

Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 14 (1954)

Artikel: Eine numerische Lösung des Knickproblems
Autor: Langendonck, Telemaco van
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-13943>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 19.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Eine numerische Lösung des Knickproblems

A numerical solution of the buckling problem

Solution numérique du problème du flambage

Prof. Dr. TELEMACHO VAN LANGENDONCK, Escola Politécnica,
Universidade de São Paulo, Brasilien

Allgemeine Betrachtungen

Das Verfahren der numerischen Lösung des Knickproblems, das hier entwickelt wird, ist anwendbar in den Fällen wo die gesuchte Lösung sich aus dem Produkt einer Konstanten mit einer Zahl, Funktion des kleinsten der positiven Eigenwerte, ergibt. Es besteht in der Aufsuchung der Gleichung, deren unendlich viele Wurzeln diese Eigenwerte sind, und sie als eine konvergente Potenzreihe der Unbekannten gleich Null aufzustellen.

Ein Beispiel haben wir in dem üblichen Fall des prismatischen, an beiden Enden gelenkig-gelagerten Stabes, mit konstanter Axialkraft belastet, und deren Länge l und Steifigkeitszahl EJ ist.

Die Knicklast ergibt sich durch:

$$P_k = \alpha_0 \frac{EJ}{l^2} \quad (1)$$

wo α_0 der kleinste der positiven Eigenwerte der Differentialgleichung des Problems ist, die bekanntlich durch die transzendente Gleichung

$$\sin \sqrt{\alpha} = 0 \quad (2)$$

gegeben wird.

Um die angegebene Aufgabe zu lösen (im Falle des Beispiels wäre dies nicht nötig, da man die kleinste positive Lösung von (2) kennt), entwickelt man die Sinus-Reihe:

$$\sqrt{\alpha} - \frac{(\sqrt{\alpha})^3}{3!} + \frac{(\sqrt{\alpha})^5}{5!} \dots = 0 \quad (3)$$

oder, durch $\sqrt{\alpha}$ geteilt, um die Null-Lösung zu beseitigen, die Gleichung

$$1 - \frac{\alpha}{3!} + \frac{\alpha^2}{5!} - \frac{\alpha^3}{7!} + \dots = 0 \quad (4)$$

ergibt, deren kleinste Wurzel α_0 , in (1) eingesetzt, den Wert P_k liefert.

Nach *Bernoullis* Satz¹⁾ weiß man, daß der kleinste Absolutbetrag α_0 der Wurzeln der Gleichung m -ten Grades:

$$p(\alpha) = 1 - a_1\alpha + a_2\alpha^2 - a_3\alpha^3 + \dots \pm a_m\alpha^m = 0 \quad (5)$$

solange nicht zwei verschiedene Wurzeln mit dem gleichen Absolutbetrag vorhanden sind, sich mittels dem Quotienten von 1 durch den Polynom (5) ergibt:

$$q(\alpha) = \frac{1}{p(\alpha)} = 1 - b_1\alpha + b_2\alpha^2 - b_3\alpha^3 + \dots \quad (6)$$

da das Verhältnis der Koeffizienten zwei aufeinanderfolgender Glieder $-b_{n-1}/b_n$ zu α_0 konvergiert²⁾.

Die vorhergehenden Betrachtungen behalten ihre Gültigkeit, wenn m unendlich wächst, mit der Bedingung, daß der Polynom (5) sich in eine konvergente Reihe des gewünschten α -Wertes verwandelt.

Der Ausdruck, nach dem das Verhältnis $-b_{n-1}/b_n$ strebt, kann durch

$$\alpha_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-b_{n-1}}{b_n} = \frac{1}{e_1} + \frac{e'_1}{e_1 e_2} + \frac{e'_2}{e_2 e_3} + \frac{e'_3}{e_3 e_4} + \dots \quad (7)$$

gegeben werden³⁾, wo

$$e_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & 1 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & . \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_1 \end{vmatrix} \quad e'_n = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & \dots & . & a_{n+1} \\ a_1 & a_2 & \dots & . & a_n \\ 1 & a_1 & \dots & . & . \\ 0 & 1 & \dots & . & . \\ \vdots & \vdots & \dots & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_1 & a_2 \end{vmatrix}$$

Die Berechnung dieser Determinanten ist sehr langwierig. Ein einfacheres Rechenverfahren wird demnächst beschrieben.

¹⁾ Siehe z. B. H. W. TURNBULL: „Teoria de Ecuaciones“, aus der 3. englischen Ausgabe übersetzt, Edit. Dossat, Madrid, S. 169. (Man beachte, daß die dort angegebenen Symbole α , β und γ die Kehrwerte der Wurzeln von $F(x) = 0$, und nicht die Wurzeln sind, wie dort irrtümlicherweise angegeben wird; folglich muß das Beispiel auf S. 170 demgemäß geändert werden.)

²⁾ Wenn die Quotienten $-b_{n-1}/b_n$ mit $n \rightarrow \infty$ divergieren, so bedeutet das, daß verschiedene Wurzeln, deren Absolutbeträge dem kleinsten gleichen, vorhanden sind. Dieser Fall kommt nicht in den üblichen Problemen vor, doch wenn er auftreten sollte, könnte man die Unbestimmtheit durch Anwendung des in op. cit. (1) genannten Verfahrens beseitigen.

³⁾ Wenn die Reihe konvergiert, wie es WHITTAKERS Satz beweist (op. cit., I, S. 170).

