

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

**Band:** 13 (1953)

**Artikel:** Trägerschwingungen unter bewegter Last

**Autor:** Stüssi, F.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-13209>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Trägerschwingungen unter bewegter Last

*Beam vibrations due to a moving load*

*Vibrations d'une poutre sous charge mouvante*

Prof. Dr. F. STÜSSI, ETH, Zürich, Präsident der I. V. B. H.

## 1. Problemstellung und Ersatzsystem

Wir stellen uns die Aufgabe, die Schwingungen des Punktes  $m$  eines Trägers während der Überfahrt einer Last  $P$  (Fig. 1a) zu berechnen. Da wir uns damit auf die Bestimmung des zeitlichen Verlaufes der Schwingungen  $y = y(t)$  eines bestimmten Punktes  $m$  beschränken, dürfen wir uns das schwingende System

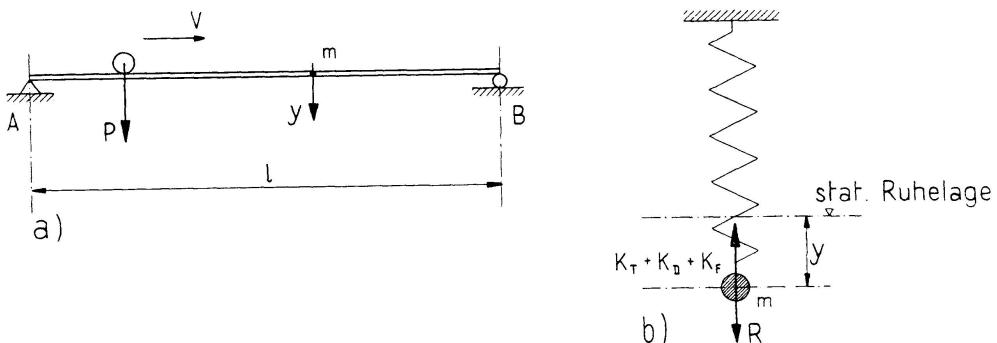


Fig. 1

durch das „*Ersatzsystem*“ der Figur 1b ersetzt denken; der schwingende Massenpunkt  $m$  sei an einer Feder mit der Federkonstanten  $C$  aufgehängt. Für dieses Ersatzsystem kann die Differentialgleichung als Gleichgewichtsbedingung zwischen der Trägheitskraft  $K_T = M \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}$ , der Dämpfungskraft  $K_D = -k \cdot \frac{dy}{dt}$  (die wir wie üblich proportional zur Geschwindigkeit annehmen), der Rückstellkraft  $K_F = C \cdot y$  und der von der bewegten Last  $P$  herrührenden Störungskraft  $R$  angeschrieben werden:

$$\underline{M \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + k \cdot \frac{dy}{dt} + C \cdot y - R = 0.} \quad (1)$$

Dividieren wir durch  $M$  und bezeichnen wir die Ableitungen von  $y$  nach der Zeit  $t$  durch Punkte, so nimmt Gleichung (1) mit den Abkürzungen

$$\frac{k}{M} = b, \quad \frac{C}{M} = c, \quad \frac{R}{M} = F$$

die Form

$$\underline{\ddot{y} + b \cdot \dot{y} + c \cdot y - F = 0} \quad (2)$$

an.

Es sind nun in erster Linie Bedeutung und Größe der veränderlichen Koeffizienten  $b$  und  $c$  sowie der Störungsfunktion  $F$  zu bestimmen. Lassen wir die Störungsfunktion  $F$  und den Dämpfungsfaktor  $k$  verschwinden, so geht Gleichung (2) über in die Differentialgleichung der ungedämpften harmonischen Schwingung:

$$\ddot{y} + c \cdot y = 0; \quad (2a)$$

damit wird offensichtlich, daß  $c$  dem Quadrat der Kreisfrequenz  $p$  entsprechen muß:

$$\underline{c = p^2}. \quad (3a)$$

Die schwingende Masse  $M$ ,

$$M = \frac{C}{p^2}, \quad (3b)$$

ist so zu bestimmen, daß die Kreisfrequenz  $p$  des Ersatzsystems in jedem Zeitpunkt mit der Kreisfrequenz des wirklichen Trägers übereinstimmt. Die Federkonstante  $C$  ist dabei durch

$$C = \frac{P_m}{y_{0m}} \quad (3c)$$

bestimmt, wenn wir mit  $y_{0m}$  die statische Durchbiegung des Punktes  $m$  infolge einer Last  $P_m$  bezeichnen. Für die Mitte eines einfachen Balkens mit konstanter Steifigkeit  $EJ$  ist beispielsweise

$$C = \frac{48 E J}{l^3}.$$

Nehmen wir nun, um die Störungsfunktion  $F$  zu bestimmen, andererseits an, die Last  $P$  bewege sich mit verschwindender Geschwindigkeit über den Balken, so geht mit  $\ddot{y} = 0, \dot{y} = 0$  die dynamische Durchbiegung  $y$  in die statische Durchbiegung  $y_0$  über:

$$p^2 \cdot y_0 = F_0. \quad (2b)$$

Bezeichnen wir mit  $\eta_m$  die Ordinaten der Einflußlinie für die Durchbiegung des Punktes  $m$ , so ist offensichtlich

$$y_0 = \eta_m \cdot P$$

und es wird

$$F_0 = p^2 \cdot \eta_m \cdot P.$$

Genau genommen ist die unter bewegter Last auftretende Störungsfunktion  $F$  wegen der bei der Trägerdurchbiegung auftretenden lotrechten Beschleunigungen etwas größer als  $F_0$ . Für einen einfachen Balken mit verschwindender Masse und konstanter Steifigkeit  $EJ$  lässt sich für konstante Geschwindigkeit  $v$  dieser „Stokes-Effekt“ leicht bestimmen; es ist im ungünstigsten Fall (Trägermitte)<sup>1)</sup>.

$$F = F_0 \cdot \left(1 + \frac{v^2 \cdot Pl}{3EJg}\right).$$

Der Unterschied zwischen  $F$  und  $F_0$  ist normalerweise klein; im ungünstigsten der im 3. und 4. Abschnitt zu untersuchenden Fälle ist  $F = 1,017 \cdot F_0$ . Wir werden deshalb im folgenden diesen Stokes-Effekt als praktisch bedeutungslos vernachlässigen und

$$F = F_0 = p^2 \cdot \eta_m \cdot P = p^2 \cdot y_0 \quad (3c)$$

setzen.

Da die Bestimmung der Einflußlinie  $\eta_m$  keine Besonderheiten bietet und mit den klassischen Methoden der Baustatik für beliebige Ausbildung und Lagerung des Trägers ohne jede Schwierigkeit durchgeführt werden kann, brauchen wir uns hier damit nicht weiter zu beschäftigen. Dagegen soll die Bestimmung der Kreisfrequenz  $p$  noch etwas näher besprochen werden. Da die Eigenschwingungen harmonische sind, gilt zwischen den inneren elastischen Widerstandskräften und den Trägheitskräften eines mit der Masse  $\frac{q}{g}$  belegten Balkens die Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EJ \cdot \frac{d^2y}{dx^2} \right) - \frac{q}{g} \cdot p^2 \cdot y = 0 \quad (4)$$

Diese Gleichgewichtsbedingung erlaubt nun eine einfache baustatische Deutung<sup>2)</sup>:

Wir schätzen eine mit den Auflagerbedingungen verträgliche Biegungslinie  $y_0$  und berechnen zur Belastung

$$u = \frac{q}{g} \cdot p^2 \cdot y_0$$

die Momentenfläche  $M_u$ , wobei bei statisch unbestimmten Trägern auch die überzähligen Größen  $x$  zu berücksichtigen sind, und aus der reduzierten Momentenfläche  $M_u/EJ$  die Biegungslinie  $y_1$ . Die Gleichsetzung  $y_1 = y_0$  für irgend eine Trägerstelle (oder die entsprechende Mittelwertbildung) liefert uns

<sup>1)</sup> S. z. B.: S. TIMOSHENKO, Vibration Problems in Engineering, New York 1928, 1937.

