

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen  
**Band:** 17 (1957)

**Artikel:** Le voilement de l'âme des poutres fléchies, avec raidisseurs au cinquième supérieur  
**Autor:** Stüssi, F. / Dubas, Charles / Dubas, Pierre  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-15763>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# **Le voilement de l'âme des poutres fléchies, avec raidisseur au cinquième supérieur**

*Biegungsbeulung der im oberen Fünftel versteiften Stegbleche*

*The Buckling of the Webs of Sagging Beams Having Stiffeners in the Top Fifth of the Web*

F. STÜSSI, Ing. Dr. sc. techn., Prof. à l'E.P.F., Zürich, Président de l'AIPC, et  
CHARLES et PIERRE DUBAS, Ings. Drs sc. techn., Ateliers de Constructions  
Mécaniques de Vevey, Bulle et Vevey

## **Introduction**

Au début de 1957, nous avons décidé de reprendre ensemble et de compléter nos études au sujet du voilement des tôles<sup>1)</sup>, notamment en ce qui concerne l'âme des poutres fléchies, avec raidisseur au cinquième supérieur.

Le but de ce travail était multiple. Il s'agissait tout d'abord de tenir compte plus exactement qu'en 1948 et 1954 de l'effort concentré du raidisseur. Il s'agissait ensuite de compléter les résultats déjà obtenus en 1948 et 1954, en considérant en particulier des tôles sensiblement plus longues qu'à l'époque. Nous voulions en troisième lieu examiner de manière très complète la précision de la méthode de statique appliquée, utilisée en 1948 et 1954 avec dix intervalles. Pour cela, nous devions en étudier la convergence avec un plus grand nombre d'intervalles pour établir une formule de correction. Cette question

---

<sup>1)</sup> F. STÜSSI, Berechnung der Beulspannungen gedrückter Rechteckplatten. Abhandlungen I. V. B. H. 1947, S. 237.

CH. DUBAS, Contribution à l'étude du voilement des tôles raidies. Sous ce titre a paru dans la Publication préliminaire au Congrès de Liège 1948 de l'A.I.P.C. un résumé de l'étude plus importante parue également en 1948 comme N° 23 des Publications de l'Institut de Statique appliquée, Edition Leemann, Zürich.

CH. DUBAS, Le voilement de l'âme des poutres fléchies et raidies au cinquième supérieur. Mémoires A.I.P.C. 1954, p. 1.

P. DUBAS, Calcul numérique des plaques et des parois minces, N° 27 des Publications de l'Institut de Statique appliquée, Edition Leemann, Zürich 1955, p. 121 (Voilement des tôles).

nous paraissait spécialement importante pour la double onde transversale, dont la partie supérieure n'avait été décrite que par un seul point intermédiaire<sup>2)</sup>. Enfin il s'avérait utile de comparer les diverses manières d'appliquer la méthode utilisée jusqu'ici par nous en matière de voilement, spécialement en ce qui concerne la double onde transversale.

Après une introduction théorique, nous allons donner dans le présent article un aperçu des résultats obtenus jusqu'ici. Une publication plus importante paraîtra lorsque notre étude sera complètement terminée.

### Equation différentielle lors du voilement

Rappelons<sup>3)</sup> pour commencer l'équation différentielle de la plaque fléchie sous une charge  $p$ . En désignant par  $w$  la flèche en un point quelconque d'abscisse  $x$  et d'ordonnée  $y$ , cette équation différentielle s'écrit:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \quad (1)$$

où  $D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$ ,  $h$  désignant l'épaisseur de la plaque et  $\nu$ , la contraction latérale.

Si la tôle est sollicitée uniquement par des efforts de bout (fig. 1), ces derniers engendrent lors du voilement un effort de déviation en chaque point. Comme on le sait, cet effort, perpendiculaire au plan de la tôle, vaut<sup>3)</sup>:

$$p_t = -\sigma_x \cdot h \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (2)$$

Le raidisseur longitudinal en contact avec la tôle sur une largeur  $c$  s'oppose (fig. 1), de par sa rigidité  $J_r$ , aux efforts élastiques précédents. Il s'ensuit un effort en sens opposé, qui vaut<sup>3)</sup>:

$$p_{rF} = -\frac{E J_r}{c} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}. \quad (3)$$

Si le raidisseur est correctement lié à la tôle, il subit les mêmes contraintes longitudinales. Vu sa tendance à flamber par suite de ces efforts, le raidisseur engendre un effort complémentaire  $p_{rN}$ , agissant en sens inverse de  $p_{rF}$  et réduisant dès lors l'action raidissante du raidisseur. Si  $F_r$  désigne la section du raidisseur, l'effort  $p_{rN}$  s'écrit:

$$p_{rN} = -\sigma_x \frac{F_r}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (4)$$

<sup>2)</sup> Publication N° 23 précitée, p. 99, fig. 40.

<sup>3)</sup> Voir par exemple S. TIMOSHENKO, Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, New York and London 1936, ou la traduction française, Théorie de la Stabilité élastique, parue en 1943 chez Béranger, Paris et Liège. Voir aussi les chapitres I et III de la publication N° 23, citée à la note 1, où l'équation différentielle a été établie également dans le détail.

Utilisons maintenant la notation<sup>4)</sup>:

$$\sigma_x = \omega \cdot \sigma_{x_{max}} = \omega \cdot k \cdot \sigma_e \quad (5)$$

où  $\sigma_e$  est une contrainte *fictive* appelée «eulérienne», c'est-à-dire critique, d'une bande de tôle de largeur égale à l'unité (fig. 1), soit  $\sigma_e = \frac{\pi^2 D}{h b^2}$ , d'où

$$\sigma_x = \omega \cdot k \frac{\pi^2 D}{h b^2}. \quad (6)$$

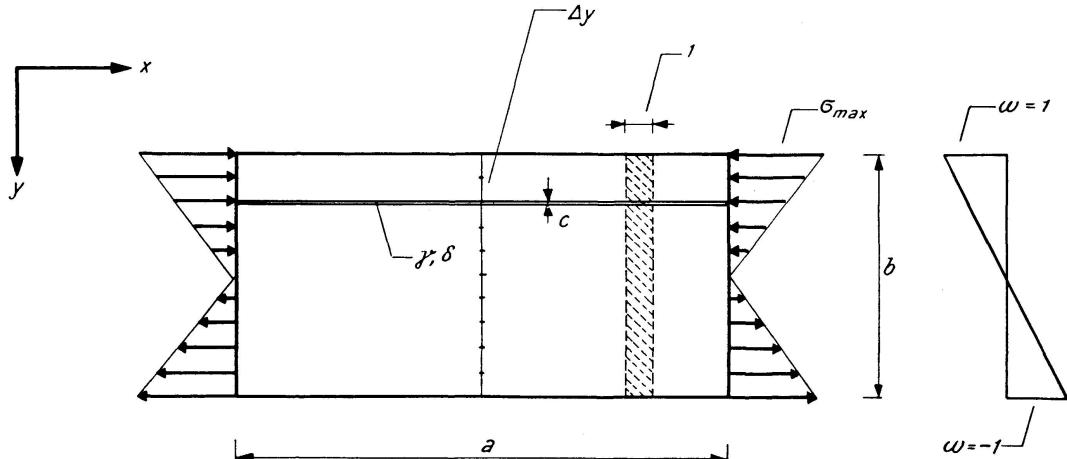


Fig. 1.

En introduisant la charge (2) dans l'équation différentielle (1), on obtient, compte tenu de la notation (5), l'équation différentielle suivante, *en pleine tôle*:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\omega \cdot k \frac{\pi^2}{b^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (7)$$

Au droit du raidisseur, en contact avec la tôle sur une largeur  $c$ , il faut ajouter les charges transversales (3) et (4). Nous utilisons dans ce cas les abréviations bien connues

$$\gamma = \frac{E J_r}{D b} \quad (8) \quad \text{et} \quad \delta = \frac{F_r}{b h} \quad (9)$$

Il s'ensuit l'équation différentielle:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\omega_r k \frac{\pi^2}{b^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \gamma \frac{b}{c} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \omega_r k \delta \frac{\pi^2}{b c} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (10)$$

où  $\omega_r$  se rapporte à la contrainte longitudinale du raidisseur.

<sup>4)</sup> Nous signalerons au fur et à mesure les quelques divergences d'écriture d'avec les publications précédentes, pour éviter toute confusion.

Rappelons maintenant que, dans le sens longitudinal (fig. 1), la déformation lors du voilement est une sinusoïde, si les efforts de bout sont répartis linéairement. On écrit généralement  $w = w_m \cdot \sin \frac{m\pi x}{a}$ . Pour simplifier l'écriture, remplaçons  $w_m$ , valeur maximum de  $w$  au sommet de la sinusoïde, par  $\eta$  et supprimons le nombre entier  $m$  en ne considérant plus qu'une déformation avec onde unique. S'il y avait plusieurs ondes, il suffirait de juxtaposer de nouvelles tôles semblables à celles que l'on vient de considérer. Nous écrivons donc<sup>5)</sup>:

$$w = \eta \cdot \sin \frac{\pi x}{a}. \quad (11)$$

Si l'on utilise les abréviations classiques  $\eta''' = \frac{\partial^4 \eta}{\partial y^4}$  et  $\eta'' = \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}$ , l'équation différentielle du voilement *en pleine tôle* (7) devient alors, après division par  $\sin \frac{\pi x}{a}$ <sup>6)</sup>:

$$\boxed{\eta''' - \frac{2\pi^2}{a^2} \eta'' + \frac{\pi^4}{a^4} \eta = \omega \cdot k \frac{\pi^4}{a^2 b^2} \eta} \quad (12)$$

*Au droit du raidisseur*, il vient:

$$\boxed{\eta''' - \frac{2\pi^2}{a^2} \eta'' + \frac{\pi^4}{a^4} \eta = \omega_r \cdot k \frac{\pi^4}{a^2 b^2} \eta - \frac{1}{c} \left( \gamma \cdot b \frac{\pi^4}{a^4} - \omega_r \cdot k \cdot \delta \frac{\pi^4}{a^2 b} \right) \eta} \quad (13)$$

Pour faciliter aussi bien le raisonnement que les calculs et afin de permettre plus tard l'utilisation de la méthode d'Engesser-Vianello par approximations successives, nous renonçons pour l'instant à passer le second membre dans le premier et à mettre sous une parenthèse commune tous les termes en  $\eta$ .

