

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen  
**Band:** 16 (1956)  
  
**Artikel:** Einflüsse der Verformungstheorie bei der Vorspannung - Dischinger-Effekt  
**Autor:** Dimitrov, Nik.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-15061>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 28.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Einflüsse der Verformungstheorie bei der Vorspannung<sup>1)</sup> — Dischinger-Effekt

*Effects of the strain theory on prestressing*

*Influences de la théorie des déformations dans la précontrainte*

Dr.-Ing. NIK. DIMITROV, Privat-Dozent an der Technischen Hochschule Karlsruhe

## 1. Allgemeines

Statisch betrachtet stellt die Vorspannung bis zu einem gewissen Grade ein Analogon zu den bekannten Tragsystemen Bogen mit Zugband bzw. eine in sich versteifte Hängebrücke dar.

In allen drei Fällen (Fig. 1 a bis c) erzeugt die Zugkraft keine Zugspannungen im Beton.

Die zusätzlichen Verformungen geben keine zusätzlichen Biegemomente, denn die gleichzeitigen elastischen Druck- und Zugwirkungen heben sich auf nach der Gleichung

$$M = M_0 + H w - H w. \quad (1)$$

Danach ist die gewöhnliche Biegestatik, bzw. die Theorie I. Ordnung, maßgebend.

Sobald sich jedoch der Beton infolge der Dauerlasten plastisch<sup>2)</sup> verformt, tritt eine Erhöhung der Biegemomente infolge Eigengewicht und Vorspannung durch die Druckbiegung ein. Wir wollen diesen sehr beachtenswerten Wechsel mit „Dischinger-Effekt“ bezeichnen; denn DISCHINGER [1] hat schon im Jahre 1937 bzw. 1939 bei der Berechnung der Bogenbrücken auf eine plastische Erregung hingewiesen.

---

<sup>1)</sup> Dieser Beitrag ist ein Auszug aus einer noch nicht veröffentlichten Arbeit des Verfassers.

<sup>2)</sup> In diesem Zusammenhang ist es interessant darauf hinzuweisen, daß der sog. „Shanley-Effekt“ beim plastischen Knicken des Stahles auch infolge des Überganges von der Theorie I. Ordnung zur Theorie II. Ordnung erklärt wird. (Vgl. dazu [6] u. [7].)

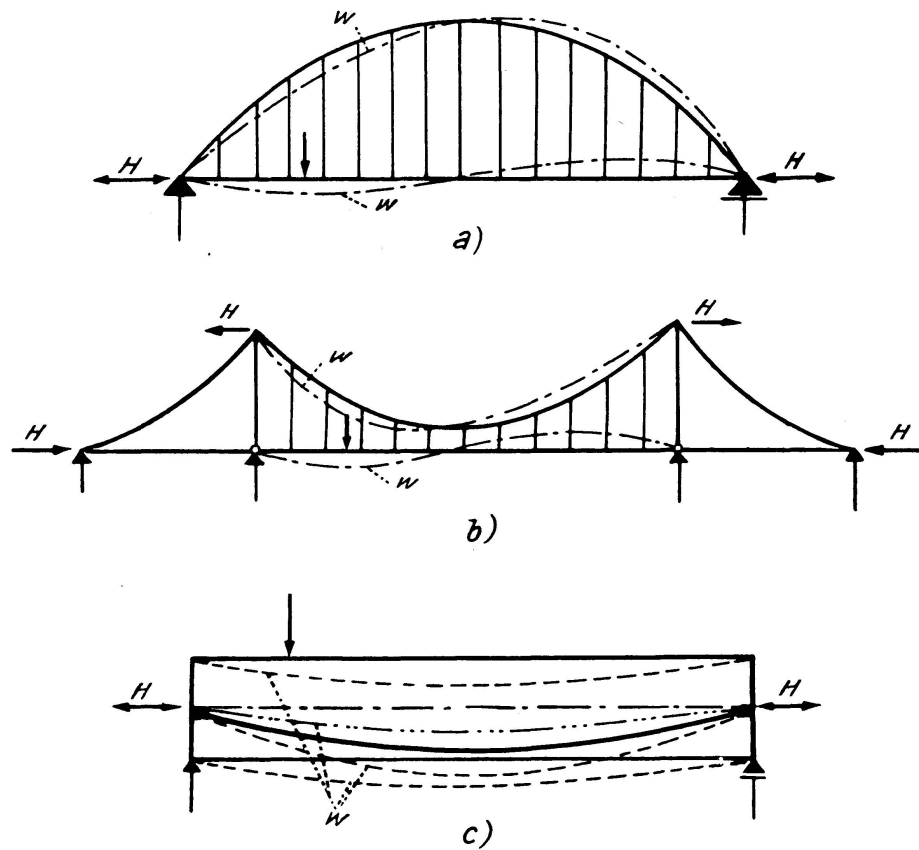


Fig. 1

## 2. Grundformeln

In [2] haben wir für die Ermittlung der Momente bei der Druck- und Zugbiegung folgende Formeln angegeben:

α) Druckbiegung

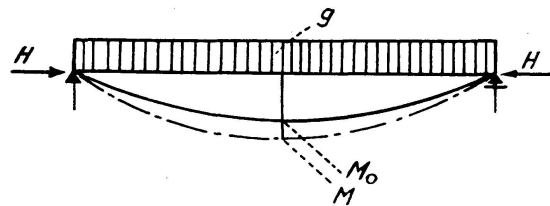


Fig. 2

$$M = M_0 + H w. \quad (2)$$

Unter Beachtung von Gl. (12a) in [2]

$$M = M_0 + M_0 \frac{1 + \delta}{\nu - 1}. \quad (2a)$$

β) Zugbiegung

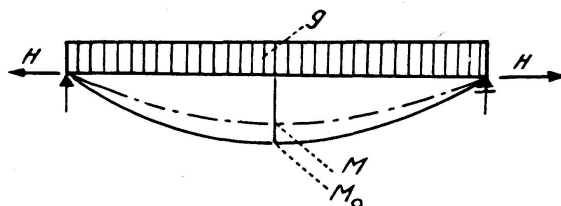


Fig. 3

$$M = M_0 - H w \quad (3)$$

und nach Gleichung (12b) in [2]

$$M = M_0 - M_0 \frac{1 + \delta}{\nu + 1}. \quad (3a)$$

Es bedeuten:

$\delta$  ein Zahlenfaktor

$\nu$  die Verformungszahl

$$\nu = \frac{H_k}{H} = \frac{\pi^2 E_0 I_c}{H l_k^2}. \quad (4)$$

Bei den Näherungsgleichungen (2a) und (3a) sind die Glieder höherer Ordnung vernachlässigt. Damit wir die Bedingung der Gleichung (1) erfüllen, wird die maximale Biegeordinate  $w$  mit der Formel für die Druckbiegung angegeben:

$$w = \frac{M_0}{H} \cdot \frac{1 + \delta}{\nu - 1}. \quad (5)$$

Somit wird

$$M = M_0 \left[ 1 + \frac{1 + \delta}{\nu - 1} - \frac{1 + \delta}{\nu - 1} \right]$$

oder

$$M = M_0 \left[ \frac{\nu + \delta}{\nu - 1} - \frac{1 + \delta}{\nu - 1} \right] = M_0 \quad (1a)$$

bzw. für  $\delta = 0$

$$M = M_0 \left[ \frac{\nu}{\nu - 1} - \frac{1}{\nu - 1} \right] = M_0. \quad (1b)$$

Der Faktor  $\delta$  hängt von der Art der Belastung ab. In [2] ist eine Tabelle angegeben, wonach speziell für die Vorspannung folgende Werte Bedeutung haben:

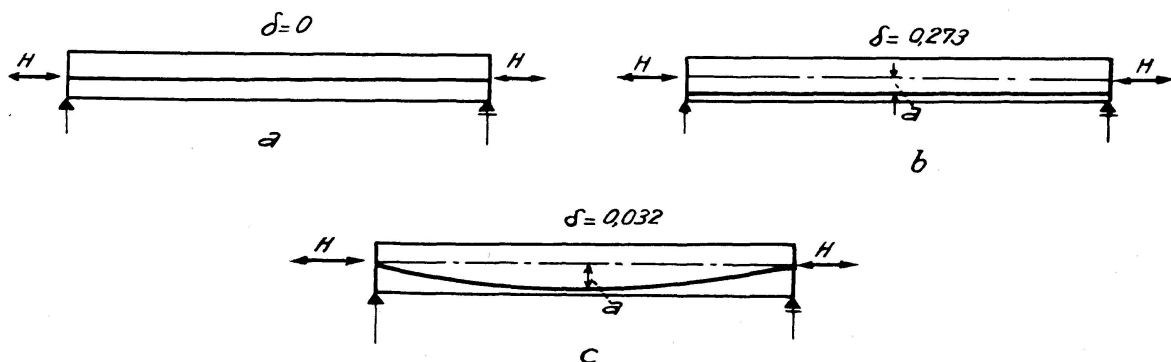


Fig. 4

Fig. 4a) Mittige Vorspannung  $M_v = 0$ .

Fig. 4b) Außermittige Vorspannung  $M_v = -H \cdot a$ .

Fig. 4c) Formtreue Vorspannung  $M_v = -H \cdot a$ .



### 3. Die plastische Erregung

Beim Kriechen des Betons ist das Biegemoment der Dauerlasten (Eigen-  
gewicht und Vorspannung) eine Funktion der Zeit.

Die Dauerlastmomente  $M_0$  wachsen infolge der elastischen Verformungen  
nach der schon bekannten Formel:

$$M = M_0 \frac{\nu + \delta}{\nu - 1} \quad (\text{Druckbiegung}). \quad (5)$$

Infolge der plastischen Verformungen erhöhen sich die Dauerlastmomente  
weiter, so daß die Vergrößerung der maximalen Momente in sehr guter Nähe-  
rung (vgl. [3]) beträgt:

$$M_t = M_0 \frac{\nu + \delta}{\nu - 1} e^{\frac{\varphi t (\nu + \delta)}{\nu (\nu - 1)}}, \quad (6)$$

wenn der Zeitpunkt der Vorspannung  $t = 0$  ist.

Diese Formel stimmt mit der von DISCHINGER in [1] bis auf den Faktor  $\delta$   
überein. Dort wird  $\delta = 0$  gesetzt, und das  $M_0$ -Moment wird nach einer Fourier-  
Reihe zerlegt. Als Beispiel wird ein freiaufgelegter Träger mit einer Einzel-  
last  $G$  in der Feldmitte untersucht:

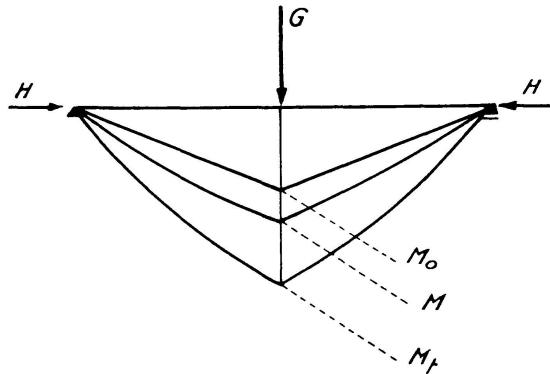


Fig. 5

Setzen wir an:

$$\varphi_t = \varphi_n = m = 3 \quad (\text{Endkriechmaß})$$

$$\delta = -0,189 \quad (\text{vgl. Tabelle in [2]})$$

$$\nu = 3 \quad (\text{nach Gl. 4}),$$

so bekommt man:

$$M_0 = \frac{Gl}{4},$$

$$M = M_0 \frac{\nu - 0,189}{\nu - 1} = 1,405 M_0,$$

$$M_t = M_0 \frac{\nu - 0,189}{\nu - 1} e^{\frac{m}{\nu} \frac{\nu - 0,189}{\nu - 1}} = 5,71 M_0.$$

Nach DISCHINGER [1] erhält man unter Benützung der Formel (6) bei  $\delta = 0$  und durch Zerlegung von  $M_0$  nach Fourier:

$$M_t = \frac{2 G l}{\pi^2} \left[ \frac{3}{2} e^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{26} e^{\frac{3}{26}} + \frac{3}{74} e^{\frac{3}{74}} + \frac{3}{146} e^{\frac{3}{146}} + \frac{3}{242} e^{\frac{3}{242}} \right] = 6,5 M_0.$$

Wir können praktisch bei der Vorspannung fast immer  $\delta = 0$  setzen, wie dies bereits Fig. 4a und 4c zeigen. Im Falle der außermittigen Vorspannung nach Fig. 4b kommt noch als Dauerlast meistens gleichmäßig verteilte Belastung hinzu, für die ein  $\delta = 0,032 \approx 0$  maßgebend ist, so daß  $\delta_{\text{vorhanden}}$  kleiner wird als  $\delta = 0,273$ .

Wie auch die folgenden Beispiele zeigen, ist im übrigen  $\nu$  weit größer als 3, so daß der Fehler durch die Vernachlässigung von  $\delta$  belanglos wird. Mithin braucht  $M_0$  nicht durch eine harmonische Analyse dargestellt zu werden.