<sup>2)</sup> S. z. B.: F. STRÜSSI, Zur Berechnung der Grundschwingungszahl vollwandiger Träger. Schweiz. Bauzeitung, Bd. 104, Nr. 17, 27. Okt. 1934.

den gesuchten Wert von  $p^2$ . Stimmen die Kurven  $y_1$  und  $y_0$  ihrer Form nach nicht überein, so ist die Berechnung, ausgehend von einer zu  $y_1$  ähnlichen neuen Ausgangskurve zu wiederholen oder es ist eine Energiebetrachtung beizuziehen („Kombinationsverfahren“<sup>2)</sup>). Da wir die für die zu untersuchenden Trägerschwingungen maßgebende Grundschatzschwingungsfrequenz suchen, ist die Form der Kurve  $y_0$  so zu wählen, daß die Belastung  $u$  möglichst große Durchbiegungen  $y_1$  verursacht; für einen einfachen Balken ist somit eine Schwingungskurve  $y$  mit einer Halbwelle über die Spannweite maßgebend. In Figur 2 ist

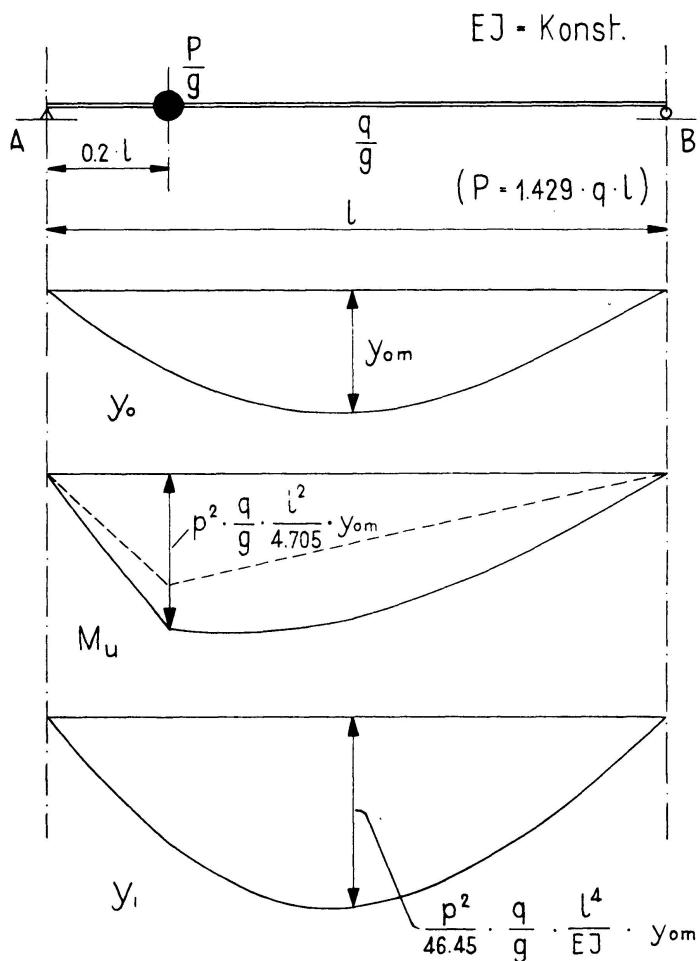


Fig. 2

der Rechnungsgang für einen durch die verteilte Masse  $q/g$  und die konzentrierte Masse  $P/g$  im Punkt  $m$  ( $x=0,20l$ ) belasteten einfachen Balken als Beispiel skizziert.

Figur 3 zeigt den Verlauf von  $p^2$  für eine wandernde Masse  $P/g$  für den Zahlenwert  $P = 1,429 \cdot ql$  der Anwendungsbeispiele; ferner sind die Kurve  $y_0$  für den Punkt  $m$  ( $x=0,50 \cdot l$ ) in Trägermitte und die nach Gleichung (3c) berechnete Kurve  $F = F_0$  eingetragen.

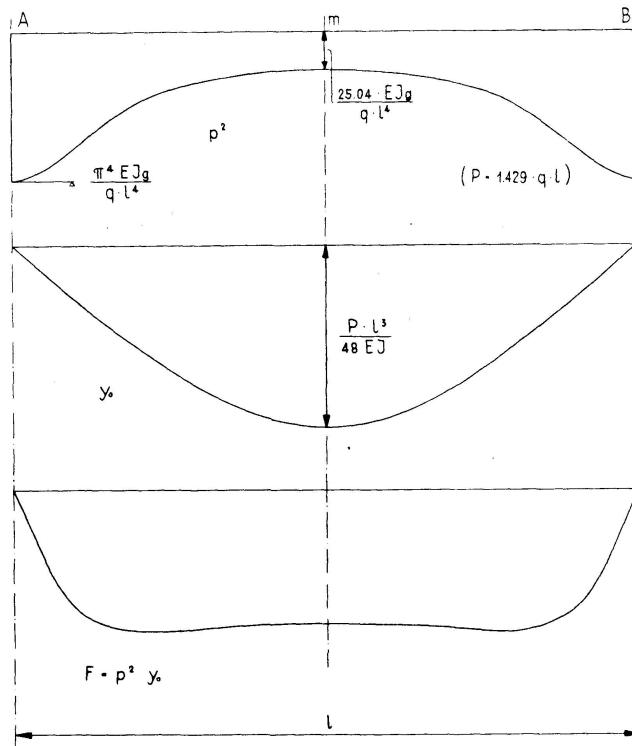


Fig. 3

## 2. Die numerische Lösung der Differentialgleichung

Zur Lösung der Differentialgleichung (2),

$$\ddot{y} + b \cdot \dot{y} + c \cdot y - F = 0,$$

verwenden wir eine numerische Methode, die ich schon vor längerer Zeit aufgestellt und seither wiederholt verwendet und ausgebaut habe<sup>3)</sup>, die aber hier nochmals in ihren wesentlichen Grundzügen skizziert werden soll.

