

Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 19 (1959)

Artikel: Der durchlaufende Rahmenträger
Autor: El-Demirdash, I.A.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-16949>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Der durchlaufende Rahmenträger

The Continuous Vierendeel Girder

La poutre Vierendeel continue

I. A. EL-DEMIRDASH

Prof. Dr. sc. techn. (ETH), Faculty of Engineering, Cairo University, Giza

I. Vorwort

Die Steifigkeit des Rahmenträgers ist durch die Steifigkeit seiner Knotenpunkte bedingt. Im Gegensatz zum Fachwerk kann deshalb die vereinfachte Annahme reibungsloser Gelenke nicht angewendet werden. Man hat den Rahmenträger als statisch unbestimmtes Rahmensystem zu berechnen. Jedoch dürfen in der Regel die Anteile der Quer- und Normalkräfte weggelassen werden. Ebenfalls darf man die elastischen Beiwerte und daraus die unbestimmten Größen, ohne Berücksichtigung der Knotenblechverstärkungen an den Stabenden, ermitteln. Dabei wird angenommen, daß der Einfluß dieser Verstärkungen einer Abkürzung der Systemlängen entspricht, die für alle Stäbe ungefähr denselben Bruchteil ausmacht.

Der Rahmenträger mit gleichen Gurtsteifigkeiten kann mit Hilfe der elastischen Kräftepaare oder nach der sogenannten Feld-Methode berechnet werden¹⁾. Jedenfalls darf man den Rahmenträger nicht durch Einführen von Gelenken in den Mittelpunkten der einzelnen Stäbe vereinfachen. Diese Annahme besonders ist in der Nähe von Einzellasten falsch. Wohl kann das Gelenksystem aber als statisch bestimmtes Hauptsystem dienen.

Da die Querkräfte der äußeren Belastungen beim Fachwerk von den Diagonalen und beim vollwandigen Balken vom Steg aufgenommen werden, ist es doch klar, daß sich beide Bauarten weniger durchbiegen als der Rahmenträger. Man darf beinahe annehmen, daß die Momente der äußeren Belastungen hauptsächlich Normalkräfte in den Gurtungen des Rahmenträgers hervor-

¹⁾ I. A. EL-DEMIRDASH: Statics of the Vierendeel Girder. Band XII, Abhandlungen der IVBH, 1952.

rufen und daß diese Kräfte den Rahmenträger um ungefähr denselben Betrag durchbiegen wie einen vollwandigen Balken. Andererseits rufen die Querkkräfte der äußeren Belastungen in den Stäben des Rahmenträgers beträchtliche Biegemomente hervor. Infolge dessen biegt sich der Rahmenträger weiter durch.

Der Anteil der Momente an den Durchbiegungen des Rahmenträgers ist vorwiegend wichtiger als der der Normalkräfte. Jedoch darf der letztere nicht vernachlässigt werden. In dieser Beziehung unterscheidet sich die Berechnung der Durchbiegungen von der der unbestimmten Größen, bei welcher der Einfluß der Normalkräfte in der Regel nicht maßgebend ist. Ein anderer noch wichtiger Unterschied liegt in der Tatsache, daß sich die Durchbiegungen des Rahmenträgers mit denjenigen des durch Einführen von Gelenken in den Stabmittelpunkten geformten statisch bestimmten Systems praktisch decken. Der Einfluß etwaiger Abweichungen der Momentennullpunkte des Rahmenträgers von den Stabmittelpunkten gleicht sich sozusagen aus.

Es muß noch erwähnt werden, daß die Knotenbleche einen günstigen Einfluß auf die Durchbiegungen des Rahmenträgers ausüben. Die wirklichen Werte sind wohl geringer als diejenigen, die man ohne Berücksichtigung der verstärkenden Wirkung der Knotenbleche erhält. Man kann sich jedoch meistens mit einer prozentualen Verkleinerung sämtlicher Durchbiegungen begnügen.

Ferner sind die Stäbe des Rahmenträgers oft gedrungen. Folglich wird der Anteil der Querkkräfte an den Durchbiegungen nicht verschwindend klein. Er ist jedoch in der Regel merklich kleiner als der Anteil der Biegemomente oder gar der Normalkräfte und dürfte deshalb gewöhnlich weggelassen werden.

Die Berechnung der Durchbiegungen des einfachen Rahmenträgers sind für die Ermittlung der unbestimmten Größen solcher Systeme notwendig, wofür der einfache Rahmenträger als Grundsystem verwendet wird. Als Beispiel wird im folgenden der durchlaufende Rahmenträger behandelt. In der Berechnung der überzähligen Auflagerkräfte ist es praktisch genügend, den innerlich statisch unbestimmten Rahmenträger durch Einführen von Gelenken in den Mittelpunkten der Stäbe zu einem statisch bestimmten Gelenksystem zu verwandeln. Die für das Gelenksystem leicht erhaltenen Auflagerkräfte stimmen gut mit denjenigen des durchlaufenden Rahmenträgers überein. Allerdings müssen dabei mindestens Biegemomente und Normalkräfte berücksichtigt werden.

Sind auf dieser einfachen Weise die überzähligen Auflagerkräfte einmal bestimmt, so können die Biegemomente, die Normal- und Querkkräfte in den verschiedenen Schnitten des durchlaufenden Rahmenträgers mit gleichen Gurtsteifigkeiten mittels der Feld-Methode oder mit Hilfe der elastischen Kräftepaare ermittelt werden. Dabei darf der Anteil der Normalkräfte weggelassen werden. Analog darf der verstärkte Rahmenträger mit Stabbogen sowohl wie der versteifte Rahmenbogen mit Zugband behandelt werden.

II. Die Durchbiegungen des Rahmenträgers

Infolge der äußeren Belastungen werden in den Stäben des Rahmenträgers sowohl Biegemomente wie Normal- und Querkräfte erzeugt, die zu den Gesamtdurchbiegungen des Rahmenträgers beitragen. Es ist somit: $\delta = \delta_M + \delta_N + \delta_Q$. Die beiden ersten Beiträge δ_M und δ_N sind mehr oder weniger von derselben Größenordnung, während der letzte Beitrag δ_Q in der Regel kleiner ist und deshalb meistens nicht berücksichtigt wird.

Betrachtet man zunächst einen Rahmenträger mit parallelen Gurtungen, die gleiche Biegesteifigkeiten $I:\lambda$ besitzen und vernachlässigt man in der Berechnung, wie üblich, den Einfluß der Quer- und Normalkräfte, so werden in jedem Felde die Momentennullpunkte beider Gurte auf derselben lotrechten Geraden liegen. Folglich werden die Biegemomente bzw. die Gurtkräfte des Rahmenträgers von den Querkräften bzw. den Momenten des einfachen Balkens abhängig sein. Somit nehmen die Biegespannungen von der Trägermitte gegen die Auflager zu, währenddem die Spannungen infolge der Normalkräfte abnehmen. Es ist deshalb nicht oft notwendig, die Gurte des Rahmenträgers von Feld zu Feld abzustufen. In dieser Hinsicht unterscheidet sich der Rahmenträger vom Fachwerk und vom vollwandigen Balken. Außerdem werden infolge der Biegemomente die Gurte des Rahmenträgers stärker und steifer bemessen als diejenigen der beiden andern Bauarten.

