

Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 16 (1956)

Artikel: Sur l'instabilité de l'équilibre des voûtes minces
Autor: Giangreco, E.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-15066>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 28.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Sur l'instabilité de l'équilibre des voûtes minces

Über die Unstabilität der Schalen

On the instability of the equilibrium in thin shells

E. GIANGRECO, Bari

1^o Le problème de la stabilité de l'équilibre des voûtes minces, qui a déjà été envisagé par de nombreux auteurs [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8] est une question toujours ouverte aux techniciens qui utilisent de plus en plus ce genre de structures, et en connaissent bien les dangers conséquents à l'instabilité.

L'étude est en général entreprise à l'aide de considérations énergétiques, conformément au théorème de DIRICHLET [9, 10, 11, 12]: on peut donner à

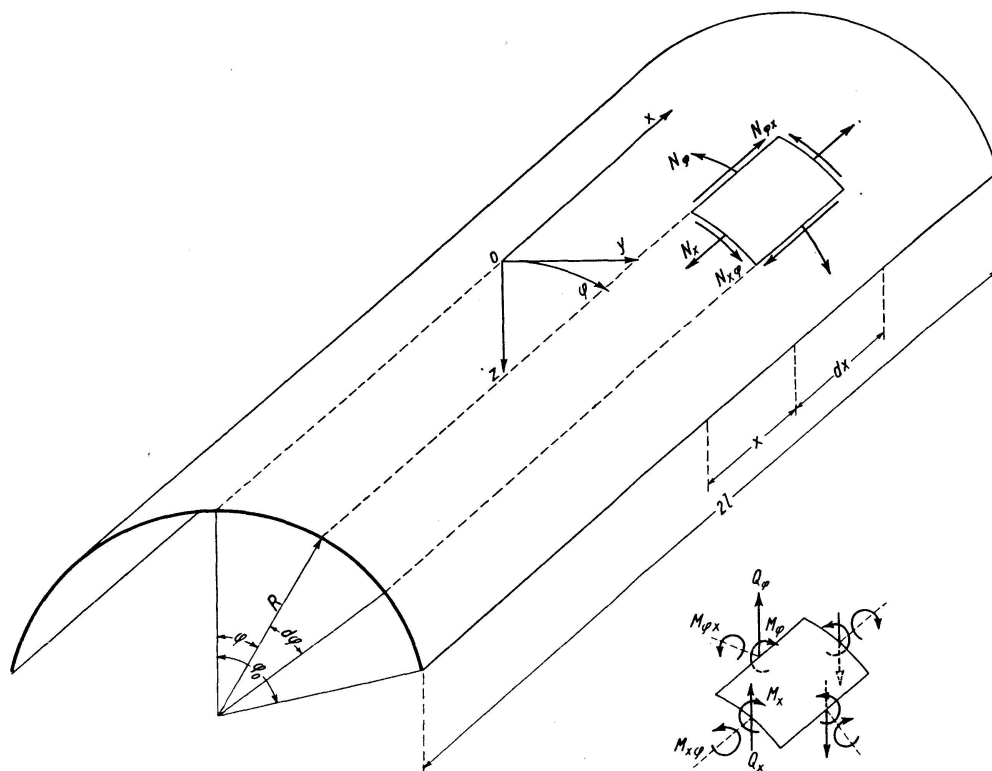


Fig. 1

chaque point de la voûte un déplacement dont les composantes u , v et w , selon x , y et z (voir fig. 1), ont l'expression [13, 14]:

$$u = \sum A_i u_i(xyz); \quad v = \sum B_i v_i(xyz); \quad w = \sum C_i w_i(xyz) \quad (1)$$

où les coefficients A_i , B_i et C_i sont inconnus et où les fonctions u_i , v_i et w_i satisfont aux conditions aux extrémités.

On va alors examiner la variation ΔE de l'énergie potentielle correspondant au passage de la forme initiale ($u=v=w=0$) à la position finale (u, v, w), et qui peut s'écrire, en se bornant aux termes du second ordre:

$$\Delta E = \delta_1 E + \delta_2 E$$

où $\delta_1 E = 0$, pour que le système soit en équilibre, et $\delta_2 E = 0$, pour que l'équilibre soit stable. Par suite, l'équation $\delta_2 E = 0$ est la condition qui caractérise l'équilibre indifférent, c'est-à-dire la limite entre l'équilibre stable et l'équilibre instable [15].

Si l'on appelle W^* l'énergie élastique et P l'énergie potentielle due aux charges extérieures, l'équation (1) se transforme en l'équation suivante:

$$\delta_2 E = \delta_2 W^* + \delta_2 P = W + g L_2^* - g L_2 = 0 \quad (2)$$

où: W représente l'énergie élastique correspondant au passage de la forme initiale à la position finale d'équilibre.

L_2^* est le travail développé par les contraintes internes pour les composantes du deuxième ordre de la déformation (fonctions quadratiques de u , v et w).

L_2 est le travail développé par les charges extérieures à cause des composantes du deuxième ordre des déplacements (fonctions quadratiques de u , v et w).

De l'équation (2) on tire aisément l'expression symbolique de la charge critique [16]:

$$g_c = \frac{W}{L_2 - L_2^*}. \quad (3)$$

2° Dans le cas d'une voûte mince, on a, pour l'énergie élastique W :

$$W = W_e + W_f$$

où W_e représente l'énergie élastique extensionnelle et W_f l'énergie élastique flexionnelle (6).

En ce qui concerne le travail développé par les efforts internes de la voûte correspondant à la forme initiale d'équilibre, nous pourrions poser:

$$L_2^* = L_{2m}^* + L_{2f}^*$$

où: L_{2m}^* représente le travail développé par les efforts de membrane de la voûte (N_x , N_φ , et $N_{x\varphi}$) pour les composantes du second ordre de la déformation, et L_{2f}^* le travail développé par les efforts flexionnels (M_x , M_φ , et $M_{x\varphi}$)

pour les composantes du second ordre de la courbure (fonctions du deuxième ordre de u , v et w)¹⁾.

Enfin, le travail L_2 dû aux charges extérieures est nul: il serait différent de zéro seulement si l'on était en présence d'une pression hydrostatique appliquée sur la voûte, ou si les déplacements u , v et w étaient choisis les uns en fonction des autres (7).

Si nous appelons:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \epsilon_x^{(1)} + \epsilon_x^{(2)}; & \epsilon_\varphi &= \epsilon_\varphi^{(1)} + \epsilon_\varphi^{(2)}; & \gamma_{x\varphi} &= \gamma_{x\varphi}^{(1)} + \gamma_{x\varphi}^{(2)} \\ \chi_x &= \chi_x^{(1)} + \chi_x^{(2)}; & \chi_\varphi &= \chi_\varphi^{(1)} + \chi_\varphi^{(2)}; & \chi_{x\varphi} &= \chi_{x\varphi}^{(1)} + \chi_{x\varphi}^{(2)} \end{aligned}$$

les composantes de la déformation et les variations de courbure bornées aux termes du deuxième ordre, les expressions de W_e , W_f , L_{2m}^* , L_{2f}^* sont les suivantes:

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{D}{2} \int_{\Omega} \left(\epsilon_x^2 + 2\nu \epsilon_x \epsilon_\varphi + \epsilon_\varphi^2 + \frac{1-\nu}{2} \gamma_{x\varphi}^2 \right) d\Omega \\ W_f &= \frac{B}{2} \int_{\Omega} [\chi_x^2 + 2\nu \chi_x \chi_\varphi + \chi_\varphi^2 + 2(1-\nu) \chi_{x\varphi}^2] d\Omega \\ L_{2m}^* &= \int_{\Omega} (N_x \epsilon_x^{(2)} + N_\varphi \epsilon_\varphi^{(2)} + N_{x\varphi} \gamma_{x\varphi}^{(2)}) d\Omega \\ L_{2f}^* &= \int_{\Omega} (M_x \chi_x^{(2)} + M_\varphi \chi_\varphi^{(2)} + M_{x\varphi} \chi_{x\varphi}^{(2)}) d\Omega \end{aligned}$$

et l'expression de $\delta_2 E$, en négligeant ν , est:

$$\begin{aligned} \delta_2 E &= \frac{D}{2} \int_{\Omega} \left(\epsilon_x^2 + \epsilon_\varphi^2 + \frac{\gamma_{x\varphi}^2}{2} \right) d\Omega + \frac{B}{2} \int_{\Omega} (\chi_x^2 + \chi_\varphi^2 + 2 \chi_{x\varphi}^2) d\Omega + \int_{\Omega} (N_x \epsilon_x^{(2)} + \\ &+ N_\varphi \epsilon_\varphi^{(2)} + N_{x\varphi} \gamma_{x\varphi}^{(2)}) d\Omega + \int_{\Omega} (M_x \chi_x^{(2)} + M_\varphi \chi_\varphi^{(2)} + M_{x\varphi} \chi_{x\varphi}^{(2)}) d\Omega \end{aligned} \quad (4)$$

où D et B représentent la rigidité extentionnelle et la rigidité flexionnelle de la voûte:

$$D = \frac{E s}{1-\nu^2} \cong E s; \quad B = \frac{E s^3}{12(1-\nu^2)} \cong \frac{E s^3}{12}.$$

Si l'on appelle N_x' , N_φ' ... les efforts dans la voûte correspondant à la charge $g=1$, l'équation (4) s'écrit:

$$\begin{aligned} \delta_2 E &= \frac{D}{2} \int_{\Omega} \left(\epsilon_x^2 + \epsilon_\varphi^2 + \frac{\gamma_{x\varphi}^2}{2} \right) d\Omega + \frac{B}{2} \int_{\Omega} (\chi_x^2 + \chi_\varphi^2 + 2 \chi_{x\varphi}^2) d\Omega + g_c \int_{\Omega} (N_x' \epsilon_x^{(2)} + \\ &+ N_\varphi' \epsilon_\varphi^{(2)} + N_{x\varphi}' \gamma_{x\varphi}^{(2)}) d\Omega + g_c \int_{\Omega} (M_x' \chi_x^{(2)} + M_\varphi' \chi_\varphi^{(2)} + M_{x\varphi}' \chi_{x\varphi}^{(2)}) d\Omega. \end{aligned} \quad (4')$$

¹⁾ Dans notre cas, en ayant tenu compte du régime flexionnel, d'après la théorie de Finsterwalder, nous avons la contribution au travail L_{2f} du seul moment transversal M_φ [17, 18, 19].

On peut aussi remarquer que $D \gg B$, et par conséquent W_e est beaucoup plus grand que W_f , à tel point que les valeurs que l'on trouve pour la charge critique apparaissent tellement élevées qu'elles perdent toute signification physique. Pour résoudre cette première difficulté, il faudrait toujours choisir pour les déplacements u , v et w des expressions qui rendent $W_e = 0$, c'est-à-dire qui annulent les composantes du premier ordre de la déformation ($\epsilon_x^{(1)} = \epsilon_\varphi^{(1)} = \gamma_{x\varphi}^{(1)} = 0$).

Mais ces expressions mettent en relief la résistance flexionnelle de la voûte le long des directrices, en négligeant presque complètement celles des génératrices, ce qui, pour des rapports élevés de L/R , est très peu admissible²⁾.

Il faut, sinon, renoncer à la possibilité d'annuler W_e , et ensuite le négliger dans l'expression de $\delta_2 E$: on a, de cette façon, une limitation de la charge critique qui, bien qu'excessive, peut toujours être utile à l'ingénieur [8].

Une autre difficulté consiste dans la détermination des composantes du deuxième ordre de la déformation et de la variation de courbure; les premières ont déjà été calculées pour une surface quelconque, à l'aide de l'expression d'un élément de ligne en coordonnées curvilignes et au moyen de la théorie des formes quadratiques; les secondes ont été calculées, pour la première fois, dans cet article, en se référant au traité de M. LOVE [20], comme on le montrera dans les pages suivantes.

3^o Considérons une surface quelconque et indiquons par α et β deux paramètres par lesquels on puisse fixer la position d'un point et par χ l'angle formé par les tangentes aux courbes $\alpha = \text{constante}$, $\beta = \text{constante}$ ³⁾, dans un point quelconque P .

Si A et B représentent deux fonctions de α et β , la surface peut être rapportée à un élément linéaire ds :

$$ds = A^2 (d\alpha)^2 + B^2 (d\beta)^2 + 2AB \cos \chi d\alpha d\beta. \quad (5)$$

Fixons maintenant dans le point P un système d'axes coordonnés x , y et z , avec x selon la tangente à la courbe $\beta = \text{constante}$, z selon la normale à la surface, et y normal à x , tels que le système d'axes choisi soit dextrogyre.

Si le point P se déplace sur la surface, les directions choisies pour les axes coordonnés changeront. En introduisant la variable temps t , les composantes de la vitesse du point P parallèles à la position instantanée des axes x , y et z sont:

$$A \frac{d\alpha}{dt} + B \frac{d\beta}{dt} \cos \chi; \quad B \frac{d\beta}{dt} \sin \chi; \quad 0$$

²⁾ Ce genre de déplacements purement flexionnels, comme M. Krall le fait remarquer (8), peuvent paraître légitimes si l'on considère une plasticisation au milieu de la voûte, et par conséquent une sorte d'agenouillement, ou par des conditions aux extrémités non parfaitement satisfaites.

³⁾ $\alpha = \text{constante}$, $\beta = \text{constante}$ représentant des familles de courbes étendues sur la surface que l'on examine. Si elles deviennent les lignes de courbure, on a $\chi = \frac{\pi}{2}$.

tandis que les composantes de la vitesse angulaire rapportées aux axes x , y et z sont:

$$p_1 \frac{d\alpha}{dt} + p_2 \frac{d\beta}{dt}; \quad q_1 \frac{d\alpha}{dt} + q_2 \frac{d\beta}{dt}; \quad r_1 \frac{d\alpha}{dt} + r_2 \frac{d\beta}{dt}$$

où p_1 , p_2 , etc. sont des fonctions de α et β et sont liés entre eux et avec A et B ⁴).

Indiquons ensuite par R_1 et R_2 ⁵) les rayons de courbure de ces sections, qui sont normales à la surface et dont les tangentes en P coïncident avec les axes y et z .

Supposons maintenant que l'on donne au point P un déplacement dont les composantes soient u , v et w rapportées aux tangentes et à la normale en P aux courbes $\beta = \text{constante}$ et $\alpha = \text{constante}$. Soit P' (x' , y' , z') la nouvelle position du point P et x' , y' , z' un nouveau système d'axes choisi dans le point P' , de même qu'on avait choisi le système x , y , z dans le point P . Soient l_i , m_i et n_i ($i = 1, 2, 3$) les cosinus directeurs de x , y , z par rapport à x' , y' , z' .

Indiquons par:

$$\epsilon_1 = \epsilon_1^{(1)} + \epsilon_1^{(2)}; \quad \epsilon_2 = \epsilon_2^{(1)} + \epsilon_2^{(2)}; \quad \gamma_{12} = \gamma_{12}^{(1)} + \gamma_{12}^{(2)}$$

les composantes de la déformation, et par χ' ($\cos \chi' = \gamma_{12}$) l'angle formé par les courbes $\alpha = \text{constante}$ et $\beta = \text{constante}$, sur l'élément de surface déformée définie par un nouveau élément linéaire ds' :

$$(ds')^2 = A^2 (1 + \epsilon_1) (d\alpha)^2 + B^2 (1 + \epsilon_2) (d\beta)^2 + 2AB (1 + \epsilon_1) (1 + \epsilon_2) \gamma_{12} d\alpha d\beta \quad (6)$$

Les expressions des composantes de la vitesse sont encore valables pourvu que A et B soient remplacés par $A(1 + \epsilon_1)$ et $B(1 + \epsilon_2)$ et p_1 , p_2 , etc. par p_1' , p_2' , etc.