Die Koeffizienten b_1, b_2, b_3, \dots des Quotienten 1 durch $1 - a_1\alpha + a_2\alpha^2 - \dots$ werden durch $-b_1 = a_1, -b_2 = a_2 + a_1b_1, -b_3 = a_3 + a_2b_1 + a_1b_2, \dots$ gegeben und können durch folgendes Verfahren errechnet werden:

Man schreibt auf einer ersten Zeile die Werte $1, a_1, a_2, \dots$; auf der zweiten Zeile schreibt man: unter 1 wiederum 1; unter a_1 das Produkt $a_1 \times 1$, mit umgekehrtem Zeichen; unter a_2 die Summe der Produkte $a_2 \times 1$ und $a_1 \times b_1$, mit umgekehrtem Zeichen und so weiter; man nimmt immer die Summe der Produkte der Glieder, denen man begegnet, wenn man zwei Zeilen in entgegengesetzten Richtungen verfolgt, und schreibt sie in die zweite Zeile mit umgekehrtem Zeichen:

$$\begin{array}{rcl}
 & 1 & a_1 \quad a_2 \quad a_3 \\
 \text{um } -b_1 \text{ zu finden:} & \nearrow & \\
 & 1 & \\
 \\
 & 1 & a_1 \quad a_2 \quad a_3 \\
 \text{um } -b_2 \text{ zu finden:} & \uparrow \quad \uparrow & \\
 & 1 \quad b_1 & \\
 \\
 & 1 & a_1 \quad a_2 \quad a_3 \\
 \text{um } -b_3 \text{ zu finden:} & \nearrow \quad \nearrow \quad \uparrow & \\
 & 1 \quad b_1 \quad b_2 &
 \end{array}$$

Gleichzeitig schreibt man auf einer dritten Zeile die Quotienten $\dots -b_{n-1}/b_n$, die die aufeinanderfolgenden Annäherungen des gesuchten α_0 sind, und deren allmähliche Kenntnis die Berechnungen zu unterbrechen, sobald die gewünschte Annäherung erreicht ist, ermöglicht.

Wendet man in (4) dieses Rechenverfahren an, ergibt sich

1	0,166.67	0,008.333.3	0,000.198.41	0,000.002.755.7 ...
1	-0,166.67	0,019.444	-0,002.050.3	0,000.209.99 ...
6	8,571	9,484	9,764	

und es erweist sich, daß die Zahlen der dritten Zeile wirklich nach $\pi^2 = 9,870$ streben, welcher, wie man weiß, derjenige von α_0^4 ist. Der Rechenfehler bei dem letzten Wert (9,764) beträgt 1,07%.

⁴) Die Zahlen sind in folgender Reihenfolge ermittelt worden, nachdem man die erste Zeile, die die Werte $1, 1/31, 1/51, 1/71, 1/91 \dots$ aufweist, geschrieben hat:

$1, -1 \times 0,166.67, 1/0,166.67 = 6$
 $-(1 \times 0,008.333.3 - 0,166.67 \times 0,166.67) = 0,019.444, 0,166.67/0,019.444 = 8,571$
 $-(1 \times 0,000.198.41 - 0,166.67 \times 0,008.333.3 + 0,019.444 \times 0,166.67) = -0,002.050.3$
 $0,019.444/0,002.050.3 = 9,484, \text{ usw.,}$

In einfachen Brüchen:

1	1/6	1/120	1/5040	1/362.880 ...
1	-1/6	7/360	-31/15120	127/604.800 ...
6	60/7	294/31	1240/127	

Eine systematische Darstellung der verschiedenen Anwendungsmöglichkeiten vorliegender Methode wird der Verfasser in einer besonderen Broschüre veröffentlichen. Hier werden nur drei Beispiele von Sonderfällen entwickelt.

1. Beispiel: Gerader Stab, nur an den Enden gestützt und von einer stetigen Axialkraft beansprucht

Die Differentialgleichung ist in diesem Falle (P ist die Axialkraft und EJ die Steifigkeitszahl der Stabquerschnitte, mit x veränderlich, Fig. 1) ⁵⁾:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EJ \frac{d^2 y}{dx^2} \right) + P \frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \quad (8)$$

oder, nach doppelter Integration:

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} + Py = C' + D' x$$

Wenn man $x = \xi l$, $EJ = \frac{E_0 J_0}{X}$ und $\alpha = \frac{P l^2}{E_0 J_0}$ setzt, wo:

- l die Länge des Stabes;
- X eine Funktion von ξ , deren Werte umgekehrt proportionell zu EJ sind, und die folglich positiv und endlich in dem betrachteten Abschnitt ist;
- $E_0 J_0$ irgend eine (endliche und positive) Konstante mit den Dimensionen einer Steifigkeitszahl,

ist, hat man (C und D sind Integrationskonstanten; $y', y'' \dots$ bezeichnen die aufeinanderfolgenden Ableitungen von y im Verhältnis zu ξ):

$$y'' + \alpha X y = X (C + D \xi). \quad (9)$$

Wenn $\xi = \gamma$, folgt $y(\gamma) = A$ und $y'(\gamma) = B$, und, wenn (9) zweimal integriert wird:

$$y + \alpha \int_{\gamma}^{\xi} d\xi \int_{\gamma}^{\xi} X y d\xi = A + B(\xi - \gamma) + \int_{\gamma}^{\xi} d\xi \int_{\gamma}^{\xi} X (C + D \xi) d\xi \quad (10)$$

oder, wenn das zweite Glied, das eine Funktion von ξ ist, mit t bezeichnet wird:

$$y = t - \alpha \int_{\gamma}^{\xi} d\xi \int_{\gamma}^{\xi} X y d\xi$$

⁵⁾ Es wird hier angenommen, daß EJ nur mit X und nicht mit P veränderlich ist, wie in dem Falle, wo die Proportionalitätsgrenze des Materials überschritten wird; in diesem Falle erhält man die Lösung mit der angegebenen Methode, wenn der Kehrwert des E in Funktion der Spannung σ in Form eines Polynoms der ganzen σ -Potenzen ausgedrückt werden kann.

