Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

Band: 18 (1958)

Artikel: Le voilement de l'âme des poutres fléchies, avec raidisseur au cinqième

supérieur: étude complémentaire

Autor: Stüssi, F. / Dubas, Charles / Dubas, Pierre

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16514

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 29.10.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Le voilement de l'âme des poutres fléchies, avec raidisseur au cinquième supérieur. Etude complémentaire

Biegungsbeulung der im oberen Fünftel versteiften Stegbleche Weitere Untersuchung

The Buckling of the Webs of Sagging Beams Having Stiffeners in the Top Fifth of the Web. Further Study

F. Stüssi, Ing. Dr sc. techn., Prof. à l'E.P.F., Zurich, Président de l'AIPC, et Charles et Pierre Dubas, Ings Drs sc. techn., Ateliers de Constructions Mécaniques de Vevey, Bulle et Vevey

Etat du problème, déjà traité en 1957, et but de la nouvelle étude

L'an passé, dans le dix-septième volume des «Mémoires», nous avions repris le problème du voilement de l'âme des poutres fléchies, avec raidisseur au cinquième supérieur. Tout en continuant d'utiliser les méthodes de la statique appliquée, nous avions tenu compte d'une manière plus exacte de l'effort concentré du raidisseur et montré que la précision obtenue était excellente. Nous avions donné en outre une série de résultats.

Nous allons maintenant traiter un exemple numérique complet (fig. 1), en utilisant le procédé qui s'est avéré le plus avantageux et le plus rapide. Nous donnerons ensuite, sous forme de tableaux et de graphiques, tous les résultats obtenus.

Rappelons tout d'abord, pour la commodité du lecteur, l'équation différentielle du voilement en pleine tôle, qui s'écrit:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\omega k \frac{\pi^2}{b^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$
 (1)

Au droit du raidisseur, cette équation est à compléter. Elle devient:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\omega_r k \frac{\pi^2}{b^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \gamma \frac{b}{c} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \omega_r k \delta \frac{\pi^2}{b c} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \tag{2}$$

Rappelons la signification des diverses lettres utilisées dans ces deux équations différentielles (1) et (2). La lettre w désigne la déviation latérale de la tôle lors

du voilement, en un point quelconque d'abscisse x et d'ordonnée y (fig. 1). La lettre ω exprime la variation des contraintes $\sigma_x = \omega \, \sigma_{x \, max}$ sur la hauteur b de l'âme (fig. 1), l'indice r du ω_r de (2) se rapportant à la contrainte longitudinale du raidisseur. A partir de la hauteur b de l'âme (fig. 1) et de son épaisseur h, les abréviations k, γ et δ sont définies comme suit 1):

où $D = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)}$, J_r et F_r désignant respectivement le moment d'inertie et la section du raidisseur. Comme d'habitude E est le module d'élasticité du matériau et ν , sa contraction latérale.

Si les efforts de bout sont répartis linéairement (fig. 1), la déformation, parallèlement à l'axe des x, est une sinusoïde; dès lors il suffit de considérer les w sur la verticale passant par le milieu de l'âme. En désignant ces w par η , l'équation différentielle du voilement en pleine tôle (1) devient:

$$\boxed{ \eta'''' - \frac{2\pi^2}{a^2} \eta'' + \frac{\pi^4}{a^4} \eta = \omega k \frac{\pi^4}{a^2 b^2} \eta}$$
(6)

Au droit du raidisseur, il vient, pour une largeur d'appui c du raidisseur (fig. 1):

$$\left[\eta'''' - \frac{2\pi^2}{a^2} \eta'' + \frac{\pi^4}{a^4} \eta = \omega_r k \frac{\pi^4}{a^2 b^2} \eta - \frac{1}{c} \left(\gamma b \frac{\pi^4}{a^4} - \omega_r k \delta \frac{\pi^4}{a^2 b} \right) \eta \right]$$
(7)

Grâce aux méthodes de statique appliquée, l'équation différentielle du voilement en pleine tôle (6) se transforme en une série de relations numériques que l'on écrira aux différents points considérés sur la verticale par le milieu de l'âme (fig. 1). Après avoir introduit les trois simplifications d'écriture suivantes:

$$A = \frac{\pi^2}{a^2} \frac{\Delta y^2}{6}$$
 (8)
$$B = \left(\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{\pi^4}{a^4} \frac{\Delta y^4}{144}$$
 (9)

$$C = B \frac{a^2}{b^2} = \frac{\pi^4}{a^2 b^2} \frac{\Delta y^4}{144}$$
 (10)

¹) En réalité on ne définit pas k selon (3), mais on écrit que $\sigma_{x_{max}} = k \sigma_e$, où σ_e est une contrainte fictive, dite «eulérienne», qui vaut $\frac{\pi^2 D}{h b^2}$.

on aboutit finalement, après divers calculs et considérations, à la relation:

$$(1 - A + B) \eta_{m-2} - (4 + 8A - 20B) \eta_{m-1} + (6 + 18A + 102B) \eta_{m} - (4 + 8A - 20B) \eta_{m+1} + (1 - A + B) \eta_{m+2} = k C (\omega_{m-2} \eta_{m-2} + 20 \omega_{m-1} \eta_{m-1} + 102 \omega_{m} \eta_{m} + 20 \omega_{m+1} \eta_{m+1} + \omega_{m+2} \eta_{m+2})$$

$$(11)$$

Cette relation numérique se transforme sur le bord, où $\eta_{bord} = 0$ et où $\eta_{-1} = -\eta_1$, pour devenir:

$$(5+19 A + 101 B) \eta_{1} - (4+8 A - 20 B) \eta_{2} + (1-A+B) \eta_{3} = k C (101 \omega_{1} \eta_{1} + 20 \omega_{2} \eta_{2} + \omega_{3} \eta_{3})$$

$$= k C (101 \omega_{1} \eta_{1} + 20 \omega_{2} \eta_{2} + \omega_{3} \eta_{3})$$

Compte tenu de l'abréviation:

$$R = \frac{\Delta y^3}{6} \left(\gamma b \frac{\pi^4}{a^4} - \omega_r k \delta \frac{\pi^4}{a^2 b} \right)$$
 (13)

l'équation différentielle (7) est à son tour remplacée par la relation numérique suivante au point r-1 précédant le raidisseur:

$$(1 - A + B) \eta_{r-3} - (4 + 8 A - 20 B) \eta_{r-2} + (6 + 18 A + 102 B) \eta_{r-1} - (4 + 8 A - 20 B) \eta_r + (1 - A + B) \eta_{r+1} = k C (\omega_{r-3} \eta_{r-3} + 20 \omega_{r-2} \eta_{r-2} + 102 \omega_{r-1} \eta_{r-1} + 20 \omega_r \eta_r + \omega_{r+1} \eta_{r+1}) - R \eta_r$$
(14)

Au point roù se trouve le raidisseur, on trouve également:

$$(1 - A + B) \eta_{r-2} - (4 + 8 A - 20 B) \eta_{r-1} + (6 + 18 A + 102 B) \eta_{r} - (4 + 8 A - 20 B) \eta_{r+1} + (1 - A + B) \eta_{r+2} = k C (\omega_{r-2} \eta_{r-2} + 20 \omega_{r-1} \eta_{r-1} + 102 \omega_{r} \eta_{r} + 20 \omega_{r+1} \eta_{r+1} + \omega_{r+2} \eta_{r+2}) - 4 R \eta_{r}$$

$$(15)$$

Au point r+1 suivant le raidisseur, on obtient enfin:

$$(1 - A + B) \eta_{r-1} - (4 + 8 A - 20 B) \eta_r + (6 + 18 A + 102 B) \eta_{r+1} - (4 + 8 A - 20 B) \eta_{r+2} + (1 - A + B) \eta_{r+3} = k C (\omega_{r-1} \eta_{r-1} + 20 \omega_r \eta_r + 102 \omega_{r+1} \eta_{r+1} + 20 \omega_{r+2} \eta_{r+2} + \omega_{r+3} \eta_{r+3}) - R \eta_r$$

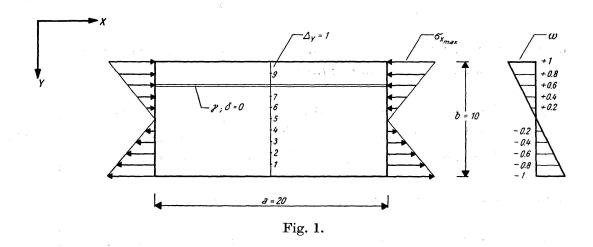
$$(16)$$

Les relations numériques précédentes (11), (12), (14), (15) et (16) sont précisément celles qui vont nous permettre de traiter tout à l'heure un exemple de calcul complet d'une âme de poutre fléchie, avec raidisseur au cinquième supérieur. Nous devrons auparavant déterminer les valeurs auxiliaires de (8), (9), (10) et (13). Le lecteur comprendra de la sorte comment les résultats donnés à la fin de la présente étude ont été obtenus.

Exemple numérique complet

Nous allons maintenant traiter de manière complète un exemple numérique de panneau d'une poutre à âme pleine avec raidisseur horizontal au cinquième supérieur. Nous ne considérons que le cas de la flexion pure et choisissons un panneau dont la longueur est le double de la hauteur (fig. 1). Nous négligeons l'effet d'encastrement de l'âme dans les semelles, les montants verticaux et le raidisseur horizontal²).

Quant au raidisseur, nous admettons tout d'abord qu'il n'est pas soumis à un effort normal, comme s'il était fixé sur la tôle par des boulons avec trous ovalisés dans le sens longitudinal. La section soumise à l'effort normal est donc nulle et δ , défini par (5), vaut zéro. Nous avons déjà montré l'an dernier et montrerons de nouveau tout à l'heure comment on passe très aisément du cas d'un raidisseur sans effort normal au cas d'un raidisseur avec effort normal.



Nous voulons utiliser la méthode de calcul la plus avantageuse et la plus rapide. Pour cela, nous choisirons le coefficient de voilement k défini par la relation (3) et nous chercherons la valeur correspondante de la rigidité relative γ du raidisseur, définie par la relation (4). Nous allons traiter le cas où ce coefficient de voilement est égal à 120 (k=120), c'est-à-dire une valeur très proche de son maximum 129,4, déterminé en 1948 déjà et calculé à nouveau l'an dernier de manière plus complète et plus précise.

²) Cet encastrement, qui dépend de la résistance à la torsion des semelles, montants verticaux et raidisseur horizontal, peut être pris en compte dans le calcul. On le considère d'habitude comme une marge de sécurité supplémentaire.

On se reportera pour plus de détails aux publications suivantes de F. W. Bornscheuer: «Beitrag zur Berechnung ebener, gleichmäßig gedrückter Rechteckplatten, versteift durch eine Längssteife», Dissertation, Darmstadt 1943/46, et «Mindeststeifigkeiten von Plattenaussteifungen bei berücksichtigter Verdrehsteifigkeit», Sonderdruck aus M.A.N.-Forschungsheft 1952, 1. Halbjahr.

Nous passons maintenant dans le premier membre le second membre 3) des relations numériques (11), (12), (14), (15) et (16). Nous pouvons alors écrire sans difficulté, aux différents points, l'une des relations numériques en question, suivant que le point considéré se trouve au bord, en pleine tôle, au droit du raidisseur, au point précédant ou suivant le raidisseur. Il n'y a pas d'équations sur les bords, puisque la déviation latérale, valant zéro, est connue.

