dann für die parallelen Pfähle  $\alpha_i = 0$ ,  $E_i$  und für die Hilfspfähle  $\alpha_i = \pi/2$ ,  $E_{i,1}$ ,  $E_{i,2}$ . Setzt man dies in (37—40, 43—46) ein, bestimmt entsprechend (3.3.7—8) nach den Regeln für parallele Kräfte die Lage der Resultierenden

$$\mathfrak{B}_{\mathfrak{b},\eta}; \mathfrak{B}_{\mathfrak{b},\xi} = 0,$$

ermittelt weiter nach den Regeln für ebene Kräftesysteme die Resultierenden

$$\mathfrak{H}_{\mathfrak{b},\eta} = 0; \mathfrak{H}_{\mathfrak{b},\xi},$$

so wird für die parallelen Pfähle nach (35, 36)

$$\mathfrak{B}_{\mathfrak{x},0} = [b_{\mathfrak{x}} \sum_i E_i \eta_{\mathfrak{a},i} - a_{\mathfrak{x}} \sum_i E_i \eta_{\mathfrak{b},i}] \mathfrak{z}; \quad \mathfrak{H}_{\mathfrak{x},0} = 0 \quad (56, 57)$$

und für die Hilfspfähle nach (41, 42)

$$\mathfrak{B}_{\mathfrak{x},\pi/2} = 0; \quad \mathfrak{H}_{\mathfrak{x},\pi/2} = B_{\mathfrak{x}} \sum_i \bar{E}_i \xi_{\mathfrak{a},i} \mathfrak{h}_i - A_{\mathfrak{x}} \sum_i \bar{E}_i \xi_{\mathfrak{b},i} \mathfrak{h}_i, \quad (58, 59)$$

wobei für  $\bar{E}_i$  die Werte  $E_{i,1}$  und  $E_{i,2}$  einzusetzen sind. Wird in diesen Beziehungen nacheinander  $a_{\mathfrak{x}}, b_{\mathfrak{x}}, A_{\mathfrak{x}}, B_{\mathfrak{x}} = 0$  gesetzt, so erhalten wir die zu den Achsen  $\mathfrak{a}_{\mathfrak{h}}, \mathfrak{b}_{\mathfrak{h}}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{z}}, \mathfrak{b}_{\mathfrak{z}}$  gehörigen Resultierenden

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{\mathfrak{a},\eta} &= 1 \cdot \sum_i E_i \eta_{\mathfrak{a},i}, & \mathfrak{B}_{\mathfrak{b},\eta} &= 1 \cdot \sum_i E_i \eta_{\mathfrak{b},i}, \\ \mathfrak{H}_{\mathfrak{a},\xi} &= 1 \cdot \sum_i \bar{E}_i \xi_{\mathfrak{a},i} \mathfrak{h}_i, & \mathfrak{H}_{\mathfrak{b},\xi} &= 1 \cdot \sum_i \bar{E}_i \xi_{\mathfrak{b},i} \mathfrak{h}_i \end{aligned}$$

schon als Einzelkräfte. Die Richtungslinien  $\mathfrak{d}_{\mathfrak{z}}, \mathfrak{d}_{\mathfrak{h}}$  des orthogonalen Drehkreuzes  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{z}}, \mathfrak{D}_{\mathfrak{h}}$  ergeben sich nach (3.5) unmittelbar im Schnittpunkt  $[\mathfrak{H}_{\mathfrak{a},\xi} \mathfrak{H}_{\mathfrak{b},\xi}]$  und in der Verbindungsgeraden  $[\mathfrak{B}_{\mathfrak{a},\eta} \mathfrak{B}_{\mathfrak{b},\eta}]$ , da dann  $\mathfrak{d}_{\mathfrak{z}}$  und  $\mathfrak{d}_{\mathfrak{h}}$  von jeder der 4 Resultierenden  $\mathfrak{B}_{\mathfrak{a},\eta}, \mathfrak{B}_{\mathfrak{b},\eta}, \mathfrak{H}_{\mathfrak{a},\xi}, \mathfrak{H}_{\mathfrak{b},\xi}$  geschnitten wird. Die Absolutbeträge  $d_{\mathfrak{z}}, d_{\mathfrak{h}}$  der Drehungen um die Achsen  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{z}}, \mathfrak{D}_{\mathfrak{h}}$  ergeben sich wie immer aus den Projektionsgleichungen (54, 55). Dabei ist die Wirkung der parallelen Pfähle

vollständig unabhängig von den in der Zeichenebene  $z$  liegenden Hilfspfählen. Dies geht auch schon daraus hervor, daß eine Einsenkung der Pfahlköpfe in Richtung der parallelen Pfähle die Hilfspfähle nicht in Spannung versetzt und umgekehrt eine Verschiebung der Pfahlköpfe in der Zeichenebene die parallelen Pfähle unberührt läßt.

4.3. Sind je 2 aufeinander senkrecht stehende Pfähle  $P_{n,v}$  und  $P_{n,h}$  alle zu einer Ebene  $z$  parallel und bezüglich ihrer Tragfähigkeit auf die Fundamentlänge gleichmäßig verteilt und sind außerdem für alle zu  $z$  senkrecht stehenden Pfähle  $P_n$  die Elastizitätsmodule  $E_n$  gleich Null, so wählen wir wieder  $z$  als Zeichenebene. Wir haben dann einen sogenannten ebenen Rost vor uns, bei welchem die Pfähle  $P_{i,v}$  nur in der Ebene  $z$  einen durch  $P_{i,h}$  zum Ausdruck gebrachten seitlichen Widerstand besitzen, da je  $E_n = 0$  sein soll. Wir haben im Gegensatz zu (2.) statt der 2. Zeiger 1 und 2 die Zeiger  $n$  und  $h$  gewählt, weil wir die Tragpfähle  $i, v$  von den Hilfspfählen  $i, h$  deutlicher unterscheiden wollen. Da die seitlichen normal zu  $z$  wirkenden Widerstände der Pfahlköpfe fehlen, muß zunächst  $\mathfrak{R}_s = 0$  sein.  $\mathfrak{R}_h = R$  wird auf die Fundamentlänge bezogen. Da für alle Pfähle  $\alpha_i = \pi/2$  ist, werden alle bisherigen Ausdrücke, die den Faktor  $\cos \alpha_i$  enthalten, gleich Null. Es verbleiben also nur nach (45, 46) die in  $z$  liegenden Resultierenden

$$\sum_i \bar{E}_i \xi_{a,i} \mathfrak{h}_i = \mathfrak{H}_{a,\xi}, \quad \sum_i \bar{E}_i \xi_{b,i} \mathfrak{h}_i = \mathfrak{H}_{b,\xi}. \quad (60, 61)$$