Wir führen endliche Zeitintervalle  $\Delta t$  von konstanter Größe ein und setzen die zu lösende Differentialgleichung (2) um in die entsprechende Gleichung für  $\Delta t$ -fache Knotenlasten,

$$\underline{\Delta t \cdot K_i(\ddot{y}) + \Delta t \cdot K_i(b \cdot \dot{y}) + \Delta t \cdot K_i(c \cdot y) = \Delta t \cdot K_i(F)}, \quad (5)$$

aus der wir die zweiten Ableitungen  $\ddot{y}$  mit Hilfe der *Seilpolygongleichung*

$$\underline{\Delta t \cdot K_i(\ddot{y}) = y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}} \quad (6)$$

<sup>3)</sup> S. u. a.: F. Stüssi, Die Stabilität des auf Biegung beanspruchten Trägers. Abh. I.V.B.H., Bd. III, 1935. — F. Stüssi, Numerische Lösung von Randwertproblemen mit Hilfe der Seilpolygongleichung. Zeitschr. f. ang. Math. und Phys., ZAMP, Vol. I, 1950, p. 53. — F. Stüssi, Numerische Methoden der Baustatik. IV. Kongreß der I.V.B.H., Cambridge-London 1952, Schlußbericht p. 181.

eliminieren können. Für das zweite Glied, das normalerweise klein ist (Dämpfung), können wir mit der Abkürzung

$$\beta = \frac{b \cdot \Delta t}{2}$$

den für feldweise linearen Verlauf von  $\dot{y}$  und für konstanten Wert von  $b$  im Doppelfeld von  $i-1$  bis  $i+1$  ermittelten Wert

$$\Delta t \cdot K_i(b \cdot \dot{y}) = \beta_i(y_{i+1} - y_{i-1})$$

einsetzen, während sich für die stetig angenommenen Funktionen  $c \cdot y$  und  $F$  die  $\Delta t$ -fachen Knotenlasten mit der „Parabelformel“ zu

$$\Delta t \cdot K_i(c \cdot y) = \frac{\Delta t^2}{12} (c_{i-1} \cdot y_{i-1} + 10 c_i \cdot y_i + c_{i+1} \cdot y_{i+1})$$

und

$$\Delta t \cdot K_i(F) = \frac{\Delta t^2}{12} (F_{i-1} + 10 F_i + F_{i+1})$$

ergeben. Durch Einsetzen und mit der Abkürzung

$$\gamma = \frac{c \cdot \Delta t^2}{12} = \frac{p^2 \cdot \Delta t^2}{12}$$

erhalten wir aus Gleichung (5) die Rekursionsformel

$$\underline{y_{i+1} = \frac{1}{1 + \beta_i + \gamma_{i+1}} \cdot \{ \Delta t \cdot K_i(F) + (2 - 10\gamma_i) \cdot y_i - (1 - \beta_i + \gamma_{i-1}) \cdot y_{i-1} \}}, \quad (7)$$

die uns erlaubt, aus den Schwingungsausschlägen  $y_{i-1}$  zur Zeit  $t_{i-1} = t_i - \Delta t$  und  $y_i$  zur Zeit  $t_i$  den Schwingungsausschlag  $y_{i+1}$  zur Zeit  $t_{i+1} = t_i + \Delta t$  zu berechnen.

Die Lösung des Problems ist also erst vollständig, wenn noch zwei *Anfangsbedingungen* zur Bestimmung der beiden ersten Schwingungsausschläge  $y_A$  und  $y_1$  gegeben sind. Da zu Beginn des Schwingungsvorganges der untersuchte Punkt  $m$  in Ruhe ist, lauten offensichtlich diese beiden Bedingungen

$$\underline{y_A = 0}, \quad \underline{\dot{y}_A = 0}. \quad (8)$$

Die Bedingung  $y_A = 0$  (Zeit  $t = 0$ ) erspart uns eine Bestimmungsgleichung, dagegen muß die Bedingung  $\dot{y}_A = 0$  besonders formuliert werden.

Aus Analogie zur Berechnung der Querkraft  $Q = M'$  aus Moment  $M$  und Belastung  $q = -M''$  bei der Balkenbiegung kann für  $\ddot{y}_A$  die Beziehung

$$\Delta t \cdot \ddot{y}_A = y_1 - y_A - \Delta t \cdot K_A(\ddot{y})$$

angeschrieben werden. Wir setzen entsprechend der Differentialgleichung (2)

$$K_A(\ddot{y}) = -K_A(b \cdot \dot{y}) - K_A \cdot (c \cdot y) + K_A(F);$$

nehmen wir näherungsweise, jedoch mit genügender Genauigkeit wieder feldweise linearen Verlauf von  $\dot{y}$  und  $b = \text{konst.}$  an, so ist

$$y_1 - y_A = \frac{\Delta t}{2} (\dot{y}_A + \dot{y}_1)$$

oder

$$\dot{y}_1 = \frac{2}{\Delta t} (y_1 - y_A) - \dot{y}_A$$

und wir erhalten mit der Trapezformel

$$K_A(\dot{y}) = \frac{\Delta t}{6} (2 \dot{y}_A + \dot{y}_1) = \dot{y}_A \cdot \frac{\Delta t}{6} + \frac{y_1 - y_A}{3}$$

oder mit  $y_A = \dot{y}_A = 0$

$$\Delta t \cdot K_A(b \cdot \dot{y}) = \frac{2\beta}{3} \cdot y_1.$$

Für die geltenden Anfangsbedingungen können wir die Werte

$$\Delta t \cdot K_A(c \cdot y) = \gamma_1 \cdot y_1$$

und

$$\Delta t \cdot K_A(F) = \frac{\Delta t^2}{12} (3,5 \cdot F_A + 3,0 \cdot F_1 - 0,5 \cdot F_2)$$

anschreiben und wir erhalten durch Einsetzen die gesuchte Bestimmungsgleichung zu

$$\underline{y_1 \cdot \left(1 + \frac{2\beta}{3} + \gamma_1\right) = \Delta t \cdot K_A(F)}. \quad (9)$$

Damit kann die gesuchte Schwingungskurve  $y(t)$  des Trägerpunktes  $m$ , ausgehend von  $y_A = 0$ , Punkt für Punkt berechnet werden.

Wir werden in den folgenden Untersuchungen die Dämpfung vernachlässigen. Dann vereinfachen sich die Bestimmungsgleichungen auf

$$\underline{y_1 = \frac{\Delta t \cdot K_A(F)}{1 + \gamma_1}} \quad (9a)$$

und

$$\underline{y_{i+1} = \frac{1}{1 + \gamma_{i+1}} \{ \Delta t \cdot K_i(F) + (2 - 10\gamma_i) \cdot y_i - (1 + \gamma_{i-1}) \cdot y_{i-1} \}}. \quad (7a)$$

Um die Kurve  $y(t)$  zuverlässig bestimmen und aufzeichnen zu können, sollte das Zeitintervall  $\Delta t$  zu höchstens

$$\Delta t \leq \frac{2\pi}{p_{max}} : 6, \quad \text{besser zu } \frac{\pi}{4p_{max}},$$

d.h. zu höchstens einem Sechstel, besser einem Achtel der kleinsten Eigenschwingungsdauer  $T_{0min}$ ,

$$T_0 = \frac{2\pi}{p},$$

gewählt werden; erfahrungsgemäß ist bei einer solchen Intervallteilung auch die Rechnungsgenauigkeit praktisch vollständig genügend.

### 3. Berechnungsbeispiel

Zunächst soll der Rechnungsgang an einem einfachen Beispiel veranschaulicht werden, dem die Zahlenwerte der im nächsten Abschnitt zu beschreibenden Versuche zu Grunde gelegt werden.

Der untersuchte Träger sei ein einfacher Balken von 4,20 m Spannweite, bestehend aus einem L-Profil 60/40 ( $J_x = 34,1 \text{ cm}^4$ ,  $F = 5,90 \text{ cm}^2$ ,  $q = 4,63 \text{ kg/m}^3$ ); die wandernde Einzellast  $p$  besitze ein Gewicht von  $27,8 \text{ kg} = 1,429 \cdot p$ . Die Trägersteifigkeit  $EJ$  wurde aus statischen Durchbiegungsmessungen zu  $72\,200 \text{ t cm}^2$  bestimmt.