Pour limiter l'ampleur du travail tout en conservant une précision suffisante, nous avons choisi dix intervalles seulement (fig. 1); l'effort concentré du raidisseur constituant dans le calcul un point singulier, se trouve dès lors juste à deux intervalles du bord supérieur de l'âme. Les neuf points intermédiaires (fig. 1) sont numérotés de manière que les relations numériques (14), (15) et (16) influencées par le raidisseur, c'est-à-dire celles qui contiennent le facteur R défini par (13), soient écrites en dernier lieu. La résolution du système d'équations est ainsi notablement plus simple, la valeur inconnue de γ contenue dans le facteur R n'intervenant qu'en fin du calcul. Nous l'avions d'ailleurs fait remarquer en 1957.

Nous allons maintenant mettre toutes les relations obtenues aux divers points 1 à 9 (fig. 1) sous forme de tableau. Cette manière de procéder est classique; elle simplifie le travail, évite bien des erreurs, facilite le contrôle et requiert beaucoup moins l'attention du calculateur. Nous donnons tout d'abord le tableau nº 1, dans lequel nous avons inscrit, sans leur attribuer de valeur numérique, les abréviations k, γ , A, B, C et R définies par (3), (4), (8), (9), (10), (13), ainsi que le coefficient de répartition ω représentant la variation de la contrainte $\sigma_x = \omega \, \sigma_{xmax}$, suivant la figure 1.

Puisque le second membre de (11), (12), (14), (15) et (16) a été passé dans le premier membre, le second membre de toutes les équations du tableau nº 1 est évidemment nul. En outre on remarquera que le tableau nº 1 contient neuf équations pour les huit déviations η inconnues et la rigidité relative γ du raidisseur, également inconnue. On se rappellera à ce sujet qu'une des déviations η doit être choisie, toute une série de déformations affines de la tôle étant théoriquement possibles au moment du voilement (phénomène d'instabilité).

Pour passer du tableau nº 1 au tableau nº 2, qui contiendra les valeurs numériques des coefficients des déviations inconnues η et de la rigidité relative γ du raidisseur, également inconnue, nous devons tout d'abord calculer les valeurs de k, γ , A, B, C et R définis par (3), (4), (8), (9), (10) et (13). Pour cela nous notons tout d'abord les valeurs de π , π^2 et π^4 , soit 3,141 592 653 pour π , 9,869 604 397 pour π^2 et 97,409 090 953 pour π^4 .

³) Jusqu'ici nous avons toujours écrit le premier membre des équations du voilement comme s'il s'agissait des équations de la plaque fléchie. Dans ce cas, le second membre représente véritablement une charge, due aux efforts élastiques de déviation au moment du cloquage. On sait par ailleurs que l'on peut admettre cette charge et la corriger par approximations successives (Méthode d'Engesser-Vianello).

Tableau nº 1. Equations nécessaires à la détermination de la valeur inconnue du coefficient de rigidité relative γ du raidisseur (et des déviations η de l'âme), pour les dix intervalles considérés

Pt.	$^{\iota t}$ $ imes$	$\overset{\eta_2}{\times}$	ε _τ ×	η4 ×	η, ×	8% ×	£×	% ×	&×
H	$5+19A+101B -101\omega kC$	$-(4+8A-20B) \ -20\omegakC$	$1-A+B$ $-\omega kC$						
67	$-(4+8A-20B) \\ -20\omegakC$	$ \begin{array}{c} -(4+8A-20B) \\ -20\omegakC \\ \end{array} \begin{array}{c} 6+18A+102B \\ -102\omegakC \\ \end{array}$	$-(4+8A-20B) \\ -20\omega kC$	$1-A+B$ $-\omega kC$					
က	$1-A+B$ $-\omega kC$	$-(4+8A-20B) \\ -20\omegakC$	$-(4+8A-20B)$ $6+18A+102B$ $-20\omega kC$ $-102\omega kC$	$-(4+8A-20B) \\ -20\omegakC$	$1-A+B$ $-\omega kC$,			
4		$1-A+B$ $-\omega kC$	$-(4+8A-20B) \\ -20\omegakC$	6+18A+102B $-102\omegakC$	$-(4+8A-20B) -20\omega kC$	$1-A+B$ $-\omega kC$			
ಹ			$1-A+B$ $-\omega kC$	$-(4+8A-20B) \\ -20\omegakC$	$_{-102\omegakC}^{6+18A+102B}$	-(4+8A-20B) $-20\omega kC$	1-A+B - wkC		
9				$1-A+B$ $-\omega kC$	$-(4+8A-20B) \ -20\omegakC$	$6+18A+102B -102\omega kC$	-(4+8A-20B) $-20\omega kC$	$1-A+B$ $-\omega kC$	
7	-				$1-A+B$ $-\omega kC$	$-(4+8A-20B) \ -20\omegakC$	$6+18A+102B -102\omega kC$	$-(4+8A-20B) \\ -20\omegakC-R$	$1-A+B$ $-\omega kC$
∞			·			$1-A+B$ $-\omega kC$	$ \begin{array}{c} -(4+8A-20B) \\ -20\omegakC \end{array} \begin{array}{c} 6+18A+102B \\ -102\omegakC-4R \end{array} $	6+18A+102B $-102\omega kC-4R$	$-(4+8A-20B) -20\omega kC$
6							$1-A+B$ $-\omega kC$	$-(4+8A-20B) \\ -20\omegakC-R$	5+19.A+101B $-101\omega kC$
ı	$\omega = -0.8$	$\omega = -0.6$	$\omega = -0.4$	$\omega = -0.2$	$\omega = 0$	$\omega = +0,2$	$\omega = +0,4$	$\omega = +0,6$	$\omega = +0,8$

Ensuite, on obtient d'après (8), avec $\Delta y = 1$ et a = 20 (fig. 1):

$$A = \frac{\pi^2}{a^2} \frac{\Delta y^2}{6} = \frac{3,141\,592\,653^2}{6 \times 20^2} = 0,004\,112\,335\,165.$$

De même, on obtient d'après (9):

$$B = \left(\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{\pi^4}{a^4} \frac{\Delta y^4}{144} = \frac{0,004112335165^2}{4} = \frac{97,409090953}{144 \times 20^4} = 0,000004227825.$$

Quant à C, il vient selon (10), avec b = 10 (fig. 1):

$$\begin{split} C &= B \frac{a^2}{b^2} = \frac{\pi^4}{a^2 b^2} \frac{\varDelta y^4}{144} = 0,000\,004\,227\,825 \times 4 = \\ &= \frac{97,409\,090\,953}{114 \times 10^2 \times 20^2} = 0,000\,016\,911\,301\,. \end{split}$$

Enfin, la relation (13) donne, pour $\delta = 0$ (pas d'effort normal dans le raidisseur):

$$R = \frac{\Delta y^3}{6} \gamma b \frac{\pi^4}{a^4} = \frac{10}{6} \frac{97,409090953}{20^4} \gamma = 0,001014678033 \gamma.$$

En observant le tableau nº 1, nous constatons que nous avons à déterminer les quatre coefficients suivants:

$$5 + 19 A + 101 B - 101 \omega k C$$
, $5 + 18 A + 102 B - 102 \omega k C$, $-(4 + 8 A - 20 B) - 20 \omega k C$, $1 - A + B - \omega k C$,

Nous obtenons alors, avec k=120 et les valeurs précédentes de A, B et C:

$$\begin{array}{c} 5+19\,A+101\,B-101\,\omega\,k\,C \,=\, 5+19\times0,004\,112\,335+101\times0,000\,004\,227\,8\,-\\ &101\times120\times0,000\,016\,911\,301\,\omega\\ \\ =\, 5,078\,561\,39-0,204\,964\,97\,\omega\,,\\ 6+18\,A+102\,B-102\,\omega\,k\,C \,=\, 6+18\times0,004\,112\,335+102\times0,000\,004\,227\,8\,-\\ &102\times120\times0,000\,016\,911\,301\,\omega\\ \\ =\, 6,074\,453\,27-0,206\,994\,32\,\omega\,,\\ -(4+8\,A-20\,B)-20\,\omega\,k\,C \,=\, -(4+8\times0,004\,112\,335-20\times0,000\,004\,227\,8)\,-\\ &20\times120\times0,000\,016\,911\,301\,\omega\\ \\ =\, -4,032\,814\,12-0,040\,587\,12\,\omega\,,\\ 1-A+B-\omega\,k\,C \,=\, 1-0,004\,112\,335+0,000\,004\,228\,-\\ &120\times0,000\,016\,911\,301\,\omega\\ \\ =\, 0,995\,891\,83-0,002\,029\,36\,\omega\,. \end{array}$$

Avec les chiffres ci-dessus et en tenant compte des valeurs de ω inscrites au bas du tableau nº 1, on peut remplir très rapidement les diverses diagonales du tableau nº 2. On voudra bien remarquer que nous avons multiplié tous les coefficients par 1000, pour simplifier l'écriture. On remarquera d'autre part que le tableau nº 2 est entièrement dissymétrique par rapport à la diagonale principale, contrairement aux problèmes hyperstatiques habituels. On voit immédiatement, d'après le tableau nº 1, que cette dissymétrie est due au coefficient ω de répartition des contraintes, différent si l'on considère les coefficients des inconnues η situés de part et d'autre de la diagonale principale.

Pour résoudre le système d'équations représentées 4) au tableau n° 2, nous procéderons de manière classique, par éliminations successives 5) des inconnues $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \dots$ (algorithme de Gauss). Ces éliminations successives sont représentées au tableau n° 3. En tête de ce tableau nous écrivons tout d'abord les inconnues $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \dots$, pour ne pas les répéter à chaque élimination. Nous reportons ensuite, sans la changer, l'équation n° 1 du tableau n° 2. Bien qu'il s'agisse en fait d'une simple équation de départ, nous la considérerons comme un premier stade d'élimination et l'appellerons dorénavant équation n° 11.

Dans un deuxième stade d'élimination, nous allons faire disparaître l'inconnue η_1 . Pour cela nous écrivons en premier lieu l'équation n^0 2 du tableau n^0 2, sans la changer. Juste au-dessous, nous voulons placer l'équation n^0 11 en la multipliant de telle sorte que le coefficient de η_1 soit égal et de signe contraire à celui de l'équation n^0 2 se trouvant juste au-dessus. Ce facteur de multiplication μ de l'équation n^0 11 sera donc évidemment égal au rapport du coefficient du η_1 de l'équation n^0 2 par celui du η_1 de l'équation n^0 11, précédé du signe négatif. En additionnant l'équation n^0 2 et l'équation n^0 11 multipliée par le facteur μ , que nous appellerons équation n^0 11, on obtient une nouvelle équation n^0 12, dans laquelle le coefficient de η_1 , étant nul, fait disparaître cette inconnue.

