

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

**Band:** 13 (1953)

**Artikel:** Formänderung der hyperbolischen Paraboloidschale

**Autor:** Ban, Shizuo

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-13192>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Formänderung der hyperbolischen Paraboloidschale

*Deformation of hyperbolic-paraboloid shells*

*Déformation des voûtes minces en forme de paraboloïde hyperbolique*

Prof. Dr. Ing. SHIZUO BAN, Kioto Univ., Kioto

## 1. Einleitung

Die Theorie der hyperbolischen Paraboloidschale ist heute soweit entwickelt, daß die Membranspannungen für die verschiedenen Belastungen ausreichend bekannt sind. Die Formänderungen, die der Membrantheorie entsprechen, sind meines Wissens noch nicht entwickelt worden. Um die Lücke auszufüllen, legt der Verfasser hier einen Aufsatz vor, in welchem die Differentialgleichung für die Verformung der allgemeinen Translationsschale aufgestellt wird. Für die hyperbolische Paraboloidschale ist es mir gelungen, die Lösung auszurechnen.

## 2. Geometrische Beziehungen der Schalenfläche (s. Fig. 1)

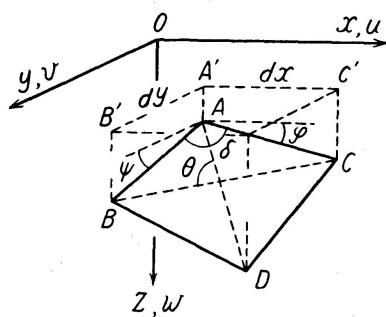


Fig. 1

Gleichung der Schalenfläche

$$z = \frac{1}{n} xy \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Neigung der Flächen in } x\text{-Richtung} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{n} \\ \text{Neigung der Flächen in } y\text{-Richtung} \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{n} \end{array} \right\} \quad (2)$$

Winkel zwischen den beiden Geraden:

$$\cos \delta = \sin \varphi \sin \psi = \frac{xy}{\sqrt{(x^2+n^2)(y^2+n^2)}} \quad (3)$$

Winkel zwischen den beiden Diagonalen des Flächenteilchens:

$$\sin \Theta = \frac{2 \sqrt{1 + \tan^2 \varphi + \tan^2 \psi}}{\sqrt{2 + (\tan \varphi + \tan \psi)^2} \sqrt{2 + (\tan \psi - \tan \varphi)^2}}, \quad (4)$$

wobei der Einfachheit halber  $dx = dy$  angenommen ist.

Die Richtungskosinusse der Flächennormale sind

$$\left. \begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{\tan \varphi}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi + \tan^2 \psi}} = \frac{y}{R}, \\ \cos \beta = \frac{\tan \psi}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi + \tan^2 \psi}} = \frac{x}{R}, \\ \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi + \tan^2 \psi}} = \frac{1}{R}. \end{array} \right\} \quad (5)$$

wobei  $R = \sqrt{n^2 + x^2 + y^2}$  eingesetzt ist.

Das Flächenteilchen der Schale berechnet sich aus

$$dF = \frac{dx dy}{\cos \gamma} = \frac{R}{n} dx dy \quad (6)$$

und die Seitenlänge des Teilchens aus

$$\left. \begin{array}{l} ds_\varphi = \frac{dx}{\cos \varphi} = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 + y^2} dx, \\ ds_\psi = \frac{dy}{\cos \psi} = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 + x^2} dy. \end{array} \right\} \quad (7)$$

### 3. Die Membrankräfte

Die Membrankräfte werden mit  $N_\varphi$ ,  $N_\psi$ ,  $T$  bezeichnet und die Teilkräfte der äußeren Lasten in den Achsenrichtungen mit  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , wobei die letztere Gruppe auf die Flächeneinheit des Grundrisses bezogen ist. Aus den wertvollen Aufsätzen von A. PUCHER [1] und K. G. TESTER [2] ergeben sich

$$T = \tau h = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = - \frac{n}{2} Z + \frac{1}{2} (X y + Y x), \quad (8)$$

$$N_\varphi = \sigma_\varphi h = \frac{\cos \psi}{\cos \varphi} \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \int_0^x X dx \right\} = - \frac{\cos \psi}{\cos \varphi} \left\{ \int \left( \frac{\partial T}{\partial y} + X \right) dx + C_1(y) \right\}, \quad (9)$$

$$N_\psi = \sigma_\psi h = \frac{\cos \varphi}{\cos \psi} \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \int_0^y Y dy \right\} = - \frac{\cos \varphi}{\cos \psi} \left\{ \int \left( \frac{\partial T}{\partial x} + Y \right) dy + C_2(x) \right\}, \quad (10)$$

wo  $h$  die Schalendicke bedeutet.

Auf einzelne Belastungsfälle geht der Verfasser nicht ein.

#### 4. Verzerrung bei schiefwinkligem Spannungszustand

Entsprechend der Grundrißprojektion  $dx \cdot dy$  hat das Schalenteilchen die Form eines Parallelogramms, dessen Seiten mit den Richtungen der inneren Kräfte  $T$ ,  $N_\varphi$ ,  $N_\psi$  übereinstimmen. Wir bezeichnen die Spannungen mit  $\sigma_\varphi$ ,  $\sigma_\psi$ ,  $\tau$  und die Verzerrungen in denselben Richtungen mit  $\epsilon_\varphi$ ,  $\epsilon_\psi$ ,  $\gamma$ . Da die Längsspannung  $\sigma_\varphi$  auf der Schnittfläche schiefwinklig gerichtet ist, ergibt sich die Verzerrung zu  $\sigma_\varphi/E \sin \delta$  in der  $\varphi$ -Richtung und  $\nu \sigma_\varphi/E \sin \delta$  in der dazu rechtwinkligen Richtung. Es läßt sich leicht beweisen, daß die Verzerrung in der  $\psi$ -Richtung mit  $\nu \sigma_\varphi/E \sin \delta$  übereinstimmt. Dann erhalten wir