Mit diesen Werten wird (41) Null, und (42) nimmt den Wert an

$$\mathfrak{H}_{x,\pi/2} = B_x \sum_i \bar{E}_i \xi_{a,i} \mathfrak{h}_i - A_x \sum_i \bar{E}_i \xi_{b,i} \mathfrak{h}_i, \quad (62)$$

wobei wie in (4.2) wieder für  $\bar{E}_i$  die Elastizitätsmodule  $E_{i,v}$  und  $E_{i,h}$  zu setzen sind. Wird nun in (62) erst  $A_x = 0$  und dann  $B_x = 0$ , so ergeben sich für die Gewichte, die zu den zur Zeichenebene senkrechten und  $\mathfrak{R}_h = R$  schneidenden Achsen  $a_s$  und  $b_s$  gehören, die Resultierenden  $\mathfrak{H}_{a,\xi}$  und  $\mathfrak{H}_{b,\xi}$ , in deren Schnittpunkt die gesuchte Drehachse  $\mathfrak{D}_s$  liegt (Fig. 10 u. 11).

Da alle «Gewichte» in  $z$  liegen, haben die Komponenten um die Achse  $\mathfrak{x}_h$  an der Momentenbildung um die Achse  $\mathfrak{y}$  keinerlei Anteil. Sie werden Null, und es genügt, wenn man überhaupt nur die Momente um die lotrechte Achse  $\mathfrak{x}_s$  bildet, das heißt, man kann in allen Betrachtungen dieser Abteilung von Haus aus  $\beta_x = \pi/2$  setzen.

4.4. Besitzen entgegen (4.3) die Pfahlköpfe in Richtung senkrecht zur Zeichenebene  $z$  einen seitlichen Widerstand, so ergibt sich eine Rostform, die dann am Platze ist, wenn die Hauptlasten, die aber diesmal nicht über die Fundamentlänge gleichmäßig verteilt sein sollen, durch einen sogenannten ebenen Pfahlrost leicht aufgenommen werden können, für die lateralen Lasten aber die seitlichen Widerstände der Pfahlköpfe herangezogen werden müssen. Wir haben dann einen echten räumlichen Pfahlrost vor uns, der nach (3.)

berechnet werden muß. Die dabei auftretenden Vereinfachungen gegenüber einem ganz allgemeinen Rost sind nicht sehr groß. Wir überlassen sie wegen Raumangst dem Leser.

4.5. Desgleichen wollen wir Roste, bei welchen Vereinfachungen durch Symmetrien eintreten, nicht behandeln.

### 5. Berechnung der Roste bei krummlinigen Arbeitslinien der Pfähle

Der Rost sei von Lasten angegriffen, welche nach (3.2) mit Hilfe der Bezugselemente  $z$  und  $Z$  bereits auf ein Lastkreuz  $\mathfrak{K}_z; \mathfrak{K}_h$  reduziert wurden. Im Regelfall besitzt jeder Pfahl  $i$  eine eigene Arbeitslinie, durch welche der funktionale Zusammenhang zwischen einer Bodeneindringung  $\Delta_{i,v}$  und einer Pfahlkraft  $P_{i,v}$  festgelegt wird. Zunächst ordnet man jedem Pfahl den konstanten Elastizitätsmodul  $E_{1,0} = \left(\frac{dP_i}{d\Delta_i}\right)_{\Delta_i=0}$  zu und bestimmt mit diesem nach (3.) die zum Lastkreuz  $\mathfrak{K}_z; \mathfrak{K}_h$  gehörigen Eindringungen  $\Delta_{i,1}$  und die Pfahlkräfte  $P_{i,1} + \Delta P_{i,1}$  (Fig. 1), welche natürlich dem obigen angreifenden Lastkreuz gleichwertig sein müssen. Nach den gekrümmten Arbeitslinien entspricht aber der Eindringung  $\Delta_{i,1}$  nicht die Pfahlkraft  $P_{i,1} + \Delta P_{i,1}$ , sondern nur die Pfahlkraft  $P_{i,1}$ . Reduziert man nun diese  $P_{i,1}$  wieder nach (3.2) auf ein Kreuz  $\mathfrak{K}_{z,1}; \mathfrak{K}_{h,1}$ , so verbleibt das Zusatzkreuz  $(\mathfrak{K}_z - \mathfrak{K}_{z,1}); (\mathfrak{K}_h - \mathfrak{K}_{h,1})$ , welches durch vektorielle Subtraktion von  $\mathfrak{K}_z; \mathfrak{K}_h$  und  $\mathfrak{K}_{z,1}; \mathfrak{K}_{h,1}$  entsteht. Belastet man weiter wieder nach (3.) den Rost mit diesem Zusatzkreuz und ordnet den einzelnen Pfählen diesmal die konstanten Elastizitätsmodule  $E_{i,1} = \left(\frac{dP_i}{d\Delta_i}\right)_{\Delta_i=\Delta_{i,1}}$  zu, so ergeben sich die Eindringungen  $\Delta_{i,2}$  und die Pfahlkräfte  $P_{i,2} + \Delta P_{i,2}$ , welche analog dem Zusatzkreuz  $(\mathfrak{K}_z - \mathfrak{K}_{z,1}); (\mathfrak{K}_h - \mathfrak{K}_{h,1})$  gleichwertig sein müssen. Nach den krummen Arbeitslinien entspricht aber die weitere Eindringung  $\Delta_{i,2}$  nicht den weiteren Pfahlkräften  $P_{i,2} + \Delta P_{i,2}$ , sondern nur den  $P_{i,2}$ . Reduziert man die  $P_{i,2}$  nach (3.2) auf das Kreuz  $\mathfrak{K}_{z,2}; \mathfrak{K}_{h,2}$ , so verbleibt das Zusatzkreuz  $(\mathfrak{K}_{z,1} - \mathfrak{K}_{z,2}); (\mathfrak{K}_{h,1} - \mathfrak{K}_{h,2})$ , welches wieder durch vektorielle Subtraktion von  $\mathfrak{K}_{z,1}; \mathfrak{K}_{h,1}$  und  $\mathfrak{K}_{z,2}; \mathfrak{K}_{h,2}$  entsteht. Fährt man in diesem Sinne fort, bis das Zusatzkreuz verschwindet, so haben wir unsere Iteration beendet. Die endgültigen Eindringungen bzw. Pfahlkräfte betragen