Ersetzt man in der letzten Integrale y durch den Ausdruck des ganzen zweiten Gliedes, das ihm gleichwertig ist, erhält man:

$$y = t - \alpha \int_{\gamma}^{\xi} d\xi \int_{\gamma}^{\xi} X t d\xi + \alpha^2 \int_{\gamma}^{\xi} d\xi \int_{\gamma}^{\xi} X d\xi \int_{\gamma}^{\xi} d\xi \int_{\gamma}^{\xi} X y d\xi$$

und, fortfahrend, mit dem aufeinanderfolgenden Ersatz des y der letzten Integrale:

$$y = t - \alpha I_1 + \alpha^2 I_2 - \alpha^3 I_3 + \dots \quad (11)$$

wo:

$$I_n = I_n(X) = \int_{\gamma}^{\xi} d\xi \int_{\gamma}^{\xi} X d\xi \int_{\gamma}^{\xi} d\xi \int_{\gamma}^{\xi} X d\xi \dots \int_{\gamma}^{\xi} d\xi \int_{\gamma}^{\xi} X t d\xi \quad (2n \text{ Integralen})$$

Immer wenn X in dem gegebenen Bereich endlich ist, strebt die Reihe (11) zur Lösung von (9)⁶⁾. Sie ermöglicht die Auffindung der gesuchten α -Potenzreihe, und deren kleinste positive Wurzel α_0 dem Werte P , der die Knickbelastung ist:

$$P_k = \alpha_0 \frac{E_0 J_0}{l^2} \quad (12)$$

entspricht.

In dem Falle des gelenkig-gelagerten Stabes mit veränderlichem Querschnitt angewendet, annullieren sich die Konstanten C und D , und wenn $\gamma = 0$, annulliert sich auch A , indem man den Ursprung der Koordinaten mit einem der Stabenden zusammentreffen läßt (Fig. 1); es bleibt $t = B\xi$ übrig. Wenn z. B. die Steifigkeitszahl der Stabquerschnitte sich mit:

$$EJ = \frac{E_0 J_0}{2 - \xi}, \text{ das heißt, } X = 2 - \xi \quad (13)$$

wandelt, sind die Koeffizienten von (11), wenn $\gamma = 0$,

$$I_1 = \int_0^{\xi} d\xi \int_0^{\xi} B\xi (2 - \xi) d\xi = \frac{B}{12} (4\xi^3 - \xi^4) \text{ und, für } \xi = 1, I_1 = \frac{B}{4}$$

$$I_2 = \int_0^{\xi} d\xi \int_0^{\xi} (2 - \xi) I_1 d\xi = \frac{B}{2520} (84\xi^5 - 42\xi^6 + 5\xi^7) \text{ und, für } \xi = 1, I_2 = \frac{47 B}{2520}$$

$$I_3 = \int_0^{\xi} d\xi \int_0^{\xi} (2 - \xi) I_2 d\xi = \frac{B}{45360} (72\xi^7 - 54\xi^8 + 13\xi^9 - \xi^{10}) \text{ und, für } \xi = 1, I_3 = \frac{B}{1512}$$

Da $y = 0$ für $\xi = 1$ sein soll, ergibt sich, daß die gesuchte Gleichung (da $B \neq 0$, um nicht die Lösung $y \equiv 0$ zu bekommen)⁷⁾:

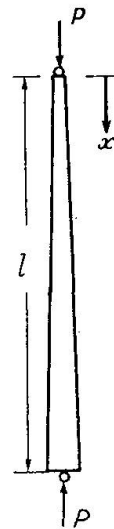


Fig. 1

⁶⁾ Siehe Beweisführung, z. B. in CH. STURM: „Cours d'Analyse“, Gauthier-Villars, Paris 1909, B. 2, S. 146.

⁷⁾ Bei der Ermittlung dieser Gleichung kann irgendeines der bekannten Ermittlungsverfahren angewendet werden, wie beispielsweise das Taylorreihenverfahren (aufeinander-

$$1 - \frac{1}{4} \alpha + \frac{47}{2520} \alpha^2 - \frac{1}{1512} \alpha^3 + \frac{133}{9729720} \alpha^4 - \dots = 0 \quad (14)$$

ist, deren erstes Glied, wie schon erwähnt, eine konvergente Reihe ist.

Wenn man das vorgeschlagene Rechenverfahren anwendet, ergibt sich:

1	0,25	0,018.651	0,000.661.4	0,000.013.67
1	-0,25	0,043.849	-0,006.961	0,001.074
4	5,70		6,29	6,48

woher

$$\alpha_0 \approx 6,5 \text{ und } P_k \approx 6,5 \frac{E_0 J_0}{l^2}.$$

Zur Vereinfachung der Berechnung von I_n kann Tabelle I benützt werden, in der die Koeffizienten angegeben sind, die die doppelte Integration

$$\int_0^{\xi_m} d\xi \int_0^{\xi} F(\xi) d\xi$$

folgend vom 1. Glied der Gleichung $y'' = \alpha X y$ abgeleitet) oder das Verfahren der unbestimmten Koeffizienten (wenn X ein Polynom oder der Quotient zweier Polynome der ganzen ξ -Potenzen ist):

$$y = \sum_0^{\infty} A_n \xi^n, \quad y'' = \sum_0^{\infty} n(n-1) A_n \xi^{n-2} = \sum_0^{\infty} (n+2)(n+1) A_{n+2} \xi^n$$

daher

$$y'' + \alpha(2-\xi)y = \sum_0^{\infty} (n+2)(n+1) A_{n+2} \xi^n + \alpha \sum_0^{\infty} 2 A_n \xi^n - \alpha \sum_0^{\infty} A_n \xi^{n+1} = 0$$