Les quantités ϵ_1 , ϵ_2 et γ_{12} étant connues, on peut immédiatement en déduire les variations de courbure:

$$\chi_1 = -\frac{q_1'}{A} - \frac{1}{R_1}; \quad \chi_2 = \frac{p_1'}{B} - \frac{1}{R_2}; \quad \chi_{12} = \frac{p_1'}{A}.$$

⁴) Pour déterminer les composantes de la déformation ϵ_1 , ϵ_2 et γ_{12} , il suffit se rapporter aux expressions des cosinus directeurs aux lignes $\beta = \text{constante}$ et $\alpha = \text{constante}$, qui sont respectivement l_1 , m_1 et n_1 , ($l_2 \sin \chi' + l_1 \cos \chi'$), ($m_2 \sin \chi' + m_1 \cos \chi'$), ($n_2 \sin \chi' + n_1 \cos \chi'$). En tenant compte que $\cos \chi' = \gamma_{12}$ et $\sin \chi' \cong 1 - \frac{\gamma_{12}^2}{2}$, on a:

$$\frac{\partial x'}{\partial \alpha} = A(1 + \epsilon_1) l_1; \quad \frac{\partial y'}{\partial \alpha} = A(1 + \epsilon_1) m_1; \quad \frac{\partial z'}{\partial \alpha} = A(1 + \epsilon_1) n_1; \quad (7)$$

⁴) Voir LOVE: A treatise on the mathematical theory of elasticity; form. (2) et (3), chapitre XXIV, page 516.

⁵) Ils sont fournis comme racines d'une équation du second degré (v. LOVE, p. 517, form. (5)); et dans le cas particulier où $\chi = \frac{\pi}{2}$ ($p_1 = q_2 = 0$, en conséquence des relations mentionnées), on a $1/R_1 = -q_1/A$; $1/R_2 = p_2/B$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x'}{\partial \beta} &= B(1 + \epsilon_2) \left[l_2 \left(1 - \frac{\gamma_{12}^2}{2} \right) + l_1 \gamma_{12} \right]; \\
\frac{\partial y'}{\partial \beta} &= B(1 + \epsilon_2) \left[m_2 \left(1 - \frac{\gamma_{12}^2}{2} \right) + m_1 \gamma_{12} \right]; \\
\frac{\partial z'}{\partial \beta} &= B(1 + \epsilon_2) \left[n_2 \left(1 - \frac{\gamma_{12}^2}{2} \right) + n_1 \gamma_{12} \right]
\end{aligned} \tag{8}$$

desquelles on parvient facilement, en rappelant les relations entre les cosinus directeurs $l_{i+2} = m_i n_{i+1} - m_{i+1} n_i$ ($i = 1, 2, 3$), aux expressions des composantes de la déformation

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= \epsilon_1^{(1)} + \epsilon_1^{(2)} = \frac{1}{A} \sqrt{\left(\frac{\partial x'}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial \alpha} \right)^2} - 1; \\
\epsilon_2 &= \epsilon_2^{(1)} + \epsilon_2^{(2)} = \frac{1}{B} \sqrt{\left(\frac{\partial x'}{\partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial \beta} \right)^2} - 1; \\
\gamma_{12} &= \gamma_{12}^{(1)} + \gamma_{12}^{(2)} = \frac{1}{AB} (1 - \epsilon_1^{(1)} + \epsilon_2^{(1)}) \left(\frac{\partial x'}{\partial \alpha} \frac{\partial x'}{\partial \beta} + \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \frac{\partial y'}{\partial \beta} + \frac{\partial z'}{\partial \alpha} \frac{\partial z'}{\partial \beta} \right).
\end{aligned} \tag{9}$$

Les quantités $\frac{\partial x'}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial x'}{\partial \beta}$ etc. en fonction de A , B , u , v et w ont les expressions suivantes:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x'}{\partial \alpha} &= A + \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} - A \frac{w}{R_1}; & \frac{\partial y'}{\partial \alpha} &= \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta}; & \frac{\partial z'}{\partial \alpha} &= \frac{\partial w}{\partial \alpha} + A \frac{u}{R_1}; \\
\frac{\partial x'}{\partial \beta} &= \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{v}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha}; & \frac{\partial y'}{\partial \beta} &= B + \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{u}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} - \frac{Bw}{R_2}; & \frac{\partial z'}{\partial \beta} &= \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{Bv}{R_2}.
\end{aligned}$$

On parvient ainsi aux expressions des composantes de la déformation bornées aux termes du second ordre⁶).

⁶) Pour le calcul de ϵ_1 et ϵ_2 il faut remarquer que, une fois qu'on a mis sous le signe radical les expressions de $\frac{\partial x'}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial x'}{\partial \beta}$ etc., il faut assembler les termes du premier et du second ordre et ensuite développer en série la racine, en négligeant dans les doubles produits et dans les carrés tous les termes qui sont au-dessus du second ordre. Par exemple, pour ϵ_1 , on a, après avoir effectué les substitutions et assemblé les termes du premier et du second ordre:

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= \sqrt{1 + \frac{2}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{2v}{AB} \left(\frac{\partial A}{\partial \beta} \right) - 2 \frac{w}{R_1} + \frac{1}{A^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{v^2}{A^2 B^2} \left(\frac{\partial A}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{w^2}{R_1^2} + \frac{2v}{A^2 B} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial A}{\partial \beta} -} \\
&\quad - \frac{2vw}{AB R_1} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{1}{A^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{u^2}{A^2 B^2} \left(\frac{\partial A}{\partial \beta} \right)^2 - \frac{2u}{A^2 B} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{1}{A^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{u^2}{R_1^2} + \frac{2u}{A R_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - 1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= \epsilon_1^{(1)} + \epsilon_1^{(2)} = \left\{ \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{w}{R_1} \right\} + \left\{ \frac{1}{2A^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{u^2}{2A^2 B^2} \left(\frac{\partial A}{\partial \beta} \right)^2 - \right. \\
&\quad \left. - \frac{u}{A^2 B} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{1}{2A^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{u^2}{2R_1^2} + \frac{u}{A_1^2} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right\}; \\
\epsilon_2 &= \epsilon_2^{(1)} + \epsilon_2^{(2)} = \left\{ \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{u}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} - \frac{w}{R_2} \right\} + \left\{ \frac{1}{2B^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{v^2}{2A^2 B^2} \left(\frac{\partial B}{\partial \alpha} \right)^2 - \right. \\
&\quad \left. - \frac{v}{AB^2} \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{1}{2B^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{v^2}{2R_2^2} + \frac{v}{BR_2} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right\}; \\
\gamma_{12} &= \gamma_{12}^{(1)} + \gamma_{12}^{(2)} = \left\{ \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \left(\frac{u \partial A}{\partial \beta} + \frac{v \partial B}{\partial \alpha} \right) \right\} + \frac{1}{AB} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \quad (10) \\
&\quad + \frac{1}{B} \frac{u}{R_1} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{v}{R_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \left(\frac{1}{A^2} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{1}{B^2} \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) + \\
&\quad + \frac{1}{AB} \left[\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \left(\frac{u \partial u}{\partial \alpha} - \frac{v \partial v}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \left(\frac{v \partial v}{\partial \beta} - \frac{u \partial u}{\partial \beta} \right) \right] + uv \left\{ \frac{1}{R_1 R_2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{A^2 B^2} \left[\left(\frac{\partial A}{\partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial \alpha} \right)^2 \right] \right\} + \frac{w}{AB} \left[\frac{1}{R_1} \left(\frac{u \partial A}{\partial \beta} + \frac{B \partial v}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{R_2} \left(\frac{A \partial u}{\partial \beta} - \frac{v \partial B}{\partial \alpha} \right) \right].
\end{aligned}$$