Die Kurve der Werte  $p^2$  wurde nach dem durch Figur 2 angedeuteten Rechnungsgang für eine Reihe verschiedener Laststellungen berechnet und für Zwischenpunkte möglichst sorgfältig (durch Logarithmieren) interpoliert. Mit

$$\frac{EJ \cdot g}{q \cdot l^4} = \frac{72\,200 \cdot 981}{0,0000463 \cdot 420^4} = 49,162$$

ergibt sich für den unbelasteten Träger

$$p^2 = \pi^4 \cdot 49,162 = 4788,9 \text{ sec}^{-2}, \quad p = 69,202 \text{ sec}^{-1}, \quad T_{0_{min}} = \frac{2\pi}{p} = 0,09080 \text{ sec}$$

während bei Last  $p$  in Trägermitte die entsprechenden Werte

$$p^2 = 1231,0 \text{ sec}^{-2}, \quad p = 35,086, \quad T_{0_{max}} = 0,17908 \text{ sec}$$

betragen.

Für das Zeitintervall  $\Delta t$  sollte, entsprechend der Bemerkung am Schluß des letzten Abschnittes, ein etwa zwischen 0,011 und 0,015 sec liegender Wert gewählt werden. Wir wählen absichtlich einen größeren Wert,  $\Delta t = 0,0195 \text{ sec}$ , der sich bei einer Überfahrtszeit  $T_s = 0,76 \text{ sec}$  ( $v = 552 \text{ cm/sec}$ ) aus der Einteilung von  $T_s$  in 40 Intervalle  $\Delta t$  ergibt. Da nach Gleichung (3c) die Belastungsfunktion  $F$  mit

$$F = p^2 \cdot y_0$$

einzuführen ist, ergeben sich wegen

$$\gamma = p^2 \cdot \frac{\Delta t^2}{12}$$

direkt die Werte

$$F \cdot \frac{\Delta t^2}{12} = \gamma \cdot y_0,$$

aus denen sich die  $\Delta t$ -fachen Knotenlasten  $K(F)$  einfach berechnen lassen.

Die folgende Tabelle enthält die Berechnung der Schwingungskurve  $y$  des Punktes  $m$  in Balkenmitte ( $x = 0,50 \cdot l$ ) für die ersten 6 Zeitintervalle nach den Gleichungen (9a) und (7a); weitere Zwischenberechnungen, außer der Bestimmung der Werte  $p^2$  und  $y_0$ , sind nicht erforderlich.

	$p^2$	$\gamma$	$y_0$	$\frac{\Delta t^2}{12} \cdot F$	$\Delta t \cdot K(F)$	$2 - 10\gamma$	$1 + \gamma$	$y$	$\Delta t = T_s/80$ $y$
			cm	$\cdot 10^{-1}$					
A	4788,9	0,14407	0	0	0,01287	0,5593	1,1441	0	0
1	4671,4	0,14053	0,04454	0,06259	0,07441	0,5946	1,1405	0,01128	0,01167
2	4422,1	0,13303	0,08885	0,11820	0,14075	0,6697	1,1330	0,07160	0,07123
3	4080,0	0,12274	0,13272	0,16290	0,19426	0,7726	1,1227	0,15661	0,15585
4	3692,1	0,11107	0,17592	0,19540	0,23319	0,8893	1,1111	0,21073	0,21096
5	3275,2	0,09853	0,21822	0,21501	0,25714	1,0141	1,0985	0,22280	0,22400
6	2894,7	0,08708	0,25942	0,22591	—	—	1,0871	0,22901	0,22989

Zum Vergleich sind in der letzten Spalte auch diejenigen Werte  $y$  beigegeben, die sich bei doppelter Teilung,  $\Delta t = T_s/80 = 0,0095$  sec, ergeben. Die Ungenauigkeit infolge zu grober Intervallteilung wirkt sich wie eine kleine Verkürzung der Abszissen  $t$  aus, die für  $\Delta t = 0,019$  sec etwa 0,5% gegenüber  $\Delta t = 0,0095$  sec beträgt. Praktisch dürfte somit auch die mit dem größeren Intervall berechnete Schwingungskurve  $y$  genügend genau sein.

Genau wie für den Punkt  $m$  in Balkenmitte können die Schwingungskurven  $y$  auch für andere Trägerpunkte berechnet werden. So habe ich noch, für sonst gleiche Verhältnisse, die Schwingungskurven für  $x = 0,25l$  und  $0,50l$  berechnet; die drei Schwingungskurven sind in Figur 4 dargestellt.

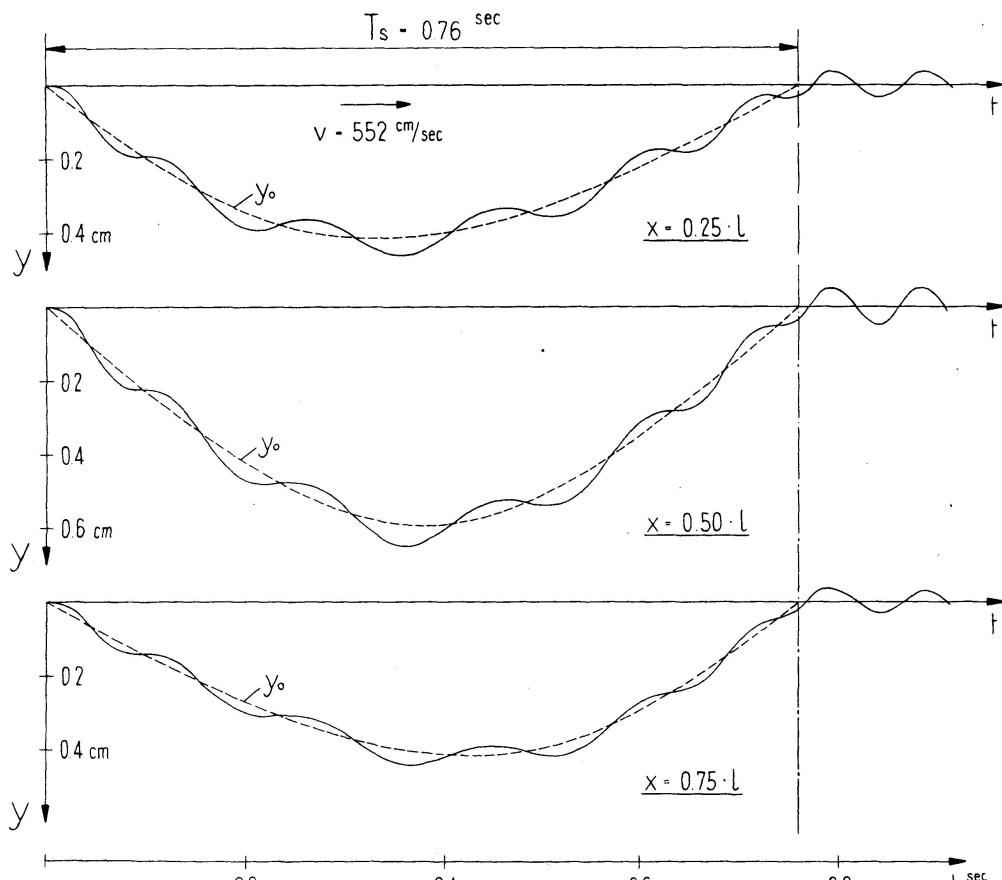


Fig. 4

Aus diesen Schwingungskurven  $y$  für verschiedene Trägerpunkte  $m$  können nun die Biegungslinien  $y$  des Trägers zu verschiedenen Zeitpunkten  $t$  bestimmt werden; so sind aus Figur 4 die Biegungslinien der Figur 5 für die Zeitpunkte