Bei der Vorspannung ist das Dauerlastmoment

$$M_0 = M_{g_0} - M_v. \quad (7)$$

Mit  $g_0$  bezeichnen wir das Eigengewicht, das gleichzeitig mit der Vorspannlast im Zeitpunkt  $t=0$  bis  $t=t_n$  wirkt. Wenn nachträglich, im Zeitpunkt  $t=t_1$ , zusätzliche Dauerlasten  $g_1$  auftreten, so ist

$$M_1 = M_{g_1}. \quad (7a)$$

Setzen wir nun mit  $\delta = 0$  die Gleichung (6) in Gleichung (1a), bzw. (1b) ein, so erhält man für  $t=0$

$$M_{t_1} = M_0 \frac{\nu e^{\frac{\varphi_n}{\nu-1}} - 1}{\nu - 1} = (M_{g_0} - M_v) \vartheta_0, \quad (8)$$

bzw. für  $t=t_1$

$$M_{t_1} = M_1 \frac{\nu e^{\frac{\varphi_n - \varphi_{n_1}}{\nu-1}} - 1}{\nu - 1} = M_{g_1} \vartheta_1. \quad (8a)$$

Werden mehrere Dauerlasten abgestuft aufgebracht, so ist entsprechend Gleichung (8a) zu verfahren, so daß endgültig

$$M_t = M_{t_0} + M_{t_1} + M_{t_2} + \dots$$

oder

$$M_t = (M_{g_0} - M_v) \vartheta_0 + M_{g_1} \vartheta_1 + M_{g_2} \vartheta_2 + \dots \quad (9)$$

Werden keine oder verhältnismäßig sehr kleine Zusatzdauerlasten aufgebracht, so ist Gleichung (8) ausschlaggebend.

#### 4. Auswertung der Gleichungen für ein konstantes $E_0$

Bei der Vorspannung ist die Vorspannkraft  $V$  auch eine Funktion der Zeit. Sie nimmt infolge des Kriechens, Schwindens und der Reibung ab, so daß

$$H = \eta \cdot V. \quad (10)$$

$\eta$  ist ein Abminderungsfaktor. Seine genaue Ermittlung ist zur Feststellung der Normalspannung notwendig. Für die Berechnung des  $M_t$ -Momentes genügt z. B. etwa folgende Annahme: Bei  $\Delta \sigma_{ev} = 1000 \div 1500 \text{ kg/cm}^2$  ist für

$$\text{St 90} \quad \eta \approx 0,7$$

$$\text{St 165} \quad \eta \approx 0,85.$$

Wir nehmen zuerst an, daß der  $E$ -Modul sich mit der Zeit nicht ändert.

$$\text{Bei} \quad E_{0t} = E_0 = \text{konst.} \quad (11)$$

ist dann

$$\nu = \frac{H_k}{\eta V} \quad (12)$$

$$\text{Tabelle 1.} \quad \vartheta_0 = \frac{M_{t_0}}{(M_{g_0} - M_v)} \text{ nach Gl. 8}$$

$\varphi_n = m =$	0	0,5	0,75	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
$\nu = 3$	1,00	1,43	1,68	1,97	2,67	3,58	4,73	6,22	8,12	10,58
4	1,00	1,24	1,38	1,53	1,87	2,29	2,73	3,29	4,60	4,73
5	1,00	1,17	1,26	1,36	1,57	1,91	2,10	2,45	2,74	3,15
6	1,00	1,13	1,20	1,27	1,42	1,59	1,78	1,99	2,22	2,47
7	1,00	1,10	1,15	1,21	1,33	1,46	1,60	1,76	1,92	2,11
8	1,00	1,09	1,13	1,18	1,26	1,38	1,49	1,61	1,74	1,89
9	1,00	1,07	1,11	1,14	1,23	1,31	1,41	1,51	1,62	1,72
10	1,00	1,06	1,10	1,13	1,21	1,28	1,36	1,44	1,53	1,62
12	1,00	1,05	1,08	1,10	1,16	1,22	1,28	1,34	1,41	1,48
24	1,00	1,02	1,04	1,05	1,07	1,10	1,12	1,15	1,17	1,20
$\infty$	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

$$\text{Tabelle 1a.} \quad \vartheta_0^t = \frac{M_{t_0}}{(M_{g_0} - M_v)} \text{ nach Gl. 18}$$

$\varphi_n = m =$	0	1,0	2,0	3,0	4,0
$\nu = 3$	1,00	1,87	3,25	5,42	8,85
4	1,00	1,53	2,17	3,09	4,35
5	1,00	1,34	1,77	2,32	3,00
6	1,00	1,26	1,57	1,94	2,40
7	1,00	1,20	1,45	1,73	2,06
8	1,00	1,17	1,37	1,60	1,86
9	1,00	1,14	1,31	1,50	1,71
10	1,00	1,13	1,27	1,42	1,61
12	1,00	1,10	1,22	1,34	1,47
24	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20
$\infty$	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Tabelle 2.  $\vartheta_1 = \frac{M_{t_1}}{M_{g_1}}$  nach Gl. 8a