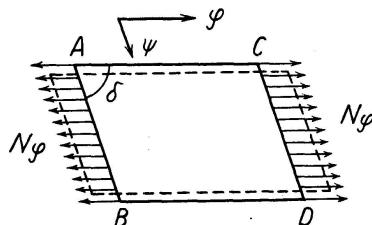


Fig. 2

$$\epsilon_\varphi = \frac{1}{E \sin \delta} (\gamma_\varphi - \nu \sigma_\psi), \quad (11)$$

$$\epsilon_\psi = \frac{1}{E \sin \delta} (\sigma_\psi - \nu \sigma_\varphi). \quad (12)$$

Unsere weitere Aufgabe besteht nun darin, die Beziehung zwischen  $\tau$  und  $\gamma$  zu suchen. In Fig. 3 nimmt man an, daß längs der Seiten  $AB$  und  $AC$  nur eine Schubspannung wirke. Dieser Spannungszustand wird durch zwei Längsspannungen  $\sigma_{d_1}$  und  $\sigma_{d_2}$  in Richtung der Diagonalen ersetzt. Das Gleichgewicht der Spannungen in dem Dreieck  $ABC$  erfordert

$$\sigma_{d_1} = \tau \frac{AD}{BC} = \tau \frac{\sqrt{2 + (\tan \psi + \tan \varphi)^2}}{\sqrt{2 + (\tan \psi - \tan \varphi)^2}}, \quad (13)$$

$$\sigma_{d_2} = \tau \frac{BC}{AD} = -\tau \frac{\sqrt{2 + (\tan \psi - \tan \varphi)^2}}{\sqrt{2 + (\tan \psi + \tan \varphi)^2}}, \quad (14)$$

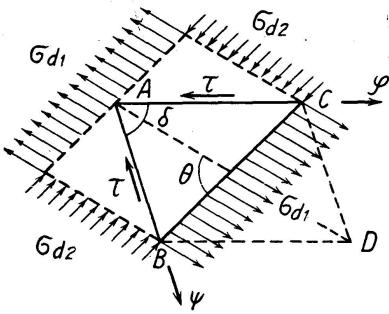


Fig. 3

wobei  $dy = dx$  angenommen ist. Da die beiden Diagonalen den Winkel  $\Theta$  einschließen, ergibt sich die Verkürzung der Diagonale  $BD$  zu

$$\Delta BC = BC \cdot \frac{1}{E \sin \Theta} (\sigma_{d_2} - \nu \sigma_{d_1}). \quad (15)$$

Da längs der Seiten  $AB$  und  $AC$  keine Längenänderung vorhanden ist, wird die Änderung des Winkels  $\delta$  nur durch die Verkürzung der Seite  $BC$  hervorgerufen. Bezeichnet man die Winkeländerung mit  $\gamma$ , so lautet

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{BC}{AB \cdot AC \cdot \sin \delta} \Delta BC \\ &= \frac{BC^2}{AB \cdot AC \cdot \sin \delta} \frac{1}{E \sin \Theta} (-\sigma_{d_2} + \nu \sigma_{d_1}), \end{aligned}$$

wobei das positive Vorzeichen die Abnahme des Winkels bedeutet. Setzt man Gl. (13), (14) und (15) in die oben eingeführte Beziehung ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\cos \varphi \cos \psi}{\sin \delta} \frac{2 + (\tan \psi - \tan \varphi)^2}{2 \sqrt{1 + \tan^2 \varphi + \tan^2 \psi}} \\ &\times [(2 + (\tan \psi - \tan \varphi)^2 + \nu \{2 + (\tan \psi + \tan \varphi)^2\})] \frac{\tau}{E}. \end{aligned} \quad (16)$$

Für die hyperbolische Paraboloidschale nach der Gl. (1) geht dieser Ausdruck über in:

$$\gamma = \frac{\cos \varphi \cos \psi}{\sin \delta} \frac{1}{2 R} \frac{\tau}{E} \Gamma \quad (17)$$

wo  $R = \sqrt{n^2 + x^2 + y^2}$ , (18)

$$\Gamma = [2 n^2 + (x - y)^2] [2 n^2 + (x - y)^2 + \nu \{2 n^2 + (x + y)^2\}] \quad (19)$$

ist. Bei quadratischem Flächenelement sind einzusetzen

$$\sigma_{d_1} = \tau, \quad \sigma_{d_2} = -\tau, \quad BC = \sqrt{2} A, \quad C = \sqrt{2} AB, \quad \sin \delta = 1, \quad \sin \Theta = 1,$$

und der Ausdruck für  $\gamma$  vereinfacht sich bekanntlich auf

$$\gamma = \frac{2}{E} (1 + \nu) \tau = \frac{\tau}{G}$$

### 5. Aufstellung der Differentialgleichung der Formänderung

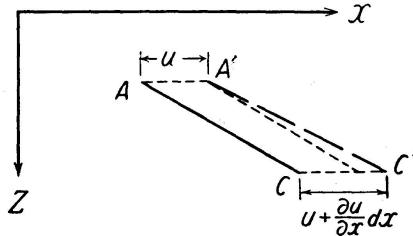


Fig. 4

Wir nehmen die Verschiebungen in der  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung und bezeichnen diese mit  $u$ ,  $v$  und  $w$ . Zuerst betrachten wir die Teilverschiebung  $u$  gesondert und deswegen die Flächengerade  $AC$ , die parallel zur  $xz$ -Ebene sich erstreckt (s. Fig. 4). Die Fig. 4 stellt eine Flächengerade  $AC$  vor und nach der Verformung dar, woraus zu entnehmen ist, daß der Zuwachs  $\frac{\partial u}{\partial x} dx$  die Längenänderung  $\frac{\partial u}{\partial x} dx \cos \varphi$  und ebenso Verdrehung  $-\frac{\partial u}{\partial x} dx \sin \varphi \frac{\cos \varphi}{dx}$  einführt. Durch die Verdrehung ändert sich der Richtungskosinus und zusammenhängend der Winkel  $\delta$  zwischen  $AC$  und  $AB$ . Die Richtungskosinusse sind

vor der Verformung  $\cos \varphi, 0, \sin \varphi,$

und nach der Verformung  $\cos \left( \varphi - \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi \sin \varphi \right), 0, \sin \left( \varphi - \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi \sin \varphi \right).$

Die Längenänderung und Drehung, die von den anderen Ursachen herrühren, lassen sich in ähnlicher Weise ermitteln. Für sämtliche Verschiebungen sind alle nötigen Zuwachse, Verdrehungen und Richtungskosinusse in der Tabelle 1 zusammengestellt.