Passons tout de suite à quelques cas particuliers:

$$ds^2 = dx^2 + R^2(\varphi) d\varphi^2 \quad (\text{coordonnées cylindriques});$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial x}; \quad \frac{\partial}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \varphi};$$

$$A = 1; \quad B = R(\alpha, \beta); \quad R_1 = \infty; \quad R_2 = R;$$

Si l'on développe en série cette expression

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= 1 + \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{AB} \left(\frac{\partial A}{\partial \beta} \right) - \frac{w}{R_1} + \frac{1}{2A^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{v^2}{2A^2 B^2} \left(\frac{\partial A}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{w^2}{R_1^2} + \\
&\quad + \frac{v}{A^2 B} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{w}{AR_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{vw}{ABR_1} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{1}{2A^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{u^2}{2A^2 B^2} \left(\frac{\partial A}{\partial \beta} \right)^2 - \\
&\quad - \frac{u}{A^2 B} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{1}{2A^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{u^2}{2R_1^2} + \frac{u}{AR_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{1}{B} \left[\frac{4}{A^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{4v^2}{A^2 B^2} \left(\frac{\partial A}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{4w^2}{R_1^2} + \frac{8v}{A^2 B} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{8}{A} \frac{v}{R_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{8}{AB} \frac{vw}{R_1} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right] - 1
\end{aligned}$$

et en simplifiant, on a:

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{w}{R_1} + \frac{1}{2A^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{u^2}{2A^2 B^2} \left(\frac{\partial A}{\partial \beta} \right)^2 - \frac{u}{A^2 B} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \\
&\quad + \frac{1}{2A^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{u^2}{2R_1^2} + \frac{u}{AR_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 = \epsilon_x &= \epsilon_x^{(1)} + \epsilon_x^{(2)} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]; \\
\epsilon_2 = \epsilon_\varphi &= \epsilon_\varphi^{(1)} + \epsilon_\varphi^{(2)} = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{w}{R} + \frac{u}{R} \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{1}{2R^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{v^2}{2R^2} \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right)^2 - \\
&\quad - \frac{v}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{1}{2R^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{v^2}{2R^2} + \frac{v}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi}; \quad (11) \\
\gamma_{12} = \gamma_{x\varphi} &= \gamma_{x\varphi}^{(1)} + \gamma_{x\varphi}^{(2)} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{R} \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{v}{R} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \\
&\quad - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{R^2} \left[\frac{\partial R}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial \varphi} - u \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{uv}{R^2} \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right)^2 + \frac{w}{R^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial R}{\partial x} \right) \right].
\end{aligned}$$

Si $R = \text{constante}$,

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 = \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]; \\
\epsilon_2 = \epsilon_\varphi &= \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{w}{R} - \frac{1}{2R^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{1}{2R^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{v^2}{2R^2} + \frac{v}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi}; \quad (11') \\
\gamma_{12} = \gamma_{x\varphi} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{v}{R} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \\
&\quad + \frac{w}{R^2} \frac{\partial u}{\partial x},
\end{aligned}$$

lesquelles, si l'on pose $\frac{\partial}{\partial x} = ()'$ et $\frac{\partial}{\partial \varphi} = ()$, coïncident parfaitement avec les expressions fournies par M. Krall.

$$\begin{aligned}
ds^2 &= dx^2 + dy^2 \quad (\text{coordonnées cartésiennes}); \\
\frac{\partial}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial x}; \quad \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial y}; \\
A &= 1; \quad B = R; \quad R_1 = \infty; \quad R_2 = R; \\
\epsilon_1 = \epsilon_x &= \epsilon_x^{(1)} + \epsilon_x^{(2)} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]; \\
\epsilon_2 = \epsilon_y &= \epsilon_y^{(1)} + \epsilon_y^{(2)} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]; \quad (12) \\
\gamma_{12} = \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^{(1)} + \gamma_{xy}^{(2)} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}.
\end{aligned}$$

5° Passons maintenant à la détermination des variations de courbure: rappelons les expressions des quantités q_1' , p_2' et p_1' qui interviennent dans l'expression de χ_1 , χ_2 et χ_{12} :

$$\begin{aligned} q_1' &= -\left(l_3 \frac{\partial l_1}{\partial \alpha} + m_3 \frac{\partial m_1}{\partial \alpha} + n_3 \frac{\partial n_1}{\partial \alpha}\right); \\ p_2' &= \left(l_3 \frac{\partial l_2}{\partial \beta} + m_3 \frac{\partial m_2}{\partial \beta} + n_3 \frac{\partial n_2}{\partial \beta}\right); \\ p_1' &= \left(l_3 \frac{\partial l_2}{\partial \alpha} + m_3 \frac{\partial m_2}{\partial \alpha} + n_3 \frac{\partial n_2}{\partial \alpha}\right), \end{aligned} \quad (13)$$

où les expressions des cosinus directeurs l_3 , m_3 et n_3 , et des dérivées $\frac{\partial l_1}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial m_1}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial n_1}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial l_2}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial m_2}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial n_2}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial l_2}{\partial \beta}$, $\frac{\partial m_2}{\partial \beta}$, $\frac{\partial n_2}{\partial \beta}$ sont les suivantes⁷⁾

$$\begin{aligned} l_3 &= -\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{u}{R_1}; & m_3 &= -\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{v}{R_2}; & n_3 &= 1; \\ \frac{\partial l_1}{\partial \alpha} &= \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{A u}{R_1} \right) \\ \frac{\partial m_1}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta}; \\ \frac{\partial n_1}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_1} \right) + \frac{A}{R_1}; \\ \frac{\partial l_2}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(-\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{u}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{A}{R_1} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_2} \right); \\ \frac{\partial m_2}{\partial \alpha} &= \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right); \\ \frac{\partial n_2}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_2} \right) - \frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right); \\ \frac{\partial l_2}{\partial \beta} &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(-\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{u}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha}; \\ \frac{\partial m_2}{\partial \beta} &= -\frac{1}{R_2} \left(\frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{B v}{R_2} \right) - \frac{1}{A^2} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right); \\ \frac{\partial n_2}{\partial \beta} &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_2} \right) + \frac{B}{R_2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Après les substitutions, et en ayant séparé aussi q_1' , p_2' et p_1' en termes du premier et du second ordre, nous avons:

⁷⁾ Voir LOVE, A treatise on the mathematical theory of elasticity, chapitre XXIV, page 523.