oder

$$(2 A_2 + 2 A_0 \alpha) + \sum_1^{\infty} [(n+2)(n+1) A_{n+2} + 2 \alpha A_n - \alpha A_{n-1}] \xi^n = 0$$

woraus: $A_2 = -\alpha A_0$ und, bei $n \geq 1$:

$$A_{n+2} = \frac{\alpha(A_{n-1} - 2 A_n)}{(n+2)(n+1)}.$$

Da $A_0 = 0$, um $y = 0$ zu haben, wenn $\xi = 0$, schreibt man:

$$y = A_1 \left[\xi - \frac{\alpha}{3} \xi^3 + \frac{\alpha}{12} \xi^4 + \frac{\alpha^2}{30} \xi^5 - \frac{\alpha^2}{60} \xi^6 + \frac{\alpha^2}{504} \xi^7 - \frac{\alpha^3}{630} \xi^7 + \frac{\alpha^3}{840} \xi^8 - \right. \\ \left. - \frac{13 \alpha^3}{45 \cdot 360} \xi^9 + \frac{\alpha^4}{22 \cdot 680} \xi^9 + \frac{\alpha^3}{45 \cdot 360} \xi^{10} - \dots \right]$$

und damit y sich bei $\xi = 0$ annulliert:

$$1 - \alpha \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12} \right) + \alpha^2 \left(\frac{1}{30} - \frac{1}{60} + \frac{1}{504} \right) - \alpha^3 \left(\frac{1}{630} - \frac{1}{840} + \frac{12}{45 \cdot 360} \right) + \dots = 0$$

womit man die Gleichung (14) erhalten hat.

für ξ_m , von 0,1 um 0,1 zwischen 0 und 1 schwankend, in Funktion von $F(\xi_m)$ ermöglichen, die berechnet wurde indem man annahm, die Funktion sei durch einen trigonometrischen Polynom, der $F(\xi)$ für die elf ξ_m -Werte befriedigt, dargestellt.

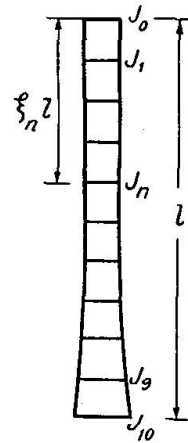


Tabelle I

$$j_n = \frac{E_0 J_0}{E J_n} \quad \int_0^{\xi_m} d\xi \int_0^{\xi} f(\xi) X d\xi = \sum_{n=0}^{10} f(\xi_n) j_n \frac{k_n(\xi_m)}{10^4}$$

$10\xi_m$	k_0	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9	k_{10}
1	39	13	-2	1	-1	0	0	0	0	0	0
2	90	101	9	-1	0	0	0	0	0	0	0
3	140	203	98	11	-2	1	0	0	0	0	0
4	190	302	200	99	10	-1	0	0	0	0	0
5	240	403	299	201	98	10	-1	1	0	0	0
6	290	502	399	300	200	99	10	-1	0	0	0
7	340	603	499	401	299	201	99	10	-1	1	0
8	390	702	599	500	400	300	200	99	10	-1	0
9	440	803	699	601	500	400	300	201	98	11	-1
10	490	902	799	700	600	500	400	300	201	98	10

So hat man zum Beispiel (Tabellenbezeichnung)⁸⁾, mit $X = 1 + \sin \pi \xi$:

$$j_0 = j_{10} = 1, \quad j_1 = j_9 = 1 + \sin \frac{\pi}{10} = 1,309, \quad j_2 = j_8 = 1,588$$

woraus:

$$j_3 = j_7 = 1,809, \quad j_4 = j_6 = 1,951, \quad j_5 = 2$$

ξ_m	$I_1 = \sum_{i=0}^{10} \xi_i j_i k_i$	$10^2 I_2 = 100 \sum_{i=0}^{10} I_{1i} j_i k_i$	$10^3 I_3 = 10 \sum_{i=0}^{10} 10^2 I_{2i} j_i k_i$	$10^4 I_4 = 10 \sum_{i=0}^{10} 10^3 I_{3i} j_i k_i$
0,1	0,0001	0,0000	0,0000	
0,2	0,0016	0,0002	0,0000	
0,3	0,0063	0,0040	0,0001	
0,4	0,0164	0,0191	0,0009	
0,5	0,0343	0,0696	0,0068	
0,6	0,0621	0,1869	0,0261	
0,7	0,1018	0,4312	0,0891	
0,8	0,1537	0,8528	0,2218	
0,9	0,2186	1,5228	0,4967	
1,0	0,2949	2,4736	0,9688	0,2209

⁸⁾ Beispiel von Lothar Collatz: „Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung“, Chelsea Publ. Co., New York 1948, S. 187. Den genauen α_0 -Wert befindet sich, nach diesem Verfasser, zwischen $0,5388 \pi^2 = 5,318$ und $0,5409 \pi^2 = 5,338$.

$$1 - 0,2949\alpha + 0,024.74\alpha^2 - 0,000.968.8\alpha^3 + 0,000.022.09\alpha^4 - \dots = 0$$

das zu

1	0,2949	0,024.74	0,000.968.8	0,000.022.09
1	-0,2949	0,062.23	-0,012.025	0,002.270.2
3,39	4,74	5,18	5,30	

führt, also $\alpha_0 \approx 5,30$ und $P_k \approx 5,30 \frac{E_0 J_0}{l^2}$.

2. Beispiel: Elastisch gebetteter prismatischer Stab, mit veränderlicher Bettungsziffer

Die Gleichung, die das Problem löst, ist⁹⁾:

$$y^{IV} + \alpha y'' + c X y = 0$$

wo X eine Funktion von ξ , die die Veränderlichkeit der Bettungsziffer $k = k_0 X$ (Kraft, die die Stützung auf den Stab, pro Längeneinheit, wenn seine Querverschiebung einheitlich ist, ausübt) bezeichnet; k_0 ein Standardskoeffizient ist $c = k_0 l^4 / EJ$ und die übrigen Buchstaben die vorher angenommenen Bedeutungen haben.