<sup>5)</sup> Dans la Publication N° 23 de la note 1,  $w_m = \eta$  a été écrit dans le stade final, tout simplement  $w$ , sans indice.

Si les efforts de bout ne sont pas répartis linéairement, la relation (11) ne sera plus applicable, à cause du second membre de (7) dans lequel  $\omega$  varie sur une droite d'ordonnée  $y$  constante. On sait en effet que seule une répartition linéaire satisfait l'équation différentielle du problème des parois minces, sans changer d'un bord à l'autre. Ce sont les exemples que l'on trouve généralement dans les traités. (Cf. S. TIMOSHENKO, Theory of Elasticity, McGraw-Hill, New York and London 1934, p. 27 ou la traduction française publiée en 1948 chez Béranger sous le titre Théorie de l'Elasticité). Toute répartition non linéaire des contraintes sur les bords tend au milieu de la tôle vers une répartition linéaire. Un exemple caractéristique a été donné à la fig. 35, p. 132 de la Publication N° 27 citée à la note 1.

<sup>6)</sup> Pour retrouver (12) à partir de l'équation (6) de 1947 (note 1), il faut remplacer  $\beta$  par sa valeur  $\frac{mb}{a}$ , soit  $\frac{b}{a}$  pour  $m=1$ ,  $\mu = \frac{\pi^2 \beta^2}{b^2}$  par  $\frac{\pi^2}{a^2}$  et  $\varphi$  par  $\omega$ .

### La statique appliquée à la résolution des équations différentielles

Rappelons tout d'abord l'équation différentielle de la poutre fléchie, liant les flèches  $w$  et les charges  $p$ :

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{p}{EJ}. \quad (14)$$

On sait que cette équation (14) correspond à l'équation différentielle (1) de la plaque fléchie et qu'elle s'obtient en combinant les deux relations différentielles de base de la statique des poutres:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -p, \quad (15)$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{EJ}. \quad (16)$$

On sait par ailleurs que (15) résulte également de la combinaisons des deux relations différentielles suivantes:

$$\frac{d M}{dx} = Q, \quad (17)$$

$$\frac{d Q}{dx} = -p. \quad (18)$$

Ceci dit, notre but est de transformer, par la statique appliquée, les équations différentielles (12) et (13) en un système d'équations numériques. Pour ce faire, nous partirons d'un problème analogue plus simple, celui de la poutre fléchie. Nous chercherons donc tout d'abord une relation numérique entre les moments fléchissants et la charge d'une poutre et transformerons l'équation différentielle (15) en un système d'équations numériques. Nous passerons immédiatement à la relation entre les flèches et les moments fléchissants d'une poutre. La chose est facile, puisque (15) et (16) ont la même forme (analogie de Mohr). Par combinaison on obtiendra la relation numérique cherchée entre les flèches et les charges en lieu et place de (14).

Dès lors, on peut résoudre facilement toute équation différentielle contenant à la fois  $\frac{d^4 w}{dx^4}$  et  $w$ . En effet, il suffit pour cela de remplacer  $p$  par  $w$  dans la relation numérique trouvée pour l'équation différentielle (14). Si l'équation différentielle contenait à la fois  $\frac{d^2 w}{dx^2}$  et  $w$ , on ferait de même, mais en considérant (16) avec  $w$  à la place de  $M$ .

Enfin, si l'équation différentielle à résoudre contenait en même temps  $\frac{d^4 w}{dx^4}$ ,  $\frac{d^2 w}{dx^2}$  et  $w$ , on cumulerait simplement les expressions numériques remplaçant  $\frac{d^4 w}{dx^4}$  dans (14),  $\frac{d^2 w}{dx^2}$  dans (16) et  $w$  remplaçant  $p$  ou  $w$  remplaçant  $M$  dans (14) ou (16). Pour cela il faut évidemment que les expressions numériques remplaçant  $p$  qui devient  $w$  dans (14) et  $M$  qui devient  $w$  dans (16) aient été obtenues de la même façon. Comme il en sera bien ainsi, rien ne s'opposera plus à cette manière de faire et l'on aboutira ainsi à une relation numérique en lieu et place des équations différentielles (12) et (13).

Avant d'aborder le calcul numérique proprement dit, quatre remarques

nous paraissent nécessaires. Pour commencer, il faut observer que l'on pourrait procéder d'un seul coup sur les équations différentielles (12) et (13), sans passer auparavant par les problèmes les plus simples.

On remarquera en second lieu que tous les termes de (1) représentent en fait des charges de la plaque (ou de la tôle) fléchie, grâce à la relation (14). On pourrait dès lors écrire (1) sous la forme  $p_x + 2p_{xy} + p_y = p$ . Il en est de même des efforts élastiques de déviation au moment du voilement, soit en pleine tôle  $p_t$  selon (2) et, au droit du raidisseur  $p_{rF}$  selon (3) et  $p_{rN}$  selon (4). On peut donc trouver une signification statique<sup>7)</sup> simple des équations différentielles de la plaque fléchie (1) et de la tôle lors du voilement, (7) et (10). Cette signification statique simple subsiste intégralement après introduction de la relation (11). Cependant la forme de (7) et de (10) change, du fait que les moments et les flèches d'une charge sinusoïdale sont également des sinusoïdes. Dès lors il est inutile de considérer une variation des flèches le long de l'axe des  $x$  et l'on s'occupe uniquement de la verticale passant par le milieu de la tôle (fig. 1). En langage statique, nous dirons que le problème plaque est ramené à un problème de poutre. Le terme  $\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$  de (1), (7) et (10) reste la charge de la poutre transversale considérée par le milieu de la tôle. Le terme  $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$  devient  $\frac{\pi^4}{a^4} \eta$ , où  $\eta$  est tout simplement la flèche de la poutre en question. Quant à  $\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}$ , il devient  $-\frac{2\pi^2}{a^2} \eta''$ , où  $\eta''$  n'est rien d'autre que le moment fléchissant engendrant la flèche  $\eta$ , à un facteur près selon (16). Il n'y a aucune difficulté à raisonner de même pour le second membre de (12) et de (13),  $\eta$  étant directement la flèche de la poutre transversale considérée. Les observations précédentes permettent ainsi de donner un sens précis, de statique appliquée, à

<sup>7)</sup> Dans un système de poutres entre-croisées remplaçant la plaque, la charge  $p_x$  n'est rien d'autre que la charge des poutres longitudinales, et  $p_y$ , celle des poutres transversales. La charge  $p_{xy}$  engendre dans les poutres longitudinales des moments fléchissants  $M_x$ ; ces moments fléchissants, en agissant sur les poutres transversales, provoquent les flèches  $w$  de la plaque. On peut également considérer les  $p_{xy}$  comme engendrant des moments fléchissants  $M_y$  dans les poutres transversales; ces moments agiront dans ce cas sur les poutres longitudinales et engendreront les mêmes flèches que précédemment. Le terme  $2p_{xy}$  représente donc la somme  $p_{xy} + p_{yx}$ , où  $p_{xy} = p_{yx}$ . D'autre part, il va de soi que les flèches  $w$  provoquées par les différentes charges  $p_x$ ,  $p_{xy}$ ,  $p_y$  sont identiques, ce qui peut être considéré par ailleurs comme la condition dite d'élasticité du problème des poutres entre-croisées remplaçant la plaque.

Il est facile de se représenter un système de poutres longitudinales et transversales ayant les mêmes flèches sous l'effet des  $p_x$  ou des  $p_y$  qui les sollicitent. La chose est moins immédiate en ce qui concerne les  $p_{xy}$ . Le plus simple serait de couper la poutre longitudinale considérée au point de croisement choisi et de relier le haut et le bas des deux moitiés au moyen d'une charnière et d'un vérin hydraulique. La poutre transversale correspondante devrait être munie du même dispositif. Si l'on réunissait les vérins par une conduite, l'effort qu'ils supporteraient serait identique. Grâce aux charnières, il en serait de même des moments. Nous renvoyons pour plus de détails au chapitre II de la Publication N° 23 citée à la note 1.

toutes les opérations que nous allons faire pour passer des équations différentielles (12) et (13) aux relations numériques correspondantes.

Le lecteur voudra bien remarquer en troisième lieu que le procédé développé ici est le procédé formel<sup>8)</sup> déjà utilisé en 1947. Nous nous sommes cependant efforcés d'en faire ressortir le mieux possible la signification statique. Il s'agissait là du seul avantage, d'ordre purement didactique, du procédé implicite<sup>8)</sup> de 1948 et 1954. Nous avons depuis lors abandonné le procédé implicite dans le cas du voilement qui nous occupe.

Enfin, il ne faut pas perdre de vue que le dernier terme du second membre de (13) est dû au raidisseur. Nous avons donc affaire en fait à une charge concentrée dans un sens, la largeur  $c$  du raidisseur tendant vers zéro. C'est pourquoi nous serons obligés de traiter le cas de charges concentrées, lorsque nous nous occuperons de trouver une relation numérique entre les flèches et les charges d'une poutre, en lieu et place de (14). Pour pouvoir utiliser plus tard ce résultat à l'équation différentielle (13), nous devrons cependant procéder de la même manière que s'il s'agissait d'une charge répartie.

