

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

**Band:** 17 (1957)

**Artikel:** Méthode de calcul pratique d'une poutre échelle à traverses situées hors du plan moyen des membrures

**Autor:** Géminard, L.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-15753>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 21.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## **Méthode de calcul pratique d'une poutre échelle à traverses situées hors du plan moyen des membrures**

*Methode zur praktischen Berechnung eines Vierendeelträgers mit außerhalb der Mittalebene der Gurtungen angeordneten Pfosten*

*Practical Method for Calculating a Lattice Girder with Transverse Bracing Located Outside the Median Plane of the Members*

L. GÉMINARD, Prof. à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs d'Arts et Métiers, Paris

### **Objet du problème**

Une poutre réalisée suivant le croquis de la fig. 1 doit résister à une force horizontale appliquée dans le plan des membrures.

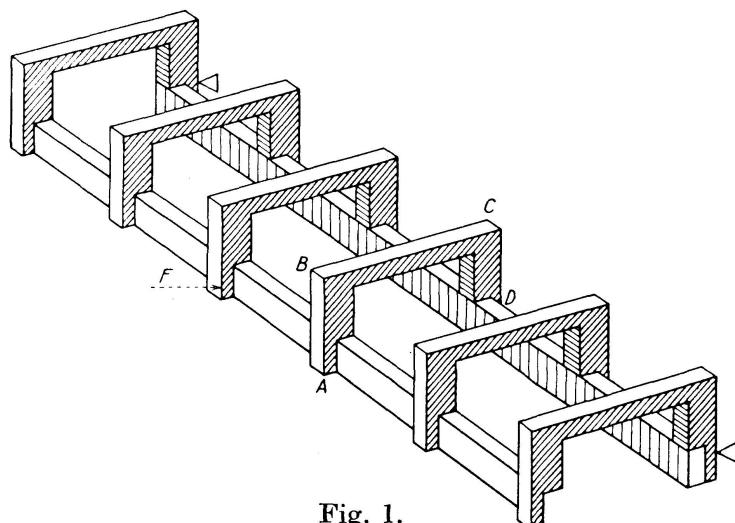


Fig. 1.

Les appuis d'extrémités donnent les réactions assurant l'équilibre de l'ensemble.

Aucun contreventement triangulé ne doit exister.

### Méthode adoptée

Les encastrements des montants tels que  $AB$  et  $CD$  sur les membrures et la traverse  $BC$ , la raideur à la torsion de ces montants, leur résistance à la flexion et la résistance à la flexion horizontale des traverses doivent suffire à assurer l'indéformabilité.

Aucun flambage de barre ne doit se produire.

La déformation horizontale de l'ensemble se produit comme si l'on avait à faire à une poutre échelle coplanaire, à traverses de raideurs plus faibles que les raideurs des barres  $BC$ . En effet la torsion des montants modifie la déformation angulaire horizontale. De plus les déplacements horizontaux de nœuds se faisant face sont inégaux du fait de la flexion dans un plan vertical du portique  $ABCD$ .

On peut donc:

1. Chercher une poutre échelle coplanaire équivalente dont on doit déterminer
  - a) les coefficients de répartition,
  - b) les coefficients de report.
2. Etudier la flexion des portiques  $ABCD$  dans leur plan moyen vertical.

### I. Coefficients de répartition des moments à un nœud

voir fig. 2

#### *Hypothèses*

$I$  et  $J$  sont supposés des encastrements parfaits. Les barres sont à inertie constante.

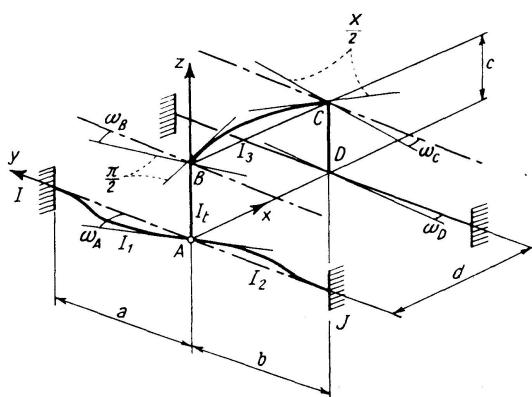


Fig. 2.