Dividiert man die Längenänderung durch die Seitenlänge  $dx/\cos \varphi$  bzw.  $dy/\cos \psi$ , so erhält man die Verzerrungen:

$$\epsilon_\varphi = \frac{\partial u}{\partial x} \cos^2 \varphi + \frac{\partial w}{\partial x} \sin \varphi \cos \varphi \quad (20)$$

$$\epsilon_\psi = \frac{\partial v}{\partial y} \cos^2 \psi + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \psi \cos \psi \quad (21)$$

An Hand der Richtungskosinusse erhält man nun die dritte Gleichung der Verformung, indem man die Änderung des Winkels  $\delta$  berechnet. Zum Beispiel berechnen wir die Winkeländerung infolge der senkrechten Verschiebung  $w$ , die mit  $\gamma_w$  bezeichnet und als positiv gewählt wird, wenn der Winkel sich verkleinert. Nach der bekannten Beziehung der Raumgeometrie erhalten wir

$$\cos(\delta - \gamma_w) = \sin \left( \varphi + \frac{\partial w}{\partial x} \cos^2 \varphi \right) \sin \left( \psi + \frac{\partial w}{\partial y} \cos^2 \psi \right)$$

oder

$$\cos \delta + \gamma_w \sin \delta = \sin \varphi \sin \psi + \frac{\partial w}{\partial x} \cos^3 \varphi \sin \psi + \frac{\partial w}{\partial y} \cos^3 \psi \sin \varphi$$

Tabelle 1

Gerade	Zuwachs	Längenänderung	Drehung	Richtungskosinus		
				<i>l</i>	<i>m</i>	<i>n</i>
<i>AC</i>	$\frac{\partial u}{\partial x} dx$	$\frac{\partial u}{\partial x} dx \cos \varphi$	$-\frac{\partial u}{\partial x} \sin \varphi \cos \varphi$	$\cos \left( \varphi - \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi \sin \varphi \right)$	0	$\sin \left( \varphi - \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi \sin \varphi \right)$
	$\frac{\partial v}{\partial x} dx$	0	$-\frac{\partial v}{\partial x} \cos \varphi$	$\cos \varphi$	$\frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi$	$\sin \varphi$
	$\frac{\partial w}{\partial x} dx$	$\frac{\partial w}{\partial x} dx \sin \varphi$	$\frac{\partial w}{\partial x} \cos^2 \varphi$	$\cos \left( \varphi + \frac{\partial w}{\partial x} \cos^2 \varphi \right)$	0	$\sin \left( \varphi + \frac{\partial w}{\partial x} \cos^2 \varphi \right)$
<i>AB</i>	$\frac{\partial u}{\partial y} dy$	0	$-\frac{\partial u}{\partial y} \cos \psi$	$\frac{\partial u}{\partial y} \cos \psi$	$\cos \psi$	$\sin \psi$
	$\frac{\partial v}{\partial y} dy$	$\frac{\partial v}{\partial y} dy \cos \psi$	$-\frac{\partial v}{\partial y} \sin \psi \cos \psi$	0	$\cos \left( \psi - \frac{\partial v}{\partial y} \sin \psi \cos \psi \right)$	$\sin \left( \psi - \frac{\partial v}{\partial y} \sin \psi \cos \psi \right)$
	$\frac{\partial w}{\partial y} dy$	$\frac{\partial w}{\partial y} dy \sin \psi$	$\frac{\partial w}{\partial y} \cos^2 \psi$	0	$\cos \left( \psi + \frac{\partial w}{\partial y} \cos^2 \psi \right)$	$\sin \left( \psi + \frac{\partial w}{\partial y} \cos^2 \psi \right)$

Setzen wir Gl. (3) ein, so erhalten wir

$$\gamma_w = \left( \frac{\partial w}{\partial x} \cos^3 \varphi \sin \psi + \frac{\partial w}{\partial y} \cos^3 \psi \sin \varphi \right) \frac{1}{\sin \delta}$$

Die anderen Winkeländerungen infolge der Verschiebung  $u$  oder  $v$  werden in ähnlicher Weise ausgerechnet und schließlich erhalten wir

$$\begin{aligned} \gamma &= \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\cos \varphi \cos \psi}{\sin \delta} - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cos^2 \varphi + \frac{\partial v}{\partial y} \cos^2 \psi \right) \cot \delta \\ &\quad + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \cos^3 \varphi \sin \psi + \frac{\partial w}{\partial y} \cos^3 \psi \sin \varphi \right) \frac{1}{\sin \delta} \end{aligned} \quad (22)$$

Die Gl. (20), (21) und (22) sind die gesuchten Beziehungen, die für die Berechnung der Verformung zur Verfügung stehen.