Was aber die Durchbiegungen des Rahmenträgers anbelangt, so werden demgemäß die Beiträge δ_M von den Querkräften und die Beiträge δ_N von den Biegemomenten des einfachen Balkens abhängig sein. Wählt man den Rahmenträger höher, so werden die Gurtkräfte und somit auch die Anteile δ_N der Durchbiegungen kleiner. Andererseits werden die Anteile δ_M der Durchbiegungen, da bei zunehmender Höhe die Gurtstäbe entsprechend schwächer bemessen werden, größer. Das Verhältnis $\delta_N:\delta$ wird somit bei dem höheren Rahmenträger kleiner als bei dem niedrigeren.

Alle diese Zusammenhänge gehen aus der Tabelle I deutlich hervor, welche die verschiedenen Anteile der Durchbiegungen in t- und cm-Einheiten und den Prozentsatz $\delta_N:\delta$ für drei praktische Entwürfe, Fig. 1 a, b u. c, enthält. Diese Rahmenträger sind als Hauptträger einer 6 m breiten Straßenbrücke mit zwei Gehsteigen von je $1\frac{1}{2}$ m bemessen worden²⁾.

Alle Werte der Tabelle I sind ohne die versteifende Wirkung der Knotenbleche ermittelt worden. Sie sind daher als Vergleichszahlen zu betrachten, die etwas größer als die wirklichen Durchbiegungen sind. Die Gesamtdurchbiegungen der drei Fälle a), b) und c) sind praktisch gleich. Wird somit der Rahmenträger erhöht, so wird die entsprechende Abnahme von δ_N durch eine Zunahme von δ_M beinahe ausgeglichen.

²⁾ I. A. EL-DEMIRDASH and H. A. ABDEL WAHAB: The continuous Vierendeel Girder. Bulletin of the Faculty of Engineering, Cairo University, 1957/58.

Tabelle I

| Belastung | Durchbiegung in Trägermitte | $h \sim L/6$ | $h = L/8$ | | $h = L/10$ |
|--------------------|-----------------------------------|--------------|-------------------|-------------------|------------|
| | | | Rahmen- träger | Gelenk- system | |
| $P_m = 1\text{ t}$ | $E \cdot \delta_M$ | 88,42 | 73,49 | 74,49 | 65,55 |
| | $E \cdot \delta_N$ | 13,48 | 22,73 | 23,47 | 35,10 |
| | $\delta_N : \delta \%$ | 13,2 % | 23,7 % | 23,8 % | 35,2 % |
| $P_n = 1\text{ t}$ | $E \cdot \delta_M$ | 42,98 | 35,92 | 35,19 | 31,82 |
| | $E \cdot \delta_N$ | 9,22 | 15,49 | 15,86 | 24,88 |
| | $\delta_N : \delta \%$ | 17,7 % | 30,2 % | 31,0 % | 43,9 % |

Ferner ist das Verhältnis $\delta_N : \delta$ für verschiedene Laststellungen verschieden. Wie die Einzellast $P = 1\text{ t}$ von der Mitte nach dem Auflager schreitet, nehmen die beiden Beiträge δ_M und δ_N ab. Da aber die kleineren Querkräfte auf den längeren Seiten wirken, so erfolgt die Abnahme der Werte δ_M schneller als die der Werte δ_N . Folglich nimmt das Verhältnis $\delta_N : \delta$ zu.

Die Pfosten erhalten nur die Hälfte der Knotenlasten bzw. der Auflagerkräfte und sind deshalb für die Berechnung der Werte δ_N nicht von Bedeutung. Diese Werte werden in der Hauptsache von den Gurtkräften herrühren. Somit wird der Beitrag δ_N eines Rahmenträgers mit der Gurtquerschnittsfläche A_g fast gleich groß werden wie die Durchbiegung eines Balkens mit dem

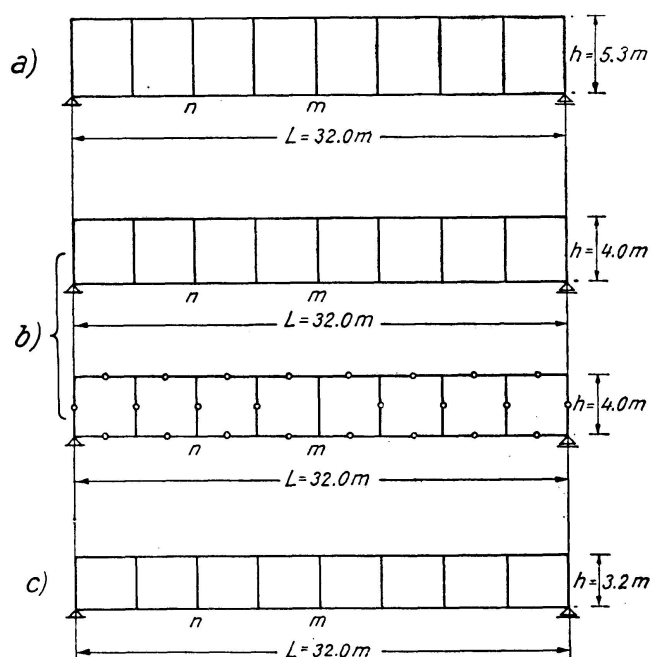


Fig. 1. Rahmenträger.

Trägheitsmoment $I_b = \frac{1}{2} A_g h^2$. Für den Rahmenträger 1 b ist z. B. $E \delta_N = 22,73$ gegenüber einer Durchbiegung von 22,44 des Ersatzbalkens. Dieser Betrag ist wohl viel kleiner als die Gesamtdurchbiegung $E \delta = 96,22$ des Rahmenträgers. Es ist jedoch falsch, auf Grund dieser beiden Werte die relative Steifigkeit von Balken und Rahmenträger zu ermitteln. Hiefür muß der vollwandige Balken bzw. das Fachwerk, Fig. 2a u. b, herangezogen werden, welche unter denselben Zuständen berechnet worden sind. Der oben erwähnte Ersatzbalken ist viel steifer, weil ja außer den Gurtkräften Biegemomente in den Gurtungen des Rahmenträgers auftreten.

Die Tabelle II zeigt die in t- und cm-Einheiten für die drei Vergleichsträger der Fig. 2 berechneten Durchbiegungen. Danach sind die relativen Steifigkeiten der drei Bauarten ungefähr 1:0,8:0,6 bzw. 1:0,9:0,7. Da aber die Werte der Tabelle II ohne Rücksicht auf die versteifende Wirkung der Knotenbleche des Fachwerks bzw. des Rahmenträgers ermittelt worden sind, so wer-

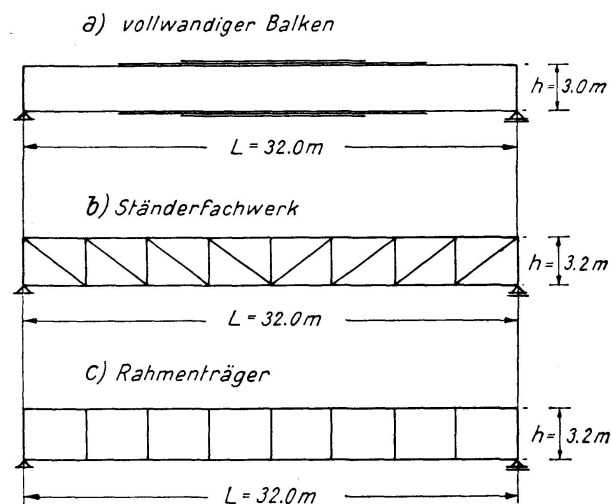


Fig. 2.