$D$  est un encastrement parfait, donc l'angle de torsion de  $DC$  en  $D$ :  $\omega_D = 0$ .

Les nœuds sont réalisés de façon telle que toute déviation angulaire soit également subie par les barres y abondissant.

*Données*

Un couple  $C$  à axe vertical agit sur le nœud  $A$ :

Ce nœud tourne de  $\omega_A$ .

Les barres  $A I$  et  $A J$  fléchissent.

La barre  $A B$  se tord.

Le nœud  $B$  tourne de  $\omega_B < \omega_A$ .

La barre  $BC$  fléchit horizontalement.

Le nœud  $C$  tourne de  $\omega_C$ .

La barre  $CD$  se tord.

Le nœud  $D$  ne subit aucune déformation angulaire.

*Problème*

Comment le couple  $C$  se répartit-il entre les barres?

*Solution*

On connaît les relations classiques suivantes: L'action du nœud  $A$  sur la barre  $A I$  est:

$$M_{AI} = \frac{2EI_1}{a} 2\omega_A.$$

L'action du nœud  $A$  sur la barre  $A J$  est:

$$M_{AJ} = \frac{2EI_2}{b} 2\omega_A.$$

En ce qui concerne l'action du nœud  $A$  sur le portique  $ABCD$ , on peut écrire:

$$M_{ABCD} = k \cdot 2\omega_A.$$

Le nœud  $A$  doit être en équilibre donc

$$C - M_{AI} - M_{AJ} - M_{ABCD} = 0$$

d'où, en remplaçant les valeurs des  $M$  par leurs expressions on obtient les coefficients de répartition ci-dessous:

$$\begin{aligned} \frac{M_{AI}}{C} &= \frac{\frac{2EI_1}{a}}{\frac{2EI_1}{a} + \frac{2EI_2}{b} + k} = r_{AI}, \\ \text{en posant } &\frac{2EI_1}{a} + \frac{2EI_2}{b} + k = \Delta, \\ \frac{M_{AJ}}{C} &= \frac{\frac{2EI_2}{b}}{\Delta} = r_{AJ}, \\ \frac{M_{ABCD}}{C} &= \frac{k}{\Delta} = r_{ABCD}. \end{aligned} \tag{1}$$

Dans ces expressions  $k$  est inconnu.

*Valeur de k*

Pour l'obtenir il suffit d'étudier les déformations du portique  $ABCD$ .

La torsion de  $AB$  est  $\theta = \omega_A - \omega_B = \frac{M_{ABCD} \cdot C}{G I_t}$ .

La barre traverse  $BC$  reçoit un moment  $M_{BC}$  transmis par le montant et égal à  $M_{ABCD}$ . Cette barre fléchit horizontalement et

$$M_{BC} = M_{ABCD} = \frac{2 E I_3}{d} (2 \omega_B + \omega_C)$$

or  $\omega_B = +\omega_A - \theta$

donc  $M_{BC} = M_{ABCD} = \frac{2 E I_3}{d} (2 \omega_A + \omega_C - 2 \theta)$ .

Un moment de flexion prend naissance en  $C$  et vaut

$$M_{CB} = \frac{2 E I_3}{d} (2 \omega_C + \omega_B)$$

ou

$$M_{CB} = \frac{2 E I_3}{d} (2 \omega_C + \omega_A - \theta).$$

Le moment  $M_{CD}$  est, pour le montant  $CD$  un moment de torsion, donc

$$\theta_1 = \omega_D - \omega_C = 0 - \omega_C = \frac{M_{CB} \cdot C}{G I_t}.$$

De ces diverses relations on déduit:

$$M_{BC} = M_{ABCD} = \frac{2 E I_3}{d} \frac{1 + 3 k'}{1 + 8 k' + 12 k'^2} 2 \omega_A,$$

$$M_{CB} = \frac{2 E I_3}{d} \frac{1}{1 + 8 k' + 12 k'^2} \omega_A = M_D,$$

avec

$$k' = \frac{E I_3 \cdot C}{G I_t \cdot d} \quad (2)$$

La raideur  $k$  du portique  $ABCD$  est donc

donc

$$k = \frac{2 E I_3}{d} \frac{1 + 3 k'}{1 + 8 k' + 12 k'^2} \quad (3)$$

Les coefficients de répartition des moments à un nœud sont donc entièrement définis.