$$\Delta_i = \sum_{\rho=1}^{\rho=\infty} \Delta_{i,\rho} \quad \text{bzw.} \quad P_i = \sum_{\rho=1}^{\rho=\infty} P_{i,\rho}.$$

Man kann aber auch, wie es in (6.) durchgeführt wird, diese Summen sofort nach jedem Schritt bilden, aus den Arbeitslinien die dazugehörigen Pfahlkräfte berechnen und alle Zusatzkreuze auf das Anfangslastkreuz  $\mathfrak{K}_z; \mathfrak{K}_h$  beziehen.

Wir benutzen also für jeden Pfahl  $i$  beim  $v$ -ten Iterationsschritt des Rostes jeweils die aus dem Kurvenstück  $o\nu_i$  und der anschließenden Tangente  $E_{i,v}$

bestehende Arbeitslinie, die sich immer mehr und mehr der gegebenen Arbeitslinie des Pfahles  $i$  anschmiegt (Fig. 1).

Diese endgültigen Pfahlkräfte müssen dann mit den angreifenden Lasten im Gleichgewicht stehen, die endgültigen Eindringungen müssen den geometrisch möglichen Bewegungen des als starr angenommenen Fundamentkörpers entsprechen, und beide müssen den durch die Arbeitslinien der einzelnen Pfähle festgelegten funktionellen Zusammenhang aufweisen.

## 6. Praktische Anwendung

Es soll nun der in Fig. 11 dargestellte sogenannte ebene Rost für eine Last  $R = 247,16 \text{ t}$  berechnet werden. Jeder der in einer Ebene liegenden Pfahlköpfe besitzt einen axialen und einen seitlichen Widerstand, so daß wir für jeden Tragpfahl  $P_{i,v}$  einen Hilfspfahl  $P_{i,h}$  benötigen (2.). Alle Pfahlköpfe zeigen dasselbe elastische Verhalten. Die Arbeitslinien der  $P_v$ -Pfähle und der  $P_h$ -Pfähle sind zueinander affin. Die analytischen Gleichungen für beide sind in Fig. 9 angegeben. Wir legen durch jeden Pfahlkopf  $i$  ein Koordinatenkreuz  $x_i, y_i$ , in welchem die  $x_i$ -Achse mit dem Hilfspfahl  $P_{i,h}$  und die  $y_i$ -Achse mit dem Tragpfahl  $P_{i,v}$  zusammenfällt. Nach (4.3) wählen wir auf  $R$  einen beliebigen Punkt  $A = [a_h \quad \xi_h]$ , legen für jeden Pfahlkopf die dazugehörigen «Gewichte»

$$W_{i,v} = x_i E_v; \quad W_{i,h} = -y_i E_h \quad (\text{Fig. 10}) \quad (63, 64)$$

fest und bestimmen deren Resultierende  $\mathfrak{H}_{A,\xi}$ . Führen wir das Gleiche für

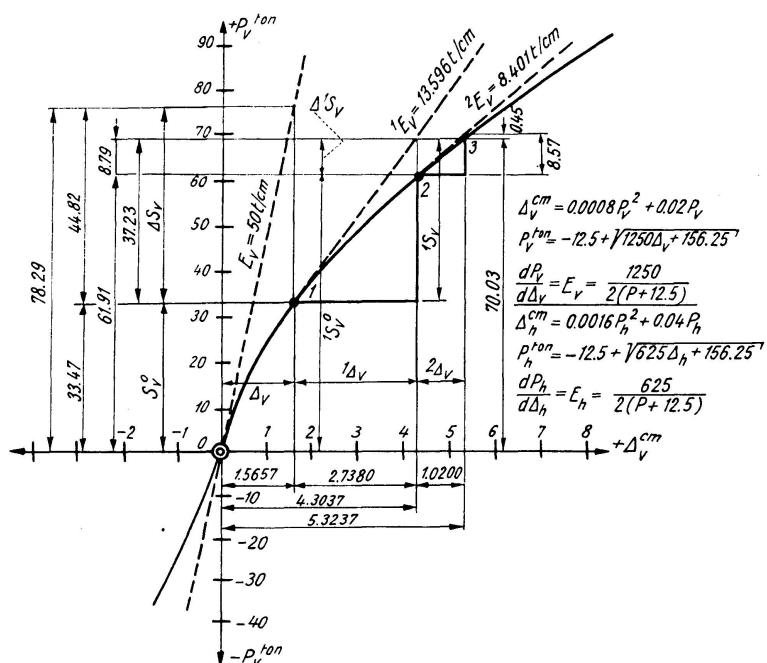


Fig. 9.

