

Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

Band: 17 (1957)

Artikel: Flambage latéral des poutres avec liaison simple

Autor: Dos Santos, Sydney M.G.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-15761>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Flambage latéral des poutres avec liaison simple

Kippen von Balken mit einfacher Stützung

Lateral Buckling of Beams with Single Connections

Prof. SYDNEY M. G. DOS SANTOS, Ecole Nationale de Génie Civil, Rio de Janeiro, Brésil

Dans la littérature spécialisée, on rencontre quelques cas de flambage latéral des poutres assujetties à des liaisons doubles (fig. 1 a).

Avec ce type d'asservissement, la section S ne tourne pas au moment où se produit le flambage de la pièce (fig. 1 b).

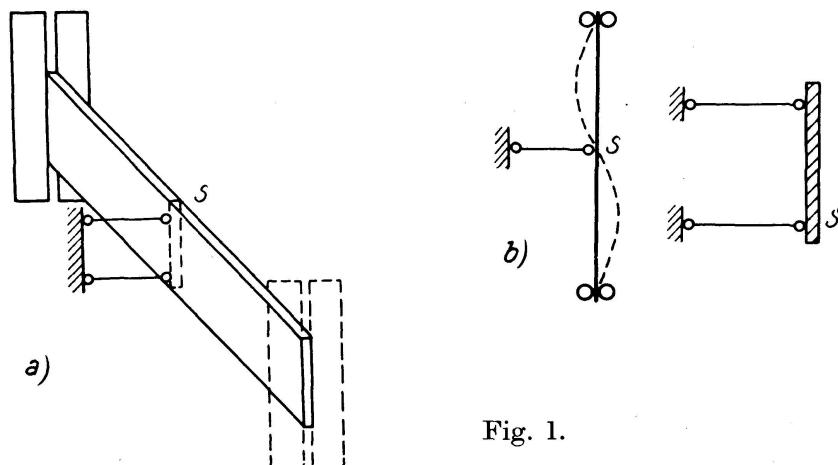


Fig. 1.

Dans la présente étude, nous nous proposons de rechercher les valeurs que prennent les charges critiques, lorsqu'on emploie uniquement une liaison simple, en rendant la section S susceptible de subir une certaine rotation au moment du flambage (fig. 2).

Une telle liaison présente un intérêt non seulement pour les charpentes métalliques, en particulier dans les avions, mais aussi, éventuellement, pour les poutres-cloisons en béton armé. Dans ce dernier cas, de nombreux d'autres types de liaisons simples et multiples demandent encore un examen.

Pour le moment, nous étudierons le cas de la fig. 2a, en admettant que la lame ait une section rectangulaire.

Considérons la barre mince de la fig. 2a, simplement appuyée en deux directions, mais avec absorption des efforts de torsion aux sections extrêmes.

Nous adopterons les conventions de la fig. 3.

Pour la charge P , excentrée par rapport à e , apparaîtra à la liaison une force X que nous calculerons (fig. 4).

Appliquant au système sans contrainte la force horizontale $X=1$, à la distance g du centre de gravité, nous aurons les diagrammes de la fig. 4.

Il en résulte:

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{48 B_2} + \frac{g^2 l}{4 R_t},$$

$$\delta_{m1} = -\frac{P e g l}{4 R_t}$$

où $B_2 = E J_2$ est la rigidité à la flexion transversale; R_t est la rigidité à la torsion. Donc:

$$X = -\frac{\delta_{m1}}{\delta_{11}} = \frac{P e g}{\frac{\alpha l^2}{12} + g^2}, \quad \left(\alpha = \frac{R_t}{B_2} \right).$$

Cela posé, considérons une section courante d'abscisse x ; nous pouvons écrire:

$$M = \frac{P}{2}x, \quad D = \frac{X}{2}x, \quad T = \frac{P e}{2} - \frac{g X}{2}.$$

Imaginons que P vienne à prendre la valeur P_k , charge critique. La pièce éprouvera un déversement lateral¹⁾ et, dans ce cas, l'excentricité de la charge deviendra $e_1 = e + \xi_c$.