$\varphi_n = m =$		$\varphi_{t_1} = \frac{1}{5} \varphi_n$							$\varphi_{t_1} = \frac{2}{5} \varphi_n$						
		1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
$E_0 = \text{konstant}$ $\nu_t = \nu = \text{konstant}$	$\nu = 3$	1,74	2,23	2,84	3,58	4,48	5,59	6,92	1,53	1,85	2,23	2,67	3,19	3,79	4,48
	4	1,41	1,66	1,94	2,29	2,64	3,06	3,54	1,30	1,47	1,66	1,87	2,10	2,35	2,64
	5	1,28	1,44	1,62	1,91	2,02	2,26	2,53	1,21	1,32	1,44	1,57	1,71	1,86	2,02
	6	1,21	1,33	1,45	1,59	1,74	1,90	2,08	1,15	1,24	1,33	1,42	1,52	1,63	1,74
	7	1,17	1,26	1,36	1,46	1,58	1,69	1,82	1,12	1,19	1,26	1,33	1,41	1,49	1,58
	8	1,14	1,21	1,29	1,38	1,47	1,56	1,66	1,10	1,16	1,21	1,26	1,33	1,40	1,47
	9	1,12	1,18	1,25	1,31	1,39	1,47	1,55	1,09	1,14	1,18	1,23	1,28	1,34	1,39
	10	1,10	1,16	1,22	1,28	1,34	1,41	1,48	1,08	1,12	1,16	1,21	1,25	1,29	1,34
	12	1,08	1,13	1,17	1,22	1,27	1,32	1,37	1,06	1,09	1,13	1,16	1,19	1,23	1,27
	24	1,04	1,06	1,08	1,10	1,11	1,13	1,16	1,03	1,04	1,06	1,07	1,09	1,10	1,11
	$\infty$	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
$\varphi_n = m =$		$\varphi_{t_1} = \frac{3}{5} \varphi_n$							$\varphi_{t_1} = \frac{4}{5} \varphi_n$						
		1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
$E_0 = \text{konstant}$ $\nu_t = \nu = \text{konstant}$	$\nu = 3$	1,34	1,53	1,74	1,97	2,23	2,52	2,84	1,16	1,24	1,34	1,43	1,53	1,62	1,74
	4	1,19	1,30	1,41	1,53	1,66	1,79	1,94	1,09	1,14	1,19	1,24	1,30	1,35	1,41
	5	1,13	1,21	1,28	1,36	1,44	1,53	1,62	1,07	1,10	1,13	1,17	1,21	1,24	1,28
	6	1,10	1,15	1,21	1,27	1,33	1,39	1,45	1,05	1,08	1,10	1,13	1,15	1,18	1,21
	7	1,08	1,12	1,17	1,21	1,26	1,31	1,36	1,04	1,06	1,08	1,10	1,12	1,15	1,17
	8	1,07	1,10	1,14	1,18	1,21	1,25	1,29	1,03	1,05	1,07	1,09	1,10	1,12	1,14
	9	1,06	1,09	1,12	1,14	1,18	1,22	1,25	1,03	1,04	1,06	1,07	1,09	1,10	1,12
	10	1,05	1,08	1,10	1,13	1,16	1,19	1,22	1,02	1,04	1,05	1,06	1,08	1,09	1,10
	12	1,04	1,06	1,08	1,10	1,13	1,15	1,17	1,02	1,03	1,04	1,05	1,06	1,07	1,08
	24	1,02	1,03	1,04	1,05	1,06	1,07	1,08	1,01	1,01	1,02	1,02	1,03	1,03	1,04
	$\infty$	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

mit

$$H_k = \frac{\pi^2 E_0 I_c}{l_k^2},$$

es bedeuten:

 $l_k$  maßgebende Knicklänge<sup>3)</sup> $I_c$  konstantes, reduziertes Trägheitsmoment<sup>4)</sup>.

Gleichung (12) läßt sich nun auch schreiben:

$$\nu = \frac{\pi^2 E_0 I_c}{\eta \cdot V \cdot l_k^2}. \quad (12a)$$

<sup>3)</sup> Über die Ermittlung der Knicklängen ist in [2] eine gute Näherungsformel angegeben.

<sup>4)</sup> Vgl. dazu [4].

Tabelle 2a.  $\vartheta_1^t = \frac{M_{t_1}}{M_{g_1}}$  nach Gl. 18a

$\varphi_n = m =$		$\varphi_{t_1} = {}^1/5 \varphi_n$				$\varphi_{t_1} = {}^2/5 \varphi_n$				$\varphi_{t_1} = {}^3/5 \varphi_n$				$\varphi_{t_1} = {}^4/5 \varphi_n$			
		1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
$E_{0n} = 1,5 E_0$ $\nu_t = 1,5 \nu$	$\nu = 3$	1,62	2,51	3,79	5,63	1,42	1,97	2,69	3,63	1,26	1,57	1,93	2,36	1,12	1,25	1,39	1,55
	4	1,36	1,83	2,43	3,20	1,26	1,56	1,93	2,38	1,16	1,34	1,55	1,78	1,08	1,16	1,24	1,33
	5	1,25	1,56	1,94	2,39	1,18	1,39	1,63	1,91	1,12	1,24	1,38	1,54	1,06	1,12	1,18	1,24
	6	1,20	1,42	1,69	2,00	1,14	1,30	1,47	1,67	1,09	1,19	1,29	1,41	1,04	1,09	1,14	1,18
	7	1,16	1,34	1,54	1,77	1,12	1,24	1,38	1,43	1,08	1,15	1,24	1,33	1,04	1,08	1,12	1,15
	8	1,13	1,28	1,44	1,63	1,10	1,20	1,32	1,44	1,06	1,13	1,20	1,27	1,03	1,06	1,09	1,13
	9	1,11	1,24	1,38	1,53	1,08	1,17	1,27	1,37	1,05	1,11	1,17	1,23	1,03	1,05	1,08	1,11
	10	1,11	1,21	1,33	1,46	1,07	1,15	1,23	1,33	1,05	1,10	1,15	1,20	1,02	1,05	1,08	1,10
	12	1,08	1,17	1,26	1,36	1,06	1,12	1,19	1,26	1,04	1,08	1,12	1,16	1,02	1,04	1,06	1,08
	24	1,04	1,07	1,11	1,15	1,03	1,06	1,08	1,11	1,02	1,04	1,06	1,08	1,01	1,02	1,03	1,04
$\infty$	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	

Tabelle 1 gibt die Faktoren  $\vartheta_0$  für die Endkriechmaße  $\varphi_n = m = 0$  bis 4 an, Tabelle 2 entsprechend die Faktoren  $\vartheta_1$  für die Zeit  $t = t_1$  bei  $\varphi_n = m = 1$  bis 4 (nach DIN 4227), wenn  $\varphi_{t_1} = \varphi_n/5$  bis  $\frac{4}{5} \varphi_n$  angesetzt wird. (Vgl. Fig. 6.)

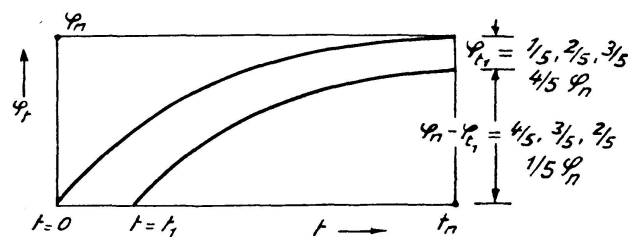


Fig. 6

## 5. Ableitungen für veränderlichen $E$ -Modul

Bekanntlich nimmt der  $E$ -Modul in ähnlicher Weise wie die Prismenfestigkeit mit dem Alter des Betons zu.

Die Berücksichtigung dieser Veränderlichkeit führt zu etwas günstigeren Ergebnissen.

Aus [5] entnehmen wir einen Überblick über die Steigerung des federnden Moduls  $E_0$  mit dem Alter, bezogen auf  $E_0$  im Alter von 28 Tagen bei Verwendung von Handelszement.

Alter des Betons	7 Tage	28 Tage	45 Tage	90 Tage	6 Monate	6 Jahre
$E_0 =$	76	100	106	111	118	127 % von $E_{0,28}$

Die Zunahme des Moduls mit dem Alter ist in der Zeit von 7 bis 28 Tagen fast so groß wie die gesamte weitere Zunahme.