$$\begin{aligned}
q_1' &= -\left\{\frac{A}{R_1} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_1} \right) + \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_2} \right)\right\} + \\
&\quad + \left\{ \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_1} \right) \left[\frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} + A \frac{u}{R_1} \right) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_2} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) \right\}; \\
p_2' &= \left\{ \frac{B}{R_2} + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_2} \right) + \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_1} \right) \right\} + \\
&\quad + \left\{ - \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_1} \right) \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \left(- \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{u}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_2} \right) \left[\frac{1}{R_2} \left(\frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{Bv}{R_2} \right) + \frac{1}{A^2} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) \right] \right\}; \\
p_i' &= \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_2} \right) - \frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{v}{R_1} \right) \right\} - \\
&\quad - \left\{ \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_1} \right) \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(- \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{u}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) - \frac{A}{R_1} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_2} \right) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_2} \right) \left[\frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Nous pouvons ainsi déterminer les expressions du premier et du second ordre des variations de courbure:

$$\begin{aligned}
\chi_1 &= \chi_1^{(1)} + \chi_1^{(2)} = \left\{ \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_1} \right) + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_2} \right) \right\} + \\
&\quad - \left\{ \frac{1}{A} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_1} \right) \left[\frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{Au}{R_1} \right) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{A} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_2} \right) \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) \right] \right\}; \\
\chi_2 &= \chi_2^{(1)} + \chi_2^{(2)} = \left\{ \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_2} \right) + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_1} \right) \right\} + \\
&\quad - \left\{ \frac{1}{B} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_1} \right) \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \left(- \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{u}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{B} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_2} \right) \left[\frac{1}{R_2} \left(\frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{Bv}{R_2} \right) + \frac{1}{A^2} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) \right] \right\}; \\
\chi_{12} &= \chi_{12}^{(1)} + \chi_{12}^{(2)} = \left\{ \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_2} \right) - \frac{1}{AR_1} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right\} + \\
&\quad - \left\{ \frac{1}{A} \left(- \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_1} \right) \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(- \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{u}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{A}{R_1} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_2} \right) + \frac{1}{A} \left(- \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{v}{R_2} \right) \left[\frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) \right] \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{16}$$

En coordonnées cylindriques, pour $A = 1$, $B = R(\alpha, \beta)$; $R_1 = \infty$; $R_2 = 0$

$$\begin{aligned}\chi_1 = \chi_x &= \chi_x^{(1)} + \chi_x^{(2)} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} + v \right); \\ \chi_2 = \chi_\varphi &= \chi_\varphi^{(1)} + \chi_\varphi^{(2)} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{v}{R} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} + \\ &+ \frac{1}{R^3} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} + v \right)^2 + \frac{1}{R^2} \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} + v \right); \\ \chi_{12} = \chi_{x\varphi} &= \chi_{x\varphi}^{(1)} + \chi_{x\varphi}^{(2)} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{v}{R} \right) - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.\end{aligned}\quad (17)$$

Si $R = \text{constante}$

$$\begin{aligned}\chi_1 = \chi_x &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} + v \right); \\ \chi_2 = \chi_\varphi &= \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} + v \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} + \frac{1}{R^3} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} + v \right)^2; \\ \chi_{12} = \chi_{x\varphi} &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} + v \right) - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.\end{aligned}\quad (17')$$

En coordonnées cartésiennes:

$$\begin{aligned}\chi_1 = \chi_x &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \chi_2 = \chi_y &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}; \\ \chi_{12} = \chi_{xy} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.\end{aligned}\quad (18)$$

6° L'étude a été poursuivie en donnant différentes formes à l'expression des déplacements:

$$a) \quad u = 0; \quad v = 0; \quad w = \cos \frac{\pi x}{2l} \cos k \varphi; \quad \left(k = \frac{\pi}{\varphi_0} \right)$$

cette expression est la plus simple du point de vue des développements analytiques et elle correspond suffisamment au comportement réel de la voûte, laquelle, à cause de sa longueur, présente des déplacements w normaux à la surface de la voûte, beaucoup plus grande que les autres. L'expression donnée est en partie non-extensionnelle car on a:

$$\begin{aligned}\epsilon_x^{(1)} &= \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \\ \epsilon_\varphi^{(1)} &= \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{w}{R} = -\frac{w_0}{R} \cos \frac{\pi x}{2l} \cos k \varphi; \\ \gamma_{x\varphi}^{(1)} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{v}{R} \right) = \frac{w_0}{R \varphi_0} \frac{\pi^2}{2l} \sin \frac{\pi x}{2l} \sin k \varphi\end{aligned}$$

tandis qu'elle est complètement flexionnelle.

$$\begin{aligned}\chi_x^{(1)} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{\pi^2}{4l^2} w_0 \cos \frac{\pi x}{2l} \cos k\varphi; \\ \chi_\varphi^{(1)} &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{v}{R} \right) = -\frac{1}{R^2} w_0 \frac{\pi^2}{\varphi_0^2} \cos \frac{\pi x}{2l} \cos k\varphi; \\ \chi_{x\varphi}^{(1)} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{v}{R} \right) = \frac{1}{R} \frac{w_0}{\varphi_0} \frac{\pi^2}{2l} \sin \frac{\pi x}{2l} \sin k\varphi.\end{aligned}$$

b) L'expression:

$$u = 0; \quad v = \frac{v_0}{k} \sin k\varphi; \quad w = w_0 \cos k\varphi$$

qui correspond à des conditions aux extrémités qui ne sont pas parfaitement satisfaites⁸⁾; cette expression n'est pas du tout extensionnelle.

c) L'expression

$$\begin{aligned}u = 0; \quad v &= \frac{w_0 k}{R} \cos k\varphi; & w &= w_0 \frac{k^2}{R} x \cos k\varphi; & (x \leq l) \\ u = 0; \quad v &= \frac{w_0 k}{R} (2l - x) \cos k\varphi; & w &= w_0 \frac{k^2}{R} (2l - x) \cos k\varphi; & (x \geq l)\end{aligned}$$

est aussi purement flexionnelle, ce qui est confirmé par l'observation expérimentale, qui fait apparaître une sorte de flambage plastique de la voûte, en correspondance du milieu.

d) L'expression

$$u = u_0 \sin \frac{\pi}{2l} x \cos k\varphi; \quad v = v_0 \cos \frac{\pi}{2l} x \cos k\varphi; \quad w_0 = w_0 \cos \frac{\pi}{2l} x \cos k\varphi$$

est l'expression la plus complète (extensionnelle et flexionnelle) et dépend de trois paramètres, u , v et w . La charge critique sera, dans ce cas, donnée par la plus petite racine ou par la seule racine réelle d'une équation d'un troisième degré.

7° En ce qui concerne les efforts, on a considéré, à côté de ceux qui correspondent au régime de membrane (11)

$$\begin{aligned}N_x &= -\frac{g}{R} (l^2 - x^2) \cos \varphi = -\frac{32l^2}{\pi^3 R} g \cos \varphi \cos \frac{\pi x}{2l}; \\ N_\varphi &= -g R \cos \varphi = -4g \frac{R}{\pi} \cos \varphi \cos \frac{\pi x}{2l}; \\ N_{x\varphi} &= -2gx \sin \varphi = -\frac{16l}{\pi^2} g \sin \varphi \sin \frac{\pi x}{2l}\end{aligned} \tag{19}$$

⁸⁾ On peut toujours chercher à satisfaire à ces conditions en superposant une distribution d'efforts localisés à proximité des extrémités.

les efforts qu'on détermine en tenant compte de la flexion (12)

$$\begin{aligned}
 N_x &= \frac{4l^2}{\pi^2 R^3} \{ [(A_1^{(2)} + A_1^{(4)}) \cos \beta_1 \omega + (B_1^{(2)} + B_1^{(4)}) \sin \beta_1 \omega] e^{-\alpha_1 \omega} + \\
 &\quad + [(C_1^{(2)} + C_1^{(4)}) \cos \beta_2 \omega + (D_1^{(2)} + D_1^{(4)}) \sin \beta_2 \omega] e^{-\alpha_2 \omega} \} \cos \frac{\pi x}{2l}; \\
 N_\varphi &= -\frac{1}{R} [e^{-\alpha_1 \omega} (A_1^{(2)} \cos \beta_1 \omega + B_1^{(2)} \sin \beta_1 \omega) + \\
 &\quad + e^{-\alpha_2 \omega} (C_1^{(2)} \cos \beta_1 \omega + D_1^{(2)} \sin \beta_1 \omega)] \cos \frac{\pi x}{2l}; \\
 N_{\varphi x} &= -\frac{2l}{\pi R^2} \{ e^{-\alpha_1 \omega} [(A_1^{(1)} + A_1^{(3)}) \cos \beta_1 \omega + (B_1^{(1)} + B_1^{(3)}) \sin \beta_1 \omega] + \\
 &\quad + e^{-\alpha_2 \omega} [(C_1^{(1)} + C_1^{(3)}) \cos \beta_2 \omega + (D_1^{(1)} + D_1^{(3)}) \sin \beta_2 \omega] \} \sin \frac{\pi x}{2l}; \\
 M_\varphi &= [e^{-\alpha_1 \omega} (A_1 \cos \beta_1 \omega + B_1 \sin \beta_1 \omega) + e^{-\alpha_2 \omega} (C_1 \cos \beta_1 \omega + D_1 \sin \beta_1 \omega)] \cos \frac{\pi x}{2l}.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Il faut remarquer que, pour déterminer le travail du second ordre dû aux efforts de flexion:

$$L_{2f}^* = 4 \int_0^{\varphi_0} \int_0^l [N_x \epsilon_x^{(2)} + N_\varphi \epsilon_\varphi^{(2)} + N_{\varphi x} \gamma_{\varphi x}^{(2)} + M_\varphi \chi_\varphi^{(2)}] R dx d\varphi$$

il faut calculer des intégrales du type:

$$\lambda \int_0^{\varphi_0} e^{-\alpha_1 \omega} \cos \beta_1 \omega \cos^2 \frac{\pi \omega}{\varphi_0} d\omega \int_0^l \cos \frac{\pi x}{2l} \sin^2 \frac{\pi x}{2l} dx$$

en échangeant α_1 avec α_2 , et β_1 avec β_2 , soit en considérant toutes les combinaisons possibles entre $\sin \beta_1 \omega$, $\cos \beta_1 \omega$, $\sin \beta_2 \omega$, $\cos \beta_2 \omega$ et $\sin^2 \frac{2\pi \omega}{\varphi_0}$, $\sin^2 \frac{\pi \omega}{\varphi_0}$, $\cos^2 \frac{\pi \omega}{\varphi_0}$.

8° Considérons maintenant une voûte qui ait les dimensions suivantes: et l'angle de demi-ouverture variable, en prenant les valeurs de

$$2l = 40 m, \quad R = 10 m, \quad s = 0,06 m.$$

a) L'expression de la charge critique est:

$$g_c = \frac{\frac{Dl\varphi_0}{R} + \pi^4 \frac{BR\varphi_0}{16l^3} + \frac{\pi^4 Bl}{R^3 \varphi_0^3} + \frac{\pi^4 B}{4\varphi_0 Rl}}{\frac{64lS_1}{3\pi^2} + \frac{2\pi^2 l}{\varphi_0^2} S_2 + \frac{128l}{3\pi \varphi_0} S_3 - \frac{1}{w_0} \frac{\partial L_f^{(2)}}{\partial w_0}} \tag{21}$$

où

$$S_1 = \frac{1}{4} \left[\frac{\sin(2k+1)\varphi_0}{2k+1} + \frac{\sin(2k-1)\varphi_0}{2k-1} + 2 \sin \varphi_0 \right];$$

$$S_2 = \sin \varphi_0 - S_1;$$

$$S_3 = \frac{1}{8} \left\{ \left[\frac{\cos(4k+1)\varphi_0}{4k+1} - \frac{\cos(4k-1)\varphi_0}{4k-1} - 2 \cos \varphi \right] - \left[\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k-1} - 2 \right] \right\}.$$

b)

$$g_c = \frac{\frac{Bl\varphi_0}{R^3}(1-k^2)^2}{\frac{k^4+1}{k^2}lS_1 - \frac{1}{w_0}\frac{\partial L_f^{(2)}}{\partial w_0}}. \quad (22)$$

c)

$$g_c = \frac{\frac{2B}{R^3}k^2(1-k^2)^2l\varphi_0\left(\frac{k^2l^2}{3R^2}+1\right)}{256\frac{k^2l^3}{\pi^4R^2}(S_2+k^2S_1)+4lk^2\left[\left(1-\frac{l}{R}\right)+\frac{l^2}{3R^2}(k^4+1)\right]S_2} +$$

$$+ \frac{\frac{2B}{R^3}k^2(1-k^2)^2l\varphi_0\left(\frac{k^2l^2}{3R^2}-1\right)}{256\frac{l^3k^3}{\pi^4R^2}(1-k^2)(\pi-2)S_3 - \frac{1}{w_0}\frac{\partial L_f^{(2)}}{\partial w_0}}. \quad (23)$$

d) Dans ce cas, nous sommes en présence d'une équation du troisième degré, en g_c ; on donne les valeurs numériques obtenues en annulant la contribution extensionnelle de l'énergie élastique.

9° A l'aide des trois premières expressions, on a étudié aussi l'influence de la précontrainte sur la charge critique: cette influence n'est pas aussi avantageuse que l'on pourrait croire. En effet, tandis que le travail du second ordre des efforts correspondant au régime flexionnel, moment transversal

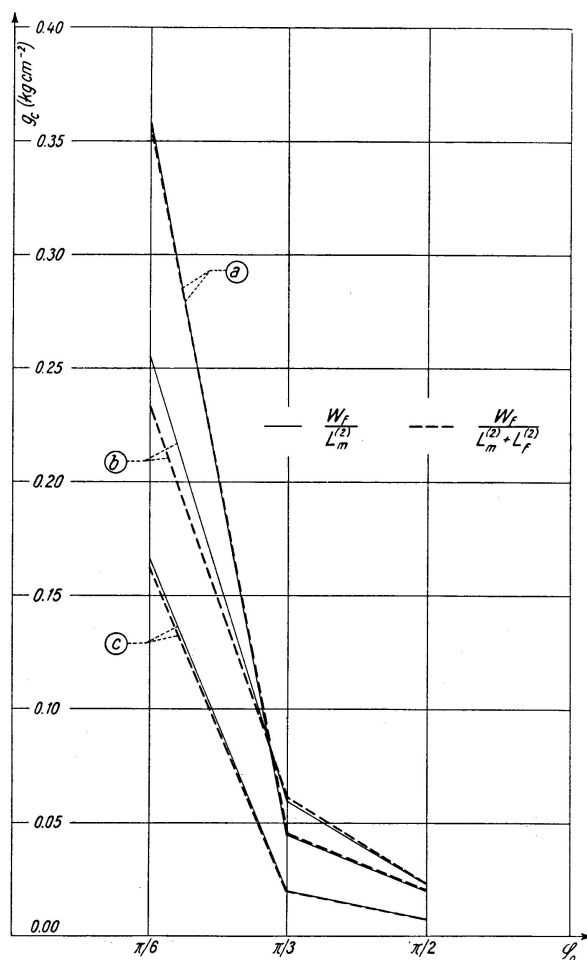


Fig. 2

compris, élève, bien que très peu, la charge critique, l'effet de la précontrainte, réalisée soit par des câbles rectilignes logés dans les génératrices de naissance, soit par des câbles paraboliques placés dans les poutres de rive, abaisse très peu la valeur de la charge critique en la reportant à peu près à la valeur correspondant au régime de membrane.

Le tableau ci-dessous contient les résultats obtenus, dont quelques-uns ont été mieux encore mis en évidence sur les diagrammes des figures 2, 3 et 4.

10^o On peut donc conclure, pour le cas étudié, que, en ce qui concerne l'effet de la flexion, on a une augmentation de la charge critique, mais tellement petite qu'elle ne justifie pas cette seconde approximation. La précontrainte abaisse le multiplicateur critique en le reportant à peu près à la valeur qu'il avait, sans tenir compte de L_{2f}^* . Ces résultats étaient prévisibles d'ailleurs, si l'on pense d'une façon très approximative à la voûte comme à une poutre soumise à une charge transversale g (poids propre) et à un effort normal excentré N (précontrainte) [21].