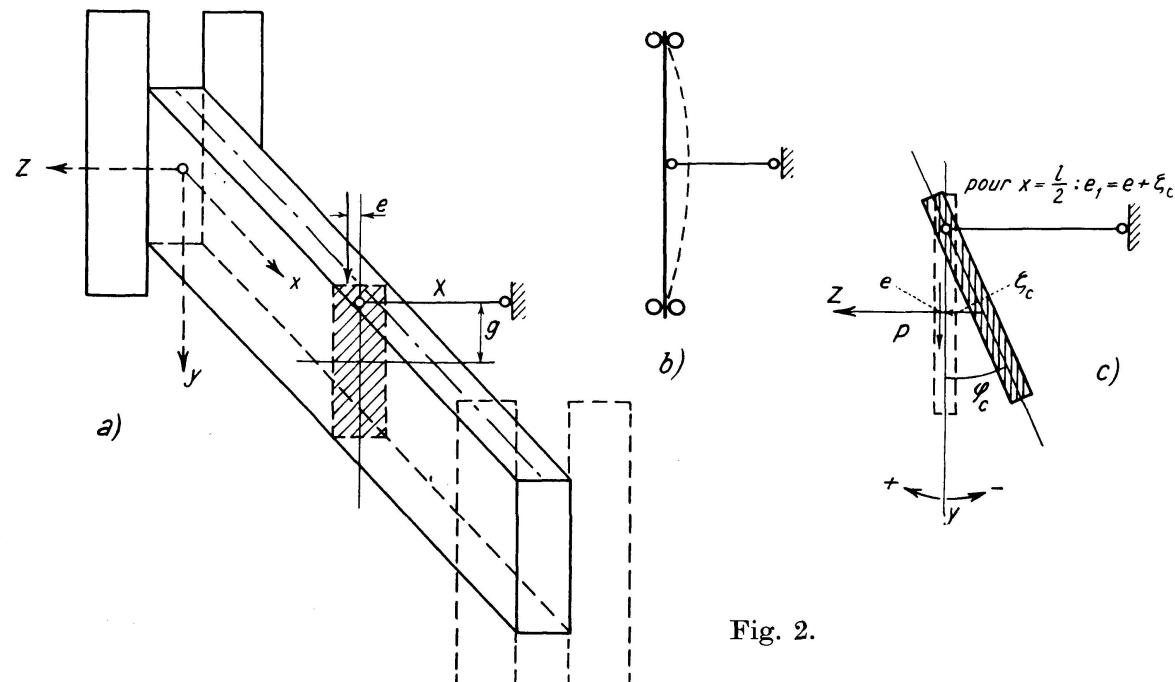


Fig. 2.

¹⁾ Ce qui pourra survenir même avec $e=0$.

Un élément dx de la barre mince viendra alors occuper une position déformée $d\xi$. Dans cette situation, en appelant ξ , η , ζ un système d'axes solidaires de la section, fig. 3, et M_ζ , D_η , T_ξ les sollicitations rapportées à ce système, il y aura équilibre entre les grandeurs présentées à la fig. 5.

L'équation des moments autour de l'axe ξ donne:

$$-d T_\xi + M_\zeta d\delta - D_\eta d\gamma = 0.$$

Observons que l'élément $d\xi$ n'est chargé par aucune force extérieure et que, η et ξ étant très petits, les produits $Qd\xi$ et $Q'd\eta$ peuvent être négligés vis-à-vis des autres termes.

Avec les conventions adoptées:

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{T_\xi}{R_t}, \quad \eta'' = -\frac{M_\zeta}{B_1} = \frac{d\gamma}{d\xi}, \quad \zeta'' = \frac{D_\eta}{B_2} = \frac{d\delta}{d\xi}.$$

En posant $dx = d\xi$, avec erreur d'ordre supérieur, nous aurons pour l'équation du flambage latéral:

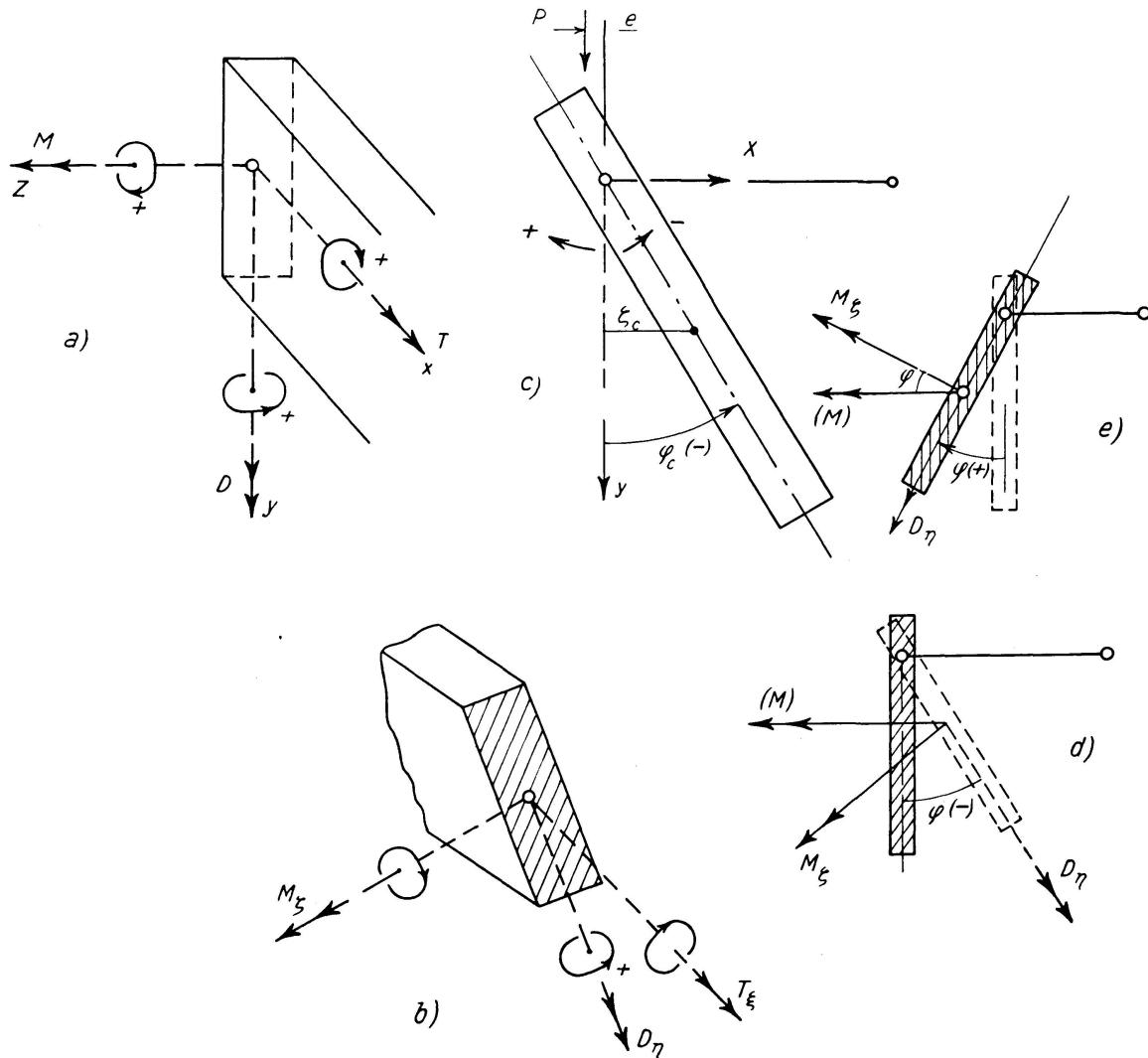


Fig. 3.

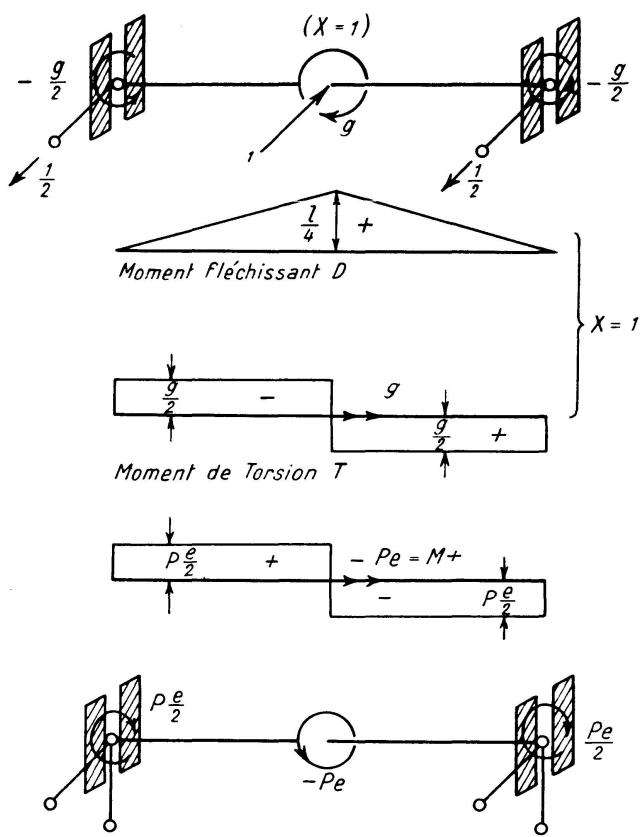


Fig. 4.

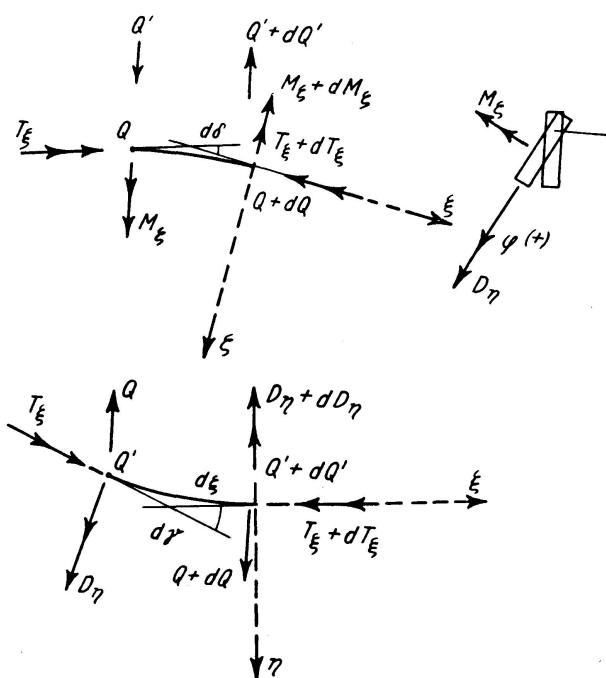


Fig. 5.