## 6. Lösung der homogenen Differentialgleichungen

Setzt man  $\epsilon_\varphi = \epsilon_\psi = \gamma = 0$  in die Gl. (20), (21) und (22) ein, so erhält man die homogenen Differentialgleichungen, deren Lösungen sind

- 1  $u = \text{konst.}, \quad v = \text{konst.}, \quad w = \text{konst.}$  (Parallelverschiebungen)
- 2  $u = -cy, \quad v = cx, \quad w = 0$  (Drehung um die  $z$ -Achse)
- 3  $u = 0, \quad v = -cxy/n, \quad w = cy$  (Drehung um die  $x$ -Achse)
- 4  $u = -cxy/n, \quad v = 0, \quad w = cx$  (Drehung um die  $y$ -Achse)

Durch Einsetzen in die Gleichungen läßt sich ohne weiteres beweisen, daß diese Lösungen richtig sind. Um die Randbedingungen erfüllen zu können, werden diese spannungslosen Verformungen denjenigen überlagert, die die Schale unter gegebener Belastung annimmt.

## 7. Partikularlösung der inhomogenen Differentialgleichung

Um eine Partikularlösung auszurechnen, zerlegen wir die Lösung in drei Schritte, die in der Tabelle 2 ersichtlich sind.

Tabelle 2

	Fall 1	Fall 2	Fall 3	$1 + 2 + 3$
$w$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_1 + w_2 + w_3$
$u$	$u_1 = w_1 \cot \varphi$	$u_2 = -w_2 \tan \varphi$	$u_3 = -w_3 \tan \varphi$	$u_1 + u_2 + u_3$
$v$	$v_1 = -w_1 \tan \psi$	$v_2 = w_2 \cot \psi$	$v_3 = -w_3 \tan \psi$	$v_1 + v_2 + v_3$
$\epsilon_\varphi$	$\epsilon_{\varphi_1} = \epsilon_\varphi$	0	0	$\epsilon_\varphi$
$\epsilon_\psi$	0	$\epsilon_{\psi_2} = \epsilon_\psi$	0	$\epsilon_\psi$
$\gamma$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3 = \gamma - \gamma_1 - \gamma_2$	$\gamma$

*Fall 1*

Nehmen wir an

$$u_1 = w_1 \cot \varphi = w_1 \frac{n}{y} \quad \text{und} \quad v_1 = -w_1 \tan \psi = -w_1 \frac{x}{n}, \quad (23)$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} &= \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{1}{\tan \varphi}, & \frac{\partial v_1}{\partial y} &= -\frac{\partial w_1}{\partial y} \tan \psi. \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} &= \frac{\partial w_1}{\partial y} \frac{1}{\tan \varphi} - w_1 \frac{n}{y^2}, & \frac{\partial v_1}{\partial x} &= -\frac{\partial w_1}{\partial x} \tan \psi - \frac{w_1}{n}. \end{aligned}$$

Setzt man diese Beziehungen in die Gl. (20) bzw. Gl. (21) ein, so erhält man sogleich

$$\begin{aligned} w_1 &= \int \epsilon_\varphi \tan \varphi dx, \\ \epsilon_{\psi_1} &= 0, \end{aligned} \quad (24)$$

und ferner aus Gl. (22)

$$\gamma_1 = -\frac{\cos \varphi \cos \psi}{\sin \delta} \left\{ \epsilon_\varphi \tan \varphi \tan \psi + \frac{w_1}{n} \frac{1}{\sin^2 \varphi} - \frac{\partial w_1}{\partial y} (\cot \varphi + \tan \varphi) \right\} \quad (25)$$

*Fall 2*

Durch Einsetzen von

$$u_2 = -w_2 \tan \varphi, \quad \text{und} \quad v_2 = w_2 \cot \psi \quad (26)$$

erhalten wir in derselben Weise

$$\begin{aligned} \epsilon_{\varphi_2} &= 0, \\ w_2 &= \int \epsilon_\psi \tan \psi dy, \end{aligned} \quad (27)$$

und

$$\gamma_2 = -\frac{\cos \varphi \cos \psi}{\sin \delta} \left\{ \epsilon_\psi \tan \psi \tan \varphi + \frac{w_2}{n} \frac{1}{\sin^2 \psi} - \frac{\partial w_2}{\partial x} (\cot \psi + \tan \psi) \right\}. \quad (28)$$

*Fall 3*

Mit den Lösungsansätzen

$$u_3 = -w_3 \tan \varphi \quad \text{und} \quad v_3 = -w_3 \tan \psi, \quad (29)$$

bekommt man

$$\epsilon_{\varphi_3} = 0 \quad \text{und} \quad \epsilon_{\psi_3} = 0.$$

Die Winkelabnahme kann ohne die Ausführung der Integration berechnet werden. Es wird

$$\gamma_3 = -\frac{2 w_3}{n} \frac{\cos \varphi \cos \psi}{\sin \delta}.$$

Damit nun die Summe der Verschiebungen  $w = w_1 + w_2 + w_3$  die gesuchte Lösung der inhomogenen Differentialgleichungen mit den gegebenen Belastungsgliedern  $\epsilon_\varphi$ ,  $\epsilon_\psi$  und  $\gamma$  sein kann, ist es erforderlich,  $\gamma_3 = \gamma - \gamma_1 - \gamma_2$  zu wählen, woraus sich ergibt:

$$w_3 = -\frac{n \sin \delta}{2 \cos \varphi \cos \psi} (\gamma - \gamma_1 - \gamma_2). \quad (30)$$

Zusammenfassend ist die Lösung wie folgt:

$$\begin{aligned} w &= w_1 + w_2 + w_3 \\ u &= w_1 \cot \varphi - w_2 \tan \varphi - w_3 \tan \varphi \\ v &= -w_1 \cot \psi + w_2 \tan \psi - w_3 \tan \psi \end{aligned}$$

worin

$$w_1 = \int \epsilon_\varphi \tan \varphi dx = \frac{y}{n} \int \epsilon_\varphi dx$$

$$w_2 = \int \epsilon_\psi \tan \psi dy = \frac{x}{n} \int \epsilon_\psi dy$$

$$w_3 = -\frac{n}{2} \frac{\sin \delta}{\cos \varphi \cos \psi} (\gamma - \gamma_1 - \gamma_2)$$

Die Werte von  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  werden aus der Gl. (25) und (28) berechnet. Um die Randbedingung zu erfüllen, fügt man die spannungslose Verformung hinzu.