Dans le troisième stade d'élimination, il s'agit de se débarrasser de η_2 . Dans ce but nous écrivons tout d'abord l'équation n° 3 du tableau n° 2. Nous voulons y ajouter l'équation n° 11 en la multipliant de manière à faire disparaître η_1 . Pour cela on procède naturellement comme au stade d'élimination précédent: le facteur de multiplication μ de l'équation n° 11 est évidemment égal au rapport du coefficient du η_1 de l'équation n° 3 par celui du η_1 de l'équation n° 11, avec signe négatif. Cette nouvelle équation est alors appelée équation n° 11². Ceci fait, nous voulons encore ajouter l'équation n° 12, qui ne

⁴) Les chiffres donnant les valeurs de η au bas du tableau n⁰ 2 ont été inscrits ultérieurement.

⁵) Le schéma d'élimination que nous utiliserons est celui de la page 85 de l'ouvrage suivant: Fritz Stüssi, «Vorlesungen über Baustatik», zweiter Band (Baustatik II), Verlag Birkhäuser, Basel/Stuttgart 1954, Tabelle 10, Abgekürzter Gaußscher Algorithmus. Un schéma quelque peu différent se trouve dans Richard Guldan, «Rahmentragwerke und Durchlaufträger», Springer Verlag, Wien 1949, S. 356/357.

Tableau n 0 2. Equations numériques nécessaires à la détermination de la valeur inconnue du coefficient de rigidité relative γ du raidisseur (et des déviations η de l'âme), avec les dix intervalles considérés, pour a/b = 2, k = 120 et $\delta = 0$

$^{\eta_9}$							+ 994,2684	-4065,2838	+4914,5894	
η8 ×						+ 994,6743	$-4057, 1664{+}1, 01467803\gamma$	$+5950,\!2567{+}4,\!05871213\gamma$	$-4057,1664+1,01467803\gamma$ $+4914,5894$	
τ <i>φ</i>					+ 995,0801		+5991,6555	-4049,0490	+ 995,0801	
η6 ×				+ 995,4860	-4040,9315	+6033,0544 $-4049,0490$	-4040,9315	+ 995,4860		
η5 ×		*	+ 995,8919	-4032,8141	+6074,4533	-4032,8141	+ 995,8919			
η4 ×		+ 996,2978	-4024,6967	+6115,8521	-4024,6967	+ 996,2978				
η3 ×	+ 996,7036	-4016,5793	+6157,2510	-4016,5793	+ 996,7036				1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	
η2 ×	+5242,5334 $-4008,4618$ $+996,7036$	+6198,6499	-4008,4618	+ 997,1095					1	
η ₁ ×	+5242,5334	-4000,3444	+ 997,5154							
Pt.	1	2	က	4	5	9	7	∞	6	

0,5659017	
1 avec $\gamma = 36,20634$	
1,2453814	
1,2516032	
1,0578627	
0,7659452	
0,4767194	
0,2513105	
0,1015197	
h	

contient plus η_1 , en la multipliant de telle manière que η_2 disparaisse également. Pour cela il faut évidemment que la somme des coefficients du η_2 des équations déjà inscrites n^0 3 et 11^2 , ainsi que de la nouvelle équation 12 convenablement multipliée, appelée équation 12^1 , soit égale à zéro. Le facteur de multiplication μ sera dès lors égal, pour passer de l'équation n^0 12 à l'équation n^0 12^1 , à la somme des coefficients du η_2 des équations n^0 3 et 11^2 , divisée par le coefficient du η_2 de l'équation 12, avec signe négatif. Le tableau n^0 3, stade d'élimination n^0 3, montre clairement comment les calculs numériques sont disposés et effectués, notamment pour les facteurs de multiplication μ des équations 11^2 et 12^1 , dont le calcul détaillé figure, comme au stade d'élimination n^0 2, à la fin des opérations. On voit également qu'en effectuant l'addition des équations n^0 3, 11^2 et 12^1 , on vérifie que les facteurs de multiplication choisis pour passer des équations n^0 11 à 11^2 et n^0 12 à 12^1 ont été convenablement choisis, la somme des coefficients des η_1 comme des η_2 devant être nulle pour que l'équation obtenue n^0 13 soit correcte.

En procédant de la même manière qu'au troisième stade d'élimination, on se débarrasse successivement de η_3 , η_4 et η_5 . Comme d'habitude en pareil cas, on ajoute une nouvelle colonne dans laquelle figure la somme de tous les coefficients des inconnues de chaque équation, que l'on considère comme s'il s'agissait d'un coefficient ordinaire. A la fin de chaque stade d'élimination, on vérifie immédiatement que la somme des coefficients obtenus est bien égale au chiffre figurant dans la dernière colonne. Il s'agit là d'un contrôle simple et rapide, qui permet à chaque stade d'élimination de s'assurer que ce stade est sans erreur 6). Si d'éventuelles erreurs n'étaient pas décelées à ce moment, les stades d'élimination suivants seraient faux et le travail serait à recommencer, d'où une perte de temps beaucoup plus importante que pour la colonne complémentaire.

Au moment d'éliminer η_6 surgit une petite difficulté d'écriture, à cause de la rigidité γ du raidisseur, qui affecte l'inconnue η_8 et qu'il faut conserver séparément. On voit au tableau n⁰ 3 comment on peut disposer les calculs, effectués avec la même facilité que si γ n'existait pas. L'élimination de η_7 se

⁶⁾ La preuve par la somme des coefficients des équations n'est juste qu'au dernier chiffre près. On le voit facilement en vérifiant les équations nº 17 et 18 des tableaux récapitulatifs nº 5 et 6. Quant à l'équation nº 19 du tableau récapitulatif nº 6, on devrait aboutir à la relation banale 0=0. La différence est donc dans ce cas de deux unités au dernier chiffre, alors qu'elle atteint seulement une unité aux équations susmentionnées nº 17 et 18. Elle pourrait être encore plus grande, si l'on avait affaire à un système contenant davantage d'équations.

Il est facile de se rendre compte que la différence de la preuve par la somme des coefficients des équations provient de ce que les chiffres à additionner sont tout d'abord arrondis. L'exemple suivant le montre clairement: si l'on considère l'égalité 1,1+1,2+1,3=3,6 et que l'on multiplie les deux membres par 5, on trouve sans arrondir 5,5+6,0+6,5=18,0. En arrondissant avant addition, on trouve par contre 6+6+7=19 et non 18.

Tableau n⁰ 3. Elimination successive des inconnues $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \dots$

N		+2 230,775 2		- 821,9760 +1702,2055	+ 880,2295			+117,4998 -424,4575 +909,8848	+602,9271	
77. X								+995,8919	+995,8919	=+1,03369041
4 ^μ ×				+996,2978	+996,2978	,		-4024,6967 +1029,8635	-2994,8332	
εt ×	e départ	+996,7036	n de η_1	-4016,5793 + 760,5403	-3256,0390	=+0,76305559	n de η_2	+6157,2510 - 189,6463 -3365,7363	+2601,8684	$\frac{-4008,4618+762,7042}{3139,9707}$
ςt. ×	1. Equation de départ	-4008,4618	2. Elimination de η_1	+6198,6499	+3139,9707	-4000,3444	3. Elimination de η_2	-4008,4618 + 762,7042 +3245,7576		4 µ2 =
η, ×		+5242,5334		-4000,3444 +4000,3444		μ ₁		+997,5154 -997,5154		$\frac{1}{4} = -0,19027354$
щ		1		$ \begin{array}{c} 1 \\ \mu_1 = +0,76305559 \end{array} $				$\begin{matrix} 1 \\ \mu_1 = -0,19027354 \\ \mu_2 = +1,03369041 \end{matrix}$		$\mu_1 = -\frac{997,5154}{5242,5334}$
Eq.	,	1 on 11		2 1111	12			3 11 ² 12 ¹	13	

Tableau n⁰ 3 (suite)

α	
η_8	×
7,7	×
η6	×
7,5	×
η4	×
η3	<
72	<
3.	
Eq.	

4. Elimination de η_3

	633465	$\frac{674}{674} = +1,14633465$	-4016,5793+1033,9674 2601.8684	$\mu_2 = -\frac{-4016}{-4016}$	55376	$\frac{15}{07} = -0.31755376$	$\mu_1 = -\frac{997,1095}{3139,9707}$	3.
+470,6902			+995,4860	+2366,3929 -2891,1887 +995,4860	+2366,3929			
+691,1562	a service and a	1		+1 141,6254	+2982,6119 -3433,0811 +1141,6254	+2982,6119		
-279,5202				en ancient	- 316,3781	12^{2} μ_{1} = -0,31755376 +997,1095 +1033,9674 - 316,3781	35	+997,109
+ 59,0542	1		+339,4000	,0793 +0110,8021 -4032,8141	100,0110	00.060-01		

5. Elimination de η_4

2601,8684

+ 0,6088	-230,9646	+572,3444	+341,9886
+995,0801			+995,0801
$\begin{array}{c c} -4040,9315 & +995,0801 \end{array}$		+1210,4796	-2830,4519 +995,0801
	- 381,4986	+2877,4592 -3515,5943	+2177,3604
-4024,6967 +6074,4533	.7036 + 1147,2375 - 381,4986	+2877,4592	
+996,7036	-996,7036	1	
			mana
I	$13^2 \mid \mu_1 = -0.38307226$	$\mu_2 = +1,21596848$	
20	32	141	15

$$\mu_1 = -\frac{996,7036}{2601,8684} = -0,38307226 \qquad \mu_2 = -\frac{-4024,6967 + 1147,2375}{2366,3929} = +1,21596848$$

Tableau n^0 3 (suite)

	ŕ			1		1			
Ŋ		$\begin{array}{r} -57,8366 \\ -198,1698 \\ +442,2290 \end{array}$	+186,2226		A		$^{-116,2821+1,01467803\gamma}_{-156,4204}_{+261,7540}$	$-10,9485{+}1,01467803\gamma$	
% ×		+994,6743	+994,6743	311023			$\begin{array}{c} -116,2821+\\ -156,4204\\ +261,7540 \end{array}$	-10,9485+1,)5 597 57
E×		-4 049,049 0 +1 286,748 3	-2762,3007	2471 = +1,29311023	779 X		+994,2684	+994,2684	$\frac{1,6061}{1} = +1,40559757$
η6 ×		+6033,0544 - 419,1191 -3660,0863	+1953,8490	4032,8141+1217,2471 $2177,3604$	η8 ×		$\begin{array}{c} -4057, 1664+1, 01467803\gamma \\\\ +1398, 1118 \end{array}$	$-2659,0546{+}1,01467803\gamma$	$-4040,9315+1294,6061\\1953,8490$
η5 ×	6. Elimination de η_5	$\begin{array}{l} -4032,8141\\ +1217,2471\\ +2815,5670 \end{array}$		$\mu_2 =4.05$		7. Elimination de η_6			$\mu_2 = -\frac{-40}{}$
η4 Χ	6. Elir	+996,2978 -996,2978		1960	£ ×	7. Eli	+5991,6555 - 455,1347 -3882,6832	+1 653,837 6	0,45738496
۶۳ ×				$\frac{8}{9} = -0,42101960$	9% ×		$\begin{array}{c} -4040,9315 \\ +1294,6061 \\ +2746,3254 \end{array}$		1 11
ν × γ ₂		1 1 1		$= -\frac{996,2978}{2366,3929}$	ς. ×		+995,8919 -995,8919		$\mu_1 = -\frac{995,8919}{2177,3604}$
T.		$ \begin{array}{c} 1\\ \mu_1 = -0,42101960\\ \mu_2 = +1,29311023 \end{array} $		μ1 ==	п		$ \begin{array}{c} 1\\ \mu_1 = -0,45738496\\ \mu_2 = +1,40559757 \end{array} $		μ1
Eq.		$\frac{6}{14^2}$	16	_	Eq.		$\frac{7}{15^2}$	17	

Tableau n^0 3 (suite)

ы	
ę. ×	
% ×	
£ ×	
$^{\eta_6}$ $ imes$	
η_5 $ imes$	
η	
Eq.	