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{M_\zeta D_\eta}{B' R_t} = 0^2)$$

où

$$B' = \frac{B_1 B_2}{B_1 - B_2}.$$

$B_1 = E J_1$ est la rigidité à flexion verticale.

Dans le cas présent, nous avons (fig. 3e):

$$M_\zeta = M \cos \varphi \approx M = \frac{P}{2} x,$$

$$D_\eta = \frac{X}{2} x + M \varphi = \frac{X}{2} x + \frac{P}{2} x \varphi$$

d'où:

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{P x}{2} \left(\frac{P x}{2} \varphi + \frac{X}{2} x \right) \frac{1}{B' R_t} = 0,$$

en posant

$$k^2 = \frac{P^2}{4 B' R_t},$$

il vient:

$$\boxed{\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + k^2 x^2 \varphi = -\frac{k^2 X x^2}{P}} \quad (1)$$

$\varphi_1 = -\frac{X}{P}$ est une solution particulière.

$$\varphi_{11} = x^{1/2} \left[A' J_{1/4} \left(\frac{k x^2}{2} \right) + B' J_{-1/4} \left(\frac{k x^2}{2} \right) \right],$$

étant la solution générale de l'équation sans second membre, nous pouvons poser:

$$\boxed{\varphi = A U_1 - B x V_1 - \frac{X}{P}} \quad (2)$$

où:

$$U_1 = x^{1/2} J_{1/4} \left(\frac{k x^2}{2} \right) = 1 - \frac{u^2}{3 \cdot 4} + \frac{u^4}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} - \dots$$

$$- V_1 = x^{1/2} J_{-1/4} \left(\frac{k x^2}{2} \right) = 1 - \frac{u^2}{4 \cdot 5} + \frac{u^4}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9} - \dots$$

avec:

$$u = k x^2.$$

Les conditions aux limites, qui seront observées, sont:

$$\begin{aligned} \varphi &= 0 \quad \text{pour} \quad x = 0, \\ \left. \frac{d \varphi}{d x} \right|_{x=0} &= -\frac{T}{R_t} = -\frac{P e_1 - g X}{2 R_t}. \end{aligned}$$

De la première condition, il résulte:

²⁾ Voir F. STÜSSI, Abhandlungen de l'A.I.P.C., 1935, page 401, et SYDNEY M. G. DOS SANTOS, Kippen ou flambagem transversal, Rio, 1950.

$$A = \frac{X}{P} = \frac{e_1 g}{t} \quad \left(\text{où } X = \frac{P e_1 g}{\frac{\alpha l^2}{12} + g^2} = \frac{P e_1 g}{t} \right).$$

En introduisant la deuxième condition, il vient:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi}{du} \frac{du}{dx} = A \frac{dU_1}{du} 2kx - BV_1 - B \frac{dV_1}{du} 2kx.$$

Pour $x=0$, $u=0$ et $\frac{dU_1}{du}=0$, $-V_1=1$ et $\frac{dV_1}{du}=0$ donc:

$$\left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x=0} = -\frac{P e_1 - g X}{2 R_t} = B = -P e_1 \frac{1 - \frac{g^2}{t}}{2 R_t}.$$

D'un autre côté, comme $u=kx^2$, nous avons pour $x=\frac{l}{2}$:

$$P_k = 2k\sqrt{B'R_t} = \frac{8u\sqrt{B'R_t}}{l^2} = \frac{m\sqrt{B'R_t}}{l^2}. \quad (3)$$

Et avec les constantes trouvées, il vient:

$$\varphi = \frac{e_1 g}{t} U_1 + P e_1 \frac{1 - \frac{g^2}{t}}{2 R_t} x V_1 - \frac{e_1 g}{t} = \frac{e_1}{g} [F_1(x) - 1]. \quad (4)$$

Pour $x=\frac{l}{2}$, $\varphi_c = -\frac{\zeta_c}{g} = -\frac{e_1 - e}{g}$.

En portant ces valeurs dans l'équation (4), nous trouvons:

$$e = e_1 \left[1 + \frac{g^2}{t} U_1 + P g \frac{1 - \frac{g^2}{t}}{2 R_t} \frac{l}{2} V_1 - \frac{g^2}{t} \right] = e_1 F(u) \quad (5)$$

d'où: $e_1 = \frac{e}{F(u)}$. (5')

Il y aura flambage lorsque $F(u)=0$ ³⁾.

En notant que: $\frac{Pl}{4R_t} = \frac{2u}{l} \sqrt{\frac{B'}{R_t}}$, $\left(u = \frac{k l^2}{4} \right)$.