On a :

$$g_c = \frac{\bar{g}_c}{\sqrt{N_F N_T}} \left(\sqrt{N^2 - N(N_F + N_T) + N_F N_T} - N \frac{e}{\rho} \right) \quad (24)$$

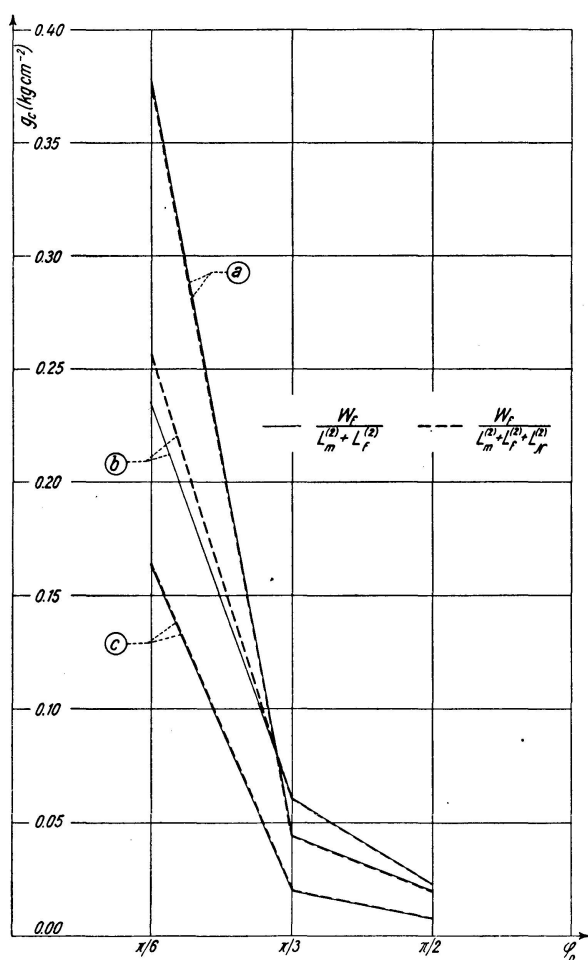


Fig. 3. Câbles rectilignes.

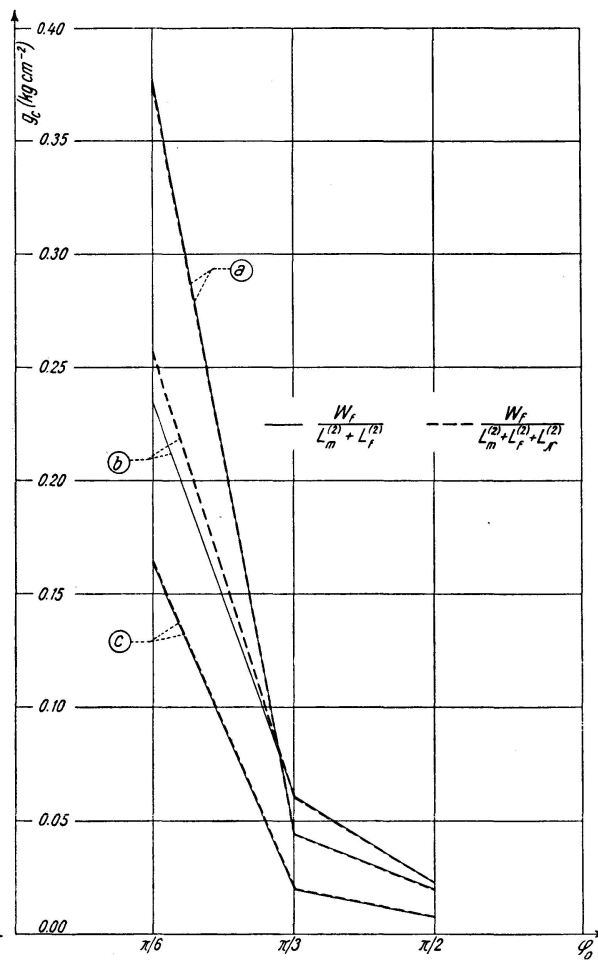


Fig. 4. Câbles paraboliques.

	φ					
	(1)	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/6$	(2)	
$g_c (\text{kg cm}^{-2})$	$\frac{W_f}{L_m^{(2)}}$	0,01991	0,04462	0,37875	$\frac{W_f}{L_m^{(2)} + L_f^{(2)}}$	0,01995
	$\frac{W_e}{L_m^{(2)}}$	611,78722	336,63897	95,74630	$\frac{W_e}{L_m^{(2)} + L_f^{(2)}}$	612,91180
	$\frac{W_e + W_f}{L_m^{(2)}}$	611,80753	336,68359	96,12505	$\frac{W_e + W_f}{L_m^{(2)} + L_f^{(2)}}$	612,93175
	φ					
	(3)	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/6$	(4)	
$g_c (\text{kg cm}^{-2})$	$\frac{W_f}{L_m^{(2)} + L_f^{(2)} + L_N^{(2)}}$	0,01991	0,04462	0,37800	$\frac{W_f}{L_m^{(2)} + L_f^{(2)} + L_N^{(2)}}$	0,01991
	$\frac{W_e}{L_m^{(2)} + L_f^{(2)} + L_N^{(2)}}$	611,85018	336,55567	95,55710	$\frac{W_e}{L_m^{(2)} + L_f^{(2)} + L_N^{(2)}}$	611,84742
	$\frac{W_e + W_f}{L_m^{(2)} + L_f^{(2)} + L_N^{(2)}}$	611,87009	336,60029	95,93510	$\frac{W_e + W_f}{L_m^{(2)} + L_f^{(2)} + L_N^{(2)}}$	611,86733

(1) = poids propre

(2) = (1) + influence des bords

(3) = (2) + précontrainte (cables rectilignes)

(4) = (2) + précontrainte (cables paraboliques)

a)

	φ						φ			
	(1)	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/6$	(2)	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/6$	$\pi/6$	
g_c (kg cm ⁻²)	$\frac{W_f}{L_m^{(2)}}$	0,02 244	0,05 949	0,25 446	$\frac{W_f}{L_m^{(2)} + L_f^{(2)}}$	0,02 259	0,06 132	0,23 443		
	φ						φ			
	(3)	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/6$	(4)	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/6$	$\pi/6$	
g_c (kg cm ⁻²)	$\frac{W_f}{L_m^{(2)} + L_f^{(2)} + L_N^{(2)}}$	0,02 244	0,06 069	0,25 739	$\frac{W_f}{L_m^{(2)} + L_f^{(2)} + L_N^{(2)}}$	0,02 254	0,06 062	0,25 628		

b)

	φ						φ			
	(1)	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/6$	(2)	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/6$	$\pi/6$	
g_c (kg cm ⁻²)	$\frac{W_f}{L_m^{(2)}}$	0,00 718	0,02 007	0,16 645	$\frac{W_f}{L_m^{(2)} + L_f^{(2)}}$	0,00 709	0,01 997	0,16 305		
	φ						φ			
	(3)	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/6$	(4)	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/6$	$\pi/6$	
g_c (kg cm ⁻²)	$\frac{W_f}{L_m^{(2)} + L_f^{(2)} + L_N^{(2)}}$	0,00 716	0,01 998	0,16 314	$\frac{W_f}{L_m^{(2)} + L_f^{(2)} + L_N^{(2)}}$	0,00 716	0,01 997	0,16 316		

c)

où: g_c est la valeur critique, en l'absence de charge axiale,
 N_f et N_t la charge critique flexionnelle et torsionnelle,
 ρ est le rayon d'inertie maximum,
 e l'excentricité de la force N^9).