### **Relation numérique entre la charge d'une poutre, son moment fléchissant et sa flèche**

On sait qu'entre les nœuds équidistants d'une poutre, la relation différentielle (17) exprimant l'accroissement du moment fléchissant d'un point à un autre par suite de l'effort tranchant, s'écrit aux points  $m-1$  et  $m$  sous la forme  $M_m = M_{m-1} + Q_{m-1, m} \cdot \Delta x$ . Aux points  $m$  et  $m+1$  on aura de même  $M_{m+1} = M_m + Q_{m, m+1} \cdot \Delta x$ . Nous considérons alors la poutre comme chargée indirectement aux nœuds et appelons «charges aux nœuds» les efforts concentrés provenant des poutres secondaires. Par soustraction des expressions précédentes et en observant que la différence entre les efforts tranchants n'est rien d'autre que la charge au nœud  $K_m = Q_{m-1, m} - Q_{m, m+1}$  (équation différentielle 18), on obtiendra la relation numérique connue:

$$-M_{m-1} + 2M_m - M_{m+1} = K_m \cdot \Delta x. \quad (19)$$

Puisque les efforts aux nœuds sont concentrés, la relation (19) est absolument rigoureuse par définition et vaut toujours, quelles que soient les charges extérieures considérées, concentrées ou réparties. Pour calculer exactement les charges aux nœuds  $K$  aux différents points, il faudrait connaître la variation de la charge répartie sur la poutre. La variation de cette dernière étant donnée la plupart du temps aux nœuds seulement, on en est réduit aux hypothèses. On peut admettre soit une variation linéaire d'un point à l'autre, soit une variation parabolique entre trois points consécutifs.

---

<sup>8)</sup> Voir la Publication N° 27 citée à la note 1, au chap. deuxième, «Comparaison des divers procédés exposés», p. 64. Pour certaines conditions aux limites, le procédé formel est en défaut. On se sert alors du procédé semi-formel qui, tout en présentant à un moindre degré les inconvénients du procédé implicite, est néanmoins plus rapide.

Dans le premier cas, on trouve en décomposant le diagramme de charge en triangles et en appliquant les lois de l'équilibre, la «formule dite du trapèze» pour la charge  $K_m$  au nœud  $m$ :

$$K_m = \frac{\Delta x}{6} (p_{m-1} + 4 p_m + p_{m+1}). \quad (20)$$

Dans le second cas, il faut tenir compte en plus des deux secteurs paraboliques. En utilisant la formule de Simpson, on trouve que cette influence vaut:

$$\frac{\Delta x}{12} (-p_{m-1} + 2 p_m - p_{m+1}). \quad (21)$$

En ajoutant (20) et (21) on obtient la «formule dite de la parabole» pour la charge  $K_m$  au nœud  $m$ :

$$K_m = \frac{\Delta x}{12} (p_{m-1} + 10 p_m + p_{m+1}). \quad (22)$$

Cette expression (22) étant en général beaucoup plus exacte que (20), sera désormais seule utilisée, chaque fois que la répartition de la charge ne sera pas connue.

En lieu et place de (15), on obtient maintenant par juxtaposition de (19) et de (22), la relation numérique fondamentale entre les moments fléchissants et les charges réparties d'une poutre<sup>9)</sup>:

$$-M_{m-1} + 2 M_m - M_{m+1} = \frac{\Delta x^2}{12} (p_{m-1} + 10 p_m + p_{m+1}). \quad (23)$$

Rien ne nous empêche d'écrire la relation (23) une fois au point  $m-1$ , dix fois au point  $m$  et une fois au point  $m+1$ . D'après (22), cette manière de faire revient d'ailleurs à former la charge au nœud de la relation (23) en question, dont le second membre est déjà une charge au nœud. On obtient alors:

$$\left\{ \begin{array}{l} -M_{m-2} + 2 M_{m-1} - M_m \\ \quad - 10 M_{m-1} + 20 M_m - 10 M_{m+1} \\ \quad - M_m + 2 M_{m+1} - M_{m+2} \end{array} \right\} = \frac{\Delta x^2}{12} \left\{ \begin{array}{l} p_{m-2} + 10 p_{m-1} + p_m \\ \quad 10 p_{m-1} + 100 p_m + 10 p_{m+1} \\ \quad p_m + 10 p_{m+1} + p_{m+2} \end{array} \right\}. \quad (24)$$

<sup>9)</sup> Si l'on supposait que  $K_m = p_m \cdot \Delta x$ , on obtiendrait la relation bien connue de Marcus, sous une forme de statique appliquée. En langage mathématique, la méthode de Marcus exprime directement la dérivée seconde d'une fonction en un point déterminé, tandis que la méthode de statique appliquée exprime la fonction par rapport à sa dérivée en plusieurs points. Il s'ensuit que la méthode de Marcus est beaucoup plus grossière et que la précision est d'un tout autre ordre de grandeur (cf. F. STÜSSI: Numerische Lösung von Randwertproblemen mit Hilfe der Seilpolygongleichung, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, ZAMP, Vol. I, 1950). Dans le cas du voilement qui nous occupe, les équations numériques remplaçant l'équation différentielle (12) contiendraient d'ailleurs, d'après Marcus, le même nombre d'inconnues, exigeant ainsi, pour une précision bien inférieure, le même travail de calcul.

Le premier membre de cette équation (24) peut être regroupé comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} -M_{m-2} - 10M_{m-1} - M_m \\ 2M_{m-1} + 20M_m + 2M_{m+1} \\ - M_m - 10M_{m+1} - M_{m+2} \end{array} \right\} = \frac{\Delta x^2}{12} \left\{ \begin{array}{l} p_{m-2} + 10p_{m-1} + p_m \\ 10p_{m-1} + 100p_m + 10p_{m+1} \\ p_m + 10p_{m+1} + p_{m+2} \end{array} \right\}. \quad (25)$$

D'autre part l'équation numérique (23) remplaçant (15) s'applique aussi à (16). Il suffit pour cela de remplacer  $M$  par  $w$  et  $p$  par  $\frac{M}{EJ}$  (analogie de Mohr). On peut dès lors écrire les trois relations numériques suivantes aux points  $m-1$ ,  $m$ ,  $m+1$ , après multiplication de la seconde par deux et changement de signe de la première et de la troisième:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{m-2} - 2w_{m-1} + w_m \\ - 2w_{m-1} + 4w_m - 2w_{m+1} \\ w_m - 2w_{m+1} + w_{m+2} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{EJ} \frac{\Delta x^2}{12} (-M_{m-2} - 10M_{m-1} - M_m) \\ \frac{1}{EJ} \frac{\Delta x^2}{12} (2M_{m-1} + 20M_m + 2M_{m+1}) \\ \frac{1}{EJ} \frac{\Delta x^2}{12} (-M_m - 10M_{m+1} - M_{m+2}) \end{array} \right\}. \quad (26)$$

On constate immédiatement que le second membre des équations (26) n'est rien d'autre que le premier membre de (25), au facteur près  $\frac{1}{EJ} \frac{\Delta x^2}{12}$ , d'où l'égalité des deux autres membres, à ce facteur près. On obtient dès lors par addition des différents termes de même indice *la relation numérique cherchée entre les flèches et les charges réparties d'une poutre*<sup>10)</sup>.

$$\begin{aligned} w_{m-2} - 4w_{m-1} + 6w_m - 4w_{m+1} + w_{m+2} &= \\ &= \frac{1}{EJ} \frac{\Delta x^4}{144} (p_{m-2} + 20p_{m-1} + 102p_m + 20p_{m+1} + p_{m+2}) \end{aligned} \quad (27)$$

<sup>10)</sup> On arrive au même résultat en additionnant (23) et l'équation analogue en  $w$  et  $M$ , soit  $-w_{m-1} + 2w_m - w_{m+1} = \frac{1}{EJ} \frac{\Delta x^2}{12} (M_{m-1} + 10M_m + M_{m+1})$ . Il reste alors un terme en  $M_m$ . En écrivant les termes restants une fois au point  $m-1$ , deux fois au point  $m$ , une fois au point  $m+1$ , et en utilisant ensuite à nouveau (23), on retrouve finalement (27). C'est le procédé de 1947 appliqué à toute l'équation différentielle (12), de manière purement formelle, c'est-à-dire en travaillant avec les  $w$ ,  $w''$  et  $w'''$ , sans utilisation directe des notions de charge, de moment fléchissant et de flèche correspondant aux  $w$ ,  $w''$  et  $w'''$ . L'emploi de schémas rend les calculs très faciles. Nous renvoyons à ce sujet aux Publications N° 23 (p. 219) et N° 27 (p. 40) citées à la note 1.