8. Elimination de η_7

728918	$\frac{1921}{1} = +1,59728918$	$\mu_2 = -\frac{-4049,0490 + 1407,3921}{1653,8376}$		$\frac{0}{0} = -0,50949997$	$= -\frac{995,4860}{1953,8490} =$	μ1 :	
$+1196,1911+5,67944637 \gamma$ $-2477,1496$ $-1280,9584+5,67944637 \gamma$	-2477,1496	$+1196,1911+5,67944637\gamma$				1	18
$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	$-4065,2838\\\\+1588,1342$	$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	4860 -4049,0490 4680 +1407,3921 - +2641,6569	+995,4860 -995,4680		8 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	8 16 ² 17 ¹

9. Elimination de η_8

$\frac{-4057,1664+1,01467803\gamma+1599,8985-0,61051092\gamma}{1196,1911+5,67944637\gamma} = \frac{2457,2679-0,404167111\gamma}{1196,1911+5,67944637\gamma}$	$-0,61051092\gamma =$	$+1,01467803 \gamma + 1599,8985 - 1196,1911 + 5,67944637 \gamma$	-4057,1664	$\mu_2 = -$	=-0,60167945	$\frac{995,0801}{1653,8376}$	$\mu_1 = -$
$+1852,5031+1,01467803 \gamma$ + 6,5875-0,61051092 γ	+4914,5894 - 598,2309	$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	+995,0801 -995,0801			$\begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 17^2 & \mu_1 = -0,60167945 \end{vmatrix}$	9 172

Equation 19: $\left(4.914,5894 - 598,2309 - 2477,1496\frac{2457,2679 - 0,404167117}{1196,1911 + 5,67944637\gamma}\right)\eta_9 = 0$, d'où

$$\gamma = -\frac{(4914,5894 - 598,2309)\,1196,191\,1 - 2477,149\,6 \times 2457,267\,9}{(4\,914,5894 - 598,2309)\,5,679\,446\,37 + 2477,149\,6 \times 0,404\,167\,11} = 36,206_{34}$$

fait de manière identique et sans difficulté supplémentaire. Quant à l'élimination de η_8 , le calcul du deuxième coefficient de multiplication permettant le passage de l'équation n^0 18 à 18^1 est un peu plus compliqué que jusqu'ici, comme le montre le neuvième et dernier stade d'élimination du tableau n^0 3. Il en est de même du calcul de l'équation n^0 19, somme des équations n^0 9, 17^2 et 18^1 . Cette équation n^0 18^1 n'a d'ailleurs pas été écrite au tableau n^0 3, vu sa complexité. La chose n'est heureusement pas nécessaire, puisque seul le coefficient de η_9 , affecté du facteur de multiplication μ_2 indiqué sous le neuvième et dernier stade d'élimination, nous intéresse.

Le premier membre de l'équation n° 19, donnée en dehors du tableau proprement dit pour une question de place, est multiplié par l'inconnue η_9 , tandis que le second membre est nul. Puisque la déviation η_9 n'est pas nulle au moment du voilement, on peut la barrer dans l'équation n° 19. Cette dernière ne contient dès lors plus que la rigidité inconnue γ du raidisseur, correspondant au coefficient de voilement adopté k=120. Le calcul de γ est donc facile.

Pour les derniers stades d'élimination du tableau n° 3, on peut introduire la valeur maintenant connue de la rigidité γ du raidisseur. On obtient ainsi le tableau n° 4, qui est en fait une simple vérification des derniers calculs effectués. On voudra bien observer que ce tableau n° 4 remplacerait la dernière partie du tableau n° 3, si l'on avait procédé par tâtonnement pour obtenir la valeur de γ . Comme nous l'avons dit l'an passé dans les «Mémoires», rappelons à ce sujet que le procédé par tâtonnement est utilisé quand on a affaire à un grand nombre d'intervalles et qu'on ne peut pas concentrer tout à la fin des éliminations successives les équations contenant le γ inconnu.

Pour le calculateur non rompu aux méthodes exposées dans la présente publication, il y a intérêt, au début tout au moins, à inscrire séparément, au fur et à mesure de leur obtention, les équations éliminées 11, 12, 13... dans le tableau récapitulatif n° 5. On peut dès lors se passer de tous les stades d'élimination autres que celui traité au moment considéré, ce qui évite des erreurs, surtout si le système comporte un grand nombre d'équations. Le tableau n° 5 sera évidemment complété par le tableau récapitulatif n° 6 des derniers stades d'élimination après obtention de la rigidité γ du raidisseur.

Les tableaux récapitulatifs n° 5 et 6 présentent un autre intérêt; c'est de permettre, plus aisément que les tableaux n° 3 et 4, de remonter aux valeurs des différentes déviations η . Remarquons à ce propos que nous venons de calculer la valeur de la rigidité γ du raidisseur que nous cherchons pour un coefficient de voilement k bien défini et que, pour ce faire, nous n'avons pas eu besoin de connaître les valeurs des déviations η . Rappelons que ces η doivent au contraire être déterminées avec la méthode d'Engesser-Vianello par approximations successives.

Pour remonter aux valeurs des différentes déviations η , nous devons tout d'abord nous rappeler que, dans tout problème de stabilité, une infinité de déformations affines sont possibles au même moment. Il faut donc définir cette

Tableau n⁰ 4. Elimination des inconnues η_6 , η_7 et η_8 après calcul de la rigidité relative γ du raidisseur

		×	×	· ×	2 ×	? ×	\
·			7. Elimination de η_6	ion de η_6			
$\begin{matrix} 7\\15^2\\16^1\end{matrix}$	$egin{array}{c} 1 \ \mu_1 = -0,45738496 \ \mu_2 = +1,40559757 \end{array}$	+995,8919 -995,8919	$\begin{array}{l} -4040,9315 \\ +1294,6061 \\ +2746,3254 \end{array}$	+5991,6555 - 455,1347 -3882,6832	-4020,4286 	+994,2684	- 79,5443 -156,4204 +261,7540
17	. 1			+1653,8376	-2622,3168	+994,2684	+ 25,7893
			8. Elimination de η_7	ion de η_7			
8 16 ² 17 ¹	$1\\ \mu_1 = -0,50949997\\ \mu_2 = +1,59728918$		+995,4860 -995,4860	-4049,0490 +1407,3921 +2641,6569	+6097,2078 - 506,7865 -4188,5982	-4065,2838 	-1021,6390 - 94,8804 + 41,1930
18					+1401,8231	-2477,1496	-1075,3264
			9. Elimination de ηs	on de η_8			
9 17 ² 18 ¹	$\begin{matrix} 1 \\ \mu_1 = -0,60167945 \\ \mu_2 = +1,74246986 \end{matrix}$			+995,0801 -995,0801	-4020,4286 +1577,7941 +2442,6345	+4914,5894 - 598,2309 -4316,3585	+1889,2409 - 15,5169 -1873,7238
19							+ 0,0002

Tableau nº 5. Récapitulation des résultats des divers stades d'élimination des équations, en vue d'obtenir la rigidité γ du raidisseur

Eq.	$\overset{\eta_1}{\times}$	$\eta_{\mathbf{z}} \times$	μ. «	$\gamma_4 \\ \times$	$\eta_{\mathfrak{s}}$	sμ×	ιμ	η. ×	$\gamma_{\boldsymbol{s}} \times$	Ñ
=	+5242,5334	-4008,4618	+5242,5334 -4008,4618 + 996,7036							+2230,7752
12		+3139,9707	+3139,9707 -3256,0390 + 996,2978	+ 996,2978						+ 880,2295
13			+2601,8684	+2601,8684 $-2994,8332$ $+995,8919$	+ 995,8919					+ 602,9271
14				+2366,3929 -2891,1	887	+ 995,4860				+ 470,6902
15					+2177,3604	+2177,3604 $-2830,4519$ $+995,0801$	+ 995,0801			+ 341,9886
16						+1953,8490 -2762,3007 +994,6743	-2762,3007	+994,6743		+ 186,2226
17							+1653,8376	$-2659,0546+1,01467803\gamma + 994,2684$	+ 994,2684	$-10,9485+1,01467803\gamma$
18								$+1196,1911+5,67944637 \gamma$ $-2477,1496$	-2477,1496	$-1280,\!9584+5,\!67944636\gamma$
19				1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1					1	1
					Management of the Party and Address of the Par					

Tableau nº 6. Récapitulation des résultats des derniers stades d'élimination des équations, après avoir obtenu la rigidité γ du raidisseur

17 18 19 10 10 10 11 11 11 11 11 11 11	+ 994,268	+ 994,2684 + 25,7893 -2477,1496 -1075,3264 - + 0,0002
13		
19		7,000 +

0,5659017	-
1 avec $\gamma = 36,20634$	
1,2453814	
1,2516032	
1,0578627	
0,7659452	
0,4767194	
0.2513105	
0.1015197 0.2513105	,
u	

déformation en un point, ce qui en fixe toutes les autres 7). Nous adoptons dès lors l'unité pour la déviation η_8 au droit du raidisseur. A l'aide du tableau n° 6 (ou éventuellement du tableau n° 4), on introduit cette valeur de $\eta_8 = 1$ dans l'équation n° 18, ce qui donne: +1401,8231-2477,1496 $\eta_9 = 0$. La valeur $\eta_9 = 0,565\,901\,7$ qui en découle 8), de même que la valeur choisie de $\eta_8 = 1$, sont inscrites tout au bas du tableau n° 6 (ou éventuellement dans les tableaux n° 4 et 3). On continuera en procédant de la même manière pour l'équation n° 17 9), qui fournira η_7 , l'équation n° 16, qui fournira η_6 et ainsi de suite jusqu'à l'équation n° 11, qui donnera la dernière déviation η_1 encore inconnue.

Dès que l'on a obtenu une quantité suffisante de η , il est prudent de procéder immédiatement au contrôle. Pour cela on inscrit tout d'abord les η au bas du tableau nº 2, ce qui permet de vérifier, en une seule opération de la machine à calculer (somme de produits de deux facteurs), que les diverses équations nº 9, 8, 7... jusqu'à 1 sont bien satisfaites par les η trouvés 10). On trace alors facilement la forme de la cloque (fig. 2).

Le calculateur entraîné pourra simplifier de manière considérable les tableaux dressés jusqu'ici. En premier lieu, il n'est nul besoin d'inscrire, comme nous l'avons fait pour la clarté de l'exposé, le détail du calcul des μ , au bas de chaque stade d'élimination ¹¹), ce qui prend passablement de temps. Il n'est pas besoin non plus de dresser le tableau n° 2, dont les diverses équations n° 1, 2, . . . peuvent être inscrites directement dans le tableau n° 3. Enfin et surtout, on peut également se dispenser d'écrire les équations n° 11¹, 11², 12¹, 12², 13¹, . . . En effet la somme des diverses colonnes des tableaux n° 3 et 4 peut être effectuée en une seule opération de la machine à calculer, et sans

⁷⁾ C'est d'ailleurs la raison pour laquelle nous aboutissons à la relation triviale 0=0 de l'équation 19. C'est également la raison pour laquelle nous avions à disposition neuf équations pour les dix inconnues en présence, soit les neuf déviations η et la rigidité γ du raidisseur. Par ailleurs on peut définir l'instabilité comme étant la possibilité d'avoir au même instant une série de déformations affines pouvant atteindre des valeurs très grandes, en provoquant de ce fait la ruine de la pièce.