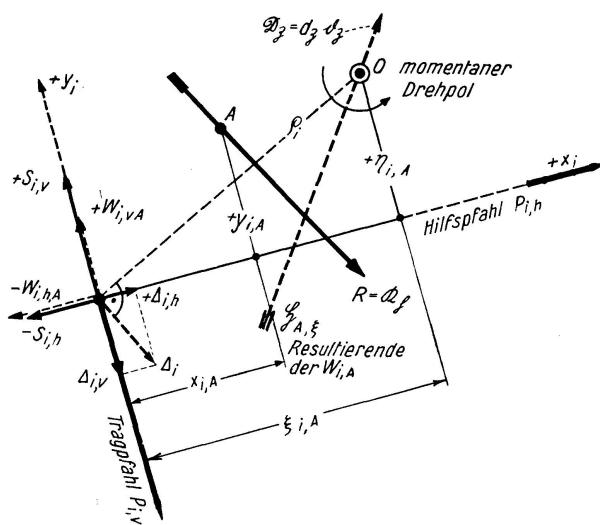


Fig. 10.

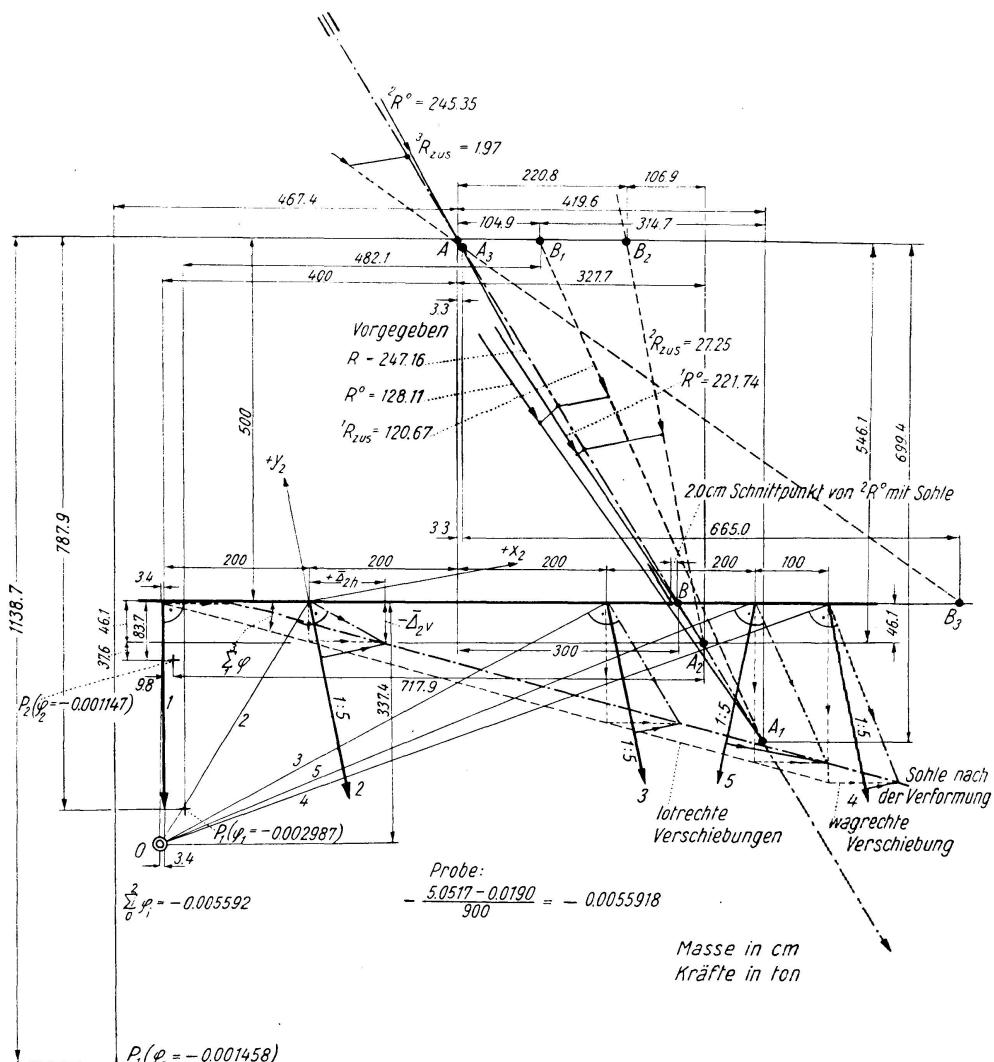


Fig. 11.

einen 2. auf  $R$  liegenden Punkt  $B$  durch, so erhalten wir im Schnittpunkt  $[\mathfrak{H}_{A,\xi}, \mathfrak{H}_{B,\xi}]$  die Drehachse  $O$  des zum Lastkreuz gehörigen orthogonalen Drehkreuzes. Die Lage der anderen Achse ist bedeutungslos, da der zugehörige Drehwinkel verschwindet.

Die Rechnung wird in der Folge zahlenmäßig durchgeführt. Die Kolonnen der mit 1., 2. und 3. Schritt bezeichneten Tafeln 1, 2 und 3 kennzeichnen wir dabei mit [ ] und deren Zeilen mit ( ). Wir wählen wieder auf  $R$  einen beliebigen Punkt  $A$  und bestimmen für jeden Pfahlkopf die Ordinaten  $x_i, y_i$  [1, 2], welche mit  $E_v = 50$  t/cm und  $E_h = 25$  t/cm multipliziert die «Gewichte»  $W_{v,A}, W_{h,A}$  ergeben [3, 4]. Für einen 2. ebenfalls auf  $R$  liegenden Punkt  $B$  führen wir dieselbe Rechnung durch [5, 6, 7, 8]. Es werden nach

$$Y_A \xi_A - X_A \eta_A = M_A, \quad Y_B \xi_B - X_B \eta_B = M_B \quad (65, 66)$$