En utilisant la relation (24) dans laquelle  $M$  deviendra  $w$  et  $p$  deviendra  $\frac{M}{EJ}$  (analogie de Mohr), on obtient immédiatement une nouvelle relation numérique entre les flèches et les moments fléchissants d'une poutre, le second membre trouvé ayant alors la même forme que (27):

$$\boxed{-(w_{m-2} + 8w_{m-1} - 18w_m + 8w_{m+1} + w_{m+2}) = \frac{1}{EJ} \frac{\Delta x^2}{12} (M_{m-2} + 20M_{m-1} + 102M_m + 20M_{m+1} + M_{m+2})} \quad (28)$$

### Cas particulier des charges concentrées

Nous avons vu que la relation (19) est absolument rigoureuse et qu'elle vaut pour n'importe quelle répartition de la charge  $p$ , spécialement si celle-ci se présente sous la forme de charges concentrées  $P$ . Si nous considérons seulement des charges concentrées  $P_{m-1}$ ,  $P_m$ ,  $P_{m+1}$  aux points  $m-1$ ,  $m$ ,  $m+1$ , ces charges concentrées sont de toute évidence les charges aux nœuds. On peut dès lors écrire, en lieu et place de (25), puisque le second membre était formé des charges aux nœuds en  $m-1$ ,  $m$ ,  $m+1$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} -M_{m-2} - 10M_{m-1} - M_m \\ 2M_{m-1} + 20M_m + 2M_{m+1} \\ -M_m - 10M_{m+1} - M_{m+2} \end{array} \right\} = \Delta x \left\{ \begin{array}{l} P_{m-1} \\ 10P_m \\ P_{m+1} \end{array} \right\}. \quad (29)$$

Nous avons déjà dit que l'on peut passer immédiatement des relations numériques entre les moments fléchissants et les charges, aux relations numériques entre les flèches et les moments fléchissants. Il suffit pour cela de remplacer  $M$  par  $w$  et  $p$  par  $\frac{M}{EJ}$  (analogie de Mohr). La répartition des moments se faisant linéairement entre deux points consécutifs, lorsque les charges sont concentrées, il faut donc se servir de (20) pour le calcul des charges aux nœuds et non plus de (22). Les équations numériques (26) obtenues précédemment pour une charge répartie deviennent alors, si les charges sont concentrées:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{m-2} - 2w_{m-1} + w_m \\ -2w_{m-1} + 4w_m - 2w_{m+1} \\ w_m - 2w_{m+1} + w_{m+2} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{EJ} \frac{\Delta x^2}{6} (-M_{m-2} - 4M_{m-1} - M_m) \\ \frac{1}{EJ} \frac{\Delta x^2}{6} (2M_{m-1} + 8M_m + 2M_{m+1}) \\ \frac{1}{EJ} \frac{\Delta x^2}{6} (-M_m - 4M_{m+1} - M_{m+2}) \end{array} \right\}. \quad (30)$$

Or nous avons vu que la charge au nœud «parabolique» (22) s'obtient par addition de la charge au nœud «trapézoïdale» (20) avec le supplément

provenant des secteurs paraboliques (21). Ce supplément s'écrit maintenant  $\frac{1}{EJ} \frac{\Delta x}{12} (-M_{m-1} + 2M_m - M_{m+1})$ , compte tenu de ce que nous cherchons la charge au nœud d'un diagramme des moments fléchissants (analogie de Mohr). Mais alors nous constatons que ce supplément n'est rien d'autre, d'après (19), que la charge concentrée  $P_m$  au point  $m$ , au facteur  $\frac{1}{EJ} \frac{\Delta x^2}{12}$  près. Il s'ensuit que nous pouvons écrire la charge au nœud du diagramme des moments fléchissants pour charges concentrées  $K_{m_{conc.}} = \frac{1}{EJ} \frac{\Delta x}{6} (M_{m-1} + 4M_m + M_{m+1})$  sous la forme d'une charge au nœud du diagramme des moments fléchissants pour charges réparties, soit:

$$K_{m_{conc.}} = \frac{1}{EJ} \frac{\Delta x}{12} (M_{m-1} + 10M_m + M_{m+1}) - \frac{1}{EJ} \frac{\Delta x^2}{12} P_m. \quad (31)$$

Ainsi cette valeur (31) de la charge au nœud du diagramme des moments fléchissants pour charges concentrées nous permet maintenant d'écrire (30) sous la forme suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{m-2} - 2w_{m-1} + w_m \\ - 2w_{m-1} + 4w_m - 2w_{m+1} \\ w_m - 2w_{m+1} + w_{m+2} \end{array} \right. \begin{array}{l} - \frac{1}{EJ} \frac{\Delta x^3}{12} P_{m-1} \\ + \frac{1}{EJ} \frac{\Delta x^3}{12} 2P_m \\ - \frac{1}{EJ} \frac{\Delta x^3}{12} P_{m+1} \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} \frac{1}{EJ} \frac{\Delta x^2}{12} (-M_{m-2} - 10M_{m-1} - M_m) \\ \frac{1}{EJ} \frac{\Delta x^2}{12} (2M_{m-1} + 20M_m + 2M_{m+1}) \\ \frac{1}{EJ} \frac{\Delta x^2}{12} (-M_m - 10M_{m+1} - M_{m+2}) \end{array} \right\}. \quad (32)$$

Comme auparavant pour les charges réparties, nous constatons maintenant, à un facteur près, l'égalité des équations (32) et (29). Le second membre de (29) est dès lors égal au premier membre de (32), à ce facteur près. Comme auparavant pour les charges réparties nous obtenons, par addition des différents termes de même indice, *la relation numérique cherchée entre les flèches et les charges concentrées d'une poutre*:

$w_{m-2} - 4w_{m-1} + 6w_m - 4w_{m+1} + w_{m+2} = \frac{1}{EJ} \frac{\Delta x^3}{6} (P_{m-1} + 4P_m + P_{m+1}) \quad (33)$

Ainsi le membre de droite de (33), qui est effectivement une double charge au nœud, remplace, quand il s'agit de charges concentrées, la double charge au nœud pour charges réparties, donnée par le membre de droite de (27).

Quant aux membres de gauche de (27) et de (33), ils sont identiques, comme nous le voulions précisément, en vue d'ajouter les résultats partiels obtenus pour les différents cas à la résolution des équations différentielles (12) et (13).

### **Passage de l'équation différentielle du voilement aux équations numériques**

En procédant chaque fois de la même manière, à l'aide de doubles charges nodales, nous venons d'établir les relations numériques (27), (28) et (33) entre les charges, réparties ou concentrées, les moments fléchissants et les flèches d'une poutre. D'autre part, nous savons que les équations différentielles (12) et (13) contiennent la dérivée quatrième  $\eta'''$  de la flèche  $\eta$ , c'est-à-dire la charge, la dérivée seconde  $\eta''$ , c'est-à-dire le moment fléchissant de la poutre transversale médiane de remplacement de la tôle, et enfin la flèche  $\eta$  proprement dite.

Dès lors rien ne nous empêche d'ajouter les résultats partiels obtenus (27), (28) et (33), en tenant compte des coefficients de multiplication de (12) et de (13). En procédant ainsi, nous agissons comme si nous considérions d'emblée toute l'équation différentielle (12) en pleine tôle et toute l'équation différentielle (13) au droit du raidisseur, en prenant d'un seul coup la double charge au nœud de ces équations<sup>11)</sup>. On se souviendra simplement que, selon (11), il y a lieu d'écrire  $\eta$  à la place de  $w$ ,  $\Delta y$  à la place de  $\Delta x$  puisque l'on considère le sens transversal de la tôle (fig. 1) et  $D$ , rigidité de la plaque, à la place de  $EJ$ , rigidité de la poutre.

Le terme  $\eta'''$  de (12) et de (13), représente la charge  $p_y$  sur la poutre de remplacement transversale médiane de la tôle; il se tire du membre de gauche de (27) ou (33):

$$\eta_{m-2} - 4\eta_{m-1} + 6\eta_m - 4\eta_{m+1} + \eta_{m+2}. \quad (34)$$

Le terme  $-\frac{2\pi^2}{a^2}\eta''$  de (12) et de (13), représente la charge  $2p_{xy}$  dans un système général de poutres entre-croisées, ou aussi, à un facteur près, le moment fléchissant le long de la poutre de remplacement transversale médiane de la tôle considérée; il s'écrit, grâce au membre de gauche de (28), cette équation (28) correspondant à  $-\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M}{EJ}$  et non directement à (16):

$$-2\frac{\pi^2}{a^2}\frac{\Delta y^2}{12}(\eta_{m-2} + 8\eta_{m-1} - 18\eta_m + 8\eta_{m+1} + \eta_{m+2}). \quad (35)$$

Le terme  $\frac{\pi^4}{a^4}\eta$  de (12) et de (13) représente la charge  $p_x$  dans un système général de poutres entre-croisées ou, à un facteur près, la flèche de la poutre de

<sup>11)</sup> C'est ainsi qu'il a été procédé en 1947, cf. note 1. Pour plus de détails à ce sujet on consultera également l'article de la note 9 et l'ouvrage suivant: F. STÜSSI, Ausgewählte Kapitel aus der Theorie des Brückenbaues, Taschenbuch für Bauingenieure, herausgegeben von Prof. Dr. Ing. F. SCHLEICHER, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1955, Springer, Bd. I, S. 953.

remplacement; il se transforme à l'aide du membre de droite de (27) ou (28):

$$\frac{\pi^4}{a^4} \frac{\Delta y^4}{144} (\eta_{m-2} + 20 \eta_{m-1} + 102 \eta_m + 20 \eta_{m+1} + \eta_{m+2}). \quad (36)$$

De même, le terme  $\omega \cdot k \frac{\pi^4}{a^2 b^2} \eta$  de (12) et de (13), représentant l'effort de déviation lors du voilement, devient:

$$k \frac{\pi^4}{a^2 b^2} \frac{\Delta y^4}{144} (\omega_{m-2} \cdot \eta_{m-2} + 20 \omega_{m-1} \cdot \eta_{m-1} + 102 \omega_m \cdot \eta_m \\ + 20 \omega_{m+1} \cdot \eta_{m+1} + \omega_{m+2} \cdot \eta_{m+2}). \quad (37)$$

Pour simplifier l'écriture, nous posons<sup>12)</sup>:

$$A = \frac{\pi^2}{a^2} \frac{\Delta y^2}{6} \quad (38)$$

$$B = \left( \frac{A}{2} \right)^2 = \frac{\pi^4}{a^4} \frac{\Delta y^4}{144} \quad (39)$$

$$C = B \frac{a^2}{b^2} = \frac{\pi^4}{a^2 b^2} \frac{\Delta y^4}{144} \quad (40)$$