Tabelle II

| Bela- stung | Vollwandiger Balken | | Ständerfachwerk | | Rahmenträger | |
|----------------|------------------------|--------|------------------------|--------|------------------------|--------|
| $P_m = 1 t$ | $E \cdot \delta_Q$ | 4,44 | $E \cdot \delta_F$ | 24,15 | $E \cdot \delta_M$ | 65,55 |
| | $E \cdot \delta_M$ | 53,66 | $E \cdot \delta_G$ | 55,00 | $E \cdot \delta_N$ | 35,10 |
| | $E \cdot \delta$ | 58,10 | $E \cdot \delta$ | 79,15 | $E \cdot \delta$ | 100,65 |
| | $\delta_M : \delta \%$ | 92,3 % | $\delta_G : \delta \%$ | 69,5 % | $\delta_N : \delta \%$ | 35,2 % |
| $P_n = 1 t$ | $E \cdot \delta_Q$ | 3,34 | $E \cdot \delta_F$ | 9,70 | $E \cdot \delta_M$ | 31,82 |
| | $E \cdot \delta_M$ | 34,97 | $E \cdot \delta_G$ | 40,65 | $E \cdot \delta_N$ | 24,88 |
| | $E \cdot \delta$ | 38,31 | $E \cdot \delta$ | 50,35 | $E \cdot \delta$ | 56,70 |
| | $\delta_M : \delta \%$ | 91,3 % | $\delta_G : \delta \%$ | 80,7 % | $\delta_N : \delta \%$ | 43,9 % |

den in Wirklichkeit ihre relativen Steifigkeiten gegenüber dem vollwandigen Balken etwas günstiger.

Ferner ist noch zu bemerken, daß der Beitrag δ_M der Biegemomente im vollwandigen Balken und der Beitrag δ_G der Gurtstäbe beim Fachwerk praktisch gleich sind. Beide Werte sind jedoch größer als der Beitrag δ_N der Normalkräfte beim Rahmenträger, weil ja die Gurte dieser Bauart stärker bemessen werden. Andererseits sind die Beiträge δ_Q der Querkräfte beim vollwandigen Balken sehr klein. Die entsprechenden Beiträge δ_F der Füllungsstäbe beim Fachwerk und δ_M der Biegemomente im Rahmenträger sind viel größer. Ferner sind die Werte δ_F wohl kleiner als die Werte δ_M , weil sich ja die ersteren aus dem Einfluß der Normalkräfte in den Füllungsstäben des Fachwerks zusammensetzen. Die relativen Verhältnisse aller Beiträge sind von der Laststellung abhängig.

Kommt man wiederum auf die Tabelle I zurück, so kann man leicht eine auffallende Übereinstimmung der Durchbiegungen des Rahmenträgers mit den entsprechenden Durchbiegungen des Gelenksystems, welches durch Einführen von Gelenken in den Mittelpunkten der Stäbe entsteht, feststellen. Die etwaigen Abweichungen sind nicht von Bedeutung. Es wird daher empfohlen, bei der Berechnung der Durchbiegungen den statisch unbestimmten Rahmenträger durch sein statisch bestimmtes Grundsystem zu ersetzen. Einen ähnlichen Ansatz hat Mohr für das Fachwerk schon gemacht. Dementsprechend können auf Grund der Durchbiegungen des Gelenksystems die Stabendmomente des Rahmenträgers mit Hilfe der Knotenpunktdrehungen berechnet werden.

Wenn die Momentennullpunkte nicht immer mit den Mittelpunkten der Stäbe zusammenfallen, so sind die Abweichungen für die Pfosten mindestens verschwindend klein. Ebenfalls sind die Abweichungen für diejenigen Gurtstäbe, die weiter weg von dem belasteten Knotenpunkt liegen, sehr klein. Für die anderen Gurtstäbe haben sie auch nicht immer denselben Sinn. Folglich werden sich etwaige Unterschiede in den Beiträgen von δ_M und δ_N der einzelnen Felder in den Gesamtsummen über die Spannweite mehr oder weniger ausgleichen. Es ist somit gerechtfertigt, die Durchbiegungen des statisch unbestimmten Rahmenträgers durch diejenigen des statisch bestimmten Gelenksystems zu ersetzen.

III. Die Biegelinie des Rahmenträgers

Wird einmal der Einfluß der Querkräfte vernachlässigt, so werden die Durchbiegungen des Rahmenträgers $\delta \cong \delta_N + \delta_M$. Man kann sich nun die Biegelinie des Rahmenträgers aus zwei Teilen zusammengesetzt denken, welche den Einfluß der Normalkräfte bzw. den Einfluß der Biegemomente darstellen. Ferner darf man ohne weiteres die Durchbiegungen durch Einführen von Gelenken in den Stabmittelpunkten bestimmen.

a) Die δ_N -Biegelinie

Die Werte δ_N der Durchbiegungen sind durch die Beziehung:

$$\delta_N = \sum \frac{N_1 N_0 s}{A_g E} + \sum \frac{N_1 N_0 s}{A_p E}$$

für Gurtstäbe bzw. Pfosten gegeben. Da aber für jeden Belastungsfall $P = 1 \text{ t}$ jeweils nur drei Pfosten Normalkräfte erhalten, so werden die Beiträge der Pfosten verhältnismäßig gering. Für den Rahmenträger 1b, z. B., beträgt der Anteil der Pfosten mit 0,37 für $P_m = 1 \text{ t}$ und 0,10 für $P_n = 1 \text{ t}$ nur 1,6% bzw. 0,6% von δ_N . Somit dürfen die Beiträge der Pfosten in der Berechnung der δ_N -Werte ohne weiteres vernachlässigt werden. Folglich wird

$$\delta_N \cong \sum \frac{N_1 N_0 s}{A_g E} \cong \sum \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_0 s}{h^2 A_g E},$$

wobei \bar{M}_1 und \bar{M}_0 die Biegemomente im einfachen Balken sind. Man kann somit die Anteile δ_N des Rahmenträgers genügend genau als Durchbiegungen δ_M eines Ersatzbalkens mit einem Trägheitsmoment $I_b = \frac{1}{2} A_g h^2$ bestimmen.

Ferner kann angenommen werden, daß sich die Biegelinie für jede Einzelast $P = 1 \text{ t}$ aus zwei Sinuskurven zusammensetzt, welche je auf einer Seite der jeweiligen Maximalordinate gezeichnet sind. Die Tabelle III (S. 58) gibt für die Last $P_n = 1 \text{ t}$ die prozentualen Fehler der nach dieser Annahme berechneten Durchbiegungen eines einfachen Balkens an. Die e_m -Werte sind in bezug auf die Maximalordinate der Biegelinie ermittelt worden. Die zugehörige Abweichung in der Fläche der Sinuskurven beträgt nur $-0,24\%$ derjenigen der wirklichen Biegelinie. Somit ist der Ansatz der Sinuskurven gerechtfertigt.

b) Die δ_M -Biegelinie

Die Anteile δ_M der Durchbiegungen sind durch die Beziehung:

$$\delta_M = \int \frac{M_1 M_0 ds}{E I_g} + \int \frac{M_1 M_0 ds}{E I_p}$$

für Gurtstäbe bzw. Pfosten gegeben. Sie lassen sich für das statisch bestimmte Gelenksystem leicht berechnen. Die in dieser einfachen Weise erhaltenen δ_M -Werte sind mit guter Annäherung für den statisch unbestimmten Rahmenträger ebenfalls gültig.