Wenn X ein Polynom der ganzen ξ -Potenzen ist, kann die Gleichung für α nach dem in Fußnote 7 beschriebenen Verfahren erhalten werden. So hat man für einen an den Enden gelenkigen Stab, mit einer Stützung, deren Bettungsziffer parabolisch von k_0 bis 0 veränderlich ist (d. h. $X = 1 - \xi^2$):

$$y = \sum_0^{\infty} A_n \xi^n = \sum_0^{\infty} \frac{B_n}{n!} \xi^n$$

mit (für $n > 3$):

$$B_n = -\alpha B_{n-2} - c B_{n-4} + c(n-4)(n-5) B_{n-6}$$

Um $y=0$ und $y''=0$ mit $\xi=0$ zu erhalten, folgt $B_0 = B_2 = 0$, und alle B mit geradem Index sind gleich Null; für $\xi=1$, folgt $y=0$ und $y''=0$, wenn

$$\sum_0^{\infty} \frac{B_n}{n!} = 0 \quad \text{und} \quad \sum_0^{\infty} \frac{B_n}{(n-2)!} = 0.$$

Im Falle, daß $c = 50^{10}$, folgt (mit $\alpha' = 0,1\alpha$):

$$\begin{aligned} & B_1 (0,646.906 + 0,090.174.1 \alpha' - 0,012.951.6 \alpha'^2 + 0,001.199.56 \alpha'^3 - \dots) + \\ & + B_3 (0,159.532 - 0,081.359.9 \alpha' + 0,019.573.6 \alpha'^2 - 0,002.732.98 \alpha'^3 + \dots) = 0 \\ & B_1 (-5,641.618 + 3,508.628 \alpha' - 0,890.655 \alpha'^2 + 0,129.415 \alpha'^3 - \dots) + \\ & + B_3 (0,783.753 - 1,554.285 \alpha' + 0,808.865 \alpha'^2 - 0,105.368 \alpha'^3 + \dots) = 0. \end{aligned}$$

⁹⁾ Siehe z. B. JULIUS RATZERSDORFER: „Die Knickfestigkeit von Stäben und Stabwerken“, Julius Springer, 1936, S. 141.

¹⁰⁾ Was, wenn k konstant und k_0 gleich wäre, einer 1,52mal größeren Knicklast als die des Stabes, außerhalb der elastischen Stützung, entsprechen würde. In dem angegebenen Beispiel, als mittlere Lösung, sollte man α_0 zwischen $\pi^2 = 9,87$ und $1,52 \pi^2 = 15$ erreichen, wie es auch wirklich der Fall ist.

Es sind zwei homogene Gleichungen, die nur zu einer nicht identisch verschwindenden Lösung führen, wenn ihr Diskriminant Null ist:

$$1,407.031 - 1,953.541 \alpha' + 0,910.929 \alpha'^2 - 0,209.580 \alpha'^3 + 0,028.518.1 \alpha'^4 - 0,002.555.80 \alpha'^5 + 0,000.209.825 \alpha'^6 - \dots = 0.$$

Wenn man die Koeffizienten durch 1,407.031 teilt, erhält man die Lösung:

1	1,388.414	0,647.412	0,148.952	0,020.268.3	0,001.816.45	0,000.149.125
1	-1,388.414	1,280.281	-1,027.636	0,784.454	-0,588.219	0,438.319
0,72	1,08	1,25	1,31	1,334	1,342	

mit $\alpha_0' \approx 1,35$ und $\alpha_0 = 10 \alpha_0' = 13,5$ oder

$$P_k \approx 13,5 \frac{EJ}{l^2}.$$

3. Beispiel: Mit zwei verschiedenen Querschnitten prismatische Stäbe, mit Belastungen an den beiden Enden und am Übergangsquerschnitt (Fig. 2)

In diesem Falle, wie in allen bei welchen man die transzendente Gleichung, die die Werte von $\alpha^{11)}$ angibt, kennt, löst man die Aufgabe, indem man die

¹¹⁾ Diese Betrachtungen können nicht nur bei den Knickproblemen, sondern auch bei anderen Problemen angewendet werden, wie z. B. bei der Aufsuchung der Achsenvibrationsperiode. Als erleuchtendes Beispiel sei der Sonderfall von S. 37, op. cit.⁸⁾ angegeben, wo die Torsionsvibration einer Achse mit zwei konzentrierten Massen behandelt wird, wobei man die Lösung

$$3 - 4 \sin^2 \alpha - 3 \alpha \sin 2 \alpha + 2 \alpha^2 \sin^2 \alpha = 0,$$

erreicht, die folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$4 + 8 \cos 2\alpha - 12\alpha \sin 2\alpha + 4\alpha^2 - 4\alpha^2 \cos 2\alpha = 0$$

oder setzt man: $2\alpha = \sqrt{\beta}$:

$$4 + 8 \cos \sqrt{\beta} - 6\sqrt{\beta} \sin \sqrt{\beta} + \beta - \beta \cos \sqrt{\beta} = 0$$

und zieht man in Betracht, daß:

$$\cos \sqrt{\beta} = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{\beta^n}{(2n)!} \quad \text{und} \quad \sin \sqrt{\beta} = \sqrt{\beta} \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{\beta^n}{(2n-1)!}$$

ist die Endgleichung

$$12 + \beta + 2 \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{4 + 5n + 2n^2}{(2n)!} \beta^n = 0$$

oder

$$1 - \frac{5}{6} \beta + \frac{11}{72} \beta^2 - \frac{37}{4320} \beta^3 + \frac{1}{4320} \beta^4 - \dots = 0$$

und die Lösung

1	5/6	11/72	37/4320	1/4320
1	-5/6	39/72	-479/1440	5219/25920
1,2	1,538	1,649	1,652	

mit dem Ergebnis $\beta \approx 1,652$ oder $\alpha \approx 0,5 \sqrt{\beta} = 0,643$, mit einem Fehler von 0,2%.