die Richtungslinien der beiden Resultierenden  $\mathfrak{H}_{A,\xi}$  bzw.  $\mathfrak{H}_{B,\xi}$  der  $W_A$  bzw.  $W_B$  ermittelt, wobei die  $Y_A, X_A$  bzw.  $Y_B, X_B$  die rechtwinkeligen in  $z$  liegenden Komponenten der  $\mathfrak{H}_{A,\xi}$  bzw.  $\mathfrak{H}_{B,\xi}$  und die  $M_A$  bzw.  $M_B$  die Momente der  $W_A$  bzw.  $W_B$  um  $A$  bzw.  $B$  sind (7). Zwischen den beiden Punkten  $A$  und  $B$  bestehen außerdem 2 Lagenbeziehungen (8). Lösen wir diese 4 linearen Gleichungen nach den  $\xi_{A,B}$  und  $\eta_{A,B}$  auf, so ergibt sich die Lage des Drehpunktes  $P$  (9). Wir ermitteln nun die Ordinaten  $\xi_i$  und  $\eta_i$  dieses Punktes  $P$  für die zu jedem Pfahlkopf gehörigen Koordinatenkreuze  $x_i, y_i$  [9, 10] und drücken die Pfahlkräfte  $S_v$  und  $S_h$  durch den Drehwinkel  $\varphi$  auf lineare Weise aus [11, 12]. Ermitteln wir hierfür noch die rechtwinkeligen Komponenten ebenfalls als lineare Funktion von  $\varphi$ , so ergibt sich der Drehwinkel  $\varphi = -0,001458$ , womit die Pfahlkräfte  $S_v$  und  $S_h$  [13, 14] und die entsprechenden Verschiebungen  $\Delta_v$  und  $\Delta_h$  folgen [15, 16]. Die Resultierende der Pfahlkräfte [13, 14] muß wieder  $R = 247,16$  t betragen. Setzen wir [15, 16] in die Arbeitslinien der Fig. 9 ein, so folgen die  $S_v^0$  und  $S_h^0$  [17, 18] mit den auf  $A$  bezogenen  $V^0 = 101,87$  t,  $H^0 = -77,69$  t,  $|R^0| = 128,11$  t und  $M^0 = -115,86$  tm als Resultierende. Wir bestimmen noch auf analytischem Wege die Koordinaten  $a_A = 419,6$  cm und  $b_A = -699,4$  cm des Schnittpunktes  $A_1$  von  $R$  und  $R^0$ . Bestimmen wir noch durch Differenzenbildung die Zusatzkraft zu

$${}^1H_{zus} = 49,52 \text{ t}, \quad {}^1V_{zus} = -110,04 \text{ t} \quad \text{und} \quad |{}^1R_{zus}| = 120,67 \text{ t},$$

so haben wir den 1. Schritt des Rechnungsganges erledigt.

Wir berechnen nun für jeden Pfahlkopf die Elastizitätsmodule  ${}^1E_v$  und  ${}^1E_h$ , indem wir die  $\Delta_v$  und  $\Delta_h$  [15, 16] des 1. Schrittes in die diesbezüglichen analytischen Formeln der Fig. 9 einsetzen [1, 2]. Hernach belasten wir den Rost mit der im 1. Schritt berechneten Zusatzkraft  ${}^1R_{zus}$ . Dazu wählen wir wieder 2 auf  ${}^1R_{zus}$  liegende Punkte  $A_1$  bzw.  $B_1$  (Fig. 11), bestimmen die dazu gehörigen Gewichte  $W_{v,A_1}, W_{h,A_1}$  [5, 6], bzw.  $W_{v,B_1}, W_{h,B_1}$  [9, 10] mit ihren beiden Resultierenden  $\mathfrak{H}_{A_1,\xi}$  bzw.  $\mathfrak{H}_{B_1,\xi}$  und erhalten so wie im 1. Schritt im Schnittpunkt  $[\mathfrak{H}_{A_1,\xi}, \mathfrak{H}_{B_1,\xi}]$  den Drehpol  $P_1$  mit den auf  $B_1$  bezogenen Koordi-

### Tafel 1. 1. Schritt ( $E_v = 50 \text{ t/cm}$ ; $E_h = 25 \text{ t/cm}$ )

Pfahl	9		10		11		12		13		14		15		16		17		18	
	cm $\xi$	cm $\eta$	ton $S_v =$	ton $S_h =$	ton $S_v$	ton $S_h$	ton $S_v$	ton $S_h$	ton $S_v$	ton $S_h$	ton $S_v$	ton $S_h$	cm $\Delta_v =$	cm $\Delta_h =$	ton $S_v^0$	ton $S_h^0$	ton $S_v^0$	ton $S_h^0$		
1	- 67,4	- 638,7	- 3,370	+ 15,968	+ 4,91	- 23,28	- 0,0983	+ 0,9312	+ 4,207	- 14,681										
2	- 387,5	- 573,8	- 19,375	+ 14,345	+ 28,25	- 20,92	- 0,5650	+ 0,8366	+ 16,868	- 13,560										
3	- 779,7	- 495,4	- 38,985	+ 12,385	+ 56,84	- 18,06	- 1,1368	+ 0,7223	+ 27,215	- 12,151										
4	- 1073,9	- 436,5	- 53,695	+ 10,913	+ 78,29	- 15,91	- 1,5657	+ 0,6364	+ 33,471	- 11,037										
5	- 725,5	- 795,8	- 36,275	+ 19,895	+ 52,89	- 29,01	- 1,0578	+ 1,1603	+ 25,951	- 17,191										
Dreh- winkel $\varphi$	$\varphi = - \frac{211,91}{145,34 \cdot 10^3}$		$V = - 145,34$		$V = - 211,91$		Richtungsprobe:		$V^0 = 101,87$		10									
	$= - \frac{127,21}{87,25 \cdot 10^3}$		$H = + 87,25$		$H = + 127,21$		$- \frac{145,34}{87,25} = - 1,666$		$H^0 = - 77,69$			11								
	$= - 0,001458$		$ R  = 169,52$		$ R  = 247,16$		$- \frac{211,91}{127,21} = - 1,666$		$M^0 = - 115,86$			12								
			$\text{Faktor}$		$\varphi \cdot 10^3$		$- \frac{5}{3} = - 1,6$		$ R^0  = 128,11$				13							