Nous obtenons dès lors, par addition de (34), (35), (36) et (37), la relation numérique suivante en pleine tôle, en lieu et place de l'équation différentielle (12):

$$(1 - A + B) \eta_{m-2} - (4 + 8 A - 20 B) \eta_{m-1} + (6 + 18 A + 102 B) \eta_m \\ - (4 + 8 A - 20 B) \eta_{m+1} + (1 - A + B) \eta_{m+2} = k \cdot C (\omega_{m-2} \cdot \eta_{m-2} \\ + 20 \omega_{m-1} \cdot \eta_{m-1} + 102 \omega_m \cdot \eta_m + 20 \omega_{m+1} \cdot \eta_{m+1} + \omega_{m+2} \cdot \eta_{m+2}) \quad (41)$$

Au droit du raidisseur, nous devons tenir compte de l'effort concentré qu'il engendre, soit  $-\frac{1}{c} \left( \gamma b \frac{\pi^4}{a^4} - \omega_r k \delta \frac{\pi^4}{a^2 b} \right) \eta$  d'après (13). En utilisant le membre de droite de (33), on obtient, si  $r$  désigne le point où se trouve le raidisseur longitudinal unique que nous considérons dans la présente étude:

$$-\frac{\Delta y^3}{6} \left( \gamma b \frac{\pi^4}{a^4} - \omega_r k \delta \frac{\pi^4}{a^2 b} \right) \eta_r \quad \text{pour le point } r-1 \\ \text{précédant le raidisseur,} \quad (42)$$

$$-4 \frac{\Delta y^3}{6} \left( \gamma b \frac{\pi^4}{a^4} - \omega_r k \delta \frac{\pi^4}{a^2 b} \right) \eta_r \quad \text{pour le point } r \text{ où se} \\ \text{trouve le raidisseur,} \quad (43)$$

$$-\frac{\Delta y^3}{6} \left( \gamma b \frac{\pi^4}{a^4} - \omega_r k \delta \frac{\pi^4}{a^2 b^2} \right) \eta_r \quad \text{pour le point } r+1 \\ \text{suivant le raidisseur.} \quad (44)$$

<sup>12)</sup> L'abréviation  $A$  s'appelait  $2\gamma$  en 1947, dans l'ouvrage cité à la note 1. A l'heure actuelle  $\gamma$  est la rigidité du raidisseur selon (8), qui n'avait pas été considérée à l'époque. L'équation (41) n'est rien d'autre que l'équation (11) de 1947, si l'on remplace  $2\gamma$  par  $A$ ,  $\gamma^2$  par  $B$  et  $p$  par  $k \frac{\pi^4}{a^2 b^2} \omega \cdot \eta$ .

Compte tenu de l'abréviation:

$$R = \frac{\Delta y^3}{6} \left( \gamma b \frac{\pi^4}{a^4} - \omega_r k \delta \frac{\pi^4}{a^2 b} \right) \quad (45)$$

nous obtenons, en ajoutant (42), (43) et (44) à (41), la relation numérique suivante au point  $r-1$  précédent le raidisseur, en lieu et place de l'équation différentielle (13):

$$\begin{aligned} & (1 - A + B) \eta_{r-3} - (4 + 8A - 20B) \eta_{r-2} + (6 + 18A + 102B) \eta_{r-1} \\ & - (4 + 8A - 20B) \eta_r + (1 - A + B) \eta_{r+1} = k \cdot C (\omega_{r-3} \cdot \eta_{r-3} \\ & + 20 \omega_{r-2} \cdot \eta_{r-2} + 102 \omega_{r-1} \cdot \eta_{r-1} + 20 \omega_r \cdot \eta_r + \omega_{r+1} \cdot \eta_{r+1}) - R \cdot \eta_r \end{aligned} \quad (46)$$

Au point  $r$  où se trouve le raidisseur, on trouverait de même la relation numérique suivante remplaçant (13):

$$\begin{aligned} & (1 - A + B) \eta_{r-2} - (4 + 8A - 20B) \eta_{r-1} + (6 + 18A + 102B) \eta_r \\ & - (4 + 8A - 20B) \eta_{r+1} + (1 - A + B) \eta_{r+2} = k \cdot C (\omega_{r-2} \cdot \eta_{r-2} \\ & + 20 \omega_{r-1} \cdot \eta_{r-1} + 102 \omega_r \cdot \eta_r + 20 \omega_{r+1} \cdot \eta_{r+1} + \omega_{r+2} \cdot \eta_{r+2}) - 4 R \cdot \eta_r \end{aligned} \quad (47)$$

Au point  $r+1$  suivant le raidisseur, on obtient enfin:

$$\begin{aligned} & (1 - A + B) \eta_{r-1} - (4 + 8A - 20B) \eta_r + (6 + 18A + 102B) \eta_{r+1} \\ & - (4 + 8A - 20B) \eta_{r+2} + (1 - A + B) \eta_{r+3} = k C (\omega_{r-1} \cdot \eta_{r-1} \\ & + 20 \omega_r \cdot \eta_r + 102 \omega_{r+1} \cdot \eta_{r+1} + 20 \omega_{r+2} \cdot \eta_{r+2} + \omega_{r+3} \cdot \eta_{r+3}) - R \cdot \eta_r \end{aligned} \quad (48)$$

### Bords d'une tôle simplement appuyée sur son pourtour

En règle générale on néglige le faible encastrement de l'âme d'une poutre fléchie dans les semelles et l'on considère la tôle comme simplement appuyée sur son pourtour. Puisque la flèche  $\eta$  sur le bord est nulle, elle est donc connue et il suffit de la déterminer aux autres points. Pour avoir autant d'équations que de  $\eta$  inconnus, il nous faut écrire (41) au point 1, le plus rapproché du bord de la tôle. La chose est très simple, dès que l'on juxtapose, par la pensée, une tôle semblable à la première et se voilant de manière antisymétrique sous une sollicitation identique. La déformation est alors antisymétrique par rapport au bord considéré. Puisque  $\eta_{bord} = 0$  et  $\eta_{-1} = -\eta_1$ , l'équation (41) devient au point 1 ( $m=1$ ):

$$\begin{aligned} & (5 + 19A + 101B) \eta_1 - (4 + 8A - 20B) \eta_2 + (1 - A + B) \eta_3 = \\ & = k C (101 \omega_1 \eta_1 + 20 \omega_2 \eta_2 + \omega_3 \eta_3) \end{aligned} \quad (49)$$

### Résolution des équations numériques

Quelles que soient la rigidité relative (8) et la section relative (9) du raidisseur considéré, rien n'est plus facile que d'écrire en tous les points les équations numériques remplaçant les équations différentielles (12) et (13). On calcule tout d'abord les valeurs auxiliaires (38), (39), (40) pour la pleine tôle et (45) pour le raidisseur. Au dernier point précédent chacun des deux bords de la tôle, on se sert de l'équation (49). En tous les autres points, on utilise soit (41) en pleine tôle, soit (46), (47), (48) au raidisseur.

Le système d'équations obtenu ne contient que des termes renfermant les flèches inconnues  $\eta$ . Ces flèches ne nous intéressent d'ailleurs que si nous voulons tracer la déformation de la tôle au moment du voilement. On sait qu'à ce moment une infinité de déformations affines sont possibles. Il faut donc donner une valeur définie quelconque à l'un des  $\eta$  pour déterminer les autres. Nous avons en conséquence une équation de plus que le nombre de  $\eta$  inconnus. Or si nous considérons le second membre de (41), (46), (47), (48), (49), nous nous apercevons qu'il contient la véritable inconnue du problème qui nous intéresse, le coefficient de voilement  $k$ , pour une tôle et un raidisseur de caractéristiques  $\frac{a}{b}$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  données, ou la rigidité  $\gamma$  pour  $k$ ,  $\delta$  et  $\frac{a}{b}$  donnés. Nous avons donc ainsi à disposition autant d'équations numériques que d'inconnues

Si l'on veut obtenir la valeur de  $k$  à partir du système des équations numériques, rien ne nous empêche d'*admettre* les flèches  $\eta$  du membre de droite de (41), (46), (47), (48), (49), qui sont multipliées par le facteur de voilement  $k$ . On obtient de la sorte des «termes de charge» qui permettent de déterminer de nouvelles ordonnées  $\eta$  et ainsi de suite. A la fin, les flèches admises et celles qui en sont déduites à partir du système concordent parfaitement, à un facteur de multiplication près, qui est justement le coefficient de voilement  $k$  cherché. C'est le procédé bien connu d'Engesser-Vianello, utilisé très fréquemment dans les problèmes de flambement des barres.

Remarquons tout de suite que les flèches  $\eta$  déduites des flèches admises, à partir du système, ne doivent pas être employées telles quelles en vue de l'approximation suivante, dans le problème du voilement qui nous occupe en ce moment. Pour éviter de diverger, il faut en effet combiner les  $\eta$  admis et les  $\eta$  déduits en proportions variables. Dans la zone comprimée, ce sont les  $\eta$  déduits qui ont le plus grand poids, tandis que le contraire est valable dans la zone tendue. Une variation continue de la proportion choisie d'un bord de la tôle à l'autre donne les meilleurs résultats, comme la pratique le montre.

Rien n'empêche d'utiliser le procédé d'Engesser-Vianello, par approximations successives, en considérant tout d'abord des flèches unitaires aux différents points, ou un groupe de flèches liées entre elles par des coefficients adéquats, par exemple ceux qui correspondent à une charge au nœud, simple ou double. Le long de la verticale médiane de la tôle, on obtiendra ainsi de véritables lignes d'influence de la poutre de remplacement transversale con-

sidérée précédemment (fig. 1). Ce travail une fois exécuté, il sera facile de déterminer les flèches déduites à partir de flèches telles qu'elles ont été admises. Le procédé direct, sans lignes d'influence, a été utilisé en 1947, vu qu'il s'agissait d'un exemple isolé<sup>1)</sup>. Les lignes d'influence ont été employées en 1948 et 1954, vu qu'il s'agissait au contraire d'un calcul systématique d'une série de valeurs, avec augmentation progressive des caractéristiques de la tôle et du raidisseur. En 1948 et 1954 nous avons utilisé la méthode dite implicite<sup>8)</sup>, abandonnée depuis, comme nous l'avons déjà dit.