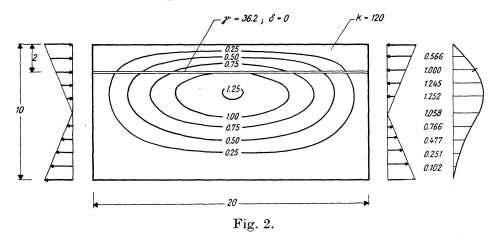
⁸⁾ Sur la machine à calculer on inscrit +1401,8231 que l'on passe au résultat. On inscrit ensuite -2477,1496 au clavier et l'on actionne la machine jusqu'à ce que le résultat soit annulé, ce qui fait apparaître un multiplicateur η_9 de +0,5659017. Il s'agit donc d'une division classique, les détails des opérations à effectuer dépendant du type de machine utilisée.

⁹⁾ Sur la machine à calculer on forme le produit $-2622,3168 \eta_8 + 994,2684 \eta_9$, soit $-2622,3168 + 994,2684 \times 0,5659017$ qui restera au résultat. On actionnera ensuite la machine jusqu'à ce que le chiffre de +1653,8376 inscrit au clavier redonne zéro, d'où un η_7 de 1,2453814.

 $^{^{10}}$) Les η ont été inscrits avec tous les chiffres trouvés pour obtenir une bonne vérification des équations. Cela ne veut rien dire en ce qui concerne la précision réelle des η calculés.

¹¹) La somme des coefficients de l'inconnue à éliminer doit alors donner zéro, ce que nous pouvons faire en une seule opération de la machine à calculer (cf. notes 8 et 9 précédentes).

inscrire les résultats intermédiaires puisqu'il s'agit de nouveau de la somme de produits de deux facteurs. Comme l'un de ces facteurs est constant pour chaque équation déterminée, on perd, en utilisant une machine à calculer ordinaire, sans mémoires, le bénéfice de la multiplication d'un facteur fixe par une série d'autres. Cela diminue quelque peu le gain de temps provenant de ce que les équations nº 11¹, 11², 12¹, 12², 13¹... ne sont pas écrites. Quant au risque d'erreur, il augmente évidemment, bien qu'il soit faible pour le système simplifié de dix équations dont nous nous occupons. On l'atténue d'ailleurs fortement, tout en sollicitant beaucoup moins l'attention du calculateur, si l'on utilise un papier fort avec fenêtres laissant apparaître seulement les chiffres à éliminer, ou même un tel dispositif pour chaque élimination. En outre la preuve par la somme dont nous avons parlé permet de découvrir rapidement toute erreur à la fin de chaque stade d'élimination.



Pour le calculateur entraîné, les tableaux n⁰ 2, 3, 4, 5 et 6 seront donc remplacés par un seul et unique tableau, très concentré et très simplifié, le tableau n⁰ 7 ¹²). A partir de ce tableau nous pouvons une fois pour toutes déterminer le γ du raidisseur au cinquième supérieur, pour dix intervalles, à l'aide d'une formule appropriée. Pour cela nous reproduisons ci-après la partie médiane du tableau n⁰ 7 en question, en désignant par [1], [2] . . . jusqu'à [8], les divers coefficients à utiliser, et les autres, par un astérisque.

L'équation nº 19 s'écrit alors, à partir de ce tableau partiel:

$$([1]+[2]\mu_1+[6]\mu_2)\,\eta_9=0\,,$$
 avec
$$\mu_2=-\frac{[4]+[8]\gamma+([5]+[8]\gamma)\,\mu_1}{[3]+[7]\gamma}\,,$$
 ce qui donne:
$$[1]+[2]\mu_1-[6]\frac{[4]+[8]\gamma+([5]+[8])\,\mu_1}{[3]+[7]\gamma}=0\,,$$

¹²) On remarquera, au dernier chiffre de certains coefficients des équations 17 et 18, une différence d'une unité entre les résultats donnés au tableau n⁰ 5 et ceux donnés au tableau n⁰ 7. Les raisons de pareilles différences ont déjà été données à la note 6 du présent article.

Tableau nº 7. Elimination successive des inconnues $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots$ sous forme abrégée

							$\frac{03 \gamma}{03 \gamma}$	13 y 35 y	03 7			
N	+2230,7752	- 821,9760 + 880,2295	+ 117,4998 + 602,9271	++	+ 0,6088 + 341,9886	- 57,8366 + 186,2226	$\begin{array}{rrr} - & 116,2821 + 1014,67803 \gamma \\ - & 10,9485 + 1014,67803 \gamma \end{array}$	$-1168,5901+4058,71213\\-1280,9584+5.67944635$	$+1852,5031+1,01467803\gamma$	- 79,5443 + 25,7893	-1021,6389 $-1075,3264$	$^{+1889,2409}_{+ 0,0002}$
ç×			$\mu_2 = - + 1,03369041$	$\mu_2 = +1,14633465$	$\mu_2 = +1,21596848$		+ 994,2684 + 994,2684	$\begin{array}{r} -4065,2838 \\ -2477,1497 \end{array}$	+4914,5894	+ 994,2684 + 994,2684	-4065,2838 -2477,1497	+4914,5894
		$\mu_1 = -40,76305559$	$\mu_1 = \\ -0,19027354$	$\mu_1 = -0,31755376$	$\mu_1 = -0,38307226$		1,01467803 γ 1,01467803 γ	$1,05871213 \gamma$ $5,67944635 \gamma$	$1,01467803 \gamma$			
å ×						+ 994,6743 + 994,6743	$\begin{array}{l} -4057,1664+1,01467803\gamma \\ -2659,0546+1,01467803\gamma \end{array}$	$+5950,2567+4,05871213\gamma\\+1196,1911+5,67944635\gamma$	$-4057,1664+1,01467803 \gamma$	$\begin{array}{l} -4,0204286 \\ -2,6223168 \end{array}$	+6,0972079 + 1,4018232	-4020,4286 -
۴×				.1	+ 995,0801 + 995,0801	$\begin{array}{r} -4049,0490 \\ -2762,3007 \end{array}$	+5991,6555 + 1653,8377	-4049,0490	+ 995,0801	$^{+5991,6555}_{+1653,8377}$	-4049,0490	+ 995,0801
$\eta_{s} \times$			1	+ 995,4860 + 995,4860	$\begin{array}{c} -4040,9315 \\ -2830,4519 \end{array}$	$^{+6033,0544}_{+1953,8490}$	-4040,9315 	+ 995,4860		-4040,9315 	+ 995,4860	
$\gamma_{\mathfrak{s}} \\ \times$		1	+ 995,8919 + 995,8919	$-4032,8141\\-2891,1887$	+6074,4533 +2177,3604	-4032,8141 	$+\ 995,8919$		•	+ 995,8919		
η. *		+ 996,2978 + 996,2978	$-4024,6967\\-2994,8332$	$^{+6115,8521}_{+2366,3929}$	-4024,6967	+ 996,2978		nuuo			6,20635 n est s le texte)	
γ_{s}	+ 996,7036	$\begin{array}{c} -4016,5793 \\ -3256,0390 \end{array}$	$^{+6157,2510}_{+2601,8684}$	-4016,5793	+ 996,7036			Avec γ inconnu			Avec $\gamma = 36,20635$ (le calcul en est donné dans le texte)	
د ×	-4008,4618	$^{+6198,6499}_{+3139,9707}$	-4008,4618	+ 997,1095		$\mu_2 = \\ +1,29311023$	$\mu_2 = \\ +1,40559755$	$\mu_2 = \\ +1,59728916$	·	$\mu_2 = +1,40559755$	$\mu_2 = \\ +1,59728916$	$\begin{array}{c} \mu_2 = \\ +1,74246985 \end{array}$
$\gamma_1 \\ \times$	+5242,5334	-4000,3444	+ 997,5154			$\mu_1 = -0,42101960$	$\mu_1 = -0,45738496$	$\mu_1 = -0,50949997$	$\begin{array}{c} \mu_1 = \\ -0,60167945 \end{array}$	$\mu_1 = -0,45738496$	$\begin{array}{c} \mu_1 = \\ -0,50949997 \end{array}$	$\mu_1 = -0,60167945$
Eq.	==	12	13	14	5 15	6 16	17	8 8 8	9 19	7 17	8 8 8	9

	0 5650017	7 108 0000	
	•	-	
	1.2453814	* * * * * * * * * * * * * * * * * * * *	
	1.2516032		
9 1 3 4 4	1,0578627		
0101	0,7659452		
	0,4767194		
0.011.010	0,451.5105		
0 101 5107	16101010		
ξ			

Eq.	$\overset{\eta_1}{\times}$	$egin{pmatrix} \eta_{f 2} \ imes \ imes \ \end{matrix}$	$\overset{\eta_3}{\times}$	$\eta_4 imes imes$	$\eta_5 imes$	$\eta_6 imes$	$\eta_{7} imes imes$	$^{\eta_8}\times$	η ₉ ×
7 17	*	*			*	*	*	$* + * [5] + [8]\gamma$	* [2]
8 18	*	*		·		*	*	$* + * \\ [3] + [7]\gamma$	* [6]
9 19	μ_1						*	[4] + [8]γ -	[1] *

d'où l'on déduit la valeur cherchée de γ :

$$\gamma = -\frac{([1] + [2] \mu_1)[3] - ([4] - [5] \mu_1)[6]}{([1] + [2] \mu_1)[7] - (1 + \mu_1)[8][6]}.$$

Avec les valeurs du tableau n⁰ 7, cette formule donne bien le γ du tableau n⁰ 3 ¹³):

$$\gamma = -\frac{(4\,914,589\,4 - 994,268\,4 \times 0,601\,679\,45)\,1\,196,191\,1}{(4\,914,589\,4 - 994,268\,4 \times 0,601\,679\,45)\,5,679\,446\,35} \\ \cdot \frac{+(-4\,057,166\,4 + 2\,659,054\,6 \times 0,601\,679\,45)\,2\,477,149\,7}{+(1-0,601\,679\,45)\,1,014\,678\,03 \times 2\,477,149\,7} = \\ = -\frac{4\,316,358\,5 \times 1\,196,191\,1 - 2\,457,267\,9 \times 2\,477,149\,7}{4\,316,358\,5 \times 5,679\,446\,35 + 0,404\,167\,11 \times 2\,477,149\,7} = \\ = \frac{\cdot \cdot \cdot}{25\,515,708\,96} = 36,206\,35\,.$$

Introduite dans les équations n° 17, 18 et 19, cette valeur de γ peut être aisément contrôlée, comme précédemment au tableau n° 4. En même temps ces équations n° 17, 18 et 19, dans lesquelles on a introduit le γ trouvé, permettent de calculer très facilement les valeurs des déviations η , si on désire les connaître. A cet effet nous avons reporté, tout au bas du tableau n° 7, les valeurs de ces η 10), au fur et à mesure de leur obtention. Comme nous l'avons déjà dit auparavant, le contrôle des η se fait directement en vérifiant les équations de départ n° 9, 8, 7 . . . jusqu'à 1, qui doivent être satisfaites en y introduisant les η trouvés.