Dans notre cas, on trouve facilement que $N_f N_t \gg N^2 - N(N_f + N_t)$, ainsi que l'expression de g_{cr} devient:

$$g_c = \frac{\bar{g}_c}{\sqrt{N_F N_T}} \left(\sqrt{N_F N_T} - N \frac{e}{\rho} \right) = \bar{g}_c \left(1 - \frac{N e / \rho}{\sqrt{N_F N_T}} \right),$$

On a donc certainement

$$g_c < \bar{g}_c$$

11° On pourrait donc dire en conclusion de cette étude que pour une voûte mince cylindrique à profil circulaire, la charge critique diminue au fur et à mesure que l'angle d'ouverture augmente, ce qui pourrait être expliqué d'une façon très approximative par le fait que si l'angle d'ouverture diminue indéfiniment le comportement de la voûte est toujours plus près de celui d'une poutre fléchie pour laquelle on ne peut plus parler d'instabilité.

On peut encore remarquer que la contribution apportée à la valeur critique de la charge par les termes qui tiennent compte du travail L_2^* , du deuxième ordre dû aux efforts de flexion est très peu sensible; il faut pourtant faire référence dans le calcul du travail L_2^* seulement aux efforts N_x , N_φ , et $N_{x\varphi}$ correspondant au régime de membrane; tandis que pour ce qui concerne l'énergie élastique correspondant au passage de la position initiale à la nouvelle position d'équilibre (caractérisée par les déplacements u , v et w donnés à chaque point de la voûte) il vaudrait la peine de choisir toujours des expressions flexionnelles, de telle façon que l'on a plus le terme trop élevé correspondant à l'énergie extensionnelle et qui enlève à la charge critique toute signification physique.

Pour ce qui concerne la précontrainte il faut remarquer que son influence sur la stabilité de la voûte est presque nulle¹⁰); dans notre cas la précontrainte baisse très peu la valeur critique de la charge en la reportant à celle qu'on a trouvé en négligeant la partie flexionnelle du travail L_2^* ; dans d'autres cas [14] la charge critique est élevée, bien que très peu, par la précontrainte.

Les conclusions données sont évidemment valables pour le profil de la voûte et la position des câbles qu'on a étudié.

Bibliographie

1. BRAZIER, „On the flexure on thin cylindrical shells and other 'thin' sections“. Proceedings of the Royal Society. Series A, vol. 116, n° 773, septembre 1927.

⁹) Pour un câble parabolique, on pourra prendre la valeur de l'excentricité correspondant au milieu de la voûte.

¹⁰) Cela est confirmé par les diagrammes des figures 3 et 4 qui sont presque coïncidents.

2. FLUGGE, „Statik und Dynamik der Schalen“, Cap. IX, Springer, Berlin 1934.
3. BELLUZZI, „La stabilità dell'equilibrio delle volte a botte inflesse secondo le generatrici“. Ricerche di Ingegneria, vol. I, n° 4, 1934.
4. — „Sulla stabilità dell'equilibrio delle volte Zeiss e Dywidag“. Ricerche d'Ingegneria, vol. III, n° 2, marzo-aprile 1935.
5. GALLI, „Stabilità nell'equilibrio di una volta trave“. Rend. Acc. di Scienze Fis. e Mat. di Napoli. Serie 4, vol. XI, 1941/42.
6. — „Complementi analitici utili per la trattazione effettiva dei problemi di stabilità dell'equilibrio elastico“. Rend. di Mat. Serie V, vol. III, Fasc. 2—3, giugno-sett. 1942.
7. KRALL e CALIGO, „Moltiplicatore critico λ_{cr} di una distribuzione di carico su una volta autoportante“. Rend. Acc. dei Lincei, dic. 1946, gen. 1947.
8. GIANGRECO, „Stabilità dell'equilibrio delle volte sottili autoportanti“. Atti dell'Ist. di Scienza delle Costr., Napoli, n° 11.
9. DIRICHLET, „Über die Stabilität des Gleichgewichts“. Jour. f. r. u. angewandte Math., Bd. 32, 1846.
10. LIAPOUNOFF, „Sur l'instabilité de l'équilibre dans certains cas où la fonction de force n'est pas maximum“. Journ. de Liouville, Ve Série, 1897.
11. LEVI, CIVITA e AMALDI, „Meccanica Razionale“. Vol. II, parte I. Ed. Zanichelli, 1926.
12. KRALL, „Meccanica tecnica delle vibrazioni“. Parte I. Ed. Zanichelli, 1940.
13. GALLI, „Lezioni di Scienza delle Costruzioni“. Vol. III, pag. 35. Ed. Pellerano e del Gaudio, Napoli.
14. GIANGRECO, „Statica e stabilità delle strutture scatolari precomprese“. Gior. del Genio Civile. Vol. 92, n° 6, giugno 1954.
15. — „Instabilité de l'équilibre des voûtes polygonales“. Assoc. Intern. des Ponts et Charpentes. Vol. XIII, Zurich 1953.
16. KRALL, „Stabilità dell'equilibrio elastico“. Manuale dell'Ingegnere Civile. Ed. Perrella, Roma.
17. FINSTERWALDER, „Die Theorie der kreiszylindrischen Schalengewölbe“. Ingenieur Archiv, 1930.
18. LUNDGREN, „Cylindrical shells“. Vol. I. The Danish Technical Press. 1st Edition. Copenhagen.
19. ISSENMAN-PILARSKI, „Calcul des voiles minces en béton armé“. 2nd Edition. Paris, Dunod, 1952.
20. LOVE, „A treatise on the mathematical theory of elasticity“. Ed. Cambridge 1952.
21. GIANGRECO, „Association d'équilibres instables en présence de charges excentrées“, Ass. Int. des Ponts et Charpentes. Vol. XIV, Zurich 1954.

Résumé

L'auteur étudie à l'aide de la méthode énergétique l'instabilité de l'équilibre dans les voûtes minces en tenant compte, à côté des efforts de membrane, également des efforts de flexion; il établit pour une surface quelconque, au moyen de la théorie des formes quadratiques, les expressions du seconde ordre des variations de courbure qui interviennent dans l'expression plus générale de l'énergie potentielle. Il étudie ensuite l'influence que la précontrainte, réalisée par des cables disposés directement dans la voûte le long des génératrices de naissance ou dans les poutres de rive, apporte à l'instabilité de la voûte.

On reporte enfin sur diagrammes les valeurs trouvées pour la charge critique pour la même voûte avec différents angles d'ouverture.

Zusammenfassung

Der Autor untersucht mit Hilfe der Energiemethode die Unstabilität der Schalen unter Berücksichtigung sowohl der Membran- als auch der Biegespannungen. Für irgendeine Fläche werden mit Hilfe der Theorie der quadratischen Netze die Ausdrücke zweiter Ordnung der Krümmungsvariation aufgestellt, die im allgemeinsten Ausdruck der Potentialenergie auftreten. Der Verfasser untersucht anschließend den Einfluß der Vorspannung auf die Unstabilität der Schale, die durch Kabel hervorgerufen wird, welche entlang der Erzeugenden, in den Kämpfern oder in den Randträgern angeordnet sind.

Es werden schließlich Diagramme aufgestellt, die die Werte für die kritische Belastung für den gleichen Bogen mit verschiedenen Öffnungswinkeln darstellen.

Summary

The author considers the instability of the equilibrium in thin shells, using the strain-energy method, and taking into account, not only the membrane state of stress, but also the bending stresses; by means of the theory of quadratic forms, he derives, for any given surface, second-order expressions for the variations in curvature which enter into the more general expression for the potential energy. He then examines the effect which prestressing, brought about by cables arranged directly in the shells along the generating lines of the abutment, or in the stringers, exerts on the instability of the shell.

The values for the critical load found for the same arch with different span angles are plotted on graphs.