Rien ne nous empêche non plus de passer tous les  $\eta$  du second membre des équations (41), (46), (47), (48), (49) dans le premier membre correspondant. On aboutit ainsi à un système d'équations en  $\eta$  sans termes connus. Si l'on applique à ce système «homogène» la méthode de résolution classique dite «algorithme de Gauss», on obtient, comme dernière équation du système réduit, une équation de la forme  $E\eta_n = 0$ . À part la solution immédiate  $\eta_n = 0$ , qui conduit à des flèches nulles en tous les points, il existe une solution, indéterminée, lorsque  $E = 0$ . Cette solution est précisément celle qui nous intéresse. Pour essayer d'annuler le dernier coefficient  $E$  du «système réduit», il faut faire varier un des paramètres  $k$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  en fixant les deux autres, le rapport  $\frac{a}{b}$  étant par ailleurs à considérer comme une constante. On y arrive avec toute la précision désirable en procédant tout d'abord par tâtonnement et ensuite par interpolation. On s'efforcera d'obtenir en premier lieu une valeur du paramètre donnant un dernier coefficient «réduit» positif, puis une seconde avec coefficient négatif ou inversément. Au troisième essai déjà, on obtient souvent par interpolation une valeur satisfaisante.

Mathématiquement parlant, le procédé décrit ci-dessus consiste à annuler aussi exactement que possible le déterminant du système d'équations «homogènes» obtenu; on peut donc l'appeler «méthode du déterminant»<sup>13)</sup>.

Nous avons constaté tout à l'heure que nous avons les trois paramètres  $k$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  à disposition, si  $\frac{a}{b}$  est une constante. Nous allons montrer qu'il n'y a pas lieu de s'occuper de  $\delta$ , tous les calculs se faisant pour  $\delta = 0$ . Reste donc à choisir entre  $k$  et  $\gamma$ . L'examen des équations (41), (46), (47), (48), (49), après passage du second membre dans le premier, montre que le paramètre  $k$  figure dans tous les coefficients de toutes les équations du système, tandis que le paramètre  $\gamma$  ne figure que dans un coefficient de chacune des trois équations (46), (47), (48) se rapportant au raidisseur, et pas du tout dans celles de la pleine tôle (41), (49). On aura donc tout intérêt, dans le problème de la tôle raidie, à fixer une valeur du coefficient de voilement  $k$  et à chercher la valeur de la rigidité  $\gamma$  du raidisseur qui annule le déterminant, c'est-à-dire le dernier coefficient du système réduit.

<sup>13)</sup> C'est le procédé utilisé en 1955 pour le panneau carré, raidi diagonalement, comprimé uniformément sur deux bords opposés ou cisaillé uniformément sur ses quatre bords; cf. p. 123 de la Publication N° 27 citée à la note 1.

Pour plus de facilité, on écrira en dernier lieu les équations contenant l'influence  $R$  du raidisseur selon (45); dans le cas de la tôle fléchie, avec raidisseur au cinquième supérieur, on commencera donc par le bord inférieur, tendu. Le tâtonnement sur la valeur de  $\gamma$  se concentrera ainsi aux dernières équations du «système réduit». Bien plus, si le nombre d'intervalles choisi est faible, on pourra même éviter tout tâtonnement en appliquant l'«algorithme de Gauss» à un système contenant dans ses dernières équations le  $\gamma$  inconnu, sans lui donner de valeur numérique. En exprimant alors que le dernier coefficient du «système réduit» s'annule, on obtiendra une équation algébrique dont la résolution fournira la valeur cherchée de la rigidité  $\gamma$  du raidisseur.

Si l'on veut par contre fixer les  $\gamma$  et calculer les  $k$  correspondants, il faut à chaque tâtonnement recommencer l'élimination dès le début. C'est ce qu'il faut d'ailleurs faire pour la double onde transversale de la tôle non raidie, puisque le seul paramètre à disposition est alors le coefficient de voilement  $k$ . Pour diminuer le nombre des essais à effectuer, on déterminera  $k$  en première approximation par une méthode grossière. A cet effet, on suppose la double onde formée par deux tôles accolées se voilant au même instant. La tôle supérieure peut être assimilée à une tôle sollicitée par des efforts de compression uniformément répartis. La tôle inférieure est sollicitée à la flexion pure, si l'on néglige la zone tendue extrême, peu importante du point de vue voilement<sup>14)</sup>). Le calcul du facteur de voilement rapporté à toute la tôle ne présente dès lors plus de difficulté.

Rappelons ici que la détermination de la double onde transversale est de toute importance. Nous devons en effet savoir où nous devons placer le raidisseur pour qu'il ne fléchisse pas lors du voilement en deux séries de cloques superposées. C'est l'endroit optimum du raidisseur, c'est-à-dire celui où l'on obtient le plus grand coefficient de voilement  $k$ . On ne peut évidemment le dépasser, la tôle se voilant alors en deux séries de cloques superposées, en laissant le raidisseur sans déformation.

En utilisant la méthode du déterminant pour la double onde transversale, on évite toutes les difficultés de 1948, provenant de ce que le procédé d'Engesser-Vianello divergeait et tendait vers l'onde unique. On se rend compte facilement qu'en fixant la valeur de  $k$ , on élimine cette tendance à diverger vers un  $k$  nettement plus faible. En outre, il n'y a pas de difficulté à considérer un nombre de points intermédiaires beaucoup plus grand qu'en 1948.

Conformément à ce que nous avons déjà dit il y a lieu de noter maintenant que l'on peut très bien exécuter tous les calculs avec  $\delta=0$  (raidisseur sans section appréciable) et passer ensuite au cas où  $\delta$  possède une valeur quelconque. En effet, on peut écrire, d'après l'équation (45):

$$\gamma_{\delta=0} b \frac{\pi^4}{a^4} = \gamma_\delta b \frac{\pi^4}{a^4} - \omega_r k \delta \frac{\pi^4}{a^2 b}$$

---

<sup>14)</sup> Cf. Publication N° 23 citée à la note 1, p. 96, fig. 39.

ou après simplification:

$$\gamma_\delta = \gamma_{\delta=0} + \omega_r k \delta \frac{a^2}{b^2} \quad (50)$$

L'examen de (50) montre immédiatement que  $\gamma$  croît linéairement avec  $\delta$  pour un  $k$  donné.

Il faut enfin remarquer que nous avons maintenant renoncé à l'emploi de la méthode du renversement des charges d'Andrée, utilisée en 1947, 1948 et 1954<sup>1)</sup>. Nous avons en effet constaté que le faible nombre de termes dans chacune des équations numériques (41), (46), (47), (48), (49), permettait une résolution directe aussi rapide, vu les opérations préliminaires et complémentaires nécessaires avec la méthode d'Andrée.

### Résultats obtenus pour la double onde transversale

Nous venons de voir que la détermination de la double onde transversale est nécessaire pour savoir où nous devons placer le raidisseur dit «optimum» ou «économique». Désignons par  $b_1$  la distance depuis le bord supérieur de l'âme jusqu'à l'endroit où la flèche est nulle lors du voilement avec double onde transversale. Cet endroit est facile à calculer quand on connaît les flèches aux points considérés équidistants, sur la verticale médiane (fig. 1). Le rapport  $\frac{b_1}{b}$  indique donc où devrait se trouver le raidisseur dit «optimum» ou «économique». D'après (11) ce raidisseur est nécessairement rectiligne et horizontal.

Nous donnons ci-dessus les résultats obtenus pour divers rapports  $\frac{a}{b}$  de la longueur à la hauteur de l'âme d'une poutre fléchie. Le calcul a été effectué avec vingt intervalles le long de la verticale médiane (fig. 1), par la méthode du déterminant.

Tableau 1. Valeurs de  $k$  et de  $\frac{b_1}{b}$  en fonction de  $\frac{a}{b}$  pour la double onde transversale

$\frac{a}{b}$	0,2	0,225	0,25	0,275	0,3	0,325	0,35	0,375	0,4
$k$	142,5 <sub>2</sub>	135,1 <sub>5</sub>	131,0 <sub>9</sub>	129,4 <sub>3</sub>	129,6 <sub>0</sub>	131,2 <sub>3</sub>	134,0 <sub>5</sub>	137,9 <sub>1</sub>	142,6 <sub>7</sub>
$\frac{b_1}{b}$	0,1840	0,1912	0,1974	0,2025	0,2069	0,2105	0,2136	0,2163	0,2185

Graphiquement, les valeurs  $k$  sont visibles, à très petite échelle, à la partie supérieure de la fig. 3. On remarquera que, dans le sens longitudinal de l'âme, le voilement se produit en une ou plusieurs ondes, la valeur la plus basse de  $k$  étant toujours déterminante. Il s'ensuit une courbe en festons, caractéristique de tous les problèmes de voilement. En pratique, on ne raidit guère un panneau

de poutre fléchie dont le rapport est inférieur à l'unité, et certainement pas, si ce rapport est plus petit que 0,5. Le premier feston de la fig. 3 n'a donc pas d'utilité, en construction métallique normale tout au moins. Quant aux festons suivants, qui sont d'ailleurs de moins en moins prononcés, on ne peut guère s'occuper des valeurs plus grandes que le minimum, car il est en fait difficile de fixer exactement la longueur  $a$  et la hauteur  $b$  du panneau considéré. En effet, on ne peut dire exactement où s'arrête l'âme lorsque la section des semelles et des montants verticaux est quelque peu compliquée. D'autre part, il est logique de diminuer légèrement  $a$  et  $b$  pour tenir compte de l'encaissement dû aux semelles, aux montants et aux panneaux voisins, moins sollicités ou sollicités différemment, surtout s'il s'agit des poutres maîtresses d'un pont muni de solides entretoises ou avec tablier directement appuyé sur les dites poutres maîtresses.