Nous pouvons écrire:

$$F(u) = \left(1 - \frac{g^2}{t} \right) + \frac{g^2}{t} U_1 + 2u \frac{g}{l} \sqrt{\frac{B'}{R_t}} \left(1 - \frac{g^2}{t} \right) V_1 = 0. \quad (6)$$

Nous ferons dans cette expression: $V = \frac{g}{l}$ et $M = 2\gamma \sqrt{\frac{B'}{R_t}} u V_1$.

³⁾ Lorsque $e=0$ l'équation (5) donne $0=F(u)$, ce qui exige aussi $F(u)=0$.

Pour le cas de la lame d'acier rectangulaire très mince:

$$\frac{B'}{R_t} \cong \frac{B_2}{R_t} = \frac{E h \frac{d^3}{12}}{G(h - 0,63d) \frac{d^3}{3}} = \frac{2}{3(1 - 0,63 \frac{d}{h})} \cong \frac{2}{3},$$

$$\sqrt{\frac{B'}{R_t}} \cong \frac{8}{10}, \quad \text{d'où} \quad M = \frac{8}{5} u V_1,$$

et par suite l'équation finale devient:

$$\boxed{\left(1 - \frac{g^2}{t}\right) + \frac{g^2}{t} U_1 + M \gamma \left(1 - \frac{g^2}{t}\right) = 0}. \quad (7)$$

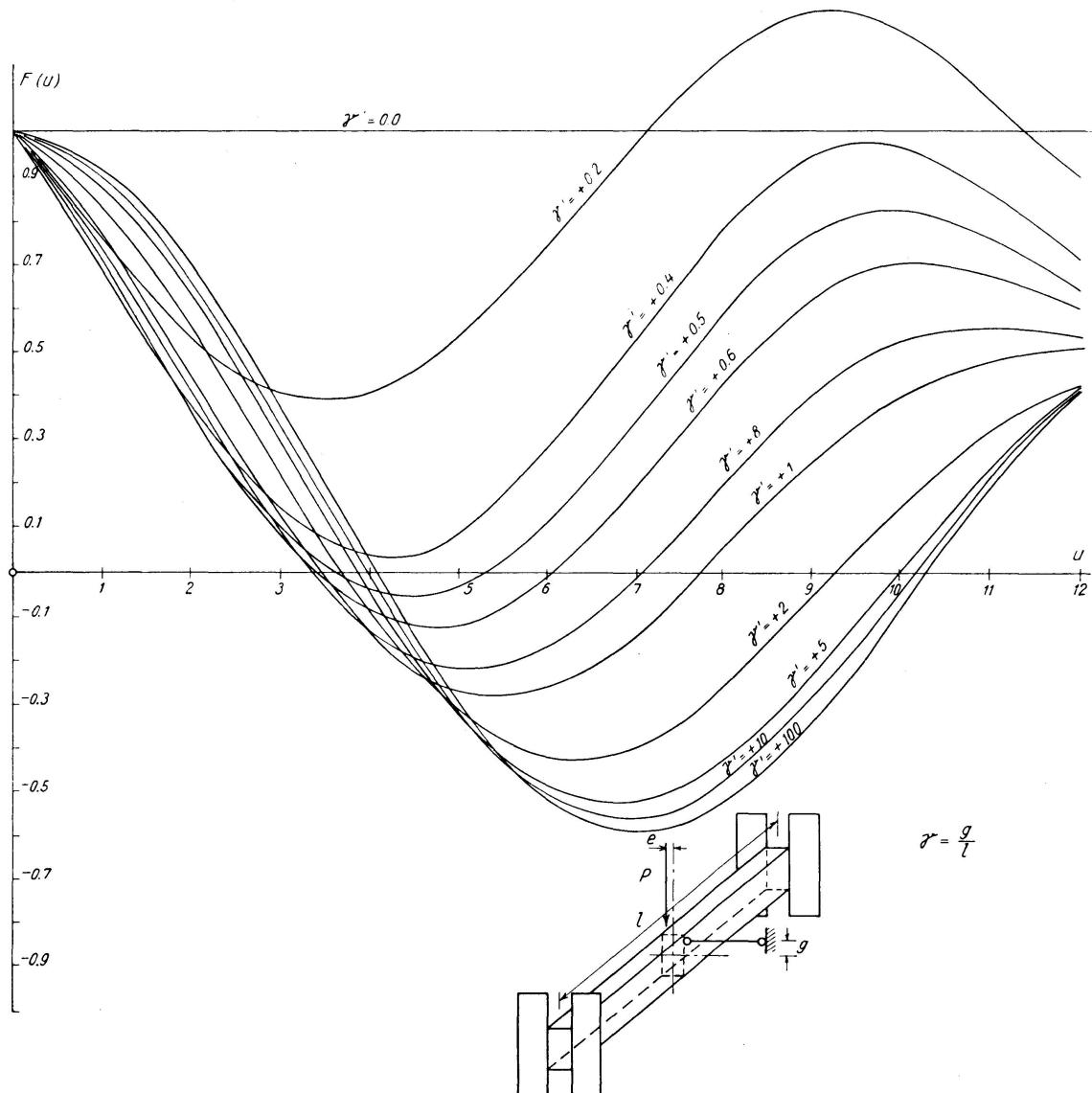


Fig. 6.