Danach werden für den virtuellen Belastungsfall $P = 1 \text{ t}$, Fig. 3, die Endmomente aller Gurtstäbe links von der Laststelle gleich $\frac{1}{4} Q_L \lambda$ und die Endmomente aller Gurtstäbe rechts von der Laststelle gleich $\frac{1}{4} Q_R \lambda$ sein. Wird nun die Momentenfläche in jedem geschlossenen Feld aus der Überlagerung der Momentenflüsse in diesem Feld und in den zwei benachbarten Feldern zusammengesetzt, so wird:

$$\begin{aligned}\delta_M = & \frac{Q_L Q_{0,a} \lambda}{24 E I_{g,a}} \left\{ \lambda^2 + \lambda h \left(\frac{r}{2} + s \right) \right\} + \frac{Q_L Q_{0,r} \lambda}{24 E I_{g,r}} \left\{ \lambda^2 + \lambda h \left(r + \frac{\beta}{2} s \right) \right\} \\ & + \frac{Q_R Q_{0,r+1} \lambda}{24 E I_{g,r+1}} \left\{ \lambda^2 + \lambda h \left(\frac{\alpha}{2} r + s \right) \right\} + \frac{Q_R Q_{0,b} \lambda}{24 E I_{g,b}} \left\{ \lambda^2 + \lambda h \left(r + \frac{s}{2} \right) \right\} \\ & + \sum \frac{Q_1 Q_0 \lambda}{24 E I_g} \{ \lambda^2 + \lambda h (r + s) \} = \sum \frac{Q_1 Q_0 \lambda}{24 E I_g} K,\end{aligned}$$

wobei
$$r = \frac{I_g}{I_L}; \quad s = \frac{I_g}{I_R}; \quad \alpha = \frac{a-b}{a}, \quad \beta = \frac{b-a}{b}$$

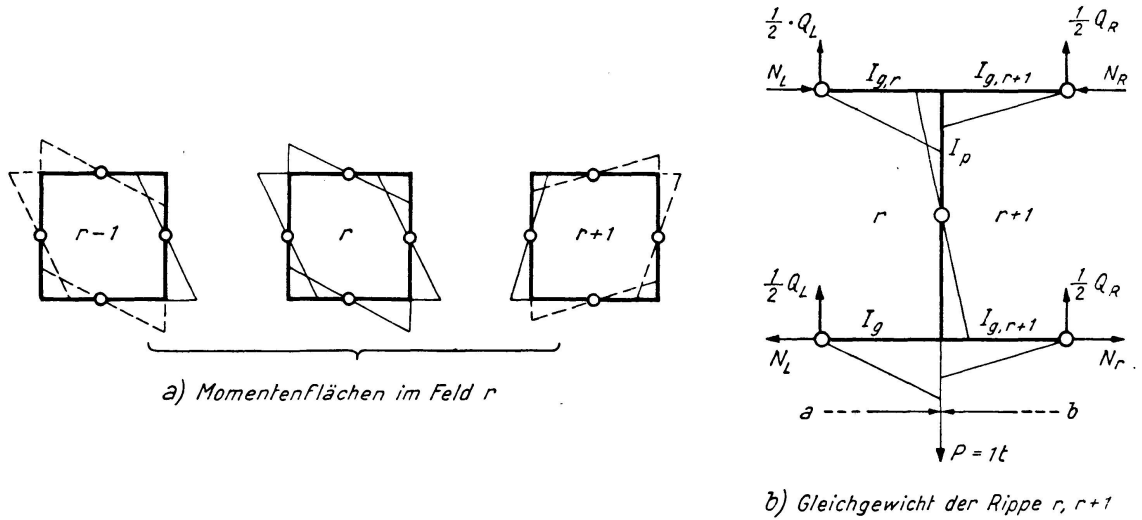


Fig. 3.

und $Q_{0,a}$, $Q_{0,r}$, $Q_{0,r+1}$ und $Q_{0,b}$, die in dem Deformationszustand P_0 in den vier unregelmäßigen Feldern a , r , $r+1$ und b erzeugten Querkräfte sind. Die Beiwerte k sind wohl von der Belastung unabhängig. Sie sind jedoch von Feld zu Feld verschieden.

Somit kann man sich die Anteile δ_M des Rahmenträgers als Durchbiegungen δ_Q eines einfachen Balkens mit $GA = \frac{24 E I_g}{K}$ vorstellen. Da ferner der Einfluß der vier unregelmäßigen Felder mit zunehmender Felderzahl verhältnismäßig geringer wird, so kann $\delta_M \cong \sum \frac{Q_1 Q_0 \lambda^2}{24 E I_g} \{ \lambda + h (r + s) \}$ genügend genau eingesetzt werden. Bleibt nun der Wert von $(r + s)$ über die ganze Spannweite konstant, so wird die Biegelinie des Rahmenträgers infolge δ_M der Momentenfläche eines einfachen Balkens ähnlich sein. Für den virtuellen Belastungszustand $P = 1t$ ist somit die δ_M -Linie beinahe dreieckförmig.

Als praktisches Beispiel ist in der Fig. 4 die Biegelinie des Rahmenträgers 1b unter der Einzellast $P_m = 1t$ wiedergegeben. Die Anteile δ_N und δ_M der Durchbiegungen sind getrennt aufgezeichnet. Die Beiträge der Biegemomente sind hier wohl größer als diejenigen der Normalkräfte. Jedoch dürfen die letzteren nicht vernachlässigt werden. Wie bereits erwähnt, können diese

beiden Werte ohne weiteres dem statisch bestimmten Gelenksystem entnommen werden.

Aus der Fig. 4 geht noch deutlich hervor, daß die δ_N -Linie des Rahmenträgers der δ_M -Linie eines einfachen Balkens entspricht. Sie kann durch eine Sinuskurve genügend genau ersetzt werden. Andererseits entspricht die δ_M -Linie des Rahmenträgers der δ_Q -Linie eines einfachen Balkens. Für die Einzelast $P_m = 1 \text{ t}$ ist sie angenähert dreieckförmig. Die resultierende Biegelinie des Rahmenträgers, welche sich aus den beiden Teillinien zusammensetzt, ist weder eine Sinuskurve noch ein Dreieck. Je größer die δ_N -Werte desto mehr weicht die resultierende Biegelinie vom Dreieck ab.

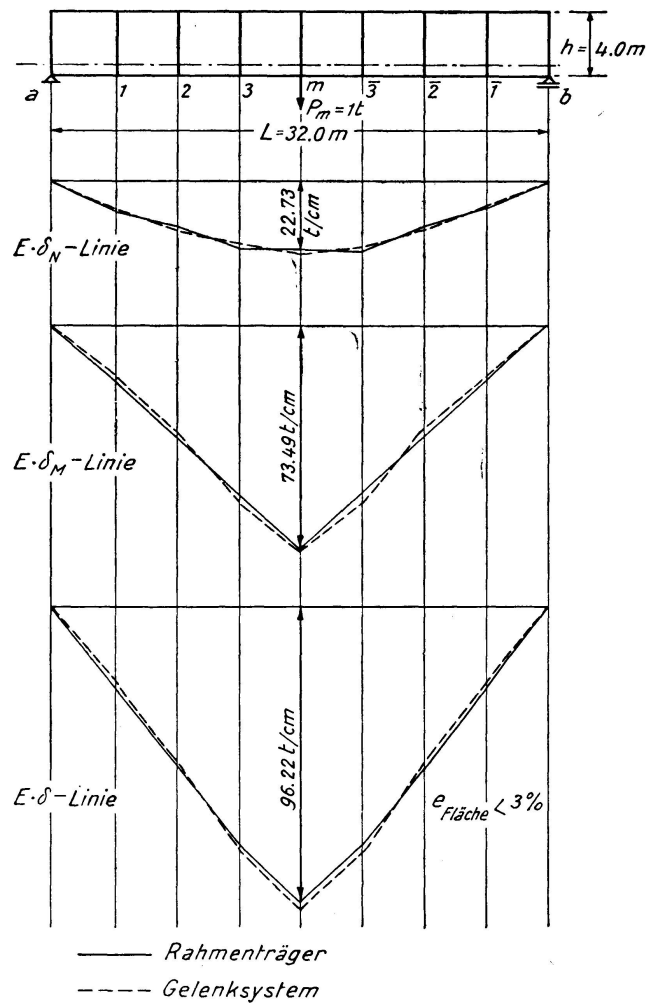


Fig. 4.