Bezogen auf A

Schnittpunkt A1 von R und R<sup>0</sup> (bezogen auf A)  ${}^1V_{zus} = -(211,91 - 101,87) = - 110,04$  $101,87 a_A + 77,69 b_A = - 11586$  ${}^1H_{zus} = (127,21 - 77,69) = + 49,52$  $b_A = - \frac{5}{3} a_A; a_A = + 419,6; b_A = - 699,4$   
 $|{}^1R_{zus}| = 120,67$

## Tafel 2. 2. Schritt

Pfahl	em ${}^1\xi$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
		${}^1S_v =$ $+ {}^1\varphi {}^1\xi {}^1E_v$	${}^1S_h =$ $+ {}^1\varphi {}^1\eta {}^1E_h$	ton ${}^1S_v$	ton ${}^1S_h$	ton ${}^1S_v$	${}^1A_v =$ $- {}^1\varphi {}^1\xi$	${}^1A_h =$ $+ {}^1\varphi {}^1\eta$	$\sum A_v$	$\sum A_h$	$\sum A_v$	$\sum A_h$	ton ${}^1S_v^0$
1	+ 22,8	- 287,9	+ 8,511	+ 53,844	- 2,54	- 16,08	+ 0,0681	+ 0,8598	- 0,0303	+ 1,7910	+ 1,429	- 23,222	
2	- 230,3	- 247,5	- 49,552	+ 26,632	+ 14,80	- 7,96	- 0,6878	+ 0,7393	- 1,2528	+ 1,5759	+ 29,000	- 21,281	
3	- 622,5	- 169,1	- 97,961	+ 13,303	+ 29,26	- 3,97	- 1,8594	+ 0,5050	- 2,9962	+ 1,2273	+ 49,961	- 17,892	
4	- 916,7	- 110,2	- 124,631	+ 7,493	+ 37,23	- 2,24	- 2,7380	+ 0,3292	- 4,3037	+ 0,9656	+ 61,902	- 15,061	
5	- 705,7	- 434,7	- 114,705	+ 35,328	+ 34,26	- 10,55	- 2,1079	+ 1,2984	- 3,1657	+ 2,4587	+ 51,641	- 28,641	
$\varphi_1 = - \frac{110,04}{368,45 \cdot 10^2}$		${}^1V = - 368,45$		${}^1V_{zus} = - 110,04$		${}^1V_{zus} = - 110,04$		${}^1H_{zus} = + 49,52$		${}^1H_{zus} = + 49,52$		${}^1R_{zus} = 120,87$	
Drehwinkel $\varphi_1$		$= - \frac{49,52}{165,87 \cdot 10^2}$		${}^1H = + 165,87$		${}^1H_{zus} = + 49,52$		$ {}^1R_{zus}  = 120,87$		${}^1V^0 = + 185,172$		${}^1H^0 = - 121,98$	
$= - 0,002987$		$ {}^1R  = 404,65$		$ {}^1R  = 404,65$		$ {}^1R^0  = 221,74$		$ {}^1M^0  = - 5939,3$		$ {}^1R^0  = 221,74$		$ {}^2R_{zus}  = 27,25$	
		$\text{Faktor} \quad \varphi_1 \cdot 10^2$											

Bezogen auf A

Schnittpunkt A<sub>2</sub> von R mit  ${}^1R^0$  (bezogen auf A)  ${}^2V_{zus} = - (211,91 - 185,17) = - 26,74$  $185,172 \cdot 1a_A + 121,98 \cdot 1b = - 5939,3$  ${}^2H_{zus} = + (127,21 - 121,98) = + 5,23$  ${}^1b_A = - \frac{5}{3}a_A; \quad {}^1a_A = + 327,7; \quad {}^1b_A = - 546,1$

Tafel 3. 3. Schritt

Elastizitätsmodul			Bezogen auf Punkt $A_2$				Bezogen auf Punkt $B_2$				
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Pfahl	t/cm $^2E_v$	t/cm $^2E_h$	$x_{A_2}$	$y_{A_2}$	$W_{vA_2}$	$W_{hA_2}$	$x_{B_2}$	$y_{B_2}$	$W_{vB_2}$	$W_{hB_2}$	
1	+ 44,870	+ 22,435	+ 727,7	- 46,1	+ 3,265	+ 0,103	+ 620,8	+ 500,0	+ 2,786	- 1,122	
2	+ 15,060	+ 7,530	+ 508,4	- 148,7	+ 0,766	+ 0,112	+ 510,7	+ 407,8	+ 0,769	- 0,308	
3	+ 10,006	+ 5,003	+ 116,2	- 70,2	+ 0,116	+ 0,035	+ 118,5	+ 486,2	+ 0,118 <sub>5</sub>	- 0,234	
4	+ 8,401	+ 4,201	- 178,0	- 11,4	- 0,149 <sub>5</sub>	+ 0,004 <sub>79</sub>	- 175,7	+ 545,0	- 0,148	- 0,229	
5	+ 9,744	+ 4,872	- 61,9	- 59,4	- 0,060	+ 0,029 <sub>9</sub>	- 273,8	+ 455,1	- 0,267	- 0,222	
Faktor	1	1	1	1	10 <sup>4</sup>	10 <sup>4</sup>	1	1	10 <sup>4</sup>	10 <sup>4</sup>	
	$+ 3,9486 \cdot 2\xi_{A_2} - 0,1249 \cdot 2\eta_{A_2} = - 2834,8$										
	$+ 3,1399 \cdot 2\xi_{B_2} + 2,3019 \cdot 2\eta_{B_2} = - 3266,01$										
Bezogen auf $A_2$		$^2\xi_{B_2} = ^2\xi_{A_2} - 106,9$		$^2\eta_{B_2} = ^2\eta_{A_2} + 546,1$							
		$^2\xi_{A_2} = - 717,9$		$^2\eta_{A_2} = - 37,6$							