Es wird meistens vorgespannt, wenn etwa  $\frac{3}{4}$  der Würfelfestigkeit erreicht ist. Beachten wir die obige Tafel, so können wir die Zunahme des  $E$ -Moduls ansetzen mit

$$E_{0n} = 1,5 E_0. \quad (13)$$

DISCHINGER hat die Zeitfunktion  $\psi_t$  in

$$E_{0t} = E_0 (1 + \psi_t), \quad (14)$$

die in keinem Zusammenhang mit der Kriechfunktion  $\varphi_t$  steht, umgeschrieben in

$$\psi_t = c \varphi_t, \quad (14a)$$

so daß

$$E_{0t} = E_0 (1 + c \varphi_t). \quad (14b)$$

Somit ist die Kriechfunktion  $\varphi_t$  zur Zeitfunktion des federnden Moduls  $\psi_t$  affin dargestellt.

Diese Voraussetzung gestattet eine geschlossene Integration der maßgebenden Differentialgleichungen (vgl. [1] und [2]). Die Verformungszahl  $\nu$  ist nach Gleichung (4), bzw. (12a), wenn der  $E$ -Modul des Betons veränderlich ist, auch von der Zeit abhängig, so daß

$$\nu_t = \nu (1 + c \varphi_t). \quad (15)$$

Den Koeffizienten  $c$  bestimmt man aus der Gleichung:

$$\begin{aligned} E_{0n} &= E_0 (1 + c \varphi_n) = E_0 (1 + c m), \\ \text{für } E_{0n} &= 1,0 E_0, \quad c m = 0, \quad c = 0, \\ \text{für } E_{0n} &= 1,5 E_0, \quad c m = 0,5, \quad c = \frac{1}{2m}. \end{aligned}$$

Entsprechend der Gleichung (6) erhält man nun für  $t=0$

$$M_t = M_0 \frac{\nu + \delta}{\nu - 1} e^{\frac{\varphi_t}{\nu}} \left[ 1 + \frac{1+\delta}{\nu_t - \nu} \ln \frac{\nu_t - 1}{\nu - 1} \right] \quad (16)$$

und für  $t=t_1$

$$M_t = M_1 \frac{\nu_{t_1} + \delta}{\nu_{t_1} - 1} e^{\frac{\varphi_t - \varphi_{t_1}}{\nu}} \left[ 1 + \frac{1+\delta}{\nu_t - \nu_{t_1}} \ln \frac{\nu_t - 1}{\nu_{t_1} - 1} \right] \quad (16a)$$

mit

$$\nu_t - \nu_{t_1} = c \nu (\varphi_t - \varphi_{t_1}) \quad (17)$$

und

$$\nu_{t_1} = \nu (1 + c \varphi_{t_1}). \quad (17a)$$

Setzt man wieder  $\delta=0$ , so sind die zu den Gleichungen (8) und (8a) entsprechenden Beziehungen: für  $t=0$

$$M_{t_0} = M_0 \frac{e^{\frac{\varphi_n}{\nu}} \left[ 1 + \frac{\ln(\nu_{tn} - 1) - \ln(\nu - 1)}{\nu_{tn} - \nu} \right] - 1}{\nu - 1} = (M_{g_0} - M_r) \vartheta_0^t, \quad (18)$$

und bei  $t = t_1$

$$M_{t_1} = M_1 \frac{\nu_{t_1} e^{\frac{\varphi_n - \varphi_{t_1}}{\nu}} \left[ 1 + \frac{\ln(\nu_{t_1} - 1) - \ln(\nu_{t_1} - 1)}{\nu_{t_1} - \nu_{t_1}} \right] - 1}{\nu_{t_1} - 1} = M_g \vartheta_1^t. \quad (18a)$$

Diese Gleichungen werden für den Fall nach Gl. (13) ausgewertet. Danach ist (vgl. auch (15))

$$\nu_t = 1,5 \nu. \quad (13a)$$

In Tabelle 1a sind die Zahlenwerte  $\vartheta_0^t$  angegeben, womit die Biegemomente aus Eigengewicht und Vorspannung und in Tabelle 2a die  $\vartheta_1^t$ , wonach die Momente aus den zusätzlichen Dauerlasten  $g_1$  zu multiplizieren sind.

Vergleicht man  $\vartheta_0$  mit  $\vartheta_0^t$  und  $\vartheta_1$  mit  $\vartheta_1^t$ , so fällt sofort auf, daß bei  $\nu > 5$  die Unterschiede sehr klein sind und eine merkliche Abminderung infolge einer 1,5fachen Vergrößerung des  $E$ -Moduls bei hohem Betonalter nicht vorhanden ist.

## 6. Praktische Beispiele

### a) Halle aus Vorspannbeton<sup>5)</sup>

System Freyssinet, St 165, B 300,  $E_0 = 340\,000 \text{ kg/cm}^2$

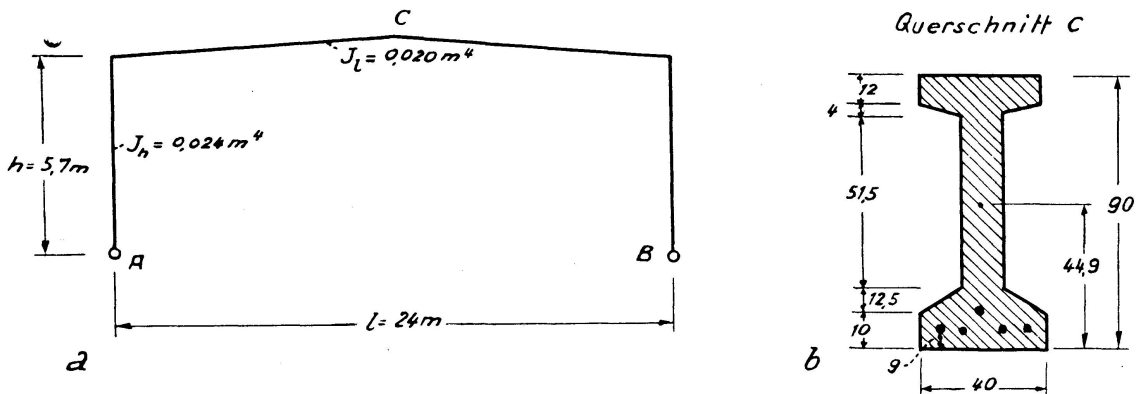


Fig. 7

Unter Beachtung folgender Daten:

$$\begin{aligned} F_b &= 2118 \text{ cm}^2, & W_0 &= 42,64 \text{ dm}^3, & W_u &= 48,83 \text{ dm}^3, \\ F_{ev} &= 5 \cdot 12 \cdot \varnothing 5,15 = 12,5 \text{ cm}^2, \\ \sigma_{ev} &= 10,5 \text{ t/cm}^2, & m &= \varphi_n = 2,5, & \epsilon_{\text{Schwinden}} &= 0,15 \text{ ‰}, \\ \epsilon_{\text{Reibung}} &= 0, \\ \Delta \sigma_{ev} &= 1900 \text{ kg/cm}^2, \\ V &= 10,5 \cdot 12,5 = 131,2 \text{ t}, \\ \Delta V &= 1,9 \cdot 12,5 = 23,7 \text{ t}, \\ H &= V - \Delta V = \eta V = 0,82 \cdot 131,2 = 107,5 \text{ t}, & \eta &= 0,82, \end{aligned}$$