**II. Coefficients de report des moments d'un nœud au nœud voisin**

Pour les barres  $AI$  et  $AJ$  des membrures le résultat classique est immédiatement applicable

$$M_{IA} = \frac{1}{2} M_{AI},$$

$$M_{JA} = \frac{1}{2} M_{AJ}.$$

Pour le portique  $A B C D$  le coefficient de report n'est autre que le rapport des moments

$$\frac{M_D}{M_{ABCD}} = \frac{M_{CB}}{M_{BC}} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + 3 k'}.$$

Les coefficients de report sont donc:

$$\begin{aligned} \text{pour les membrures: } & \frac{1}{2}, \\ \text{pour le portique: } & \frac{1}{2} \frac{1}{1 + 3 k'}. \end{aligned} \tag{4}$$

### III. Flexion verticale du portique

#### *Hypothèses*

Les longueurs  $a$  et  $b$  des membrures sont égales ainsi que les inerties  $I_1$  et  $I_2$ :

$I$  et  $J$  sont des encastrements parfaits.

La torsion des membrures est négligée.

Les noeuds  $B$  et  $C$  sont tels que les angles  $B$  et  $C$  sont toujours constants et égaux à  $\frac{\pi}{2}$ .

#### *Données*

Une force horizontale  $F$  est exercée dans le plan  $A B C D$  en  $A$  (fig. 3).

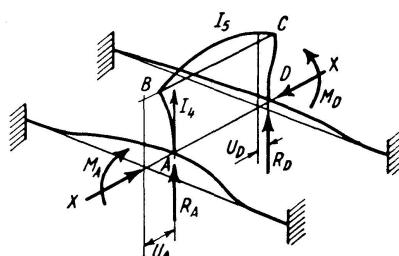


Fig. 3.

#### *Problème*

Le portique se déforme:

L'enca斯特rement  $A$  se déplace horizontalement de  $u_A$  sans tourner (torsion nulle des membrures).

L'enca斯特rement  $D$  se déplace horizontalement de  $u_D$  sans tourner.

Des réactions  $X$ ,  $M_A$ ,  $M_D$ ,  $R_A$ ,  $R_D$  prennent naissance.

Déterminer les relations entre ces inconnues.

#### *Solution*

Les déplacements  $u_A$  et  $u_D$  sont des flèches pour les barres  $I J$  et  $K L$  encastrées à leurs extrémités et chargées respectivement en leur milieu de  $F - X$  et  $X$ .

Donc

$$u_A = \frac{(F - X) a^3}{24 E I_1},$$

$$u_D = \frac{X a^3}{24 E I_1}.$$

Le portique  $A B C D$  étant en équilibre:

$$\begin{aligned} R_A + R_D &= 0, \\ M_A + M_D - R_A \cdot d &= 0. \end{aligned}$$

D'autre part les équations de déformation de ce portique sont

$$\begin{aligned} \omega_D = 0 &= \omega_A - \int_{\widehat{ABCD}} \frac{M_f}{E I} ds = 0 - \int_{\widehat{ABCD}} \frac{M_f}{E I} ds, \\ v_D = 0 &= v_A - \int_{\widehat{ABCD}} \frac{M_f (x_D - x)}{E I} ds = 0 \int_{\widehat{ABCD}} \frac{M_f (x_D - x) ds}{E I}, \end{aligned}$$

( $v$  désignant les déplacements verticaux)

$$u_D = u_A + \int_{\widehat{ABCD}} \frac{M_f (y_D - y) ds}{E I}.$$

Ces diverses relations permettent de trouver les expressions suivantes:

$$u_A = u_D \left( 1 - \frac{24 \theta \cdot I_1}{a^3} \right),$$

avec  $\theta = \frac{\beta}{\gamma} \frac{c^2}{I_4} (1 + R) + \frac{c^2 d}{2 I_4} \left[ \frac{2 c (1 + R)^2}{d (2 + R)} - \frac{2 \beta (1 + R)}{\gamma d} \right] - \frac{c^3}{I_4} \left( \frac{2}{3} + R \right)$

où  $\beta = \frac{c^2}{I_4} \left[ \frac{d}{2} + \frac{d R}{2} - \frac{(1 + R) R d}{3 (2 + R)} \right]$ , (5)

$$\gamma = \frac{c}{I_4} \left[ d + \frac{d R}{2} - \frac{(2 + R) R d}{3 (2 + R)} \right]$$

et  $R = \frac{I_4}{c} \frac{d}{I_5}$ .