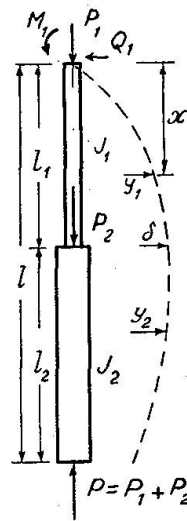


Fig. 2

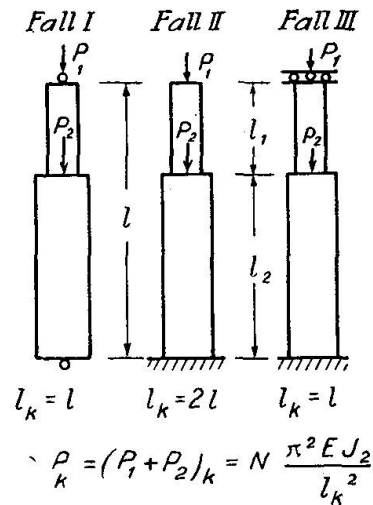


Fig. 3

transzendenten Funktionen durch die entsprechenden Reihenentwicklungen ersetzt. Die Lösung des obigen Problems erreicht man durch folgende Gleichungen der elastischen Linie in den Abschnitten 1 und 2 ($k_1 = \sqrt{P_1/EJ_1}$ und $k_2 = \sqrt{P/EJ_2}$):

$$y_1 = A \sin k_1 x + \frac{M_1}{P_1} (\cos k_1 x - 1) - \frac{Q_1}{P_1} x$$

$$y_2 = A' \sin k_2 x + B' \cos k_2 x - \frac{M_1 - P_2 \delta + Q_1 x}{P_1 + P_2}$$

wo A , A' und B' Integrationskonstanten sind und die übrigen Buchstaben die in Figur 2 angegebenen Bedeutungen haben. Die Größen M_1 , Q_1 , δ und die drei Konstanten werden durch die drei Randbedingungen und die Gleichungen

$$y_1 = y_2 = \delta \text{ und } y_1' = y_2' \quad (15)$$

für $x = l_1$ in Beziehung gebracht.

Man betrachte die drei Fälle der Figur 3.

Im Fall I ist $M_1 = 0$, $Q_1 l = P_2 \delta$ und für $x = l$, $y_2 = 0$. Aus diesen drei Bedingungen und aus (15) beseitigt man leicht M_1 , Q_1 und δ , und um A , A' und B' zu bestimmen, bleiben drei homogene Gleichungen, die nur zu einer nicht identisch verschwindenden Lösung führen, wenn ihr Diskriminant sich annulliert, das heißt, wenn

$$k_2 l_2 \cotg k_2 l_2 + \frac{1}{g} k_1 l_1 \cotg k_1 l_1 = \frac{\rho_1^2}{1 - \rho_1} \frac{\rho_3}{1 - \rho_1 \rho_3} = 1 + \frac{1}{g} - c$$

wo

$$\rho_1 = \frac{P_2}{P_1 + P_2}, \quad \rho_2 = \frac{J_1}{J_2}, \quad \rho_3 = \frac{l_2}{l_1},$$

$$g = (1 - \rho_1) \frac{1 - \rho_3}{\rho_3}, \quad c = \frac{1}{(1 - \rho_3)(1 - \rho_1 \rho_3)}$$

Tabelle II. Werte von N (Fig. 3)