### 8. Abgekürzte Ausdrücke und Hilfsformeln

In folgenden Rechnungen nimmt der Verfasser nachstehende Abkürzungen vor:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + n^2},$$

$$F_x = \sqrt{x^2 + n^2}, \quad F_y = \sqrt{y^2 + n^2},$$

$$\Gamma = [2n^2 + (x-y)^2][2n^2 + (x-y)^2 + \nu \{2n^2 + (x+y)^2\}]$$

und gibt auch einige Differentiations- und Integrationsformeln für die Funktionen von  $R$  an, die bei der Berechnung vorkommen.

$$\frac{\partial}{\partial x} R = \frac{x}{R}$$

$$\int \frac{F_x^2}{R} dx = \frac{1}{2} x R + \frac{n^2 - y^2}{2} \ln |x + R|$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{R} = -\frac{x}{R^3}$$

$$\int \frac{F_x^2 x}{R} dx = \frac{1}{3} R^3 - R y^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x} R x = R + \frac{x^2}{R}$$

$$\int \frac{F_y^2}{R^3} dx = \frac{x}{R}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{R} = \frac{1}{R} - \frac{x^2}{R^3} = \frac{F_y^2}{R^3}$$

$$\int \frac{F_x^2}{R^3} dx = \ln |x + R| - \frac{y^2}{F_y^2} \frac{x}{R}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln |x + R| = \frac{1}{R}$$

$$\int \frac{\ln (x + R)}{R} dx = \frac{1}{2} (\ln |x + R|)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln |y + R| = \frac{1}{R} \frac{x}{y + R}$$

$$\int \frac{x}{R^2} dx = \ln R$$

$\int R dx = \frac{1}{2}xR + \frac{1}{2}F_y^2 \ln x+R $ $\int \frac{1}{R} dx = \ln x+R $ $\int xR dx = \frac{1}{3}R^3$ $\int \frac{x}{R} dx = R$	$\int \frac{x^3}{R^2} dx = \frac{1}{2}x^2 - F_y^2 \ln R$ $\int \frac{x}{R^4} dx = -\frac{1}{2}\frac{1}{R^2}$ $\int \frac{x^3}{R^4} dx = \ln R + \frac{1}{2}F_y^2 \frac{1}{R^2}$
---	---

Um die Integration in rascher und übersichtlicher Weise zu ermöglichen, ist es zweckmäßig, nachstehenden Ausdruck zu verwenden.

$$\ln|x+R| - \ln F_y = \frac{1}{2} \ln \frac{R+x}{R-x} = \frac{x}{R} + \frac{1}{3} \frac{x^3}{R^3} + \frac{1}{5} \frac{x^5}{R^5} + \dots \quad (32)$$

Es sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß der Verfasser in folgenden Beispielen immer dieselben Randbedingungen annimmt, d. h.

$$N_\varphi = 0 \text{ für } y = 0 \quad \text{und} \quad N_\psi = 0 \text{ für } x = 0.$$

Diese Randbedingungen sind meines Erachtens ganz passend, wenn das Schalendach, wie man in Fig. 5 sieht, aus vier hyperbolischen Paraboloidflächen zusammengesetzt ist.

## 9. Anwendungen für einige Belastungsfälle

### a) Gleichmäßig verteilte Belastung des Grundrisses (Schneebelastung)

Die Teilbelastungen sind

$$X = Y = 0, \quad Z = q \text{ (konst.)}$$

Bekanntlich haben wir in diesem Fall

$$N_\varphi = N_\psi = 0 \quad \text{und} \quad T = -\frac{1}{2}nq.$$

In diesem besonderen Spannungszustand ist der Fall 3 für sich allein maßgebend, da die Längenverzerrungen  $\epsilon_\varphi$  und  $\epsilon_\psi$  in der ganzen Schalenfläche verschwinden. Wir erhalten aus Gl. (17) und (30)

$$w = w_3 = \frac{\Gamma}{R} \frac{q}{8Eh n}, \quad (33)$$

wobei  $h$  die Schalendicke bedeutet.

Als Zahlenbeispiel gibt der Verfasser in Tabelle 2 und 3 die senkrechte und waagrechte Verschiebung, wobei die Grundrißfläche der Schale  $5 \times 5$  m beträgt und  $n = 10$  m angenommen ist. Bei der Auswertung ist  $\nu = 0,3$  zu Grunde gelegt. Die Randbedingungen sind folgendermaßen gewählt:

$$w = 0 \text{ für } x = y = 5 \text{ m}; \quad u = 0 \text{ für } y = 0; \quad v = 0 \text{ für } x = 0.$$

Tabelle 3.  $w$  in  $q/8 Eh n$ 

$y \backslash x$	0	1	2	3	4	5 m
0	470	497	575	706	899	1154
1	497	442	440	450	611	782
2	575	440	367	347	389	490
3	706	450	347	250	220	259
4	899	611	389	220	131	93
5 m	1154	782	490	295	93	0

Tabelle 4.  $u$  in  $q/8 Eh n$  (für  $v$  vertausche man  $x$  und  $y$  untereinander)

$y \backslash x$	0	1	2	3	4	5 m
0	0	0	0	0	0	0
1	- 523	- 517	- 517	- 518	- 534	- 552
2	- 1061	- 1034	- 1019	- 1015	- 1024	- 1044
3	- 1631	- 1553	- 1523	- 1491	- 1485	- 1496
4	- 2252	- 2136	- 2049	- 1981	- 1945	- 1930
5 m	- 2942	- 2756	- 2610	- 2494	- 2411	- 2365

b) Gleichförmiger Sog in Richtung der Flächennormalen (Windbelastung im Wirbelbereich)