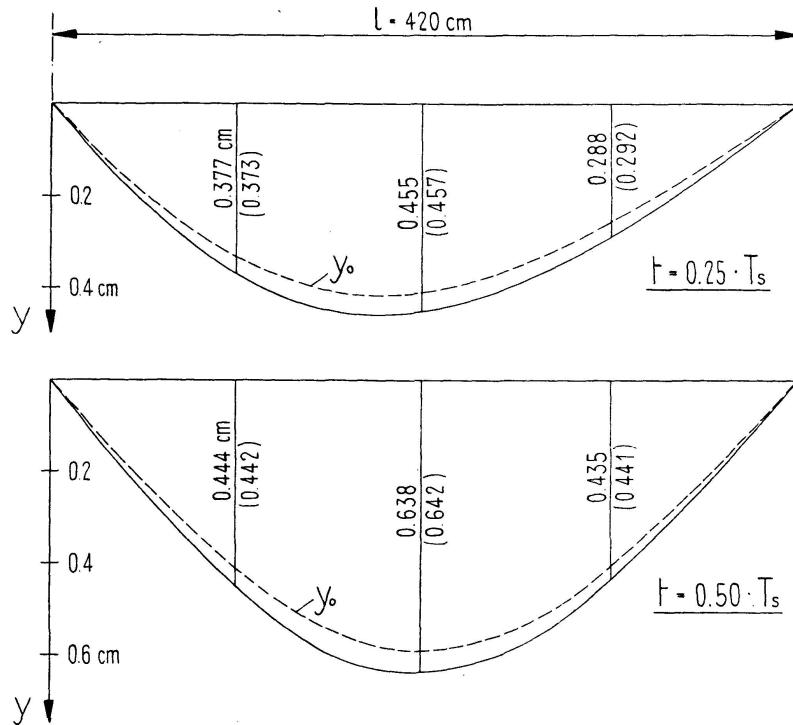


Fig. 5

$t = 0,25 \cdot T_s$  und  $t = 0,50 \cdot T_s$  ermittelt worden. Diese Biegungslinien erlauben nun eine grundsätzliche Prüfung des Berechnungsverfahrens, da sie der Gleichung

$$(EJy'')'' + \frac{q}{g} \cdot \ddot{y} - q = 0 \quad (10)$$

genügen müssen. Aus der Schwingungskurve  $y$  ist nun aber für jeden Zeitpunkt die Beschleunigung  $\ddot{y}$  aus

$$\ddot{y} + p^2 \cdot y - F = 0$$

wegen

$$F = p^2 \cdot y_0$$

zu

$$\ddot{y} = p^2 \cdot (y_0 - y)$$

für den untersuchten Trägerpunkt bekannt, so daß die Biegungslinie zur Belastung

$$q - \frac{q}{g} \cdot \ddot{y}$$

berechnet werden kann. Dabei ist zu beachten, daß wir die Schwingungen  $y$  von der statischen Gleichgewichtslage aus berechnet haben, so daß die statische Wirkung des Trägergewichtes  $q$  eliminiert erscheint; die statische Biegelungslinie  $y_0$  ergibt sich somit aus der Einzellast  $P$  allein. Dagegen ist in den Trägheitskräften sowohl die Trägermasse wie die Masse  $P/g$  der Einzellast zu berücksichtigen.

In Figur 5 sind, neben den den Schwingungskurven der Figur 4 entnommenen Ordinaten, in Klammern auch die sich aus der Berechnung nach Gleichung (10) ergebenden Werte eingetragen. Wenn wir bedenken, daß bei der Berechnung der Schwingungskurven einerseits der Stokes-Effekt vernachlässigt wurde, während andererseits die lotrechten Beschleunigungen der Last  $p$  im Wert von  $p^2$  berücksichtigt erscheinen, so ist leicht einzusehen, daß eine genaue Übereinstimmung von Schwingungskurven und Biegelungslinien nicht erwartet werden darf. Dagegen darf festgestellt werden, daß die Übereinstimmung im Rahmen der eingeführten Rechnungsvereinfachung sehr befriedigend ist und damit darf das vorgeschlagene Rechnungsverfahren als zutreffend beurteilt werden.

#### 4. Versuche

Um das dargestellte Berechnungsverfahren auch mit in Wirklichkeit auftretenden Trägerschwingungen zu vergleichen, ließ ich in meiner Abteilung des Institutes für Baustatik an der ETH eine Reihe von einfachen Schwingungsversuchen durchführen<sup>4)</sup>.

Die Versuchsanordnung ist in Figur 6 schematisch dargestellt. Die wandernde Last  $P$  ist durch einen „Einachswagen“ mit elektrischem Antrieb gebildet (Fig. 7); dabei konnte die Drehzahl des Motors durch stufenlose Schaltung in ziemlich weiten Grenzen beliebig verändert werden. Vor dem eigentlichen Versuchsträger von 4,20 m Spannweite war eine Beschleunigungsstrecke, dahinter eine Bremsstrecke angeordnet. Die Schwingungen  $y$  des Punktes  $m$  wurden durch einen Askania-Schwingungszeichner aufgenommen, wobei auch das Überfahren von Balkenanfang, Balkenmitte und Balken mit

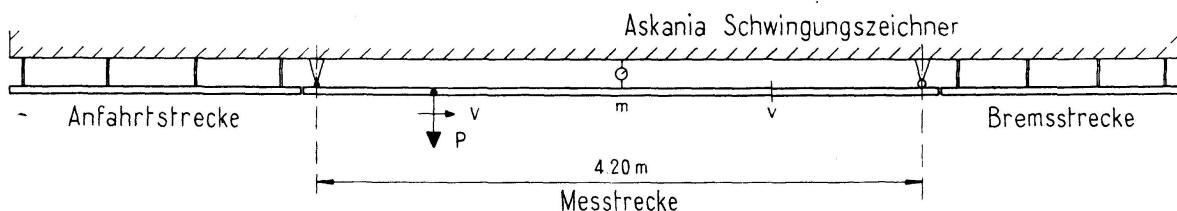


Fig. 6

<sup>4)</sup> Diese Versuche hat in gewohnt sorgfältiger Weise mein Assistent-Konstrukteur, Dipl.-Ing. M. Walt, unterstützt durch Mechaniker E. Peter, durchgeführt.