naten  ${}^1\xi_{B_1} = -482,1$  cm und  ${}^1\eta_{B_1} = -787,9$  cm (9). Nun bestimmen wir die Koordinaten  ${}^1\xi$  und  ${}^1\eta$  dieser Punkte auf die Systeme  $x_i, y_i$  [11, 12] und drücken die Pfahlkräfte  ${}^1S_v$  und  ${}^1S_h$  auf lineare Weise durch den Drehwinkel  $\varphi_1$  aus. Wir erhalten so  $\varphi_1 = -0,002987$ . Damit ergeben sich schließlich die Pfahlkräfte  ${}^1S_v$  und  ${}^1S_h$  [15, 16], welche als Resultierende  $|{}^1R_{zus}| = 120,87$  t haben müssen. Wir berechnen weiter die zu  $|{}^1R_{zus}|$  gehörigen Verschiebungen  ${}^1\Delta_v$  und  ${}^1\Delta_h$  und addieren sie zu den  $\Delta_v$  und  $\Delta_h$  des 1. Schrittes. Es ergeben sich die  $\sum$  [19, 20], aus welchen mit Hilfe der in Fig. 9 angegebenen analytischen Formeln die Pfahlkräfte  ${}^1S_v^0$  und  ${}^1S_h^0$  folgen [21, 22], deren Resultierende  ${}^1V^0 = 185,172$  t,  ${}^1H^0 = -121,981$  t,  $|{}^1R^0| = 221,74$  t und  ${}^1M^0 = -5939,3$  tm beträgt. Wir bestimmen wieder wie vorhin auf analytischem Wege die Koordinaten  ${}^1a_A = 327,7$  cm und  ${}^1b_A = -546,1$  cm des Schnittpunktes  $A_2$  von  $R$  mit  ${}^1R^0$ . Ermitteln wir nun noch durch Differenzenbildung zwischen  $|R| = 247,16$  t und  $|{}^1R^0| = 221,74$  t die Zusatzkraft  $|{}^2R_{zus}|$  zu  $|{}^2H_{zus}| = 5,23$  t und  ${}^2V_{zus} = -26,74$  t mit  $|{}^2R_{zus}| = 27,25$  t, so haben wir auch den 2. Schritt zu Ende geführt.

Es wurde noch ein 3. Schritt ausgeführt. Der Rechnungsgang ist genau derselbe wie beim 2. Schritt. Die Zusatzkraft wird dabei auf  $|{}^3R_{zus}| = 1,97$  t gesenkt. Mit dieser Genauigkeit wollen wir uns begnügen.

In Fig. 11 sind alle Ergebnisse übersichtlich zusammengestellt. In [21, 22] haben wir die Endpfahlkräfte  ${}^2S^0$  und  ${}^2S^0$  nochmals angeschrieben. Vergleicht man sie mit [13, 14] des 1. Schrittes, bei dem wir nur mit konstanten Elastizitätsmodulen gerechnet haben, so kann man doch Unterschiede bis zu 10 % feststellen. Andererseits ist aber das Gesamtpfahlbild viel ausgeglichener.

Trägt man, wie es in Fig. 11 getan wurde, in jedem Pfahlkopf die waagrechte und lotrechte Verschiebung auf und fällt auf die resultierenden Verschiebungen je eine Lotrechte, so müssen sich alle diese Lotrechten in einem Punkte 0 schneiden, welcher den Momentanpol für die Fundamentbewegung bei krummlinigen Arbeitslinien darstellt. Außerdem muß die Horizontalkomponente der Verschiebung eines jeden Pfahlkopfes einen konstanten Wert aufweisen. Dieser ist in unserem Falle 1,887 cm. Die verformten Pfahlköpfe müssen alle in einer Geraden liegen. Die Drehung um den Momentanpol 0 ist gleich der Summe von  $\varphi + \varphi_1 + \varphi_2 = -0,005592$ . Dasselbe Ergebnis erhalten wir richtigerweise auch, indem wir die Differenz der Vertikalverschiebungen der Pfähle 4 und 1 durch die Fundamentlänge dividieren (Fig. 11).

Außer diesen Kontrollen gibt es für jeden Schritt noch die sogenannten Richtungskontrollen, die in den Tafeln 1, 2 und 3 auch durchgeführt wurden.

### Schrifttum

Dr. Ing. ERNST GRUBER, «Die Ermittlung von Bodenpressungen für Fundamente mit prismatischer Standfläche». Schweizerische Bauzeitung, 11. Mai 1935, Seite 214.

### Zusammenfassung

Es werden mittelst einer gut konvergierenden Iteration allgemeine Roste untersucht, bei welchen die elastischen Eindringungen der einzelnen Pfähle nach krummen Arbeitslinien zunehmen.

Zunächst wird gezeigt, wie man durch Einführung von gedachten Hilfspfählen mit nur axialen Reaktionsfähigkeiten auch die seitlichen Widerstände eines beliebigen Pfahlkopfes erfassen kann, so daß wir unsere Untersuchungen auf Roste mit nur axialen Widerständen beschränken können.

Erfolgen die Bodeneindringungen der Pfähle linear mit der Kraft und ist der die Pfahlköpfe zusammenfassende Fundamentkörper vollkommen starr, so führt dieser im Falle einer Belastung eine infinitesimale räumliche Bewegung aus, die z. B. durch ein aus 2 zueinander windschief liegenden Drehachsen bestehendem «Drehkreuz» beschrieben werden kann.

Führt man sogenannte «Gewichte» ein und reduziert sämtliche Kraft- und Drehvektoren auf ein beliebiges Punkt-Ebene-Paar, so kann man

1. durch Bildung der Momentensummen um jeweils 4, nach gewissen Gesichtspunkten ausgewählten Achsen, mit Hilfe der projektiven Geometrie die Richtungslinien  $\delta_\nu$  und  $\delta_\mu$  des obigen Drehkreuzes nur mit Zirkel und Lineal konstruieren, und
2. durch Aufstellung und Nullsetzung der zu 2 beliebigen Richtungen gehörigen orthogonalen Projektionssummen sämtlicher Kräfte für die Bestimmung der Drehwinkel  $d_\nu$  und  $d_\mu$  2 lineare algebraische Gleichungen gewinnen.