Mit den Belastungen

$$X = q \frac{y}{n}, \quad Y = q \frac{x}{n} \quad \text{und} \quad Z = -q \quad (34)$$

ergeben sich als Schnittkräfte

$$\left. \begin{aligned} T &= \tau h = \frac{1}{2n} q R^2, \\ N_\varphi &= \sigma_\varphi h = -\frac{\cos \psi}{\cos \varphi} \frac{2}{n} q x y = -\frac{2q}{n} x y \frac{F_x}{F_y}, \\ N_\psi &= \sigma_\psi h = -\frac{2q}{n} x y \frac{F_y}{F_x}, \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

woraus wir erhalten

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_\varphi &= -\frac{2q}{n^2 h E} \frac{xy}{R} (F_y^2 - \nu F_x^2), \\ \epsilon_\psi &= -\frac{2q}{n^2 h E} \frac{xy}{R} (F_x^2 - \nu F_y^2), \\ \gamma &= \frac{q R}{4 n^4 h E} \frac{\cos \varphi \cos \psi}{\sin \delta} \Gamma. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

*Fall 1.* Aus der Gl. (24) ergibt sich

$$w_1 = -\frac{2q}{n^3 h E} y^2 \{F_y^2 R - \nu R (\frac{1}{3} R^2 - y^2)\}, \quad (37)$$

und nach längeren Zwischenrechnungen gelangt man zu

$$\gamma_1 = \frac{2q}{n^4 E h} \frac{\cos \varphi \cos \psi}{\sin \delta} \Gamma_1, \quad (38)$$

worin

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &\equiv \frac{x^2 y^2}{R} (F_y^2 - \nu F_x^2) + F_y^2 \left\{ F_y^2 R - \nu R \left( \frac{1}{3} R^2 - y^2 \right) \right\} \\ &- F_y^2 \left\{ 2(2y^2 + n^2) R + y^2 F_y^2 \frac{1}{R} - \nu R \left( \frac{2}{3} R^2 - 3y^2 - \frac{y^4}{R^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (39)$$

ist.

*Fall 2.* In ähnlicher Weise erhalten wir

$$w_2 = -\frac{2q}{n^3 E h} x^2 \left\{ F_x^2 R - \nu R \left( \frac{1}{3} R^2 - x^2 \right) \right\}, \quad (40)$$

$$\gamma_2 = \frac{2q}{n^4 E h} \frac{\cos \varphi \cos \psi}{\sin \delta} \Gamma_2, \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= \frac{x^2 y^2}{R} (F_x^2 - \nu F_y^2) + F_x^2 \left\{ F_x^2 R - \nu R \left( \frac{1}{3} R^2 - x^2 \right) \right\} \\ &- F_x^2 \left\{ 2(2x^2 + n^2) R + x^2 F_x^2 \frac{1}{R} - \nu R \left( \frac{2}{3} R^2 - 3x^2 - \frac{x^4}{R^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (42)$$

*Fall 3.* Aus der Gl. (30) erhalten wir

$$w_3 = -\frac{q}{n^3 E h} \left( \frac{R}{8} \Gamma - \Gamma_1 - \Gamma_2 \right). \quad (43)$$

### c) Gleichförmige Belastung der Oberfläche

Mit

$$Z = \frac{g_0}{n} R, \quad X = Y = 0,$$

kommt aus Gl. (11)

$$N_\varphi = \frac{\cos \psi}{\cos \varphi} \frac{g_0}{2} y \{ \ln |x + R| - \ln F_y \}.$$

Um die Integration leichter durchzuführen, setzt man den Ausdruck nach Gl. (32) in die obenstehende Gleichung ein. Daraus folgt

$$N_\varphi = \sigma_\varphi h = \frac{g_0}{2} \frac{F_y}{F_x} y \left( \frac{x}{R} + \frac{1}{3} \frac{x^3}{R^3} \right), \quad (46a)$$

wobei die Glieder von kleinem Einfluß außer acht gelassen sind. Da ferner

$$N_\psi = \sigma_\psi h = \frac{g_0}{2} \frac{F_x}{F_y} x \left( \frac{y}{R} + \frac{1}{3} \frac{y^3}{R^3} \right), \quad (46\text{b})$$

und  $T = \tau h = -\frac{g_0}{2} R,$  (46c)

entsteht, erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_\varphi &= \frac{g_0}{2 E h n} \left\{ y F_y^2 \left( \frac{x}{R^2} + \frac{1}{3} \frac{x^3}{R^4} \right) - \nu x F_x^2 \left( \frac{y}{R^2} + \frac{1}{3} \frac{y^3}{R^4} \right) \right\}, \\ \epsilon_\psi &= \frac{g_0}{2 E h n} \left\{ x F_x^2 \left( \frac{y}{R^2} + \frac{1}{3} \frac{y^3}{R^4} \right) - \nu y F_y^2 \left( \frac{x}{R^2} + \frac{1}{3} \frac{x^3}{R^4} \right) \right\}, \\ \gamma &= -\frac{\cos \varphi \cos \psi}{\sin \delta} \frac{g_0}{2 E h} \frac{1}{2 n^3} \Gamma. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich

$$w_1 = \frac{g_0}{2 E h n^2} y^2 \left\{ F_y^2 \left( \frac{4}{3} \ln R + \frac{1}{6} \frac{F_y^2}{R^2} \right) - \nu \left( \frac{1}{2} x^2 - \frac{2}{3} y^2 \ln R + \frac{1}{6} \frac{y^4}{R^2} \right) \right\}, \quad (48)$$

$$\gamma_1 = \frac{g_0}{2 E h n^3} \frac{\cos \varphi \cos \psi}{\sin \delta} \Gamma_1, \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= -x^2 y^2 \left\{ \frac{F_y^2}{R^2} \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{x^2}{R^2} \right) - \nu \frac{F_x^2}{R^2} \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{y^2}{R^2} \right) \right\} + F_y^2 \left\{ \frac{4}{3} (3 y^2 + n^2) \ln R \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} \frac{1}{R^2} (13 y^4 + 14 n^2 y^2 + n^4) - \frac{1}{3} y^2 \frac{F_y^2}{R^4} - \nu \left( \frac{1}{2} x^2 - 2 y^2 \ln R + \frac{1}{6} \frac{y^4}{R^2} - \frac{1}{3} \frac{y^6}{R^4} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (50)$$