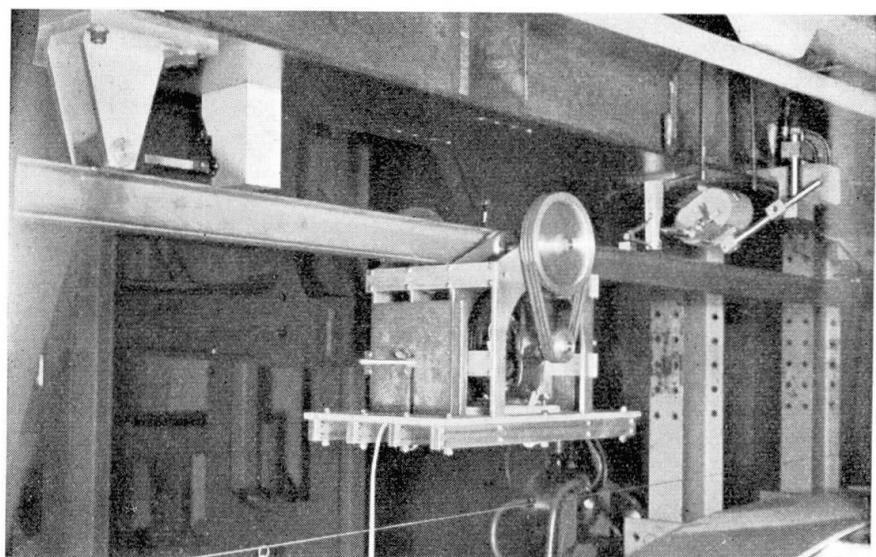


Fig. 7

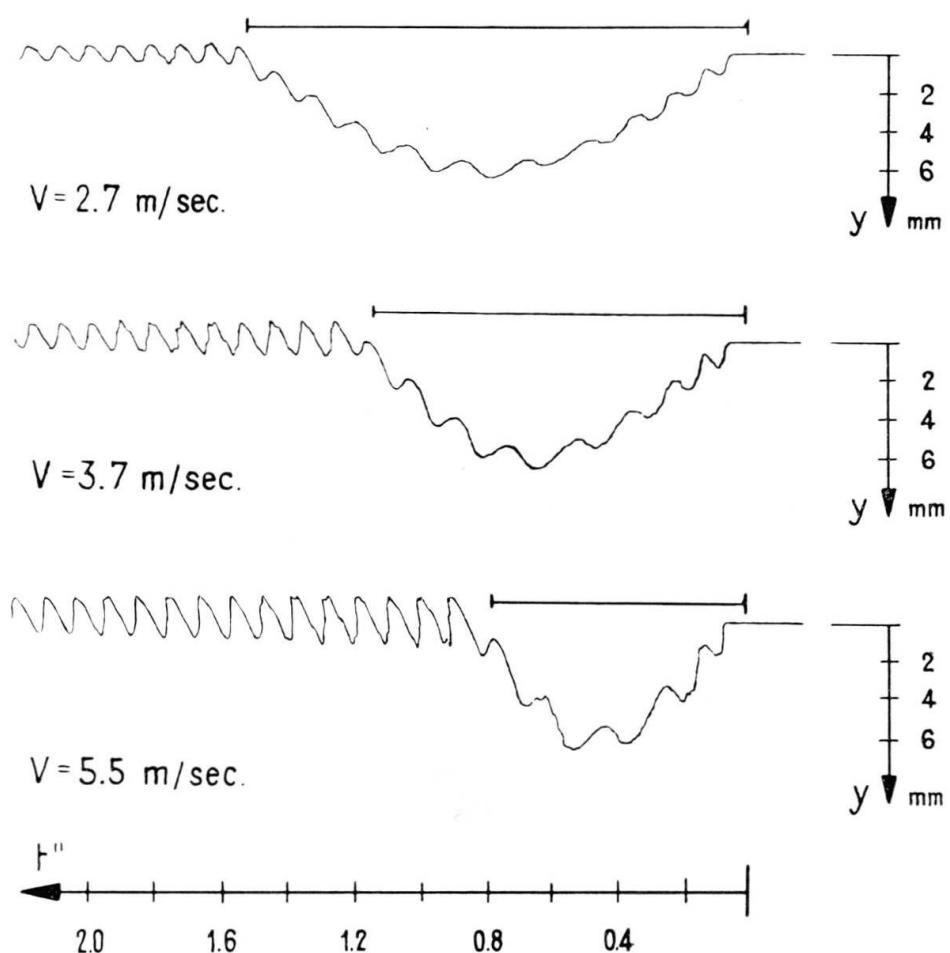


Fig. 8

Hilfe elektrischer Kontakte auf dem Meßstreifen registriert wurde. Übersetzungsverhältnis und Papiervorschub wurden in Vorversuchen möglichst genau bestimmt.

Figur 8 zeigt typische Schwingungsdiagramme für drei verschiedene Geschwindigkeiten, aufgenommen für Punkt  $m$  in Balkenmitte und  $P = 27,8 \text{ kg} = 1,429 \cdot q \cdot l$ . Es zeigt sich, daß die Geschwindigkeit  $v$ , die nicht von vornherein genau auf einen gewünschten Wert eingestellt werden konnte, sondern erst nachträglich aus den Aufzeichnungen des Meßstreifens berechnet werden mußte, nicht genau konstant war, sondern während der ersten Hälfte der Überfahrt noch etwas zunahm. Diese Ungleichmäßigkeit vergrößert sich mit wachsender Geschwindigkeit.