$\frac{l_2}{l}$	$\frac{J_1}{J_2}$	FALL I						FALL II						FALL III					
		$P_2/P =$						$P_2/P =$						$P_2/P =$					
		0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,3	0,05	0,057	0,065	0,076	0,091	0,113	0,145	0,098	0,122	0,163	0,244	0,49	11,11	0,098	0,122	0,163	0,244	0,49	2,83
	0,1	0,113	0,130	0,151	0,181	0,222	0,283	0,187	0,234	0,312	0,468	0,93	11,11	0,187	0,234	0,311	0,465	0,92	2,87
	0,2	0,22	0,26	0,30	0,35	0,43	0,54	0,35	0,43	0,57	0,86	1,69	11,11	0,34	0,43	0,56	0,83	1,53	2,97
	0,4	0,44	0,50	0,57	0,67	0,81	1,00	0,59	0,74	0,97	1,44	2,78	11,11	0,58	0,71	0,92	1,30	2,06	3,15
	0,6	0,64	0,72	0,83	0,96	1,14	1,38	0,77	0,95	1,26	1,85	3,44	11,11	0,75	0,91	1,16	1,59	2,33	3,33
	0,8	0,82	0,93	1,06	1,22	1,44	1,71	0,90	1,11	1,47	2,13	3,87	11,11	0,88	1,07	1,35	1,80	2,53	3,50
	1	1,00	1,12	1,27	1,46	1,69	1,98	1,00	1,24	1,62	2,34	4,15	11,11	1,00	1,20	1,50	1,97	2,70	3,66
0,4	0,05	0,066	0,075	0,088	0,106	0,131	0,170	0,130	0,162	0,216	0,324	0,65	6,25	0,130	0,162	0,216	0,323	0,65	1,60
	0,1	0,130	0,148	0,173	0,207	0,255	0,329	0,24	0,30	0,40	0,60	1,19	6,25	0,24	0,30	0,40	0,58	1,04	1,65
	0,2	0,25	0,29	0,33	0,40	0,49	0,62	0,43	0,53	0,71	1,04	1,99	6,25	0,41	0,51	0,65	0,90	1,31	1,73
	0,4	0,48	0,54	0,62	0,73	0,88	1,08	0,68	0,84	1,10	1,58	2,79	6,25	0,63	0,75	0,93	1,18	1,52	1,88
	0,6	0,68	0,76	0,87	1,01	1,19	1,43	0,83	1,02	1,32	1,87	3,12	6,25	0,78	0,91	1,10	1,35	1,68	2,03
	0,8	0,85	0,95	1,08	1,23	1,43	1,69	0,93	1,14	1,47	2,04	3,29	6,25	0,89	1,04	1,24	1,50	1,82	2,17
	1	1,00	1,11	1,25	1,42	1,63	1,90	1,00	1,22	1,56	2,16	3,39	6,25	1,00	1,16	1,36	1,63	1,95	2,30
0,5	0,05	0,082	0,094	0,111	0,135	0,171	0,231	0,181	0,226	0,301	0,45	0,89	4,00	0,179	0,223	0,296	0,44	0,76	1,04
	0,1	0,159	0,183	0,215	0,261	0,328	0,439	0,33	0,41	0,54	0,80	1,52	4,00	0,31	0,38	0,49	0,67	0,90	1,08
	0,2	0,30	0,35	0,41	0,49	0,61	0,79	0,54	0,67	0,87	1,25	2,15	4,00	0,48	0,57	0,68	0,83	1,00	1,16
	0,4	0,55	0,62	0,72	0,85	1,02	1,28	0,77	0,94	1,20	1,64	2,50	4,00	0,66	0,75	0,87	1,00	1,15	1,30
	0,6	0,74	0,83	0,95	1,10	1,30	1,58	0,89	1,07	1,35	1,80	2,61	4,00	0,79	0,88	1,00	1,13	1,28	1,43
	0,8	0,89	0,99	1,12	1,28	1,49	1,77	0,96	1,15	1,43	1,88	2,66	4,00	0,90	1,00	1,12	1,26	1,40	1,55
	1	1,00	1,11	1,25	1,41	1,62	1,89	1,00	1,19	1,48	1,93	2,69	4,00	1,00	1,11	1,23	1,37	1,52	1,67
0,6	0,05	0,111	0,129	0,154	0,192	0,253	0,366	0,27	0,33	0,44	0,65	1,25	2,78	0,26	0,31	0,40	0,52	0,65	0,74
	0,1	0,21	0,25	0,29	0,36	0,47	0,67	0,46	0,56	0,74	1,05	1,75	2,78	0,39	0,46	0,53	0,62	0,70	0,78
	0,2	0,39	0,45	0,53	0,65	0,82	1,11	0,68	0,82	1,04	1,40	1,99	2,78	0,52	0,58	0,64	0,71	0,78	0,85
	0,4	0,65	0,74	0,86	1,02	1,23	1,53	0,86	1,02	1,25	1,58	2,09	2,78	0,67	0,72	0,79	0,85	0,92	0,99
	0,6	0,82	0,92	1,05	1,22	1,43	1,70	0,94	1,10	1,32	1,65	2,12	2,78	0,79	0,85	0,91	0,98	1,05	1,12
	0,8	0,93	1,03	1,17	1,33	1,53	1,79	0,98	1,14	1,36	1,67	2,13	2,78	0,90	0,96	1,03	1,09	1,16	1,23
	1	1,00	1,11	1,24	1,40	1,60	1,83	1,00	1,16	1,38	1,69	2,14	2,78	1,00	1,06	1,13	1,20	1,26	1,33
0,7	0,05	0,171	0,202	0,246	0,315	0,436	0,696	0,43	0,53	0,69	0,97	1,51	2,04	0,35	0,39	0,44	0,48	0,52	0,56
	0,1	0,32	0,37	0,45	0,57	0,77	1,14	0,65	0,78	0,97	1,25	1,64	2,04	0,43	0,47	0,50	0,54	0,57	0,60
	0,2	0,54	0,63	0,74	0,91	1,15	1,47	0,83	0,97	1,15	1,39	1,69	2,04	0,52	0,55	0,59	0,62	0,65	0,69
	0,4	0,79	0,89	1,02	1,18	1,38	1,60	0,94	1,07	1,23	1,44	1,71	2,04	0,67	0,70	0,73	0,77	0,80	0,83
	0,6	0,90	1,00	1,13	1,28	1,45	1,64	0,97	1,10	1,26	1,46	1,72	2,04	0,79	0,83	0,86	0,89	0,92	0,95
	0,8	0,96	1,06	1,18	1,32	1,48	1,65	0,99	1,11	1,27	1,47	1,72	2,04	0,90	0,93	0,97	1,00	1,03	1,06
	1	1,00	1,10	1,21	1,34	1,50	1,66	1,00	1,12	1,28	1,48	1,73	2,04	1,00	1,03	1,06	1,09	1,12	1,14
0,8	0,05	0,32	0,39	0,48	0,63	0,90	1,33	0,72	0,84	1,00	1,19	1,39	1,56	0,37	0,39	0,41	0,42	0,44	0,45
	0,1	0,55	0,65	0,78	0,96	1,19	1,40	0,87	0,98	1,10	1,25	1,40	1,56	0,43	0,45	0,46	0,48	0,49	0,51
	0,2	0,78	0,88	1,00	1,14	1,29	1,42	0,95	1,04	1,15	1,27	1,41	1,56	0,53	0,55	0,56	0,58	0,59	0,61
	0,4	0,92	1,01	1,11	1,21	1,32	1,43	0,98	1,07	1,17	1,28	1,41	1,56	0,70	0,71	0,72	0,74	0,75	0,77
	0,6	0,97	1,05	1,14	1,23	1,33	1,44	0,99	1,08	1,17	1,29	1,42	1,56	0,82	0,84	0,85	0,86	0,87	0,88
	0,8	0,99	1,06	1,15	1,24	1,34	1,44	1,00	1,08	1,18	1,29	1,42	1,56	0,92	0,93	0,94	0,95	0,97	0,98
	1	1,00	1,07	1,16	1,24	1,34	1,44	1,00	1,08	1,18	1,29	1,42	1,56	1,00	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05