IV. Die Auflagerkräfte des durchlaufenden Rahmenträgers

Da der durchlaufende Rahmenträger sowohl äußerlich wie innerlich statisch unbestimmt ist, liegt es doch nahe, die überzähligen Größen in zwei Gruppen aufzuteilen und den einfachen Rahmenträger als statisch unbestimm-

tes Grundsystem zu wählen. Somit werden die Auflagerkräfte des durchlaufenden Rahmenträgers von den Durchbiegungen des einfachen Grundsystems abhängig sein.

Wie aber bereits erwähnt, rühren die Durchbiegungen des Rahmenträgers in der Hauptsache von den Momenten und den Normalkräften her. Die entsprechenden Anteile sind von derselben Größenordnung und deshalb darf keiner von den beiden vernachlässigt werden. Daher lassen sich angenähert die Biegelinien durch die Überlagerung von Dreiecken und Sinuskurven, die den Einfluß der Biegemomente bzw. der Normalkräfte darstellen, angenähert zusammensetzen.

Es ist daher grundsätzlich falsch, für den durchlaufenden Rahmenträger die Auflagerkräfte eines kontinuierlichen Balkens zu verwenden. Ein solches Vorgehen entspricht der Vernachlässigung der sonst wichtigeren Anteile der Biegemomente. Danach wird die Einflußlinie der Auflagerkraft der mittleren Stütze eines auf drei Stützen durchlaufenden Rahmenträgers ungefähr eine Sinuskurve.

Andererseits ist es auch nicht zulässig, den Einfluß der Normalkräfte zu vernachlässigen und die Auflagerkräfte des durchlaufenden Rahmenträgers von den durch die Biegemomente allein erzeugten Durchbiegungen zu bestimmen. Die Durchbiegungen einer lediglich von den Momentenflächen belasteten Gurtung des Rahmenträgers³⁾, geschweige des Gelenksystems, weichen von den wirklichen Werten stark ab. Die in dieser Weise ermittelte Einflußlinie der mittleren Auflagerkraft eines auf drei Stützen durchlaufenden Rahmenträgers ist ungefähr ein Dreieck.

Es wird hier jedoch empfohlen, die Durchbiegungen des einfachen Rahmenträgers und daraus die überzähligen Auflagerkräfte des durchlaufenden Rahmenträgers durch Einführen von Gelenken in den Mittelpunkten der Stäbe zu bestimmen. Diese erhebliche Vereinfachung liefert zuverlässige Werte der überzähligen Auflagerkräfte, die sich von den wirklichen kaum unterscheiden. Die zugehörigen Einflußlinien stimmen mit den richtigen sehr gut überein. Ferner kann man für eine überschlägige Berechnung den Rahmenträger jeweils durch einen Ersatzbalken einmal für die δ_M -Werte und das andere Mal für die δ_N -Werte ersetzen.

Es ist jedenfalls zu bemerken, daß der durchlaufende Rahmenträger, der ja verhältnismäßig weicher als der vollwandige Balken oder das Fachwerk ist, eine kleinere Auflagerkraft an der mittleren Stütze als diese beiden Bauarten aufweist. Eine solche Verminderung der Auflagerkraft ist aber einer Setzung der betreffenden Stütze gleichzustellen. Daher ist auch der durchlaufende Rahmenträger von der Kontinuität weniger als der vollwandige Balken oder das Fachwerk begünstigt.

³⁾ E. LIGHTFOOT: A Method of Analysis of the continuous Vierendeel Girder, The Structural Engineer, Vol. XXIX, 1951.

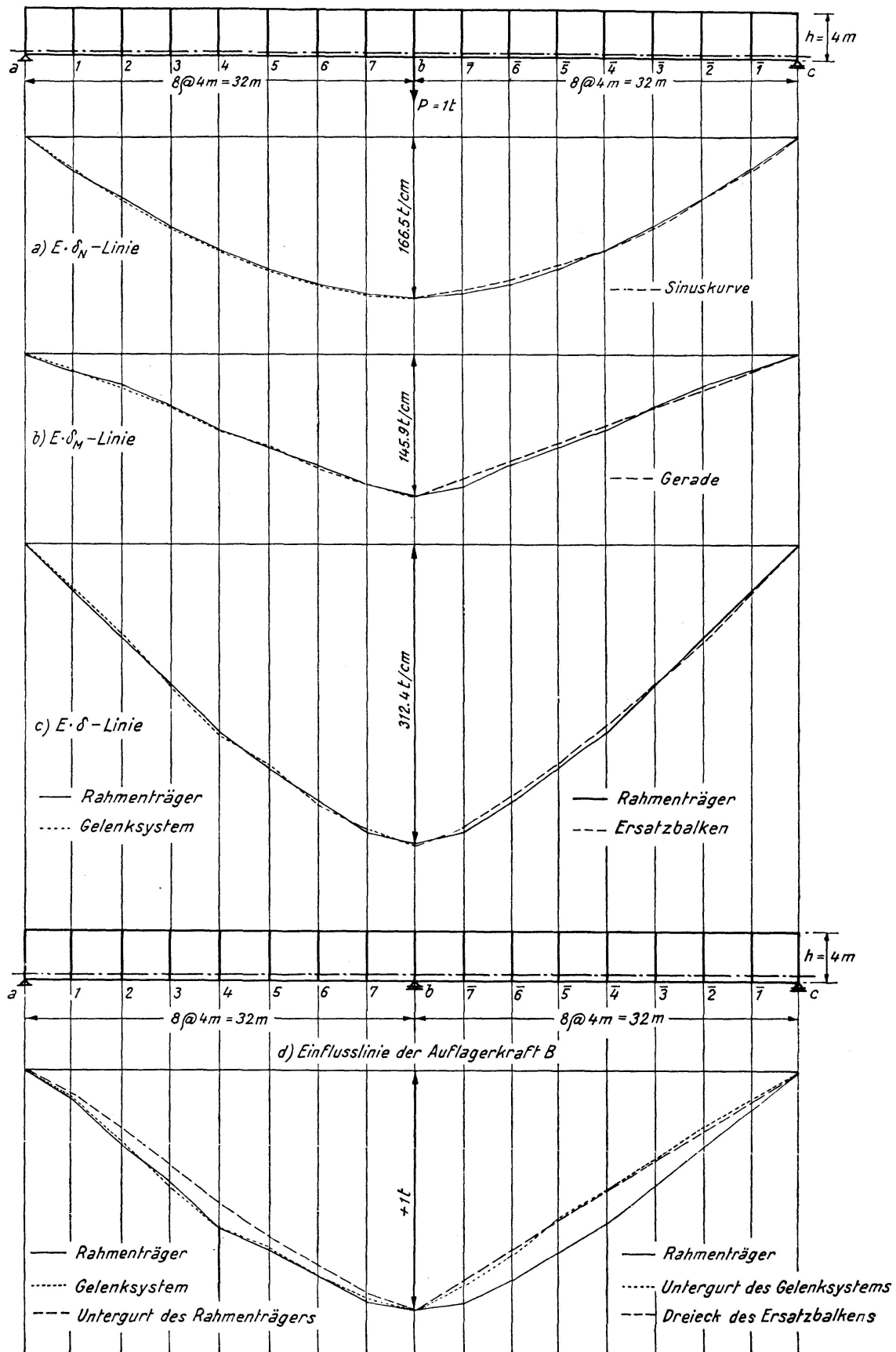


Fig. 5.