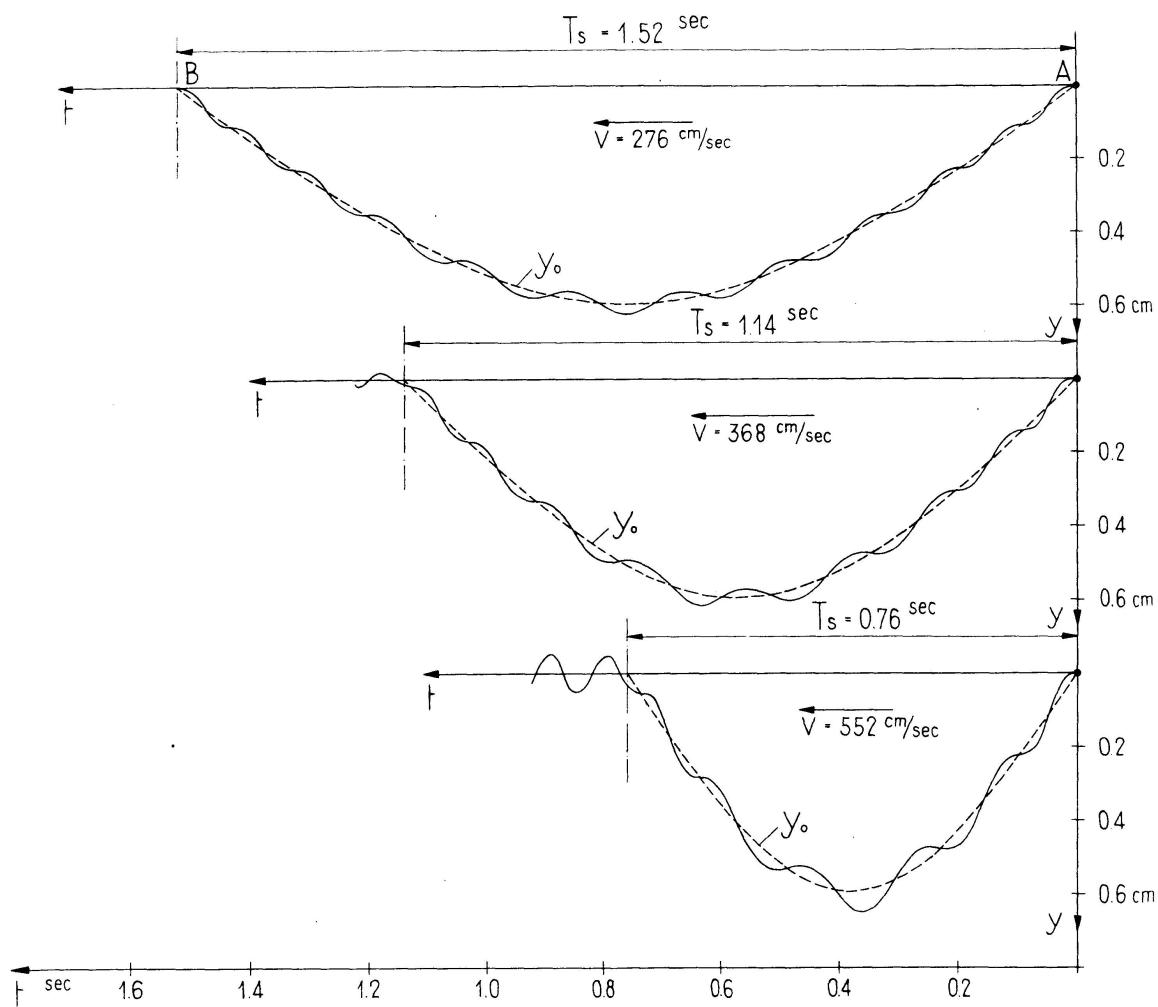


Fig. 9

In Figur 9 sind die Ergebnisse der entsprechenden Berechnungen für  $v = \text{konst.}$  aufgetragen. Der Vergleich der gemessenen und berechneten Schwingungskurven zeigt zunächst eine gute Übereinstimmung des allgemeinen

Schwingungsverlaufes; Zahl und Dauer der eigentlichen Schwingungsausschläge, die sich der statischen Durchbiegungslinie  $y_0$  überlagern, stimmen in Versuch und Rechnung miteinander überein.

Dagegen zeigt sich, daß die Größe dieser Schwingungsausschläge im Versuch größer ist als in der Rechnung. Gleichzeitig läßt sich aus den Versuchsdigrammen eindeutig feststellen, daß die Schwingungen des Punktes  $m$  nicht gleichzeitig mit dem Auffahren der Last  $P$  auf den Balken beginnen, sondern erst etwas später. Daß eine solche Verzögerung des Schwingungsbeginns in Balkenmitte gegenüber dem Auffahren der Last auf den Balkenanfang vorhanden sein muß, ist grundsätzlich einleuchtend, denn die Kraftwirkung kann ja keine unendlich große, sondern nur eine endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit (über deren Größe m. W. bis heute wenig bekannt ist) besitzen. Es darf nun, aus dem Vergleich der gemessenen und berechneten Schwingungsbilder ohne weiteres vermutet werden, daß die *Verzögerungszeit  $z$*  die eigentliche Ursache für die Vergrößerung der Schwingungsausschläge darstellt.

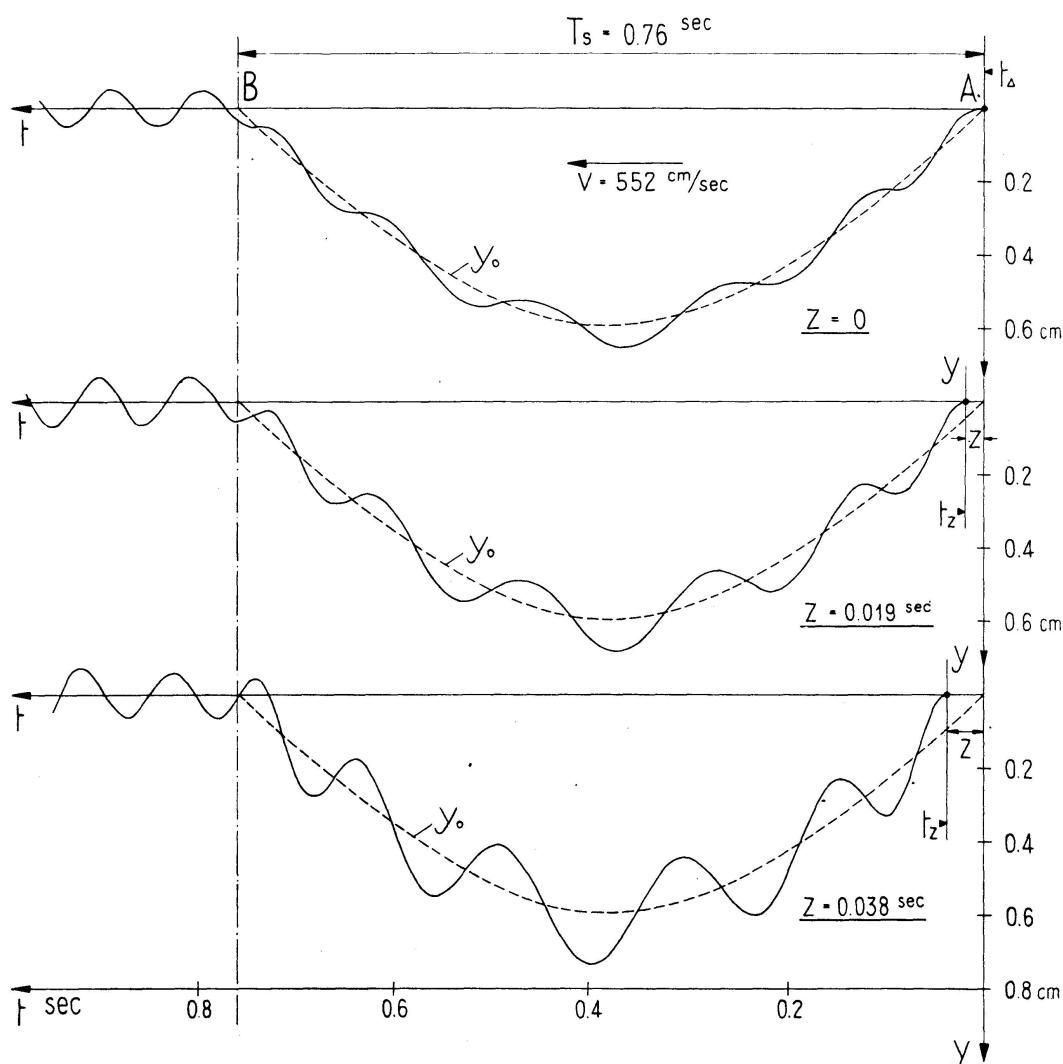


Fig. 10

Um wenigstens quantitativ den Einfluß der Verzögerungszeit  $z$  auf die Größe der Schwingungsausschläge abzuschätzen (und ohne heute schon den zeitlichen Verlauf des ganzen Verzögerungsverlaufes diskutieren zu wollen), habe ich noch einige Schwingungskurven für verzögerten Schwingungsbeginn in vielleicht etwas zu schematischer Weise berechnet: für den Zeitpunkt  $t_z = t_A + z$  habe ich die Anfangsbedingungen  $y_z = 0$  und  $\dot{y}_z = 0$  entsprechend Gleichung (9) berücksichtigt und den weiteren Schwingungsverlauf mit gegenüber  $z = 0$  unveränderten Werten von  $p^2$  und  $F$  nach Gleichung (7) berechnet. Die Rechnungsergebnisse sind in Figur 10 aufgetragen; sie bestätigen unsere Vermutung, daß eine Verzögerungszeit  $z$  die Schwingungsausschläge wesentlich vergrößern kann. Der Vergleich der Schwingungskurven  $y$  mit der statischen Durchbiegungslinie  $y_0$  läßt auch die physikalische Ursache dieser Erscheinung erkennen. Die Diagramme der Figur 10 zeigen im Vergleich mit den gemessenen Schwingungen, Figur 9, daß die Verzögerungszeit  $z$  etwa in der Größenordnung von 0,02 Sekunden liegt, was gut mit den aus den entsprechenden Versuchen feststellbaren Werten von  $z$  übereinstimmt. Bei einer genaueren Abklärung müßte der zeitliche Verlauf des Verzögerungsvorganges sowie der Dämpfungseinfluß berücksichtigt werden.