Le minimum seul nous intéressant, nous avons trouvé, par interpolation, qu'il devait correspondre au rapport  $\frac{a}{b} \approx 0,285$ . Nous donnons dès lors ci-après les résultats trouvés pour divers nombres  $n$  d'intervalles considérés. La dernière ligne contient les valeurs obtenues en utilisant la loi approchée  $k = 129,424 - \frac{1,888}{(0,1n)^4}$ . Vu la concordance parfaite à partir de dix intervalles, nous pouvons extrapoler à l'infini, à l'aide de la loi en question.

Tableau 2. Valeur minimum de  $k$  lors du voilement avec double onde transversale

Nombre d'intervalles	$n=6$	$n=8$	$n=10$	$n=15$	$n=20$	$n=30$	$n=\infty$
Valeur calculée de $k$	126,35	125,28	127,54	129,05	129,31	129,40	—
Formule approchée	—	124,82	127,54	129,05	129,31	129,40	129,42 <sub>4</sub>
Erreur par rapport à $n=\infty$	—	—	1,48%	0,29%	0,09%	0,02%	—
Rapport $\frac{b_1}{b}$	—	—	—	—	—	0,2043	—

Le tableau précédent montre en outre que le raidisseur au cinquième supérieur est très près de l'endroit où la tôle ne fléchit pas lors du voilement avec double onde transversale, lorsque  $\frac{a}{b} = 0,285$ . Puisque à ce moment  $\frac{b_1}{b} = 0,204 \cdot 3$ , le cinquième supérieur se trouve seulement à 2,2 cm de la position idéale pour une poutre à âme pleine de 5 m de hauteur. Cette précision est plus que suffisante pour les besoins de la pratique.

Considérons maintenant les rapports  $\frac{a}{b}$  compris entre 0,5 et 1, mais non multiples de 0,285. Pour cela, nous avons agrandi la courbe des  $k$  en fonction de  $\frac{a}{b}$ , représentée à petite échelle au haut de la fig. 3. Nous avons reporté sur la même figure les  $\frac{b_1}{b}$  correspondants, ce qui donne non plus des festons, mais une série de décrochements. L'intersection des deuxième et troisième festons

se produit tout près de  $\frac{a}{b} = 0,7 = 2 \cdot 0,35 = 3 \cdot 0,2333\dots$ ; l'intersection des troisième et quatrième festons, vers  $\frac{a}{b} = 0,98 = 3 \cdot 0,3266\dots = 4 \cdot 0,245$ . Les valeurs correspondantes de  $\frac{b_1}{b}$  sont approximativement de 0,214 et 0,193 à l'intersection des deuxième et troisième festons et de 0,211 et 0,197 à l'intersection des troisième et quatrième festons. Ainsi l'écart maximum du raidisseur au cinquième supérieur serait de 7 cm pour  $\frac{a}{b} = 0,7$  et de 5,5 cm pour  $\frac{a}{b} = 0,98$ , si la poutre considérée avait 5 m de hauteur. Lorsque  $\frac{a}{b}$  augmente, les écarts deviennent de plus en plus petits.

*On peut donc dire que le raidisseur au cinquième raidisseur correspond, avec une précision plus que suffisante pour les besoins de la pratique, à la position idéale.* Quant au coefficient de voilement  $k$ , on ne peut guère admettre une valeur supérieure à 129,4, par ailleurs très proche des 129,3 trouvés en 1948 et dont la précision nous avait inquiétés quelque peu. Pour ne pas allonger, nous avons renoncé à donner dans la présente publication les déformations lors du voilement avec double onde transversale. Ces valeurs ont été cependant calculées pour déterminer le rapport  $\frac{b_1}{b}$ .

### Résultats obtenus pour la rigidité du raidisseur dite «optimum» ou «économique»

La rigidité «optimum» s'obtient en posant  $k = 129,4$ , valeur maximum que nous voulons considérer en pratique. Cette rigidité «optimum» n'est véritablement «économique» que pour les poutres hautes, où l'on peut réduire au minimum l'épaisseur considérée, sans en être empêché par des raisons d'ordre constructif. Puisque  $k$  est fixé d'avance, les calculs se font par le méthode dite du déterminant ainsi qu'il a été dit précédemment et pour  $\delta = 0$ . A l'aide de (50) on passe ensuite au  $\gamma$  correspondant à un  $\delta$  quelconque.

Nous donnons dans le tableau ci-après les résultats obtenus, après correction par une formule approchée pour  $n = \infty$ . Les résultats trouvés ont été ensuite arrondis. En ce qui concerne la précision, on remarquera qu'elle dépend du nombre de points équidistants choisis pour décrire une portion de courbe entre deux points d'inflexion; la précision est dès lors bien meilleure dans le cas actuel avec une seule onde transversale, à la place de la double onde précédente. Même avec 20 points, la précision par rapport à  $n = \infty$  est déjà très grande, de l'ordre de 0,01%, tandis qu'elle atteint 0,1% avec dix intervalles.

On constate que pour les  $\frac{a}{b}$  supérieurs à l'unité, les différences d'avec le tableau 2 de 1954<sup>1)</sup> sont assez faibles, malgré l'effet concentré du raidisseur dont le calcul avait été effectué de manière très approximative à l'époque.

Les valeurs du tableau précédent n° 3 sont représentées graphiquement à la figure 2. Pour faire cette représentation, il faut se souvenir que le voilement peut se faire en plusieurs ondes, ce qui donne une nouvelle fois les festons

Tableau 3. Valeurs de  $\gamma_e$  ( $k = 129,4$ )

$\frac{a}{b}$	$\delta=0$	$\delta=0,02$	$\delta=0,04$	$\delta=0,06$	$\delta=0,08$	$\delta=0,1$	$\delta=0,12$	$\delta=0,14$	$\delta=0,16$	$\delta=0,18$	$\delta=0,2$
0,5	6,9	7,3	7,6	8,0	8,4	8,8	9,2	9,6	10,0	10,4	10,7
0,75	11,3	12,2	13,0	13,9	14,8	15,7	16,5	17,4	18,3	19,1	20,0
1	17,6	19,2	20,7	22,3	23,8	25,4	26,9	28,5	30,0	31,6	33,1
1,25	24,7	27,1	29,5	31,9	34,4	36,8	39,2	41,7	44,1	46,5	48,9
1,5	31,7	35,2	38,7	42,2	45,6	49,1	52,6	56,1	59,6	63,1	66,6
1,75	37,8	42,5	47,3	52,0	56,8	61,5	66,3	71,0	75,8	80,6	85,3
2	42,0	48,2	54,4	60,6	66,8	73,1	79,3	85,5	91,7	97,9	104,1
2,25	43,4	51,3	59,2	67,0	74,9	82,7	90,6	98,5	106,3	114,2	122,0
2,5	41,0	50,7	60,4	70,1	79,8	89,5	99,2	108,9	118,6	128,3	138,0
2,75	33,6	45,3	57,0	68,8	80,5	92,3	104,0	115,8	127,5	139,2	151,0
3	19,9	33,9	47,9	61,8	75,8	89,8	103,8	117,7	131,7	145,7	159,7
3,25	-1,2	15,2	31,6	48,0	64,4	80,8	97,2	113,6	130,0	146,4	162,8
3,5	-31,3	-12,3	6,7	25,7	44,8	63,8	82,8	101,8	120,8	139,9	158,9
3,75	-71,8	-50,0	-28,2	-6,3	15,5	37,4	59,2	81,0	102,9	124,7	146,5
4	-124,4	-99,5	-74,7	-49,8	-25,0	-0,1	24,7	49,5	74,4	99,2	124,1
4,25	-190,7	-162,6	-134,6	-106,5	-78,5	-50,4	-22,4	5,6	33,7	61,7	89,8

Tableau 4. Valeurs maxima de  $\gamma_e$  ( $k = 129,4$ ) pour divers  $\delta$ 

$\frac{a}{b}$	$\delta=0$	$\delta=0,02$	$\delta=0,04$	$\delta=0,06$	$\delta=0,08$	$\delta=0,1$	$\delta=0,12$	$\delta=0,14$	$\delta=0,16$	$\delta=0,18$	$\delta=0,2$
2,23	43,4										
2,34		51,6									
2,45			60,5								
2,56				70,2							
2,67					80,8						
2,77						92,3					
2,87							104,6				
2,96								117,8			
3,06									131,9		
3,15										146,9	
3,25											162,8
Formule	43,40	51,45	60,37	70,15	80,79	92,30	104,67	117,91	132,01	146,97	162,80