$I_5$  est l'inertie à la flexion verticale de  $B C$ .

$I_4$  est l'inertie à la flexion dans un plan vertical, de  $A B$  et  $C D$ .

On obtient aussi

$$u_D = \frac{X a^3}{24 E I_1},$$

$$M_A = -X \frac{\beta}{\gamma},$$

$$R_A = 0,$$

$$X = \frac{F a^3}{2 a^3 - 24 \theta I_1}.$$

(6)

#### IV. Conséquence. Méthode pratique

Déterminer les inerties de flexion et torsion des diverses barres.

Calculer les coefficients  $k, k', \theta$  (donc  $\beta, \gamma, R$ ).

a) *Soumettre l'ensemble au calcul par relaxation.* On peut: déplacer un nœud  $A$  d'une quantité arbitraire  $u_{A_r}$  en déduire le déplacement du nœud  $D$  d'après la 1<sup>re</sup> relation (5).

Calculer les moments d'encastrements parfaits en  $I, J, K, L, A, D$  pour la flexion horizontale.

Ces moments valent:  $\frac{6EI}{a}u$ ,  $u$  valant soit  $u_A$  soit  $u_D$ .

Répartir ces moments entre les barres proportionnellement aux raideurs données par (1).

Faire les reports de moments compte tenu des coefficients de report donnés en (4).

Ce calcul se fera par un tableau de Cross habituel.

Calculer les efforts tranchants.

En procédant ainsi pour chaque panneau et en écrivant les équations d'équilibre des panneaux on détermine les déplacements arbitraires d'où les diagrammes des moments fléchissants et efforts tranchants de flexion horizontale.

b) Etudier la flexion verticale du portique directement chargé au moyen des relations (5) et (6).

Combiner pour les portiques les effets de torsion, flexion horizontale et flexion verticale.

#### Application

Vérifier les membrures enfin en adoptant un moment de torsion égal à  $M_t$ .

La méthode ainsi établi a été appliquée à une ossature du type fig. 1:

$$I_1 = 3922 \text{ cm}^4.$$

Le portique avait des montants en caisson de forme générale trapézoïdale de  $A$  en  $B$  (fig. 4). L'inertie de torsion a été déduite de la formule classique:

$$\frac{d(\theta_{torsion})}{dz} = \frac{M_t}{4C \cdot G} \left[ \frac{L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3}{L_2 S_1^2 + L_1 S_2^2 + L_3 (S_1 + S_2)^2} \right],$$