Schreibt man

$$k_2 l_2 = \sqrt{\alpha} \quad \text{und} \quad k_1 l_1 = \sqrt{\alpha f} \quad \text{mit} \quad f = \frac{g^2}{\rho_2(1-\rho_1)}, \quad \text{folgt:}$$

$$c - \left(1 + \frac{1}{g}\right) + \sqrt{\alpha} \cotg \sqrt{\alpha} + \frac{1}{g} \sqrt{\alpha f} \cotg \sqrt{\alpha f} = 0$$

oder, indem man die Kotangenten in einer Reihe die konvergent ist, insofern das Quadrat ihres Arguments nicht π^2 (das heißt, $\alpha < \pi^2$ und $\alpha f < \pi^2$) erreicht, entwickelt:

$$c - \frac{\alpha}{3} \left(1 + \frac{f}{g}\right) - \frac{\alpha^2}{45} \left(1 + \frac{f^2}{g}\right) - \frac{\alpha^3}{472,5} \left(1 + \frac{f^3}{g}\right) - \frac{\alpha^4}{4725} \left(1 + \frac{f^4}{g}\right) - \dots = 0$$

die die Gleichung ist, die nach dem vorgeschlagenen Rechenverfahren gelöst, und wenn sie nicht zu α und αf führt, die größer als π^2 sind, α_0 ergibt (es muß nachgewiesen werden, daß es sich nicht um eine negative Wurzel handelt), daher

$$P_k = \alpha_0 \frac{E J_2}{l_2^2} \quad (16)$$

Auf diese Art wurden die in Tabelle II¹²⁾ angegebenen Werte berechnet.

Handelt man gleichermaßen in den Fällen II und III der Figur 3, ermittelt man, beziehungsweise mit derselben Bezeichnung, folgende Gleichungen:

$$\sqrt{\alpha} \cotg \sqrt{\alpha} - \frac{g}{f} \sqrt{\alpha f} \operatorname{tg} \sqrt{\alpha f} = 0$$

$$\sqrt{\alpha} \cotg \sqrt{\alpha} + \frac{g}{f} \sqrt{\alpha f} \cotg \sqrt{\alpha f} = 0$$

oder, in Reihe entwickelnd (in der ersten Gleichung soll, außer $\alpha < \pi^2$, auch $\alpha f < 0,25 \pi^2$ sein, denn der Konvergenzradius der Tangentenreihe ist kleiner als derjenige des Kotangenten):

$$1 - \frac{\alpha}{3} (1 + 3g) - \frac{\alpha^2}{45} (1 + 15gf) - \frac{\alpha^4}{472,5} (1 + 63gf^2) - \frac{\alpha^4}{4725} (1 + 255gf^3) - \dots = 0$$

$$\left(1 + \frac{g}{f}\right) - \frac{\alpha}{3} (1 + g) - \frac{\alpha^2}{45} (1 + gf) - \frac{\alpha^3}{472,5} (1 + gf^2) - \frac{\alpha^4}{4725} (1 + gf^3) - \dots = 0.$$

Als numerisches Beispiel nehme man, im Falle I, $\rho_1 = 0,4$, $\rho_2 = 0,05$ und $\rho_3 = 0,5$; man hat $g = 0,6$, $f = 12$, $c = 2,5$ und

$$1 - 2,8\alpha - 2,14222\alpha^2 - 2,43894\alpha^3 - 2,92579\alpha^4 - 3,54633\alpha^5 - 4,30858\alpha^6 - \dots$$

woher

1	2,8	-2,14222	2,43894	-2,92579	3,54633	-4,30858
1	-2,8	9,98222	-36,3874	133,024	-486,500	1779,36
0,3571	0,2805	0,2743	0,2735	0,2734	0,2734	

also ist $\alpha_0 = 0,2734$.

¹²⁾ T. VAN LANGENDONCK: „Cálculo de Concreto Armado“, Associação Brasileira de Cimento Portland, 1. Band, 2. Ausgabe, São Paulo 1954.

Zusammenfassung

Der Verfasser beschreibt ein numerisches Verfahren zur Auffindung des kleinsten Eigenwertes der Differentialgleichungen, die das Knickproblem stellen.

Dieses Verfahren kann auch bei der Lösung anderer Aufgaben der mathematischen Physik, die auf diese Art von Eigenwerten führen, angewendet werden.

Die Anwendung des Verfahrens wird zum Schluß an drei Beispielen für die Berechnung der Knicklast gerader Stäbe gezeigt.

Summary

The author develops a numerical method for finding the lowest eigenvalue of the differential equations which represent the buckling problem.

This method can also be applied to the solution of other problems in mathematical physics which depend on this eigenvalue.

The application of the method is finally demonstrated in three examples for the calculation of the buckling load of straight struts.

Résumé

L'auteur expose un procédé numérique pour la détermination de la plus petite valeur particulière des équations différentielles que pose le problème du flambage.

Ce procédé peut être également employé pour la résolution d'autres problèmes de la physique mathématique, qui font intervenir cette valeur particulière.

L'auteur montre enfin, sur trois exemples, comment on peut appliquer ce procédé au calcul de la charge de flambage des barres droites.

Leere Seite
Blank page
Page vide