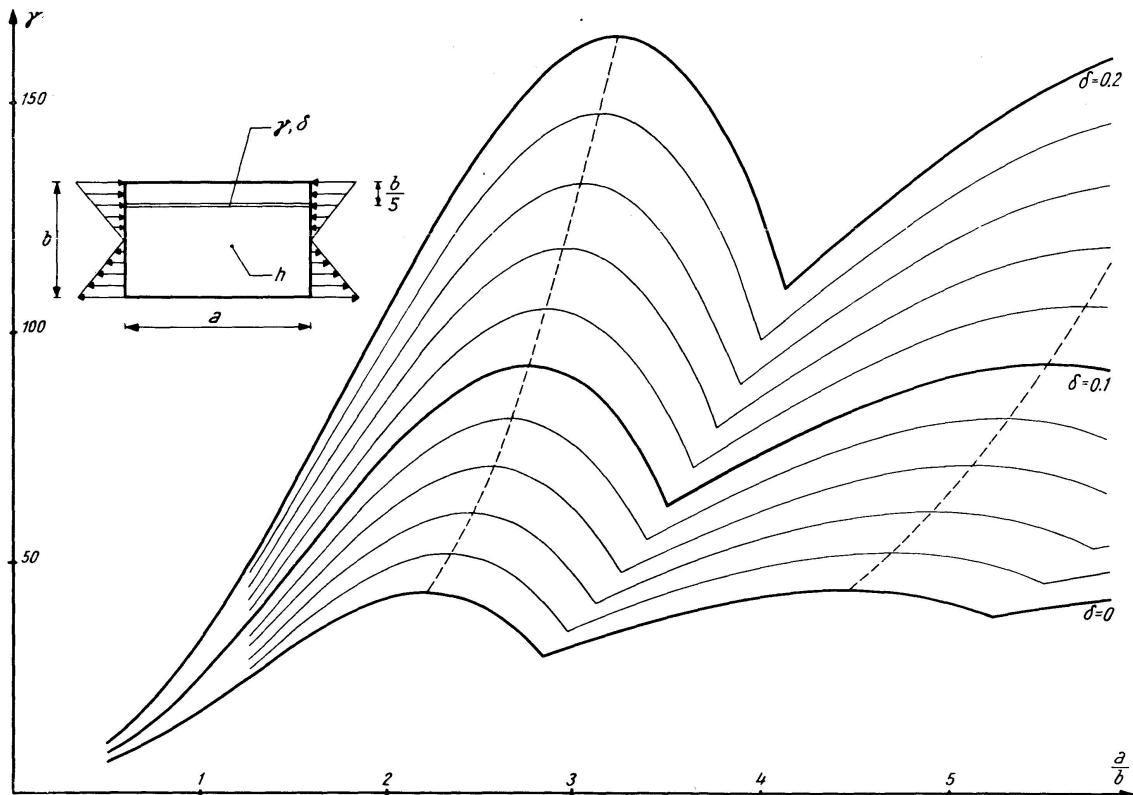


Fig. 2.

classiques des courbes de voilement. Par ailleurs, si l'on avait tenu compte du fait que la double onde transversale ne donne pas toujours  $k=129,4$ , on obtiendrait en plus des festons secondaires sur les diverses courbes.

En pratique et pour les raisons déjà énumérées précédemment, on se maintiendra au maximum à partir de celui-ci, en faisant disparaître les festons. Pour ce motif, nous donnons les maxima correspondant aux divers  $\delta$ , dans le tableau spécial 4. Tout au bas du tableau, nous avons indiqué les valeurs que l'on obtiendrait par la formule approchée  $\gamma_{e \max} = 43,4 + 381 \delta + 1080 \delta^2$ . On voit que cette formule donne d'excellents résultats.

### Résultats obtenus jusqu'ici pour un raidisseur de rigidité et de section quelconques

Comme nous venons de le faire pour la rigidité dite «optimum» ou «économique», avec  $k=129,4$ , il est possible de tracer, pour un  $k$  quelconque fixé d'avance, les courbes des rigidités correspondantes  $\gamma$  du raidisseur, avec diverses valeurs de  $\delta$ . On obtient alors autant de diagrammes que de  $k$ . Etant donné les quatre paramètres  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $k$  et  $\frac{a}{b}$  du problème du voilement avec raidisseur, plusieurs autres représentations sont possibles, comme il ressort des publications de 1948 et de 1954<sup>1)</sup>. Mais les calculs effectués en 1948 et 1954 par le procédé d'Engesser-Vianello peuvent être facilement corrigés pour tenir compte plus exactement de l'effet concentré du raidisseur, tel que nous l'avons

exposé selon les équations (46), (47), (48). Nous avons donc conservé ce procédé, en fixant par avance les valeurs de  $\gamma$  que nous voulions considérer, soit de 5 en 5. Nous avons renoncé à donner les résultats sous forme de tableaux et nous sommes contentés pour l'instant de la fig. 3, ces résultats étant encore trop fragmentaires et sans passage à un très grand nombre d'intervalles ( $n = \infty$ ). Nous constatons cependant, en comparant la fig. 3 actuelle et la fig. 3 de 1954, que les différences sont minimes dès que  $a$  est supérieur à l'unité. Nous avons déjà fait la même constatation pour la rigidité dite optimum ou économique.

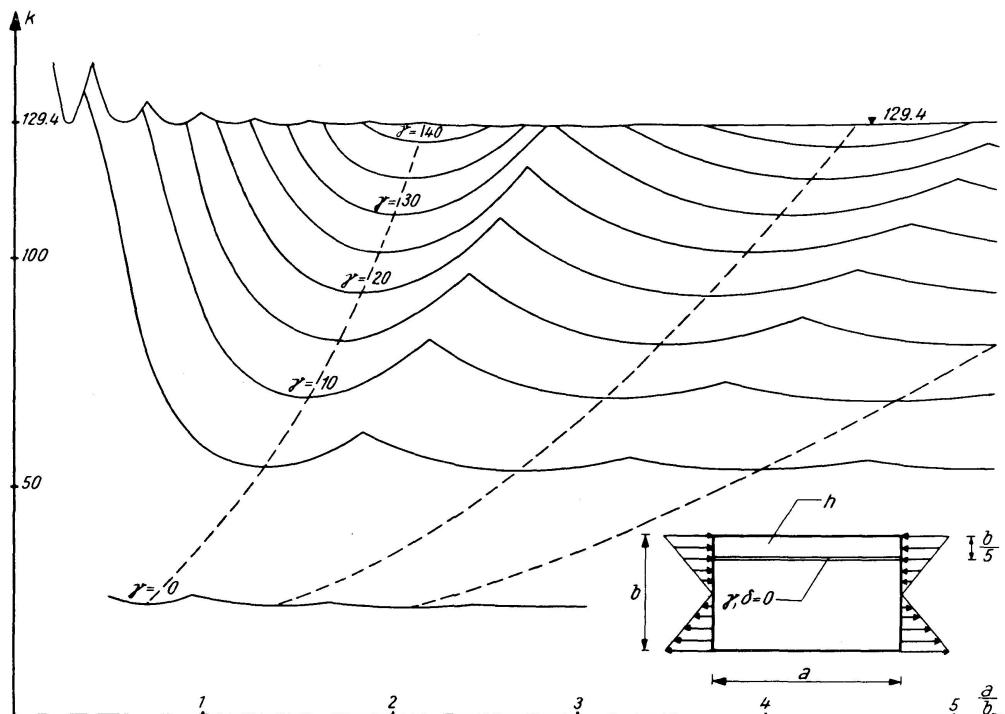


Fig. 3.

D'autre part, nous avons renoncé à donner ici la figure correspondant à la fig. 3, lorsque  $\delta$  a une valeur différente de zéro, par exemple  $\delta = 0,1$  comme en 1954. Ainsi que le montre le tableau n° 3, nous aurions besoin pour cela de nous occuper de rigidités très faibles du raidisseur, en allant même jusqu'à des valeurs négatives de  $\gamma$  et quoique ces valeurs n'aient guère de sens physique. Or, ce travail n'est pas encore complètement achevé. Nous pouvons cependant dire d'ores et déjà que le diagramme des  $k$  en fonction des  $\frac{a}{b}$  pour les diverses rigidités de  $\gamma$ , de 5 en 5, et avec  $\delta = 0,1$  est très peu différent de celui de 1954, dès que l'on dépasse l'unité pour le rapport  $\frac{a}{b}$ . Notre intention est d'aller d'ailleurs jusqu'à  $\delta = 0,2$  dans la publication plus complète dont nous avons parlé dans l'introduction.

Comme précédemment, les festons ou guirlandes de la fig. 3, obtenus en tenant compte du voilement en plusieurs ondes dans le sens longitudinal, seront en pratique remplacés par une horizontale à partir de  $k$  minimum.

### **Remarques finales**

Bien qu'elle ne soit pas encore complètement achevée, la présente étude a confirmé une fois de plus les avantages des méthodes de statique appliquée. Ces méthodes permettent en effet de traiter à peu de frais et avec une très grande précision les problèmes aussi compliqués que celui du voilement de l'âme des poutres fléchies, avec raidisseur au cinquième supérieur.

On remarquera en outre que les résultats des divers procédés de statique appliquée utilisées en 1947, 1948, 1954 et dans le présent article, donnent strictement les mêmes résultats, à condition de tenir compte de la même manière qu'aujourd'hui de l'effet concentré du raidisseur.

Le lecteur voudra bien se rappeler enfin, que nous ne nous sommes occupés que du domaine élastique et que nous n'avons rien dit de la sécurité.

### **Résumé**

Les auteurs poursuivent et développent leurs études antérieures. Ils complètent les résultats déjà trouvés en 1948 et 1954 pour le voilement de l'âme des poutres fléchies, avec raidisseur au cinquième supérieur. Ils tiennent compte en particulier d'une manière plus exacte de l'action du raidisseur en question.

Les auteurs montrent, par les résultats obtenus, que les méthodes de statique appliquée qu'ils ont utilisées donnent sans travail exagéré des résultats très précis.

### **Zusammenfassung**

Die Verfasser entwickeln und setzen ihre früheren Untersuchungen fort. Sie ergänzen die schon erhaltenen Resultate aus 1948 und 1954 über die Biegungsbeulung der im oberen Fünftel verstiften Stegbleche. Insbesondere berücksichtigen sie genauer die Wirkungsweise der Steife.

Durch die erhaltenen Resultate zeigen die Verfasser, daß die angewandten baustatischen Methoden ohne allzu große Mühe zu sehr genauen Ergebnissen führen.

### **Summary**

The authors develop and extend their previous investigations. They supplement the results already obtained in 1948 and 1954 for the buckling of the webs of sagging beams having stiffeners in the top fifth of the web. In particular, they take into consideration, in a more accurate manner, the effect of the stiffener.

From the results obtained, the authors show that the methods of applied static they employed give very accurate results without excessive work.