Lorsqu'il faut chercher, pour un a/b déterminé (fig. 1), les valeurs de la rigidité γ du raidisseur correspondant à diverses valeurs du coefficient de voilement k, le calculateur expérimenté aura intérêt à se servir du tableau nº 8, dans lequel les équations de départ nº 1, 2, 3 . . . jusqu'à 9 auront leurs coefficients formés des deux termes du tableau nº 1. Dans le deuxième terme, on

¹³⁾ Au dernier chiffre près, pour les raisons exposées à la note 6.

Tableau n⁰ 8. Equations de départ pour a/b=2 et dix intervalles. Fragment d'une variante

N	+2041,6392	1,0101000	- 995,2830 +1 444 9951 L	01077 EEE,1	+ 0,6089	0000 E 10'0
	<u>+</u> +		1 4			H2 ==
				μ1 —	ļ	ال ^ا
					61	
η ₅ ×			38		+995,8919	
η4 ×			+ 995,8919 +0,0033823,		-4032,8141 +0,0676452k	
ε _ν ×	$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		$\begin{array}{c} -4032,8141 \\ +0,1352904k \end{array}$		+6074,4533 +0,6899811 <i>k</i>	
η γ ×	$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		$ \begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	
η ₁	$+5078,5614\\+1,3664331k$		-4032,8141 +0,2705808k		$^{+\ 995,8919}_{+0,0135290k}$	
Eq.	1	11	2	12	က	13

ante
varian
d'une va
ent d
agm
). Fr
c = 120
e (k =
brégé
ne al
s for
nos .
η_3
η_2 ,
s η_1 ,
nune
s inco
e des
essiv
mination succes
tion
mina
9. Elin
1 n ₀ (
ableau n'
Tab

+5078,5614+1,3664331k

۲۵×

Eq.

+5242,5334 $-4\,032,814\,1$

11

+ 995,8919+0,0135290k

+0,2705808k

12

r	e Dub	as					
	ы	+2041,6392 $+1,5761332k$	+2230.7752	$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	+ 880,2295	+ 0,6089 $+$ 0,974 090 9 k	+ 602,9271
						$\mu_2 =$	+1,03369041
				μ1 :::	+0,76305559	$\mu_1 =$	-0,19027334
1.							
	ş. X					+995,8919	+995,8919
	η. *			+ 995,8919 $+$ 0,0033823 k	+ 996,2978	-4032,8141 +0,0676452k	-2994,8332
	η ₃	$^{+\ 995,8919}_{+0,0067645k}$	+ 996,7036	-4032,8141 +0,1352904k	-3256,0390		+2601,8684
	$\eta_2 imes imes $	$ \begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	-4008,4618	$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	+3139,9707	$ \begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	
			1		i		

laissera subsister le coefficient de voilement k sans lui donner de valeur. De la sorte le tableau n^0 8 sera utilisable quel que soit le k choisi. En le reproduisant par un procédé quelconque, mécanique ou héliographique, et en ajoutant le résultat des éliminations successives, comme au tableau n^0 7, on obtiendra, pour chaque valeur du coefficient de voilement k un tableau analogue au tableau n^0 9, contenant tous les résultats des opérations à effectuer sur la machine. On se rend compte facilement que le tableau n^0 9 n'entraîne pas un nombre plus grand d'opérations sur la machine n^0 9 n'entraîne pas un peu plus compliquées. Cette complication est largement compensée par le gain de temps provenant des valeurs de départ écrites une fois pour toutes.

Bien entendu, il est possible de choisir une quantité d'autres dispositions pour le tableau n⁰ 9 donnant les équations de départ et les éliminations successives. Chaque calculateur peut trouver une disposition qui convienne le mieux à ses habitudes et à sa dextérité, ainsi qu'au genre de machine à calculer dont il dispose.

Pour le cas de la tôle non raidie, avec onde transversale simple ou double la rigidité γ du raidisseur n'intervient plus. Il faut alors procéder par approximations successives, qui d'ailleurs convergent beaucoup mieux que si l'on choisit les déviations η (Engesser-Vianello). Bien entendu, rien n'empêche de conserver γ en s'approchant petit à petit du k pour lequel le γ s'annule justement.

Enfin nous répéterons tout à l'heure ce que nous avons dit l'an passé en ce qui concerne le passage du cas du raidisseur sans effort normal $(\delta = 0)$ au cas du raidisseur avec effort normal.

Résultats finals de l'étude entreprise pour l'âme fléchie et raidie au cinquième supérieur

En procédant comme nous venons de le faire tout à l'heure en traitant l'exemple k=120 et $\delta=0$, on a tout d'abord déterminé la rigidité dite «optimum» du raidisseur placé au cinquième supérieur de l'âme d'un panneau de poutre soumis à la flexion pure. Nous avons montré l'an dernier dans les «Mémoires» que cette rigidité «optimum» γ_e correspond à un coefficient de voilement k égal à 129,4. Nous ne reviendrons plus sur cette question et rappellerons simplement que le raidisseur placé au cinquième supérieur ne fléchit pratiquement pas lors du voilement en deux séries de cloques super-

¹⁴) Par «opération» de la machine, nous entendons l'ensemble des manipulations donnant un résultat à inscrire. Par exemple, la somme d'une série de multiplications divisée par un seul facteur constitue une opération.

Bien entendu nous ne parlons ici que des machines à calculer mécaniques ordinaires et sans «mémoires». La disposition de nos tableaux joue d'ailleurs le rôle du «programme» de machines plus perfectionnées et les chiffres des tableaux sont ceux enregistrés par les «mémoires».

posées; c'est donc l'endroit «optimum» du raidisseur, c'est-à-dire celui où l'on obtient le plus grand coefficient de voilement k. En effet, on ne peut le dépasser avec une cloque unique, la tôle se voilant alors plus facilement en deux séries de cloques superposées, en laissant le raidisseur sans déformation. Rappelons en outre que la rigidité «optimum» du raidisseur γ_e n'est véritablement «économique» que pour les poutres hautes, où l'on peut réduire au minimum l'épaisseur de l'âme, sans en être empêché par des raisons d'ordre constructif.

Le calcul de la rigidité γ_e correspondant à k=129,4 et $\delta=0$ (pas d'effort normal dans le raidisseur) a été effectué pour tous les rapports a/b compris entre 0,5 et 4, avec un intervalle $\Delta \frac{a}{b}$ de 0,25. Ceci fait, on a procédé de même pour les autres valeurs du coefficient de voilement intéressant le praticien, soit de 20 à 120, avec un intervalle Δk de 10. Bien entendu, seul le cas $\delta=0$ (pas d'effort normal dans le raidisseur) a été étudié, les autres cas s'en déduisant très facilement, comme nous le verrons.

Les résultats trouvés en considérant dix intervalles le long de la verticale médiane de l'âme (fig. 1) ont été inscrits au tableau nº 10. Pour certaines valeurs de k et de a/b, réparties au mieux, un calcul complémentaire a été effectué avec cinq, quinze et vingt intervalles. Par extrapolation à l'infini ¹⁵), il a été sans autre possible de trouver la valeur probable de la rigidité γ du raidisseur pour des intervalles très serrés le long de la verticale médiane de l'âme (fig. 1). Dès lors les différences entre le calcul avec dix intervalles et les valeurs probables pour des intervalles très serrés étaient aisées à définir pour tous les a/b et tous les k considérés au tableau nº 10, ces différences obéissant à certaines lois précises ¹⁶). On passe alors par simple addition du tableau nº 10 (calcul avec dix intervalles le long de la verticale médiane de la figure 1) au tableau nº 11 (valeurs de la rigidité γ pour des intervalles très serrés le long de la verticale médiane de la figure 1). La comparaison des deux tableaux montre que les différences sont minimes et que la précision obtenue dépasse largement les besoins de la pratique.

Jusqu'ici nous n'avons parlé que du raidisseur sans effort normal $(\delta=0)$. Il faudrait pour cela que la liaison avec l'âme soit réalisée par boulons avec trous ovalisés. Si par contre le raidisseur est rivé ou soudé à la tôle, il est soumis à un effort normal qui tend à le faire flamber et diminue dès lors la résistance qu'il oppose au voilement de l'âme. Il faut donc augmenter la rigidité du raidisseur soumis à un effort normal $(\delta \neq 0)$ par rapport à celle du

Nous avons donné l'an dernier la formule d'extrapolation $k = 129,424 - \frac{1,888}{(0,1n)^4}$, où n est le nombre d'intervalles, pour le cas de la rigidité «optimum» $\gamma_e = 129,4$ et le rapport $a/b \approx 0,285$. On trouve facilement une formule analogue pour les différentes valeurs de k et de a/b.

¹⁶) Pour le coefficient de voilement «optimum» k=129,4, cette différence, négative pour a/b=0,5, devient positive lorsque a/b augmente avec maximum vers a/b=1. Elle décroît ensuite progressivement jusqu'à a/b=4, en devenant négative vers a/b=2. Pour d'autres k, les maxima et les zéros se déplacent en direction des plus petits a/b.

Tableau nº 10. Rigidité relative γ du raidisseur au cinquième supérieur de l'âme d'une poutre fléchie. Valeurs obtenues avec dix intervalles pour un raidisseur sans effort normal $(\delta = 0)$

$\frac{a}{b}$	$\frac{\text{Pour}}{k=20}$	$\begin{array}{c} \text{Pour} \\ k = 30 \end{array}$	Pour $k = 40$	Pour $k = 50$	$ \begin{array}{c} \text{Pour} \\ k = 60 \end{array} $	Pour $k = 70$	Pour $k = 80$	Pour $k = 90$	Pour $k = 100$	$ \dot{\text{Pour}} \\ k = 110 $	$ \begin{array}{c} \text{Pour} \\ k = 120 \end{array} $	Pour $k = 129,4$
0,50	-0.201 -0.345	$0,167 \\ 0,505$	0,553 1,386	0,959	1,391 $3,246$	1,855 $4,232$	$2,361 \\ 5,260$	2,924 6,339	3,572 7,477	4,356	$5,394 \\ 9,981$	6,888
1,00	-1,040	0,432	1,955	3,523	5,134	6,786	8,482	10,223	12,012	13,853	15,751	17,591
1,25 1,50 1,75	-2,747 -5,998	-0.549 -2.995 -7.541	1,737 0,150 -3,461	4,093 3,403 0,777	6,508 6,744 5,142	8,976 10,159 9,612	11,495 13,639 14,173	14,062 17,180 18,814	16,677 20,777 23,527	19,341 24,428 28,307	22,055 28,132 33,149	24,652 31,660 37,754
2,00		-14,923	-9,841	-4,545	0,925	6,541	12,280	18,127	24,069	30,088	36,206	42,015
2,25 2,50 2,75			-19,833	-13,414	-6,769 -18,899 -36,526	0,067 -10,775 -27,053	7,067 -2,444 -17,326	14,209 6,069 -7,374	21,477 14,744 2,778	28,857 23,562 13,110	36,338 32,509 23,603	43,456 41,028 33,602
3,00						-49,939	-38,754	-27,300	-15,605	-3,692	8,418	19,967
3,25 3,50 3,75							-68,010	-54,994 -91,847	-41,694 $-76,882$ $-122,672$	-28,137 $-61,620$ $-105,645$	-14,345 -46,084 -88,305	-1,183 -31,249 -71,741
4,00										-161,826	-142,622	-124,272
4,25					•							-190,57 *