appliquée à la section variable

en calculant

$$\theta_t = \frac{M_t}{2C \cdot G} \int_{A \text{ à } B} [\text{crochet}] dz$$

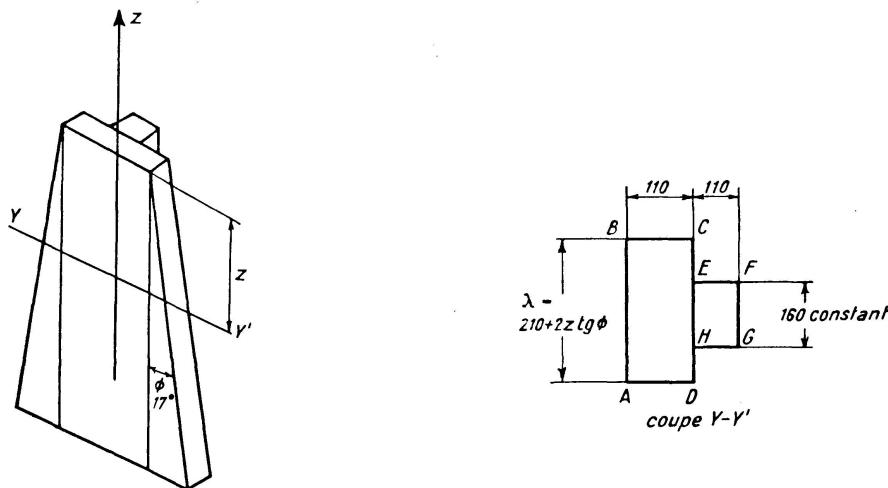
on obtenait finalement

$$I_t = 5100 \text{ cm}^4$$

avec  $\left\{ \begin{array}{l} I_3 = 3250 \text{ cm}^4 \\ a = 230 \text{ cm} \\ c = 51,5 \text{ cm} \\ d = 268,5 \text{ cm} \end{array} \right.$

on trouve

$$k' = 0,305.$$



Aire limitée par  $ABCD$ :  $S_1$

Aire limitée par  $EFGH$ :  $S_2$

Périmètre  $ECBADH$ :  $L_1$

Longueur  $HE$ :  $L_3$

Longueur ou périmètre  $EFGH$ :  $L_2$

Caisson en tôle d'épaisseur uniforme  
5 mm

Fig. 4

D'où finalement les *coefficients de répartition*:

barres $A I$ et $A J$	portique $ABCD$
0,435	0,13

Il est à noter ici que si la raideur de la traverse  $BC$  n'était pas fictivement diminuée par la déformation de torsion des montants, sa raideur serait comparable à celle des membrures.

La diminution de rigidité de l'ensemble dépend en définitive de  $k'$ . On peut vérifier que si  $k' \leq 0,1$  cette diminution de rigidité (due à la torsion des montants) est faible.

Les coefficients de report sont:

$\frac{1}{2}$  pour les membrures,  $\frac{1}{3,82}$  pour la traverse fictive remplaçant (ou équivalente) à  $ABCD$ . Si  $k'$  était égal à 0,1 au lieu de valoir 0,305 ce coefficient de report serait  $\frac{1}{2,6}$  et la traverse fictive serait presque identique à la barre  $BC$ .

Les valeurs de  $I_4$  et  $I_5$  sont:

$$\begin{array}{l|l} I_4 = 3828 \text{ cm}^4 & (\text{Inerties relatives à la flexion du} \\ I_5 = 1905 \text{ cm}^4 & \text{portique dans le plan vertical.}) \end{array}$$

D'où

$$\beta = 470, \quad \gamma = 9,95, \quad \theta = -20$$

et

$$\begin{aligned} u_A &= u_D \cdot 1,15, \\ X &= -15000 u_D \text{ kgf}, \\ M_A &= 710000 u_D \text{ cm kgf}. \end{aligned}$$

La méthode de Cross appliquée à une poutre à 5 panneaux avec les coefficients qu'on vient de donner et un chargement symétrique a donné les résultats suivants pour des extrémités de poutre supposées parfaitement encastrées.

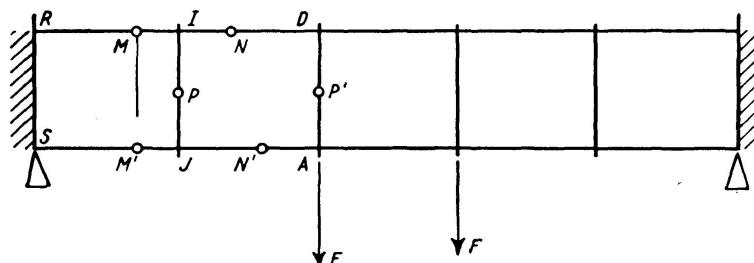


Fig. 5

Les points d'inflexion des déformées sont

$$M \text{ et } M' \text{ tels que } \frac{MR}{MI} = \frac{M'S}{M'J} = 4,3,$$

$$N \text{ et } N' \text{ tels que } \frac{NI}{ND} = 0,73, \quad \frac{N'J}{N'A} = 0,46,$$

pour les montants

$$\frac{PI}{PJ} = 0,95 \quad \text{et} \quad \frac{P'D}{P'A} = 0,86.$$

Du fait de l'enca斯特rement parfait aux extrémités de la poutre et de la diminution de raideur par torsion des montants  $AB$  et  $CD$ , les points d'inflexion  $M$  et  $M'$  se rapprochent de  $I$  et  $J$ .