Les racines de cette équation donnent, en employant la formule (3), les valeurs des charges critiques de flambage.

La formule (4) peut être écrite:

$$\varphi = \left(\varphi_c - \frac{e}{g} \right) [1 - F_1(x)]. \quad (8)$$

φ reste donc indéterminé, parce qu'on ne connaît pas $\varphi_c = -\frac{\zeta_c}{g}$.

Application

Déterminons la charge critique pour des lames d'acier très minces de section rectangulaire. Nous avons

$$M = \frac{8}{5} u V_1 \quad \text{et} \quad \frac{g^2}{t} = \frac{1}{1 + \frac{R_t}{B_2} \frac{l^2}{12 g^2}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{8 \gamma^2}}.$$

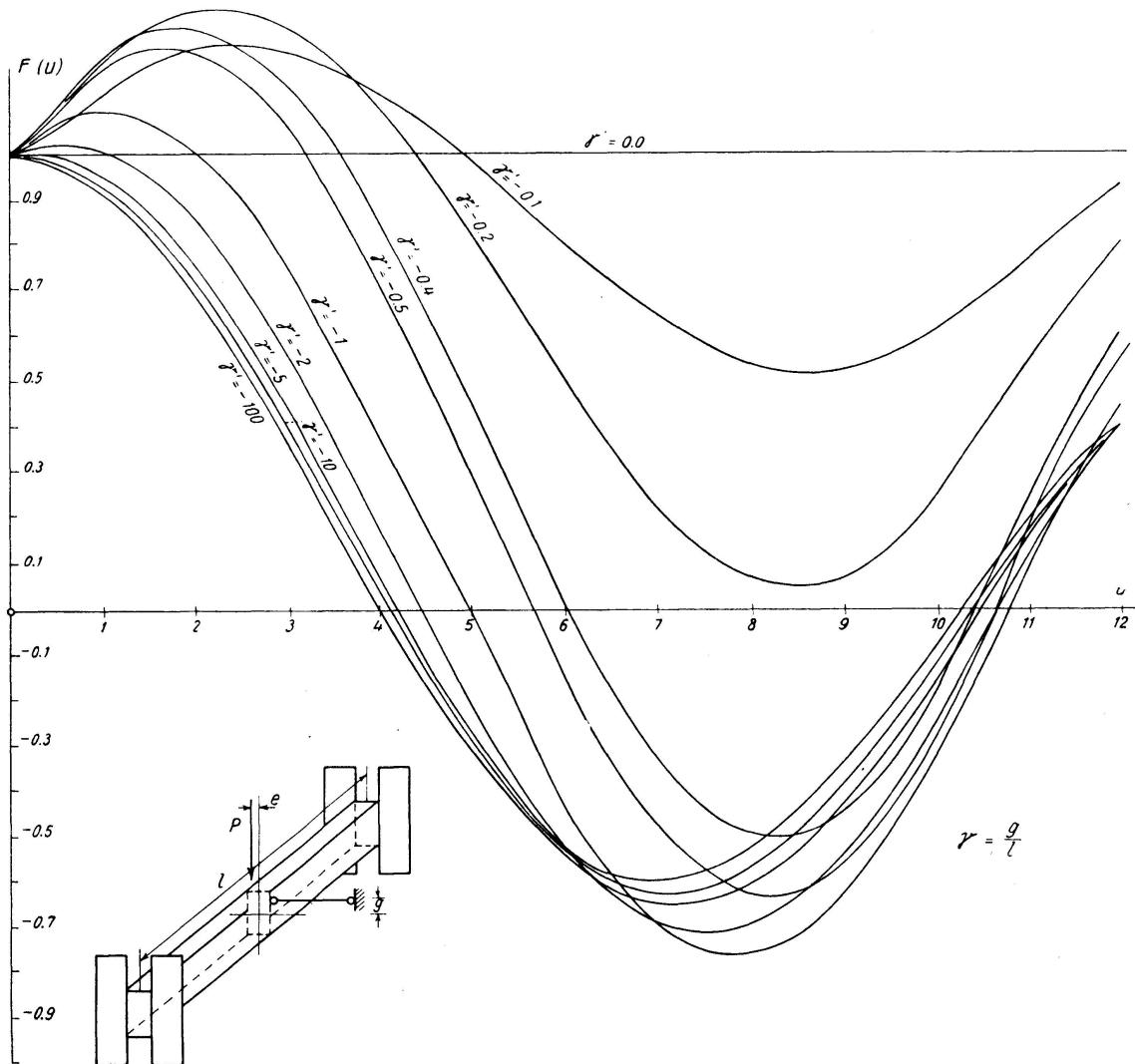


Fig. 7.