* Valeur obtenue par extrapolation

Tableau nº 11. Rigidité relative γ du raidisseur au cinquième supérieur de l'âme d'une poutre fléchie. Valeurs cor-

$\frac{a}{b}$	Pour $k = 20$	Pour $k = 30$	Pour $k = 40$	Pour $k = 50$	Pour $k = 60$	Pour $k = 70$	Pour $k = 80$	$\begin{array}{c} \text{Pour} \\ k = 90 \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{Pour} \\ k = 100 \end{array}$	$\frac{\text{Pour}}{k = 110}$	Pour $k = 120$	Pour $k = 129,4$
0,50 0,75	-0,20 -0,35	0,17	0,56	$0,96 \\ 2,30$	$1,40 \\ 3,2\overline{5}$	1,86	2,37	2,93	3,57	$\frac{4,3\overline{5}}{8,69}$	5,38 9,99	6,86 11,31
1,00	-1,04	0,43	1,95	3,52	5,13	6,79	8,49	10,23	12,02	13,86	15,76	17,61
$\frac{1,25}{1,50}$	-2,75 -6,00	-0,55	1,73	4,09	6,51	8,97	11,50	14,07	16,68	$19,3\overline{5}$	22,06	24,67
1,75		-7,55	-3,47	0,77	5,13	9,60	14,17	18,81	23,52	28,30	$33,1\overline{5}$	37,75
2,00		-14,93	-9,85	-4,56	0,91	6,53	12,27	18,12	24,06	30,09	36,19	42,00
2,25	٠		-19,85	-13,43	-6,78	0,05	7,05	14,19	21,46	28,84	36,32	43.43
2,50		,		-26,80	-18,92	-10,80	-2,47	6,04	14,72	23,53	32,48	41,00
2,75					-36,55	-27,08	-17,36	-7,41	2,74	13,07	23,56	33,56
3,00					,	-49,97	-38,79	-27,34	-15,65	-3,74	8,37	19,90
3,25 3,50 3,75							-68,05	-55,04 -91,90	-41,75 -76,94 -122,75	-28,19 -61,68 -105,72	-14,41 -46,15 -88,39	-1,25 -31,33 -71,83
4,00										-161,91	-142,71	-124,37
4,25		,										1007

raidisseur sans effort normal ($\delta = 0$). En considérant la relation (13), il est facile de déterminer l'augmentation de cette rigidité. En effet, si la valeur de R définie par (13) ne change pas, il en est de même des équations (11), (12), (14), (15) et (16). Dès lors, si, pour le raidisseur sans effort normal ($\delta = 0$), nous connaissons la rigidité γ correspondant à un certain coefficient de voilement k et à un certain rapport a/b de la hauteur à la largeur de l'âme, il suffit de s'arranger pour ne pas changer R et obtenir immédiatement la rigidité correspondant à n'importe quelle valeur de δ . Comme nous l'avons fait l'an dernier, on écrit à ce moment, pour R = const.:

$$\gamma_{\delta=0} b \frac{\pi^4}{a^4} = \gamma_{\delta} b \frac{\pi^4}{a^4} - \omega_r k \delta \frac{\pi^4}{a^2 b}$$

ou après simplification:

$$\gamma_{\delta} = \gamma_{\delta=0} + \omega_r k \delta \frac{a^2}{b^2}$$
(17)

En posant $\omega_r = 0.6$ pour le raidisseur au cinquième supérieur (fig. 1), et en partant du tableau nº 11, on obtient immédiatement toutes les valeurs de la rigidité γ du raidisseur, quelles que soient les valeurs du coefficient de voilement γ et l'importance de l'effort normal δ dans le raidisseur. C'est ce que nous avons fait pour $\delta = 0.1$ et $\delta = 0.2$, aux tableaux nº 13 et 14. Auparavant nous avons répété au tableau nº 12 les valeurs déjà données au tableau nº 11 pour $\delta = 0$, mais en nous bornant aux valeurs intéressant le cas $\delta = 0$, à l'exclusion de celles à utiliser pour obtenir les γ correspondant à des $\delta \neq 0$.

On remarquera qu'au tableau nº 10 (dix intervalles le long de la verticale médiane de la fig. 1), nous avons donné trois décimales après la virgule. Au tableau nº 11 (intervalles très serrés), nous avons donné deux décimales seulement après la virgule. Enfin, aux tableaux nº 12, 13 et 14, nous nous sommes contentés d'une seule décimale après la virgule. Cette décimale unique doit correspondre assez bien à la précision du calcul, tout en étant plus que suffisante pour les besoins de la pratique. En ce qui concerne les faibles valeurs de γ , nous nous sommes abstenus de donner une décimale complémentaire, parce que la sensibilité du calcul est plus grande pour les rapports a/b inférieurs à l'unité. Cette sensibilité du calcul correspond d'ailleurs à une sensibilité réelle du système au moindre changement de l'âme et du raidisseur, dès que l'on a affaire à des panneaux hauts et courts. On observera en outre que nous aurions pu nous dispenser des calculs complémentaires avec un plus grand nombre d'intervalles sur la verticale médiane de la figure 1; en effet, la différence à la dernière décimale atteint une unité au plus 17).

 $^{^{17}}$) La dernière décimale est au plus exacte à une unité près. Il suffit en effet d'un très faible changement pour la faire varier. Si par exemple nous arrondissons 5,949 nous obtenons 5,9 tandis que si nous arrondissons 5,949+0,002=5,951, il vient 6,0.

Tableau n 0 12. Rigidité relative γ du raidisseur au cinquième supérieur de l'âme d'une poutre fléchie. Valeurs utilisables pour un raidisseur sans effort normal $(\delta = 0)$

Pour $k = 129,4$	6,9 11,3	17,6	24,7 31,7 37,8	42,0	43,4 * (41,0) (33,6)	(19,9)
$\frac{\text{Pour}}{k = 120}$	5,4 10,0	15,8	22,1 28,1 33,1	36,2	36,3 (32,5) (23,6)	(8,4)
Pour $k = 110$	4,3	13,9	19,3 24,4 28,3	30,1	(28,8) (23,5) (13,1)	
Pour $k = 100$	3,6	12,0	16,7 20,8 23,5	24,1	(21,5) (14,7)	
Pour $k = 90$	2,9	10,2	14,1 17,2 18,8	(18,1)	(14,2)	
Pour $k = 80$	2,4 5,3	8,5	11,5 13,6 14,2	(12,3)	(7,1)	
Pour $k = 70$	1,9	8,9	9,0 10,2 (9,6)	(6,5)		
Pour $k = 60$	1,4	5,1	6,5 $6,7$ $(5,1)$	(0,9)		
Pour $k = 50$	1,0	3,5	4,1 $(3,4)$ $(0,8)$			
Pour $k = 40$	0,6	2,0	(1,7) $(0,2)$			
Pour $k = 30$	0,2	(0,4)				
Pour $k = 20$						
<i>a</i>	0,50	1,00	1,25 1,50 1,75	2,00	2,25 2,50 2,75	3,00

* Valeur maximum de γ pour $k=129,4:\gamma_e=43,4$ avec $\frac{a}{b}=2,23$

Tableau n 0 13. Rigidité relative γ du raidisseur au cinquième supérieur de l'âme d'une poutre fléchie. Valeurs utilisables pour $\delta = 0,1$

,	Pour $k = 30$	Pour $k = 40$	Pour $k = 50$	Pour $k = 60$	Pour $k = 70$	Pour $k = 80$	Pour $k = 90$	Pour $k = 100$	$ Pour \\ k = 110 $	$\begin{array}{c} \text{Pour} \\ k = 120 \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{Pour} \\ k = 129, 4 \end{array}$
$\begin{array}{c c} 0,6 & 1 \\ 1,5 & 2 \end{array}$	1 2	$\frac{1,2}{2,7}$	1,7	2,3 5,3	2,9	3,6 8,0	4,3 9,4	$\frac{5,1}{10,9}$	6,0 12,4	7,2 14,0	8,8
2,2	4	4,4	6,5	8,7	11,0	13,3	15,6	18,0	20,5	23,0	25,4
2,3	ນດັນເ	بن ه	8,8	12,1	15,5	19,0	22,5	26.1 34.3	29,7	33,3 44.3	36,8 49.1
$\begin{array}{c c} (2,1) & (2,2) \\ (3,9) & (3,9) \end{array}$	(8, 8)	· (c)	(10,0)	16,2	22,2	28,9	35,3	41,9	48,5	55,2	61,5
			(7,4)	(15,3)	23,3	31,5	39,7	48,1	56,5	65,0	73,1
			(1,8)	(11,4)	(21,3)	(31,4)	41,5	51,8	62,3	72,8	82,7
-				(3,6)	(15,5)	(27,5)	(39.8)	52,2	64,8	77,5	89,5
					(4,7)	(18,9)	(33,4)	(48,1)	(63,0)	78,0	92,3*
						(4,4)	(21,3)	(38,4)	(55,7)	(73,2)	(86,8)
								(21,6)	(41,5)	(61,6)	(80,8)
									(19,2)	(42,1)	(63,8) (37.4)
											(-(.)

* Valeur maximum de γ pour k = 129,4: $\gamma_e = 92,3$ avec $\frac{a}{b} = 2,77$

Tableau n 0 14. Rigidité relative γ du raidisseur au cinquième supérieur de l'âme d'une poutre fléchie. Valeurs utilisables pour $\delta = 0.2$

Pour $k = 129,4$	10,7	33,1	48,9	85,3	104,1	122,0	138,0	151,0	159,7	162,8*	(146,5)	(124,1)	(89,8)
Pour $k = 120$	9,0	30,2	44,6	77,3	93,8	109,2	122,5	132,5	138,0	(137,7)	(114,1)	(87,7)	
Pour k = 110	7,7	27,1	40,0	68,7	82,9	95,7	106,0	112,9	115,1	(111,2)	(79,9)	(49,3)	
$\frac{\text{Pour}}{k = 100}$	6,6 14,2	24,0	35,4 47,8	60,3	72,1	82,2	89,7	93,5	(92,4)	(85,0) (70.1)	(46,0)		
Pour $k = 90$	5,6 12,4	21,0	30,9	51,9	61,3	689	73,5	74,3	(66,69)	(59,0) (40.4)			
Pour $k = 80$	4,8	18,1	26,5 35,2	43,6	50,7	55,7	57,5	(55,2)	(47,6)	(33,4)			
Pour $k = 70$	4,0 9,0	15,2	$22,1 \\ 29,1$	35,3	40,1	42,6	(41,7)	(36,4)	(25,6)				
Pour $k = 60$	3,2 7,3	12,3	17,8 22,9	27,2	29,7	(29,7)	(26,1)	(17,9)	-				
$\begin{array}{c} \text{Pour} \\ k = 50 \end{array}$	2,5 5,7	9,5	13,5 16,9	19,1	19,4	(16,9)	(10,7)						
$\begin{array}{c} \text{Pour} \\ k = 40 \end{array}$	1,8	6,8	$9,2 \\ 11,0$	11,2	(9,4)	(4,5)						-	
$\frac{\text{Pour}}{k=30}$	1,1 2,5	4,0	5,1 (5,1)	(3,5)		-5.0							
$\frac{\text{Pour}}{k = 20}$	0,4 1,0	1,4	(1,0)										
$\frac{a}{b}$	0,50	1,00	$\frac{1,25}{1,50}$	1,75	2,00	2,25	2,50	2,75	3,00	3,25	3,75	4,00	4,25

* Valeur maximum de γ pour $k=129,4: \gamma_e=162,8$ avec $\frac{a}{b}=3,25$

Ajoutons que, pour passer du tableau nº 11 aux tableaux nº 12, 13 et 14, on a intérêt à calculer uns fois pour toutes les valeurs de l'expression $\omega_r \delta \frac{a^2}{b^2}$ de (17), ce qui se fait aisément sous forme de tableau, comme ci-dessous.