Tabelle III

| $x: L$ | $1/16$ | $2/16$ | $3/16$ | $4/16$ | $5/16$ | $6/16$ | $7/16$ | $8/16$ | $9/16$ | $10/16$ | $11/16$ | $12/16$ | $13/16$ | $14/16$ | $15/16$ |
|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| e % | -10,4 | -5,17 | -4,65 | -3,54 | -2,38 | -0,43 | 0 | +0,22 | +0,37 | +1,56 | +2,46 | +3,36 | +4,14 | +4,33 | +4,30 |
| e_m % | -2,57 | -2,35 | -3,02 | -2,86 | -2,18 | -0,42 | 0 | +0,22 | +0,34 | +1,34 | +1,84 | +2,10 | +2,02 | +1,76 | +0,72 |

Tabelle IV

| Knotenpunkt | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | b | $e_{Fläche}$ % |
|------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------------|
| Rahmenträger | 0,156 | 0,313 | 0,468 | 0,630 | 0,750 | 0,868 | 0,965 | 1,000 | — |
| Gelenksystem | 0,155 | 0,310 | 0,470 | 0,630 | 0,745 | 0,868 | 0,960 | 1,000 | - 0,26 |
| Ersatzbalken | 0,162 | 0,321 | 0,478 | 0,612 | 0,735 | 0,840 | 0,938 | 1,000 | - 1,38 |
| Gurt des Rahmenträgers | 0,114 | 0,246 | 0,394 | 0,555 | 0,698 | 0,820 | 0,929 | 1,000 | - 8,53 |
| Gurt des Gelenksystems | 0,118 | 0,232 | 0,370 | 0,500 | 0,620 | 0,765 | 0,890 | 1,000 | -14,35 |
| Dreieck | 0,125 | 0,250 | 0,375 | 0,500 | 0,625 | 0,750 | 0,875 | 1,000 | -13,98 |

Tabelle V

| Knotenpunkt | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | B | $\bar{7}$ | $\bar{6}$ | $\bar{5}$ | $\bar{4}$ | $\bar{3}$ | $\bar{2}$ | $\bar{1}$ |
|---------------------|--------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|-----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| M_{4-5} in t/m | 0,1277 | 0,2566 | 0,3992 | 0,6589 | -0,1923 | -0,2656 | -0,0947 | 0 | 0,0385 | 0,0486 | 0,0637 | 0,0584 | 0,0410 | 0,0251 | 0,0137 |
| Gelenksystem | 0,1273 | 0,2558 | 0,3998 | 0,6584 | -0,1943 | -0,2656 | -0,0967 | 0 | 0,0375 | 0,0486 | 0,0627 | 0,0579 | 0,0416 | 0,0247 | 0,0129 |
| N_{4-5} in t | 0,374 | 0,743 | 1,115 | 1,470 | 1,335 | 0,790 | 0,495 | 0 | -0,218 | -0,350 | -0,281 | -0,295 | -0,243 | -0,140 | -0,069 |
| Gelenksystem | 0,376 | 0,747 | 1,110 | 1,475 | 1,345 | 0,790 | 0,510 | 0 | -0,208 | -0,350 | -0,278 | -0,290 | -0,248 | -0,136 | -0,067 |

In der Fig. 5 sind für die virtuelle Belastung $P_b = 1\text{ t}$ die Biegelinien des Grundsystems eines über drei Stützen durchlaufenden Rahmenträgers aufgezeichnet. Die Einflüsse von δ_N und δ_M sind getrennt angegeben. Die punktierte Linie entspricht den Durchbiegungen des Gelenksystems, während die gestrichelten Linien der Sinuskurve bzw. der Geraden der Ersatzbalken jeweils entsprechen. Wie aus den Zeichnungen hervorgeht, sind die relativen Fehler beider Annahmen sehr klein.

Ferner ist in der Fig. 5 die Einflußlinie der Auflagerkraft B der mittleren Stütze aufgezeichnet. Durch punktierte und gestrichelte Linien sind die Werte der verschiedenen Ansätze angegeben. Die entsprechenden Ordinaten sind in der Tabelle IV (S. 58) eingetragen. Ein Vergleich der Resultate rechtfertigt ohne weiteres die Annahme des Gelenksystems. Hingegen sind die andern Ansätze verwerflich.

Es muß ferner erwähnt werden, daß die Annahme des Gelenksystems bei einem durchlaufenden Rahmenträger auf mehreren Stützen noch vorteilhafter