Avec ces valeurs, nous avons construit les courbes de la fig. 6 pour $F(u)$ et γ positives (liaison au-dessus de l'axe neutre), de même que celles de la fig. 7 pour γ négatives (liaison au-dessous de l'axe neutre).

L'examen de ces deux abaques permet d'obtenir les conclusions suivantes.

Conclusions

1. Dans ce type de liaison, la position du lien au-dessous de l'axe neutre est plus favorable que la position au-dessus.

Par exemple:

pour $\gamma = 0,5$ nous trouvons $u = 3,5$ soit $m = 8u \cong 28$ (v. formule (3))

pour $\gamma = -0,5$ $u = 5,65$ ou $m = 45,2$

Ceci se conçoit bien si l'on observe que la liaison inférieure conduit à une sollicitation de torsion qui s'oppose au flambage, fig. 8 b.

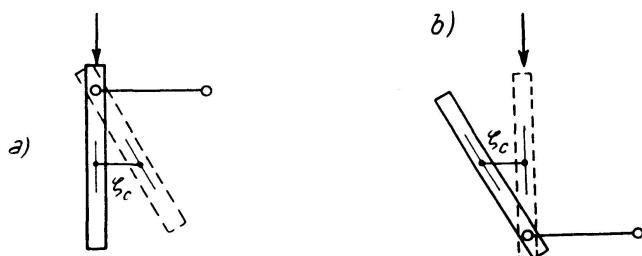


Fig. 8.

2. On voit par l'équation (8) que φ est proportionnel à $1 - F_1(x)$ et ζ étant proportionnel aussi à φ , il est possible de construire, à une certaine échelle, la configuration de l'axe neutre. Par la formulation du problème, fig. 2, la courbe sera symétrique par rapport à la section moyenne. Ainsi, pour un γ donné, aux racines $u_1, u_2, u_3 \dots$ de $F(u)$ correspondront des configurations avec un axe de symétrie, fig. 9.

3. L'examen des fig. 6 et 7 montre qu'il existe une bande limite entre $\gamma = 0,44$ et $\gamma = -0,22$, soit une position de la liaison entre $g_s = 0,44l$ et $g_i = -0,22l$, dans laquelle il n'y a pas flambage du genre de la fig. 9a. Il peut se produire un flambage du type de la fig. 1b.

Les valeurs de m seraient:

$$\text{Pour } g_s: u \cong 4,3 \quad m_s = 34,4$$

$$\text{Pour } g_i: u \cong 8,5 \quad m_i = 68,0$$

Dans le cas de la fig. 1, la valeur de m est 44,4. Cette valeur montre qu'il est plus efficace de placer une contrainte simple à $g = -0,22l$, que d'utiliser une liaison double. Une liaison simple à $g = 0,53l$ aura le même effet que cette liaison double.

On doit observer néanmoins que le fait de prévoir ces liaisons avec de telles valeurs de g_i , n'est pas toujours possible ni commode, parce que même avec de petites portées nous avons des g_i grandes. Par exemple, pour une portée de $4 m$, nous avons $g = 1,76 m$ et $g_i = -0,92 m$.

Comme dans la bande g_s , g_i le flambage est du type de la fig. 1 et non de la fig. 9, il en résulte qu'une liaison simple à la hauteur de la section S , telle que i dans la fig. 12, conduit à adopter $m = 44,4$. Cela démontre, d'autre part, que cette valeur est susceptible d'une large application pratique.

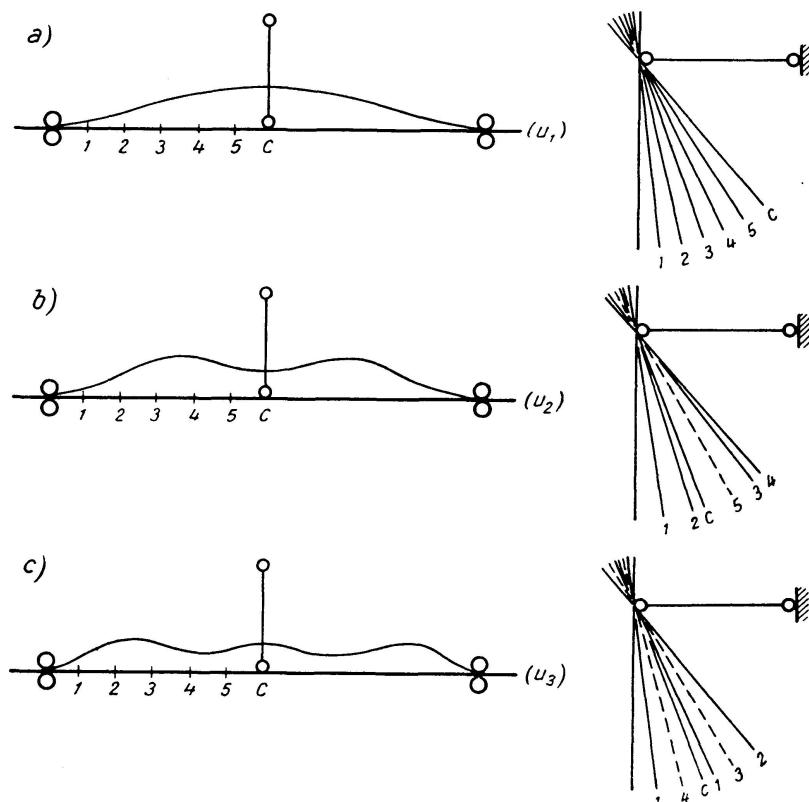


Fig. 9.