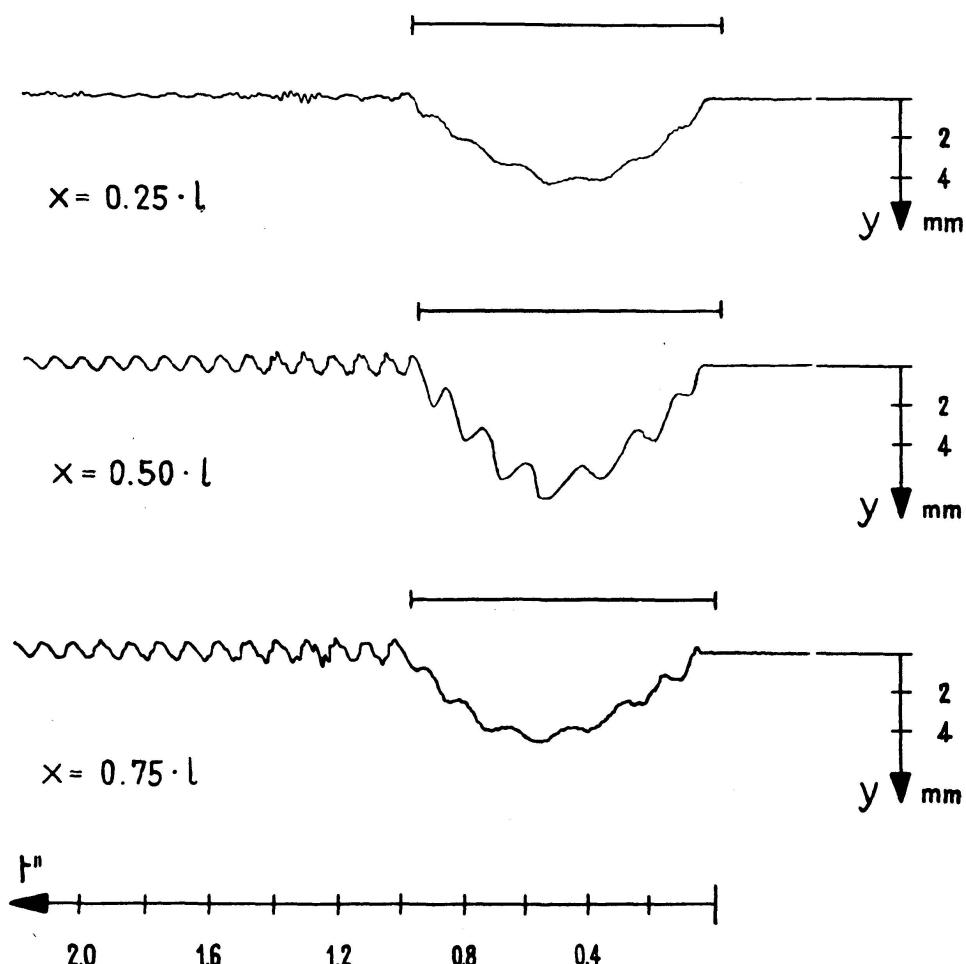


Fig. 11

Um das Vorhandensein der Verzögerungszeit  $z$  versuchsmäßig noch deutlicher festzustellen, wurden noch Schwingungskurven  $y$  für verschiedene Trägerpunkte  $m$ ,  $x = 0,25 \cdot l$ ,  $0,50 \cdot l$  und  $0,75 \cdot l$  aufgenommen. Die Beurteilung dieser in Figur 11 wiedergegebenen Diagramme führt zum Ergebnis, daß eine mit wachsendem  $x$  zunehmende Verzögerungszeit  $z$  vorhanden sein muß, deren Größenordnung für die Balkenmitte, in Übereinstimmung mit den Überlegungen über die Größe der Schwingungsausschläge, wieder zu etwa 0,02 sec. angegeben werden kann. Bei der Kleinheit der hier maßgebenden Zeitintervalle ist eine genauere Bestimmung des Verzögerungsvorganges mit der vorhandenen Versuchseinrichtung noch nicht zuverlässig möglich.

Es ist noch festzustellen, daß nach den Diagrammen der Figur 7 bei der Überfahrt der Last  $P$  über das Balkenende  $B$ , also beim Verlassen des Balkens, zusätzliche Störungen auftreten, die einer Rechnung nicht zugänglich sein dürften, und die nicht nur die freien Schwingungen vergrößern, sondern auch Obertöne verursachen können.

### **5. Schlußbemerkungen**

Zusammenfassend darf wohl festgestellt werden, daß das hier entwickelte Verfahren zur Berechnung von Trägerschwingungen mit Hilfe eines Ersatzsystems (das selbstverständlich auf beliebige Lagerungsarten und Belastungsfälle anwendbar ist) an sich zuverlässig ist. Dagegen haben unsere Versuche gezeigt, daß die Schwingungen eines Trägerpunktes  $m$  gegenüber dem Belastungsbeginn  $t_A$  mit einer Verzögerung  $z$  beginnen; die Verzögerungszeit  $z$  hat eine wesentliche Vergrößerung der Schwingungsausschläge zur Folge. Eine wirklichkeitsnahe Weiterentwicklung der theoretischen Berechnungsmethoden setzt somit als Grundlage die physikalische Abklärung des Verzögerungsvorganges voraus.

### **Zusammenfassung**

Es wird ein Verfahren zur Berechnung von Trägerschwingungen unter bewegter Belastung auf Grund eines einfachen Ersatzsystems aufgestellt. Die entsprechende Differentialgleichung, deren Koeffizienten und Störungsfunktion veränderlich sind und aus einfachen Grenzübergängen bestimmt werden, wird numerisch mit Hilfe der Seilpolygongleichung gelöst. Der Vergleich mit Versuchen zeigt, daß das Rechnungsverfahren an sich zuverlässig ist, daß jedoch zwischen dem Beginn der Schwingungen eines Trägerpunktes und dem Auffahren der Last auf den Träger eine „Verzögerungszeit“ verstreicht, die eine wesentliche Vergrößerung der Schwingungsausschläge verursacht.

**Summary**

A method based on a simple substitute system is presented for the calculation of beam vibrations due to a moving loading. The relevant differential equation, in which the coefficients and perturbation functions are determined from simple boundary transitions, is solved with the help of the funicular polygon equation. Comparison with experiments shows that the method of calculation is self-checking, but that a "time-lag" elapses between the beginning of the vibrations of a point on the beam and the onset of the load on the beam, which causes a significant augmentation of vibration amplitudes.

**Résumé**

L'auteur expose un procédé pour le calcul des oscillations dans les poutres soumises à une charge mobile, sur la base d'un système équivalent simple. L'équation différentielle correspondante, dont les coefficients et la fonction de perturbation sont variables et peuvent être déterminés à partir de conditions transitoires simples, est résolue numériquement à l'aide de l'équation du polygone funiculaire. La comparaison avec des résultats expérimentaux montre que ce procédé de calcul est sûr en soi; toutefois, entre le début des oscillations d'un point de la poutre et le commencement du passage de la charge sur cette poutre, il intervient un „temps de retard“ qui donne lieu à une augmentation notable de l'amplitude des oscillations.

**Leere Seite**  
**Blank page**  
**Page vide**