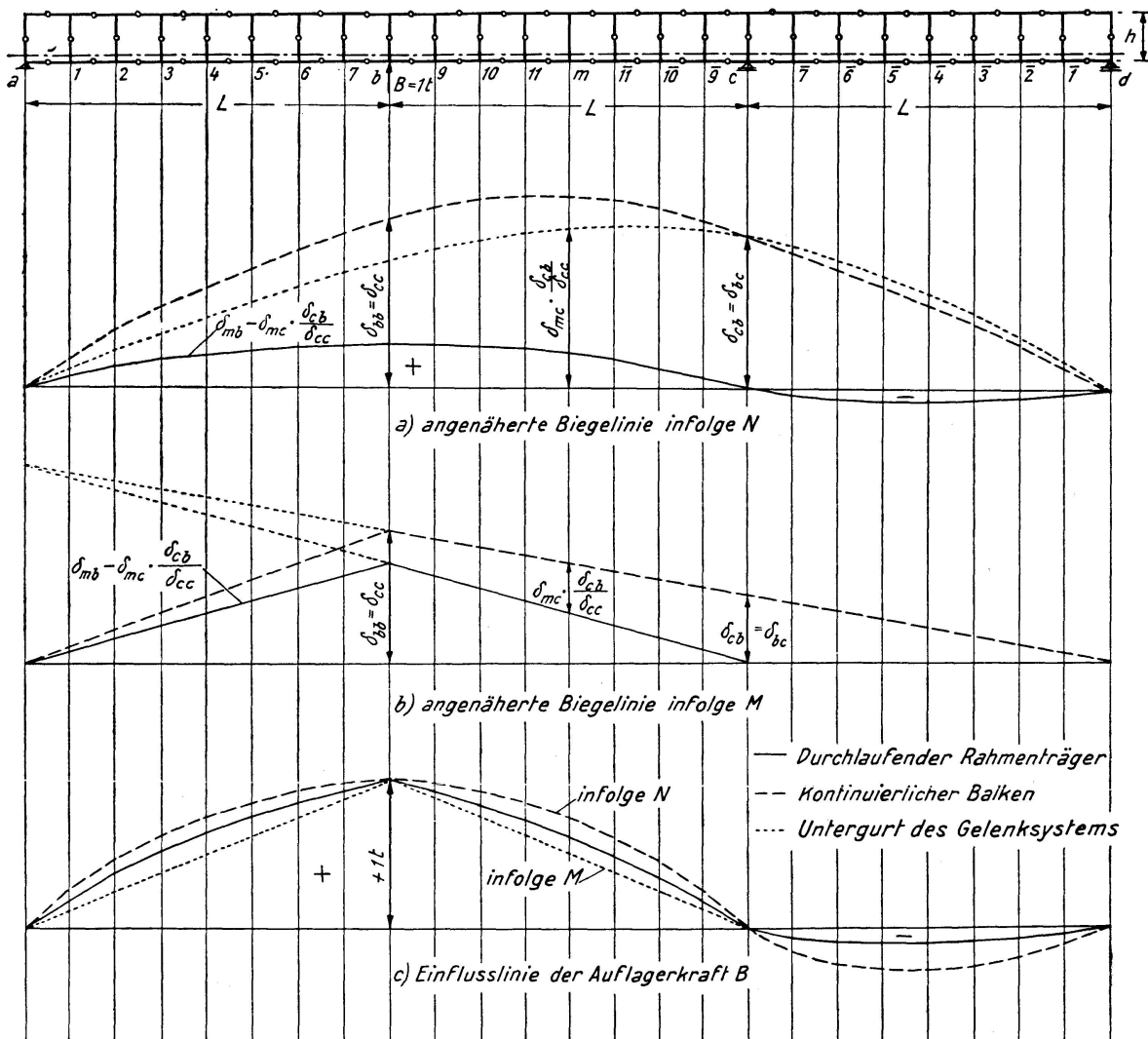


Fig. 6.

ist. Je größer die Anzahl der überzähligen Auflagerkräfte, desto mehr gewinnt diese Annahme an Bedeutung. Ferner, weil sie ja die beiden Einflüsse der Normalkräfte und Momente gleichzeitig berücksichtigt, ist sie den andern Ansätzen überlegen.

In der Fig. 6 ist die Einflußlinie der Auflagerkraft B eines auf vier Stützen durchlaufenden Rahmenträgers aufgezeichnet. Der Einfachheit halber ist von vornherein der Rahmenträger durch Einführen von Gelenken in den Mittelpunkten der Stäbe zu einem innerlich statisch bestimmten System verwandelt worden. Die beiden Biegelinien, die jeweils nur den Einfluß der Normalkräfte bzw. Momente berücksichtigen, sind getrennt angegeben. Sie entsprechen den elastischen Linien des kontinuierlichen Balkens infolge der Momente bzw. Querkkräfte. Darum ist die letzte beinahe dreieckförmig und erstreckt sich nicht auf das dritte Feld.

Aus den zugehörigen Einflußlinien ist leicht einzusehen wie weit die Annahme des durchlaufenden Balkens und die des durch die Momentenflächen allein belasteten Gurtes von der Wirklichkeit abweichen. Ferner zeigen die verhältnismäßig kleineren Einflußlinienordinaten im dritten Feld, warum der durchlaufende Rahmenträger von der Kontinuität weniger als der kontinuierliche Balken begünstigt ist.

V. Die Berechnung der Bieugungsmomente und Normalkräfte

Sind die überzähligen Auflagerkräfte des durchlaufenden Rahmenträgers durch die Einführung von Gelenken in den Mittelpunkten der Stäbe genügend genau ermittelt, so können mit Hilfe der elastischen Kräftepaare oder bei der Feldmethode die Bieugungsmomente berechnet werden. Die geringen Abweichungen der für das Gelenksystem ermittelten Auflagerkräfte von den genaueren Werten des durchlaufenden Rahmenträgers sind für die Berechnung der Bieugungsmomente nicht von Bedeutung.

Die Tabelle V (S. 58) gibt die Bieugungsmomente M_{4-5} des auf drei Stützen durchlaufenden Rahmenträgers der Fig. 5 an. Sie sind jeweils auf Grund der genaueren Auflagerkräfte des innerlich statisch unbestimmten Grundsystems bzw. der angenäherten Auflagerkräfte des statisch bestimmten Gelenksystems nach der Feldmethode bestimmt worden. Die geringen Unterschiede der entsprechenden Ordinaten rechtfertigen die Anwendung der vorgeschlagenen Vereinfachung. Die zugehörigen positiven und negativen Flächen der Einflußlinie sind um $-0,8\%$ bzw. $+1,3\%$ verschieden, was einen Fehler von nur $-1,7\%$ in der resultierenden Fläche ausmacht.

Die Einflußlinie des Momentes M_{4-5} ist in der Fig. 7 wiedergegeben. Sie ähnelt wohl der Einflußlinie der Querkraft in einem durchlaufenden Balken. Dennoch sind beide Linien voneinander recht verschieden. Um diesen Unterschied klar darzulegen, sind die jeweiligen Ordinaten $\frac{1}{4} \bar{Q}_0 \lambda$ durch eine gestrich-

chelte Linie angegeben, wobei \bar{Q}_0 die Querkraft im kontinuierlichen Balken am Mittelpunkt des Stabes 4—5 darstellt. Daraus geht ohne weiteres hervor, daß das für die Berechnung der Durchbiegungen gut geeignete Gelenksystem für die Berechnung der Biegemomente hingegen ungenügend genau ist.

Ferner ist in der Fig. 7 die Einflußlinie des Momentes $M_{4-4'}$ am Pfostenende aufgezeichnet. Im großen und ganzen sieht sie der Einflußlinie von M_{4-5} ähnlich aus. Da sich aber das Pfostenmoment $M_{4-4'}$ aus den zwei Gurtmomenten M_{4-3} und M_{4-5} ergibt, erstreckt sich der Übergang vom maximal negativen zum maximal positiven Wert auf zwei Felder.

Aus den Biegemomenten des durchlaufenden Rahmenträgers können die Momentennullpunkte der verschiedenen Gurtstäbe ermittelt werden. Um nun die Gurtkräfte zu erhalten, muß man die entsprechenden Momente M_0 der äußeren Belastungen und Auflagerkräfte an diesen Stellen durch die Höhe h dividieren. Es ist nämlich: $N_g = \pm M_0/h$.