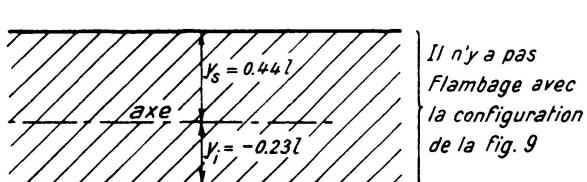


Fig. 10.

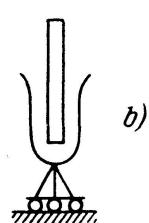
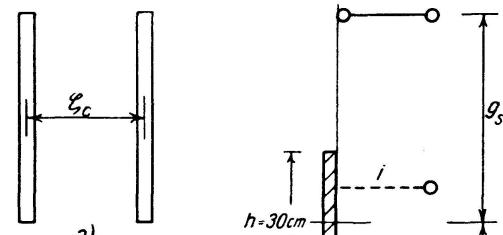


Fig. 11.

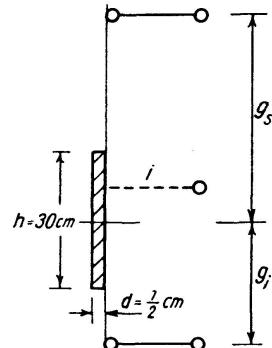


Fig. 12.

4. Pour $\gamma = \pm \infty$ la section moyenne se déplace parallèlement à elle-même et $u \approx 4,2$, avec $m = 33,6$. A l'instant du flambage, la section centrale se comporte comme si elle était conduite par une fourchette mobile, fig. 11.

Résumé

Dans la littérature spécialisée, on trouve quelques exemples de flambage latéral des poutres, soumises à des liaisons doubles, fig. 1a.

Avec ce type de sujexion la section S n'expérimente pas de rotation au moment où se produit le flambage (fig. 1b).

Dans la présente étude, l'auteur se propose d'investiguer les valeurs que prennent les charges critiques, lorsqu'on emploie des liaisons simples, en rendant la section S susceptible de tourner autour d'un point fixe.

Ce type de fixation partielle présente un intérêt non seulement pour les charpentes métalliques, en particulier dans les avions, mais aussi, éventuellement, pour les poutres-cloisons en béton-armé. Dans ce dernier cas, de nombreux d'autres types de liaisons simples et multiples méritent d'être examinés.

L'auteur présente, pour le moment, les cas plus simples déjà étudiés par lui, examinant l'influence de la position relative de la liaison, en donnant des conclusions au sujet de son efficience, ainsi que les valeurs des charges critiques respectives.

Zusammenfassung

In der Spezialliteratur findet man einige Beispiele über das Kippen von Balken mit doppelter Stützung (Fig. 1a). Bei dieser Stützungsart erfährt der Schnitt S im Moment des Kippens keine Drehung (Fig. 1b).

In der vorliegenden Studie stellt sich der Autor die Aufgabe, die Werte der kritischen Lasten zu ermitteln, wenn man einfache Stützungen verwendet, wodurch sich der Schnitt S um einen festen Punkt drehen kann.

Diese Art teilweiser Befestigung ist nicht nur für den Metallbau, vorwiegend im Flugzeugbau, von Bedeutung, sondern vielleicht auch für hohe Balken aus Eisenbeton. In diesem letzteren Fall verdienen noch viele andere ein- und mehrfache Stützungsarten untersucht zu werden.

Der Verfasser zeigt für diesmal den einfachsten, schon von ihm untersuchten Fall. Er untersucht den Einfluß der relativen Lage der Stützung und gibt Schlußfolgerungen in bezug auf ihre Wirksamkeit wie auch die entsprechenden Werte der kritischen Lasten.

Summary

In the literature specially devoted to the subject, a few examples are given of the lateral buckling of beams subjected to twofold connections, fig. 1a.

With this type of constraint, the section S does not experience any rotation at the instant when buckling occurs (fig. 1 b).

In the present investigation the author intends to study the values assumed by the critical loads when single connections are employed, making the section S capable of rotating about a fixed point.

This type of partial fixing is of interest not only for metallic frameworks, particularly in aircraft, but possibly also for reinforced concrete partition girders. In the latter case, a large number of other types of simple and multiple connections are deserving of study.

For the moment, the author reports the simplest cases he has already investigated, discusses the effect of the relative position of the connection and submits his conclusions in regard to its effectiveness, together with the values for the respective critical loads.