<sup>5)</sup> Gebaut von der Firma Wayß & Freytag, 1951/52 in Karlsruhe; geprüft von Prof. Dr. Ing. KAMMÜLLER unter Mitwirkung des Verfassers.

erhält man nach Gleichung (12a) die Verformungszahl

$$\nu = \frac{\pi^2 E_0 J_c}{\eta \cdot V \cdot l_k^2},$$

wenn nach [2] für das symmetrische Knicken eines Zweigelenkrahmens mit

$$\beta = \frac{J_l \cdot h}{J \cdot l} = \frac{0,020 \cdot 5,7}{0,024 \cdot 24} = 0,2$$

nach Tabelle 3 in [2] für die Knicklänge

$$l_k = 0,58 l = 0,58 \cdot 24 = 14 \text{ m}$$

gesetzt wird,

$$\nu = \frac{\pi^2 340\,000 \cdot 0,020 \cdot 100^4}{107\,500 \cdot 1400^2} = 32.$$

Setzen wir nach Tabelle 1  $\nu = \infty = 124$  an, so kann man für  $\nu = 32$  durch Interpolation sofort bei  $m = 2,5$

$$\vartheta_0 = 1,12 - 0,12 \frac{32 - 24}{124} = 1,11$$

ermitteln.

Das Vorspannmoment ist

$$M_e = V \cdot a = 131,2 (0,449 - 0,09) = 47,2 \text{ tm},$$

und nach dem Kriechen, Schwinden und Reibung:

$$M_v = H a = \eta V a = 0,82 \cdot 131,2 \cdot 0,359 = 38,7 \text{ tm}.$$

Das Moment infolge Eigengewicht des Riegels:

$$M_{g_0} = 12,6 \text{ tm},$$

und infolge der ständigen Last (Dachlasten)

$$M_{g_1} = 26,6 \text{ tm}.$$

#### A. Spannungsnachweis ohne Berücksichtigung der Verformungstheorie

$\alpha$ ) Spannungen infolge Vorspannung und Eigengewicht des Riegels:

$$\sigma_0 = \frac{131\,200}{2118} - \frac{4\,720\,000}{42\,640} + \frac{1\,260\,000}{42\,640} = 62,0 - 110,5 + 29,5 = -10 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_u = 62,0 + \frac{4\,720\,000}{42\,830} - \frac{1\,260\,000}{42\,830} = 62 + 110,0 - 29,4 = +142,6 \text{ kg/cm}^2.$$

(zul. 150 bei B 300)

$\beta$ ) Wie vor + ständige Last:

$$\sigma_0 = -19 + \frac{2\,660\,000}{42\,640} = -19 + 62,3 = +43,3 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_u = +142,6 - \frac{2\,660\,000}{42\,830} = 142,6 - 62,0 = +80,6 \text{ kg/cm}^2.$$



γ) Spannungen nach Schwinden und Kriechen:

$$\sigma_0 = 0,82 (62 - 110,5) + 29,5 + 62,3 = +52,1 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_u = 0,82 (62 + 110,0) - 29,4 - 62,0 = +49,6 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Spannung  $\sigma_0$  erhöht sich von 43,3 auf 52,1 kg/cm<sup>2</sup>, somit geht eine Spannung von 8,8 kg/cm<sup>2</sup> verloren. Die Spannung in der Zugzone des Betons  $\sigma_u$  nimmt von 80,6 auf 49,6 kg/cm<sup>2</sup> ab, Verlust von 38% = 31 kg/cm<sup>2</sup>.

#### B. Spannungsnachweis unter Beachtung des „Dischinger-Effekts“

Wir nehmen an, daß die ständige Last  $g_1$  etwa nach 4 Wochen nach dem Vorspannen aufgebracht wird, und für  $\varphi_{t_1} = \frac{2}{5} \varphi_n$  wird  $\vartheta_1$  nach Tafel 2 abgelesen:

$$\vartheta_1 = 1,07 - 0,07 \frac{32 - 24}{124} = 1,07.$$

Somit bekommt man:

$$\sigma_t = \eta \frac{V}{F} + \left( \frac{M_{g_0}}{w} - \frac{M_v}{w} \right) \vartheta_0 + \frac{M_{g_1}}{w} \vartheta_1,$$

$$\sigma_{0t} = 0,82 \cdot 62 + (29,5 - 0,82 \cdot 110,5) 1,11 + 62,3 \cdot 1,07 = +49,7 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_{ut} = 0,82 \cdot 62 - (29,4 - 0,82 \cdot 110,0) 1,11 - 62,0 \cdot 1,07 = +54,0 \text{ kg/cm}^2.$$

Die obere Spannung  $\sigma_0$  erhöht sich von 43,3 auf 49,7 kg/cm<sup>2</sup>, das sind 6,4 kg/cm<sup>2</sup>, die verloren gehen, und die Verluste bei der unteren Spannung betragen 80,6 - 54 = 26,6 kg/cm<sup>2</sup>, d. h. 33%. Gegenüber dem Verlust von 31 kg/cm<sup>2</sup> ist eine nachträglich etwas ansteigende Vorspannung bemerkbar.

Aus diesem Beispiel stellt man fest, daß schon bei einer Knickzahl von  $\nu = 32$  im Falle  $M_v > M_{g_0}$  eine günstigere Wirkung auf der Zugzone von 5% vorhanden ist. Nehmen wir jedoch an, daß  $\nu = 5$  sei, so ergibt sich auf der Zugzone des Betons sogar eine Erhöhung von 80,6 auf 84,8 kg/cm<sup>2</sup>. In diesem Falle ist  $\vartheta_0 = 2,10$  und  $\vartheta_1 = 1,57$ . Die Druckzone wird auch sehr günstig beeinflusst, denn die Druckspannung nimmt von 43,3 kg/cm<sup>2</sup> auf 20,3 ab. Die nachträglich steigende Vorspannwirkung ist in diesem Falle sehr bedeutend. Sobald  $|M_v| < |M_{g_0}|$ , ist dagegen eine ungünstigere Wirkung zu erwarten.