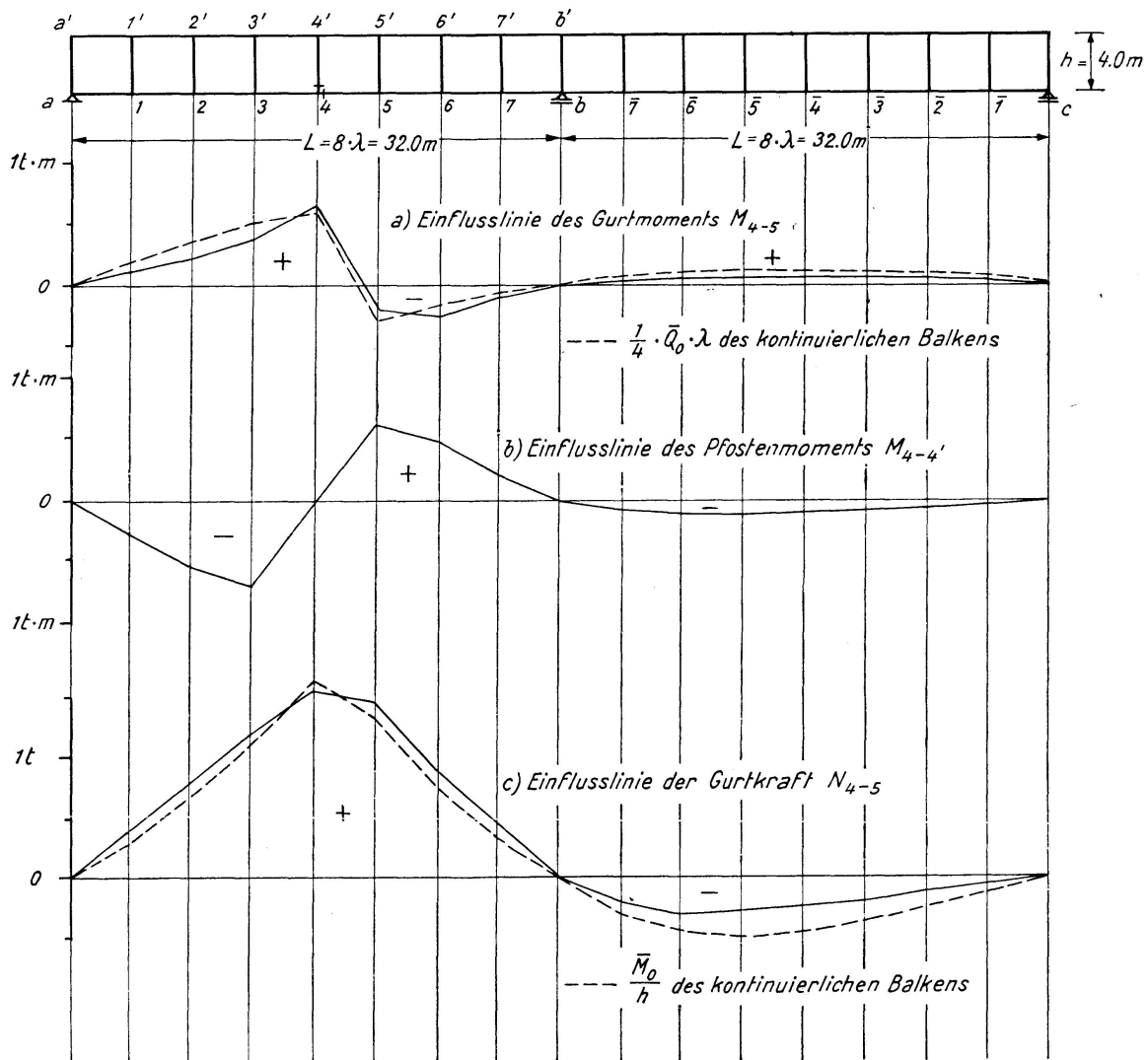


Fig. 7.

Die Einflußlinienordinaten der Gurtkraft N_{4-5} sind in der Tabelle V eingetragen. Alle Werte sind auf Grund der Auflagerkräfte des innerlich statisch unbestimmten Grundsystems bzw. derjenigen des statisch bestimmten Gelenksystems berechnet worden. Die entsprechenden Ordinaten sind voneinander kaum verschieden.

Die Einflußlinie der Gurtkraft N_{4-5} ist in der Fig. 7 ebenfalls aufgezeichnet. Sie sieht der Momenteneinflußlinie des kontinuierlichen Balkens etwas ähnlich. Jedoch sind mehr oder weniger große Unterschiede in den entsprechenden Ordinaten festzustellen. Zum Vergleich mit dem Gelenksystem sind die Momente \bar{M}_0 des kontinuierlichen Balkens am Mittelpunkt des Gurtstabs 4—5 durch die Höhe h dividiert und mit einer gestrichelten Linie miteinander verbunden. Es ist somit klar, daß die Gurtkräfte des durchlaufenden Rahmenträgers von den Momenten des kontinuierlichen Balkens nicht berechnet werden dürfen.

Zusammenfassung

Da die Momentennullpunkte des Rahmenträgers mit den Mittelpunkten der Stäbe nicht zusammenfallen, dürfen die innern Kräfte und Momente des Rahmenträgers durch Einführen von Gelenken in den Stabmitten nicht berechnet werden. Jedoch liefert das Gelenksystem beinahe dieselben Durchbiegungen wie der statisch unbestimmte Rahmenträger. Diese Durchbiegungen sind in der Hauptsache von den Momenten und Normalkräften abhängig. Die zugehörigen Beiträge δ_M und δ_N entsprechen ungefähr den Durchbiegungen eines einfachen Balkens infolge der Querkräfte bzw. der Biegemomente. Sie sind von derselben Größenordnung und müssen deshalb beide berücksichtigt werden.

Für die Berechnung der überzähligen Auflagerkräfte eines durchlaufenden Rahmenträgers mit gleichen Gurtsteifigkeiten darf das innerlich statisch unbestimmte System durch ein statisch bestimmtes Gelenksystem ohne weiteres ersetzt werden. Die auf diese Weise erhaltenen Auflagerkräfte stimmen gut mit den genaueren Werten überein und dürfen für die nachträgliche Berechnung der Momente und Normalkräfte des durchlaufenden Rahmenträgers mittels der elastischen Kräftepaare oder der Feldmethode benützt werden. Die Berechnung der Gurtkräfte und Stabendmomente des durchlaufenden Rahmenträgers aus den Momenten und Querkräften des kontinuierlichen Balkens ist unzuverlässig.

Summary

As the points of contraflexure of the Vierendeel girder do not coincide with the centres of the members, it is not permissible to calculate the internal forces and moments of the Vierendeel girder by introducing hinges at the

centres of the members. The hinged system does, however, give almost the same deflections as the statically indeterminate Vierendeel girder. These deflections are, in the main, dependent on the moments and direct forces. The deflection contributions δ_M and δ_N associated with them correspond approximately to the deflections of a simple beam due to shear forces or to bending moments. They are of the same order of magnitude and must therefore both be taken into account.

For the calculation of the redundant reactions at the supports of a continuous Vierendeel girder with chords of equal stiffness the internally statically indeterminate system can be directly replaced by a statically determinate hinged system. The support reactions obtained in this way are in good agreement with the more accurate values and may be used for the subsequent calculation of the moments and direct forces for the continuous Vierendeel girder by means of the pairs of elastic forces or by the panel method. The calculation of the forces in the chords and of the moments at the ends of the members of the continuous Vierendeel girder from the moments and shear forces of the continuous beam is unreliable.

Résumé

Comme les points à moment nul de la poutre *Vierendeel* ne coïncident pas avec les milieux des barres, il n'est pas indiqué de déterminer les efforts internes et les moments de cette poutre en introduisant des articulations au milieu de ces barres. Néanmoins, le système articulé présente approximativement les mêmes flèches que la poutre hyperstatique *Vierendeel*. Ces flèches dépendent essentiellement des moments et des efforts normaux. Les contributions corrélatives δ_M et δ_N correspondent sensiblement aux flèches d'une poutre simple sous l'influence des efforts tranchants d'une part et des moments fléchissants d'autre part. Elles sont du même ordre de grandeur et il faut donc les prendre en considération toutes les deux.

Lorsque l'on veut déterminer les réactions d'appui surabondantes d'une poutre continue *Vierendeel* avec des membrures de rigidité égale, on peut remplacer le système intérieurement hyperstatique sans grande erreur par un système articulé isostatique. Les réactions d'appui ainsi obtenues sont en bonne concordance avec les valeurs déterminées d'une manière plus précise et peuvent être employées pour le calcul ultérieur des moments et des efforts normaux dans la poutre continue *Vierendeel*, à l'aide des « couples élastiques » ou de la « méthode des panneaux ». Le calcul des efforts des membrures et des moments de flexions des barres de la poutre continue *Vierendeel* à partir des moments et des efforts tranchants de la poutre continue ordinaire n'est pas sûr.

Leere Seite
Blank page
Page vide