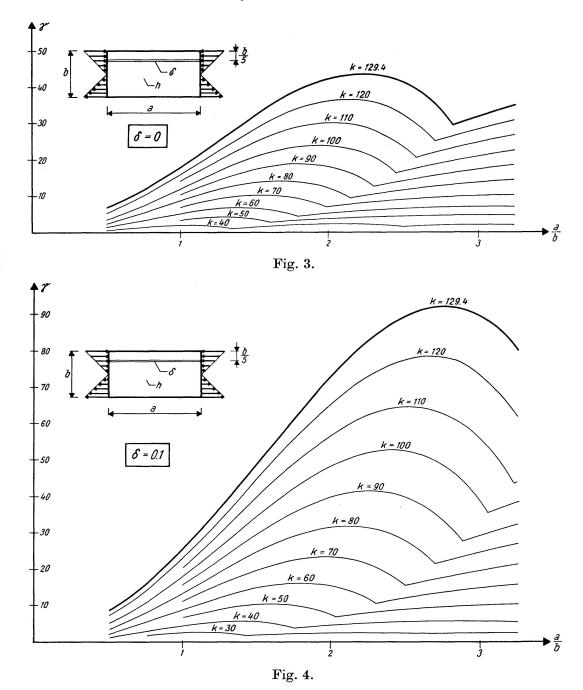
$\begin{array}{ c c c c c c c c c c c c c c c c c c c$	$\begin{array}{ c c c c } pour \\ \delta = 0,2 \end{array}$	$\frac{a}{b}$	$rac{a^2}{b^2}$	$\begin{array}{c} \text{pour} \\ \delta = 0, 1 \end{array}$	$\begin{cases} \frac{a^2}{b^2} \\ \text{pour} \\ \delta = 0, 2 \end{cases}$
$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.015 & 0.030 & 1.75 & 3.0625 & 0.18375 \\ 0.75 & 0.5625 & 0.03375 & 0.0675 & 2 & 4 & 0.24 \end{bmatrix}$			$\frac{9}{10.5625}$	$0,54 \\ \hline 0,63375$	1,08
$\begin{array}{ c c c c c c c c c c c c c c c c c c c$	0,6075	3,5 3,75	12,25	$0,735 \\ 0,84375 \\ \hline 0,96$	1,47

Afin de faciliter la tâche du praticien, les valeurs des tableaux nº 12, 13 et 14 ont été représentées sous forme graphique, aux figures 3, 4 et 5, soit pour $\delta = 0$, $\delta = 0.1$ et $\delta = 0.2$. Nous n'avons pas donné d'autres courbes pour des δ intermédiaires entre $\delta = 0$, $\delta = 0.1$ et $\delta = 0.2$. La chose n'est pas nécessaire, car selon (17), γ varie linéairement avec δ . Pour un a/b et un k fixes, il est donc possible d'interpoler linéairement entre les valeurs données aux tableaux nº 12, 13 et 14 ou aux figures 3, 4 et 5. Mais il est tout aussi rapide et facile de trouver la valeur exacte cherchée à partir du tableau nº 11, en utilisant la relation (17). Dans ce cas les figures 3, 4 et 5 donnent un contrôle bienvenu, destiné à éviter les erreurs grossières. Elles permettent également de se rendre compte si l'on se trouve déjà dans la partie descendante de la courbe, ce que l'on peut faire également en considérant un rapport a/b légèrement différent du rapport réel. Si l'on se trouve vraiment sur la partie descendante de la courbe, l'usage veut que l'on s'en tienne à la valeur maximum de la rigidité γ^{18}). On remplace donc les guirlandes des figures 3, 4 et 5 par des horizontales à partir du maximum, ce qui augmente quelque peu la sécurité 19).

¹⁸⁾ Dans les «Mémoires» de 1957, nous avions calculé, à la page 237, les maxima suivants pour la rigidité «optimum» γ_e correspondant à k=129,4: $\delta=0$ (a/b=2,23; $\gamma_e=43,4$), $\delta=0,02$ (a/b=2,34; $\gamma_e=51,6$), $\delta=0,04$ (a/b=2,45; $\gamma_e=60,5$), $\delta=0,06$ (a/b=2,56; $\gamma_e=70,2$), $\delta=0,08$ (a/b=2,67; $\gamma_e=80,8$), $\delta=0,1$ (a/b=2,77; $\gamma_e=92,3$), $\delta=0,12$ (a/b=2,87; $\gamma_e=104,6$), $\delta=0,14$ (a/b=2,96; $\gamma_e=117,8$), $\delta=0,16$ (a/b=3,06; $\gamma_e=131,9$), $\delta=0,18$ (a/b=3,15; $\gamma_e=146,9$), $\delta=0,2$ (a/b=3,25; $\gamma_e=162,8$).

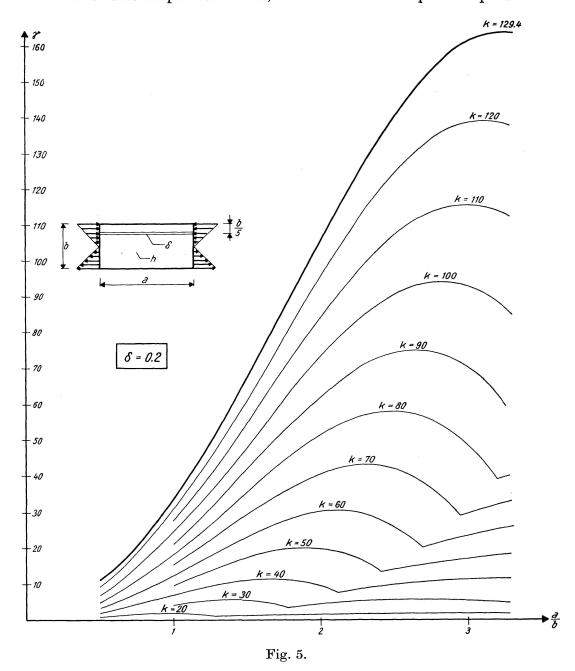
¹⁹) Les valeurs de la rigidité «optimum» γ_e correspondant à k=129,4 ont déjà été données l'an dernier au tableau n° 3, page 237 des «Mémoires». Elles ont été reprises pour $\delta=0$, $\delta=0,1$ et $\delta=0,2$ et figurent aujourd'hui aux tableaux n° 12, 13 et 14. De même les courbes correspondantes de γ_e pour $\delta=0$, $\delta=0,1$ et $\delta=0,2$, données cette années aux figures 3, 4 et 5 (en gras) sont reprises, à une autre échelle, de la figure 2 de l'année passée.

D'autre part, nous avions donné l'an dernier à la figure 3 les courbes du coefficient de voilement k en fonction du rapport a/b pour différents γ et pour $\delta = 0$. C'est sous



Notons encore, qu'en pratique, nous cherchons en règle générale la rigidité γ d'un raidisseur dont nous ignorons la section et par conséquent l'importance

cette forme que l'on donne généralement les résultats des calculs de voilement. La chose est parfaitement logique, tant qu'on utilise le procédé d'Engesser-Vianello par approximations successives, comme nous l'avions encore fait l'an passé, sauf pour la détermination de la rigidité «optimum» γ_e . Les résultats trouvés en 1957 concordent d'ailleurs parfaitement avec ceux calculés cette année de manière différente, étant donné que l'on part dans les deux cas des mêmes équations (11), (12), (14), (15) et (16). On passe évidemment très facilement des courbes de la figure 3 de 1957 aux courbes de la figure 3 de l'actuelle publication, en cherchant, pour $k=10,\,20,\,30\ldots$, sur la figure 3 de 1957, les valeurs de a/b correspondant à $\gamma=10,\,20,\,30\ldots$



δ de l'effort normal. Un tâtonnement s'impose, ce qui se fera facilement en utilisant les figures 3, 4 et 5. Si l'on désire une meilleure précision, on se servira du tableau n⁰ 11 ²⁰) et de la relation (17), toujours par tâtonnement.

²⁰) A titre d'exemple, l'interpolation linéaire donne un γ de 0.5(5.13+6.79)=5.96 pour a/b=1 et k=65. Pour a/b=1.25 et k=65, on trouve 0.5(6.51+8.97)=7.74. Pour a/b=1.125 et k=65 la valeur de γ sera donc de 0.5(5.96+7.74)=6.85.

Par interpolation parabolique (cf. par exemple: Dr. Lothar Schrutka, Leitfaden der Interpolation, Springer-Verlag, Wien 1945, S. 62), on trouve $\gamma = 0.0625 \times 2.30 + 0.5625 \times 3.25 + 0.5625 \times 4.24 - 0.0625 \times 5.27 = 3.740$ pour a/b = 0.75 et k = 65, $\gamma = 5.954$ pour a/b = 1 et k = 65, $\gamma = 7.733$ pour a/b = 1.25 et k = 65 et $\gamma = 8.436$ pour a/b = 1.5 et k = 65. Pour a/b = 1.125 et k = 65, γ vaut alors 6.94.

Résumé

Les auteurs rappellent tout d'abord les relations de statique appliquée données dans les «Mémoires» de 1957 pour traiter le problème du voilement de l'âme des poutres fléchies, avec raidisseur horizontal.

Ils traitent ensuite un exemple numérique complet de panneau soumis à la flexion pure et raidi au cinquième supérieur.

Enfin, ils donnent, sous forme de tables et de courbes, tous les résultats trouvés et la manière de s'en servir pour traiter facilement tous les cas intermédiaires.

Zusammenfassung

Die Verfasser geben zuerst die schon in den «Abhandlungen» 1957 veröffentlichten baustatischen Gleichungen über die Biegungsbeulung der waagrecht versteiften Stegbleche wieder.

Nachher behandeln sie ein vollständiges Beispiel eines auf reine Biegung beanspruchten Balkenfeldes.

In Form von Tabellen und Kurven werden sodann sämtliche Ergebnisse zusammengefaßt, mit den nötigen Angaben für die Behandlung von Zwischenwerten.

Summary

At first, the authors recall the formulas of applied statics given in the «Publications» of 1957 in relation to the problem of the buckling of sagging beams with horizontal stiffener.

Next they solve a complete numerical example of a panel submitted to pure bending and stiffened in the top fifth of the web.

Finally they give, by way of charts and plottings, all the obtained results, and they show how to use them for the easy treatment of all intermediate cases.