#### b) Hochbau in Karlsruhe<sup>6)</sup>

System Finsterwalder, St 90, B 450,  $E_0 = 400\,000 \text{ kg/cm}^2$

Mit

$$F_{ev} = 6 \cdot 26 = 31,86 \text{ cm}^2,$$

$$\sigma_{ev} = 4,7 \text{ t/cm}^2,$$

$$\eta = 0,7,$$

$$V = 4,7 \cdot 31,86 = 150 \text{ t},$$

$$H = \eta V = 0,7 \cdot 150 = 105 \text{ t},$$

<sup>6)</sup> Bauherr Siemens und Halske, Arbeitsgemeinschaft: Dyckerhoff und Widmann und Siemens Bauunion, Prüfung. Prof. KAMMÜLLER. Gebaut 1952.

erhält man unter Beachtung der Knicklänge von  $l_k = 9,15$  m die Verformungszahl nach Gl. (12a):

$$\nu = \frac{\pi^2 400\,000 \cdot 0,012 \cdot 100^4}{105\,000 \cdot 915^2} = 54.$$

Nach Tafel 1 bekommt man für  $\nu = \infty = 124$  bei  $m = 3$

$$\vartheta_0 = 1,15 - 0,15 \frac{54 - 24}{124} = 1,11.$$

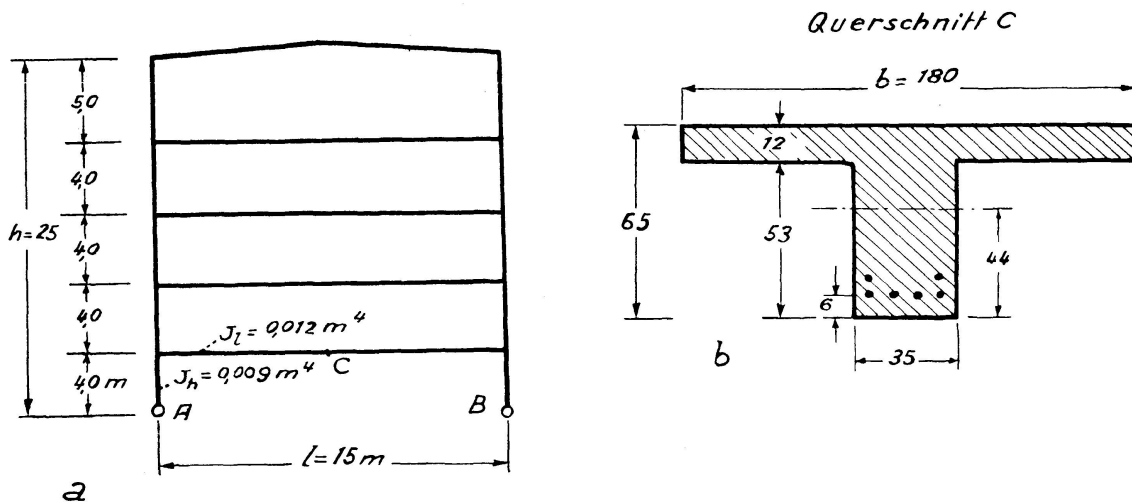


Fig. 8

Ähnlich wie im vorigen Beispiel ist eine günstige Wirkung festzustellen, obwohl die Knicksicherheit  $\nu$  sehr groß ist. In der Druckzone nimmt die Spannung um  $2 \text{ kg/cm}^2$  ab und im Bereich der Zugzone um  $4 \text{ kg/cm}^2$  zu.

Als abschließender Hinweis zu diesen zwei Beispielen kann man bemerken, daß bei einer Verformungszahl von

$$\nu \geq 25$$

der Einfluß der Theorie II. Ordnung vernachlässigt werden darf.

### c) Fertigteildecken aus Spannbeton<sup>7)</sup>

St 180, B 450,  $E_0 = 400\,000 \text{ kg/cm}^2$ , 7 Litzen zu  $2 \varnothing 3 \text{ mm}$  in der Zugzone, 1 Litze  $2 \varnothing 3 \text{ mm}$  in der Druckzone

Mit

$$F_i = 128 \text{ cm}^2, \quad I_i = 3635 \text{ cm}^4, \quad W_{i0} = 340 \text{ cm}^3, \quad W_{iu} = 500 \text{ cm}^3$$

$$F_{e0} = 0,1414 \text{ cm}^2, \quad F_{eu} = 7 \cdot 2 \varnothing 3 = 0,99 \text{ cm}^2, \quad y_i = 7,3 \text{ cm},$$

$$\alpha \approx \frac{E_e F_e}{E_e F_e + E_b F_b} = 0,05$$

erhält man für die Vorspannkraft

$$V = (1 - \alpha) F_e \cdot \sigma_{ev} = 0,95 (0,99 - 0,14) 10,4 = 11,17 \text{ t}$$

<sup>7)</sup> „Wolfer-Decke“, geprüft von Prof. KAMMÜLLER.

und für das Vorspannmoment vor Kriechen und Schwinden

$$\begin{aligned} M_e &= -(1 - \alpha) V a \\ &= -0,95 [0,99 \cdot 10,4 (7,3 - 2,1) - 0,14 \cdot 10,4 \cdot 8,7] = \\ &= -37,4 \text{ tcm.} \end{aligned}$$

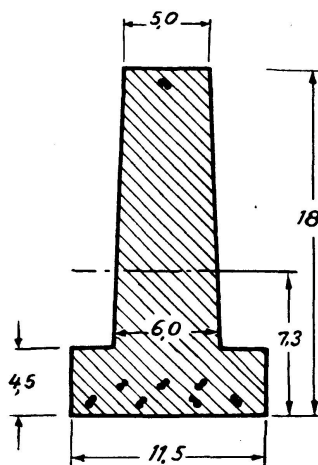


Fig. 9

Auf die genaue Ermittlung der Abminderung der Vorspannkraft infolge Kriechen und Schwinden beim Verbund wird in [8] hingewiesen. Nehmen wir den Faktor mit  $\eta = 0,85$  an, so bekommt man

$$\begin{aligned} H &= \eta V = 0,85 \cdot 11,17 = 9,5 \text{ t} \\ M_v &= \eta M_e = -0,85 \cdot 37,4 = -31,8 \text{ tcm.} \end{aligned}$$

Bei einer Spannweite von  $l = 6 \text{ m}$  ist die Verformungszahl nach Gl. (12 a)

$$\nu = \frac{\pi^2 400\,000 \cdot 3\,635}{9500 \cdot 600^2} = 4,2.$$

Nehmen wir weiter an, daß  $m = 2$  ist, so wird nach Tabelle 1  $\vartheta_0 = 2,21$ , bzw. nach Tabelle 1 a  $\vartheta_0^t = 2,09$ .