Für  $w_2$  und  $\gamma_2$  vertauscht man  $x$  und  $y$  sowie  $F_x$  und  $F_y$  untereinander. Es ist noch

$$w_3 = \frac{g_0}{4 E h n^2} \left( \frac{1}{2} \Gamma - \Gamma_1 - \Gamma_2 \right). \quad (51)$$

#### d) Gleichförmige Belastung in der $y$ -Richtung (Erdbebenbelastung)

Ist  $\alpha$  der waagrechte seismische Koeffizient und  $g_0$  das Eigengewicht der Schale von der Einheitsfläche, so ergibt sich die Massenkraft zu

$$Y = \alpha g_0, \quad X = 0 \quad \text{und} \quad Z = 0. \quad (52)$$

Daraus folgt

$$\left. \begin{aligned} T &= \tau h = \frac{1}{2} \frac{\alpha g_0}{n} x R, \\ N_\varphi &= \sigma_\varphi h = -\frac{1}{2} \frac{\alpha g_0}{n} \frac{F_y}{F_x} y (R - F_y), \\ N_\psi &= \sigma_\psi h = -\frac{1}{2} \frac{\alpha g_0}{n} \frac{F_x}{F_y} \left\{ \frac{3}{2} y R + \frac{3 n^2 + 5 x^2}{2} (\ln |y + R| - \ln F_x) \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

und ferner

$$\begin{aligned}\epsilon_\varphi &= -\frac{\alpha g_0}{2 h E n^2} \frac{1}{R} \left[ -y F_y^3 + y F_y^2 R - \nu \left\{ \frac{3}{2} F_x^2 y R + \frac{3 n^2 + 5 x^2}{2} F_x^2 (\ln |y+R| - \ln F_x) \right\} \right], \\ \epsilon_\psi &= -\frac{\alpha g_0}{2 h E n^2} \frac{1}{R} \left[ \frac{3}{2} y F_x^2 R + \frac{3 n^2 + 5 x^2}{2} F_x^2 (\ln |y+R| - \ln F_x) - \nu y F_y^2 (R - F_y) \right].\end{aligned}$$

Damit die Integration ohne Mühe durchgeführt werden kann, ist es zweckmäßig, einen angenäherten Ausdruck für den Faktor  $(\ln |y+R| - \ln F_x)$  und  $(R - F_y)$  einzuführen, falls er mit  $\nu$  multipliziert ist:

$$\begin{aligned}\nu (\ln |y+R| - \ln F_x) &\doteq \nu \frac{y}{R} \\ \nu (R - F_y) &\doteq \nu \frac{1}{2} \frac{x^2}{R}\end{aligned}$$

Diese Annäherung ist zulässig, da  $\nu$  klein ist. Dann erhalten wir

$$\left. \begin{aligned}\epsilon_\varphi &= -\frac{\alpha g_0}{2 E h n^2} \left\{ y F_y^2 \left( 1 - \frac{F_y}{R} \right) - \nu \left( \frac{3}{2} F_x^2 y + \frac{3 n^2 + 5 x^2}{2} y \frac{F_x^2}{R^2} \right) \right\}, \\ \epsilon_\psi &= -\frac{\alpha g_0}{2 E h n^2} \left\{ \frac{3}{2} y F_x^2 + \frac{3 n^2 + 5 x^2}{2} \frac{F_x^2}{R} (\ln |y+R| - \ln F_x) - \nu \frac{1}{2} y x^2 \frac{F_y^2}{R^2} \right\}, \\ \gamma &= \frac{\alpha g_0}{4 E h n^4} \frac{\cos \varphi \cos \psi}{\sin \delta} \Gamma.\end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Ein langwieriger Rechnungsgang, den wir hier übergehen wollen, führt zu

$$\begin{aligned}w_1 &= -\frac{\alpha g_0}{2 E h n^3} y^2 \left[ F_y^2 (x - F_y \ln |x+R|) \right. \\ &\quad \left. - \nu \left\{ \frac{4}{3} x^3 - \frac{5 y^2 - 6 n^2}{2} x + \left( \frac{5}{2} F_y^3 - 4 n^2 F_y + \frac{3}{2} \frac{n^4}{F_y} \right) \tan^{-1} \frac{x}{F_y} \right\} \right],\end{aligned} \quad (57)$$

$$\gamma_1 = \frac{\alpha g_0}{2 E h n^4} \frac{\cos \varphi \cos \psi}{\sin \delta} \Gamma_1. \quad (58)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= x y^2 \left\{ F_y^2 \left( 1 - \frac{F_y}{R} \right) - \nu \left( \frac{3}{2} F_x^2 + \frac{3 n^2 + 5 x^2}{2 R^2} F_x^2 \right) \right\} \\ &\quad + F_y^2 \left\{ F_y (3 y^2 + F_y^2) \ln |x+R| + \frac{F_y^3 y^2}{R(R+x)} - x (F_y^2 + 2 y^2) \right\} \\ &\quad - \nu F_y^2 \left[ -\frac{4}{3} x^3 + \frac{15}{2} y^2 x - 3 n^2 x + \left( \frac{5}{2} F_y^2 - 4 n^2 + \frac{3}{2} \frac{n^4}{F_y^2} \right) \frac{x y^2}{R^2} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ -\frac{5}{2} F_y^3 + 4 n^2 F_y - \frac{3}{2} \frac{n^4}{F_y} - \left( \frac{15}{2} F_y - 4 n^2 \frac{1}{F_y} - \frac{3}{2} \frac{n^4}{F_y^3} \right) y^2 \right\} \tan^{-1} \frac{x}{F_y} \right].\end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned}w_2 &= -\frac{\alpha g_0}{2 E h n^3} x \left[ \frac{3}{4} F_x^2 y^2 + \frac{3 n^2 + 5 x^2}{2} F_x^2 \left( \frac{1}{2} \ln |y+R| - \ln F_x \right) \ln |y+R| \right. \\ &\quad \left. - \nu \frac{x^2}{2} \left( \frac{1}{2} y^2 - x^2 \ln R \right) \right].\end{aligned} \quad (60)$$