Les moments de flexion dans un plan horizontal sont maxima en  $R$ ,  $S$ ,  $A$  et  $D$

$$\begin{array}{ll} M_{RI} \cong 99 \cdot F & M_{SJ} \cong 108 \cdot F \\ M_{AJ} \cong 77 F & M_{DI} \cong 69 F \end{array}$$

Les déplacements des nœuds sont

$$\begin{aligned} u_D &= 40 \cdot 10^{-6} \cdot F, \text{ cm} & u_A &= 1,15 u_D \\ u_I &= 18 \cdot 10^{-6} \cdot F, \text{ cm.} \end{aligned}$$

La flexion du portique dans le plan vertical fait apparaître des contraintes assez faibles.

La torsion des montants atteint au maximum  $\frac{1}{10}$  de degré.

### Résumé

Deux membrures parallèles définissant un plan  $P$ , sont réunies par une suite de portiques dont les plans moyens sont perpendiculaires au plan  $P$  et aux membrures (fig. 1).

La poutre ainsi formée est chargée dans le plan  $P$ , perpendiculairement aux membrures, par des charges fixes ou roulantes. On désire que sa stabilité soit satisfaisante sans qu'il soit nécessaire de prévoir des barres diagonales de contreventement.

L'ensemble ne constitue pas un système plan. La flexion de cette structure se complique du fait que les montants des divers portiques sont sollicités en torsion et flexion, leurs traverses sont soumises à une flexion gauche et les membrures elles-mêmes sont soumises à une sollicitation de torsion, leurs flèches dans le plan  $P$  étant de plus inégales.

L'idée directrice de la méthode approchée, consiste à tenir compte de ces divers phénomènes de façon à ramener le problème, avec une marge d'erreur acceptable pour les besoins de la construction, à celui d'une poutre Vierendeel classique à membrures parallèles.

### Zusammenfassung

Zwei in einer Ebene  $P$  liegende parallele Gurtungen sind durch eine Reihe Rahmen, deren Mittelebenen senkrecht zur Ebene  $P$  und zu den Gurtungen stehen, verbunden (Fig. 1).

Der so entstandene Träger wird in der Ebene  $P$ , senkrecht zu den Gurtungen durch ruhende oder bewegliche Lasten belastet. Man wünscht, daß seine Stabilität auch ohne Ausfachung durch Diagonalen genügend groß sei.

Das Ganze stellt kein ebenes System dar. Die Biegung dieses Tragwerks kompliziert sich durch die Tatsache, daß die Pfosten der verschiedenen Rahmen sowohl auf Torsion wie auf Biegung, ihre Riegel auf schiefe Biegung und die Gurtungen selbst auf Torsion beansprucht werden. Die Durchbiegungen der Gurtungen in der Ebene  $P$  sind ungleich.

Die Grundidee der Näherungsberechnung besteht darin, das Problem unter Berücksichtigung all dieser verschiedenen Einflüsse, bei Einhaltung eines für die Konstruktionspraxis tragbaren Fehlers, auf den klassischen Vierendeelträger mit parallelen Gurtungen zurückzuführen.

### Summary

Two parallel members defining a plane  $P$ , are joined by a series of portal frames having their median planes perpendicular to the plane  $P$  and to the members (fig. 1).

The girder thus formed is loaded in the plane  $P$ , perpendicularly to the members, by static or moving loads. The girder is required to have adequate stability without it being necessary to provide diagonal wind-bracing.

The assembly does not constitute a plane system. The deflection of this structure is complicated by the fact that the uprights of the various portal frames are subjected to both torsional and bending stresses, their transverse bracing is subjected to a skew bending and the members themselves are subjected to a torsional stress, and furthermore their deflections in the plane  $P$  are unequal.

The guiding principle of the approximation method consists in taking these various phenomena into account in order to reduce the problem, with a margin of error that is reasonable for the purposes of construction, to that of a conventional Vierendeel girder with parallel members.

**Leere Seite**  
**Blank page**  
**Page vide**