Da bei jeder Vorspanndecke die ständige Last ein kleineres Moment bringt als  $M_v$ , ist die plastische Erregung äußerst günstig.

Wir entnehmen aus [9] die Abb. 10, um zu zeigen, daß mit Hilfe des „Dischinger-Effekts“ die Zunahme der Durchbiegung infolge der langjährigen Lagerung der vorgespannten Platten erklärt werden kann. Zum Vergleich wenden wir das obige Beispiel an. Wenn die Fertigteilträger auf dem Boden liegen, kann man das sehr kleine Eigengewicht vernachlässigen.

α) Spannungen unmittelbar nach dem Vorspannen:

$$\sigma_0 = \frac{11\,170}{128} - \frac{37\,400}{340} = 87 - 110 = -23 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_u = 87 + \frac{37\,400}{500} = 87 + 75 = +162 \text{ kg/cm}^2.$$

- β) Spannungen nach Kriechen und Schwinden unter Beachtung des „Dischinger-Effekts“:

Das Moment infolge der plastischen Erregung wächst etwa um das zweifache

$$\begin{aligned} M_t &= M_v \vartheta_0^t \\ &= -31,8 \cdot 2,09 &= -66,5 \text{ tcm}, \\ \sigma_{0t} &= 0,85 \cdot 87 - 110 \cdot 2,09 = 74 - 230 = -156 \text{ kg/cm}^2, \\ \sigma_{ut} &= 74 + 75 \cdot 2,09 = 74 + 156,8 &= +230,8 \text{ kg/cm}^2. \end{aligned}$$

Die obere Zugspannung wird nur von der einen vorhandenen Litze aufgenommen. Es kann leicht vorkommen, daß dadurch die Fließgrenze erreicht wird. Das ist hier der Fall, wenn das Endkriechmaß  $m$  höher gesetzt wird als das angenommene  $m=2$ .

- γ) Die Durchbiegung für  $M_e = -37,4$  tcm beträgt:

$$\max w_0 = \frac{M_e l^2}{8 E_0 I} = \frac{37\,400 \cdot 600^2}{8 \cdot 400\,000 \cdot 3\,635} = 1,16 \text{ cm}$$

und infolge  $M_t = 66,5$  tcm

$$w_t = w_0 \frac{M_t}{M_e} = 1,16 \frac{66,5}{37,4} = 2,06 \text{ cm}.$$

- δ) Wählt man die Spannweite zu 7 m und das Kriechmaß zu  $m=3$ , so ist bei  $\nu=3$  unter Beachtung der Tabelle 1a die sechs- bis siebenfache Durchbiegung nachweisbar.

Abb. 10 zeigt vorgespannte Platten, die 7 Jahre lang auf der Seite gelegen haben und die ursprünglich gerade waren. Unter dem Einfluß der Vorspannung zeigen sie einen Stich von 7 cm bei 7 m Länge.

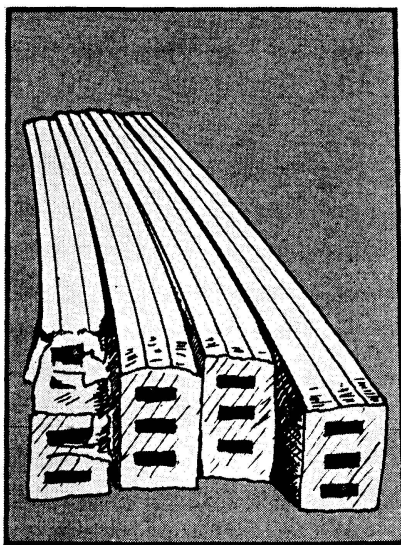


Fig. 10. Entnommen aus B. u. St. 47 (1952), S. 139

### Literatur

1. FR. DISCHINGER: Der Bauingenieur 20 (1939), S. 53, S. 426.
2. N. DIMITROV: Der Bauingenieur 28 (1953), S. 19.
3. N. DIMITROV: Beiträge zur Verformungstheorie, Diss. TH Karlsruhe 1949.
4. N. DIMITROV: Der Bauingenieur 28 (1953), S. 208.
5. F. SCHLEICHER: Taschenbuch für Bauingenieure, 1943, S. 133.
6. F. SCHLEICHER: Der Bauingenieur 26 (1951), S. 139.
7. A. PFLÜGER: Ing. Archiv XX (1952), S. 291.
8. K. KAMMÜLLER: Theorie des Stahlbetons, Bd. I, Karlsruhe 1952.
9. G. FRANZ: Beton und Stahlbeton 47 (1952), S. 137.

### Zusammenfassung

Die plastische Verformung des Betons bei den Vorspannkonstruktionen erzeugt nach der Theorie II. Ordnung zusätzliche Dauerlastmomente. Sind die Momente aus der Vorspannung größer (kleiner) als die aus den ständigen Lasten, so erhält man eine von der Zeit abhängige, ansteigende (abfallende) Vorspannwirkung. Von Bedeutung für den Einfluß der plastischen Erregung ist die genaue Ermittlung der Endkriechmaße  $m$ .

Als Kriterium dient die Verformungszahl  $\nu$ .

Für die praktische Anwendung kann bei  $\nu < 25$  der Einfluß der zusätzlichen Kräfte erheblich sein.

### Summary

In structures in which prestressing is employed, the deformation of the concrete gives rise, according to theory, to additional second-order permanent moments. If the moments due to the prestressing are greater (less) than those resulting from the long-term loadings, an increasing (decreasing) prestressing effect, which depends on time, is obtained. The accurate determination of the creep strain,  $m$ , of the soil is of considerable importance from the point of view of the effect of the plastic sensitivity.

The deformation coefficient,  $\nu$ , is taken as a criterion. For the purposes of practical application, the effect of the additional stresses can be considerable for  $\nu < 25$ .

### Résumé

Dans les ouvrages dans lesquels il est fait appel à la précontrainte, la déformation du béton met en jeu, d'après la théorie, des moments permanents de deuxième ordre. Si les moments qui résultent de la précontrainte sont supérieurs (inférieurs) à ceux qui proviennent des charges permanents, on obtient un effet de précontrainte croissante (décroissante), qui dépend du temps. La détermination précise de la déformation de glissement  $m$  du sol joue un rôle important du point de vue de l'influence de l'excitation plastique.

Le coefficient de déformation  $\nu$  joue ici le rôle de critérium. Pour l'application pratique, l'influence des efforts additionnels peut être considérable pour  $\nu < 25$ .