$$\gamma_2 = \frac{\alpha g_0}{2 E h n^4} \frac{\cos \varphi \cos \psi}{\sin \delta} \Gamma_2. \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_2 = & \frac{1}{2} \left[ x y \left\{ 3 F_x^2 y + \frac{3 n^2 + 5 x^2}{R} F_x^2 (\ln |y + R| - \ln F_x) - \nu y F_y^2 \frac{x^2}{R^2} \right\} \right. \\ & + \frac{F_x^2}{x} \left\{ -4 x^2 (4 n^2 + 5 x^2) \ln |y + R| \cdot \left( \frac{1}{2} \ln |y + R| - \ln F_x \right) - 3 x^2 y^2 \right. \\ & - (3 n^2 + 5 x^2) F_x^2 x \left( \frac{x}{R(R+y)} \ln |y + R| - \frac{x}{R(R+y)} \ln F_x - \frac{x}{F_x^2} \ln |y + R| \right) \\ & \left. \left. - \nu x^2 \left( -y^2 + 4 x^2 \ln R + \frac{x^4}{R^2} \right) \right\} \right]. \end{aligned} \quad (62)$$

und

$$w_3 = -\frac{\alpha g_0}{4 E h n^3} \left( \frac{x}{2} \Gamma - \Gamma_1 - \Gamma_2 \right). \quad (63)$$

#### 10. Bemerkungen zur Konstruktion und Ausführung

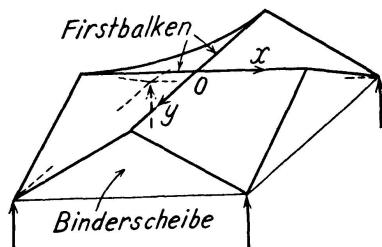


Fig. 5

Da nur eine Integrationskonstante in der Gl. (9) vorhanden ist, ist es unmöglich, beide gegenüberliegende Ränder der Teilfläche gleichzeitig frei von Längsspannung zu halten. Nimmt man die Bedingung  $N_\varphi = 0$  oder  $N_\psi = 0$  an dem Firstbalken an, so muß die dreieckige Binderscheibe imstande sein, die senkrecht zu der Scheibenebene gerichtete Teilkraft zusätzlich aufzunehmen. Falls man dagegen die Bedingung  $N_\varphi = 0$  oder  $N_\psi = 0$  an der Binderscheibe annimmt, so ist der Firstbalken in der Lage, senkrechte oder waagrechte Reaktion aufzunehmen, je nachdem das ganze Dach symmetrisch oder antisymmetrisch belastet ist. Die zusammengesetzte hyperbolische Paraboloidschale unterscheidet sich derartig von der gewöhnlichen Translationsschale, die keine Unstetigkeit an dem Dachfirst besitzt. Aus der Erkenntnis über die Verformung ist es zu betonen, daß das zusammengesetzte Schalen-dach nach Fig. 5 nicht biegungsfrei sein kann, wenn es aus Eisenbeton monolithisch aufgebaut ist. Um den biegungsfreien Zustand zu bekommen, wenigstens für die ständige Belastung, empfiehlt es sich, vier Teilflächen je mit Randbalken nachträglich miteinander zu verbinden, nachdem der Schalenteil ausgerüstet worden ist. Dabei ist zu beachten, daß die vorläufige Raumfuge zwischen den Randbalken genug klaffend sein muß, so daß die Verformung der Schale frei erfolgen kann.

Wenn die Schale nach dem Aufbau belastet wird, wie es bei Winddruck der Fall ist, so ist die Schubverformung verhindert und demnach wird der biegungsfreie Spannungszustand ausgeschlossen.

### **Literatur**

1. A. PUCHER: Beton und Eisen, 1934.
2. K. TESTER: Ing. Arch. 1947/48.

### **Zusammenfassung**

Der Verfasser gibt zuerst die Beziehung zwischen Spannung und Verzerrung, die in den parallelogrammähnlichen Schalenteilchen erzeugt werden. Dann wird die Differentialgleichung der Verschiebungen aufgestellt, die allgemein für beliebige Translationsschalen angewendet wird. Für die hyperbolische Paraboloidschale ist die Lösung der Differentialgleichung möglich und einige Belastungsfälle wurden untersucht. Bei der zusammengesetzten Schale nach Fig. 5 weist der Verfasser darauf hin, wie die Montage der Schale erfolgen muß, um den biegungsfreien Spannungszustand zu erhalten.

### **Summary**

The author first gives the relation between stress and strain which subsists in shell elements in the form of parallelograms. He then sets up the differential equation of displacements, which is that commonly applied to shells of translation of any form of section. For the hyperbolic-paraboloid shell the differential equation is soluble, and a few loading cases are investigated. With the arrangement of intersecting shells of Fig. 5 the author indicates the sequence to be followed in erection in order to achieve a bending-free stress system.

### **Résumé**

L'auteur indique tout d'abord la relation qui existe entre les contraintes et les déformations qui en résultent dans les éléments de voûtes minces en forme de parallélogramme. Il établit ensuite l'équation différentielle des déformations, équation qui est généralement appliquée aux voûtes de translation quelconques. La résolution de l'équation différentielle est possible pour le paraboloïde hyperbolique et l'auteur étudie quelques cas de charge. Dans le cas de la voûte composée suivant figure 5, il montre comment doit être effectué le montage si l'on veut obtenir un régime de contrainte exempt de flexion.