Ein räumlicher Pfahlrost besitzt 6 Freiheitsgrade, aus welchen jeweils 6 lineare Bedingungsgleichungen gefolgt werden können.

Das oben geschilderte Verfahren entspricht analytisch der Spaltung dieser 6-gliedrigen Gleichungsgruppe in eine 4-gliedrige, die zeichnerisch, und eine 2-gliedrige, die algebraisch aufgelöst wird.

Erfolgen die Bodeneindringungen nicht mehr linear mit der Kraft, so benutzen wir für jeden Pfahl beim  $\nu$ -ten Iterationsschritt des Rostes jeweils die aus dem Kurvenstück  $O_\nu$  und der anschließenden Tangente  $E_i\nu$  bestehende Arbeitslinie, die sich immer mehr und mehr der vorgegebenen Arbeitslinie des Pfahles anschmiegt (Fig. 1).

Dieses allgemeine Verfahren vereinfacht sich für gewisse Sonderfälle ganz bedeutend. Einer von diesen ist der sog. ebene Pfahlrost, der bereits vom Verfasser im Aufsatz der Schweizerischen Bauzeitung vom 11. Mai 1935, Seite 214, behandelt wurde.

### Summary

The author studies in a general manner, by a definitely convergent iteration, groups of piles for which the elastic penetrations of the various piles do not increase linearly with the corresponding forces.

He demonstrates first of all that by the introduction of hypothetical auxiliary piles, exhibiting only an axial reactional capacity, it is also possible to study the lateral resistances of any given pile head; investigations may thus be confined to piles which only exhibit axial resistances.

If the penetrations of the piles into the soil take place linearly as a function of the forces exerted and if the foundation system which joins the heads of the piles is perfectly rigid, then in the event of the application of a load, this system performs an infinitesimal movement in space which may, for example, be represented by a "cross of rotation" formed from two axes of rotation, one of which is bent in relation to the other.

If "weights" are introduced and all the force and rotation vectors are reduced to an arbitrary point-plane couple, it is possible:

1. To construct only with the compass and the ruler the lines of orientation  $d_v$  and  $d_\mu$  of the above "cross of rotation" by means of projective geometry, by establishing the sums of the moments with reference to four axes selected in accordance with certain considerations.
2. To obtain two linear algebraic equations for the determination of the angles of rotation  $d_v$  and  $d_\mu$ , by establishing and cancelling out the sums of the orthogonal projections corresponding to two arbitrary directions of all the forces.

A three-dimensional group of piles exhibits six degrees of freedom, from which it is possible to derive six linear equations expressing the conditions to be fulfilled.

The procedure described above corresponds analytically to the dividing-up of this set of equations with six components into a set with four components which can be solved graphically and a set with two components which can be solved algebraically.

If the penetrations into the soil do not take place linearly as a function of the forces, then it is necessary to employ, for each pile, for the stage of iteration of order  $v$  of the group, the force-penetration curve formed by the portion of curve  $Ov$  and by the tangent  $E_{iv}$  joined to it, a curve which agrees increasingly closely with the force-penetration curve provided for the pile (Fig. 1).

This general procedure is simplified to a considerable extent for certain special cases. One of these cases is that of the so-called two-dimensional group, which has already been discussed by the author in the "Schweizerische Bauzeitung" of 11th May 1935, page 214.

### Résumé

L'auteur étudie d'une manière générale, par une itération nettement convergente, les groupes de pieux pour lesquels les pénétrations élastiques des différents pieux n'augmentent pas linéairement avec les efforts correspondants.

Il montre tout d'abord comment, en introduisant des pieux auxiliaires hypothétiques ne présentant qu'une aptitude réactionnelle axiale, il est possible d'étudier également les résistances latérales d'une tête de pieu quelconque; les investigations peuvent ainsi être limitées à des pieux ne présentant que des résistances axiales.

Si les pénétrations des pieux dans le sol se produisent linéairement en fonction des efforts exercés et si le système de fondation qui réunit les têtes des pieux est parfaitement rigide, ce système effectue, dans le cas de l'application d'une charge, un mouvement infinitésimal dans l'espace, qui peut par exemple être représenté par une «croix de rotation» formée à partir de deux axes de rotation déjetés l'un par rapport à l'autre.

Si l'on introduit des «poids» et si l'on réduit tous les vecteurs d'effort et de rotation à un couple arbitraire point-plan, il est possible:

1. De construire seulement avec le compas et la règle les lignes d'orientation  $d_\nu$  et  $d_\mu$  de la croix de rotation ci-dessus, à l'aide de la géométrie projective, en formant les sommes des moments par rapport à quatre axes choisis suivant certaines considérations.
2. d'obtenir deux équations algébriques linéaires pour la détermination des angles de rotation  $d_\nu$  et  $d_\mu$ , en établissant et en annulant les sommes des projections orthogonales correspondant à deux directions arbitraires de tous les efforts.

Un groupe de pieux tridimensionnel présente six degrés de liberté, à partir desquels il est possible d'obtenir six équations linéaires exprimant les conditions à remplir.

Le procédé ci-dessus indiqué correspond analytiquement au fractionnement de ce groupe d'équations à six éléments en un groupe à quatre éléments qui peut être résolu graphiquement et un groupe à deux éléments qui peut être résolu algébriquement.

Si les pénétrations dans le sol ne se produisent plus linéairement en fonction des efforts, il y a lieu d'utiliser pour chaque pieu, pour l'échelon d'itération d'ordre  $\nu$  du groupe, la courbe effort-pénétration constituée par le fragment de courbe  $O\nu$  et par la tangente  $E_{i\nu}$  qui s'y raccorde, courbe qui concorde de plus en plus étroitement avec la courbe effort-pénétration prévue pour le pieu (fig. 1).

Ce procédé général se simplifie dans une très large mesure pour certains cas particuliers. L'un d'eux est celui du groupe dit bidimensionnel, qui a déjà été traité par l'auteur dans la Schweizerische Bauzeitung du 11 mai 1935, page 214.

Leere Seite  
Blank page  
Page vide