Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

Band: 13 (1953)

Artikel: Essais d'adaption et de stabilisation plastiques sur des poutrelles laminées

Autor: Massonnet, Charles

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-13203

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.10.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Essais d'adaptation et de stabilisation plastiques sur des poutrelles laminées

Versuche an Walzträgern über die Anpassung und Verfestigung im plastischen Bereich

Plastic collapse and shake-down tests on small rolled beams

CHARLES MASSONNET, Professeur à l'Université de Liège

Les essais qui font l'objet de la présente étude ont été exécutés par le Laboratoire de Résistance des Matériaux de l'Université de Liège, dans le cadre du programme des travaux de la Commission pour l'Etude de la Construction Métallique (C.E.C.M.).

La C.E.C.M., qui a été fondée en Belgique par les dirigeants des industries de la Sidérurgie et de la Construction métallique, a pour objet la recherche de moyens susceptibles de conduire à la réalisation d'importantes économies dans la construction des ouvrages en acier. Le plan de travail, établi en commun, montre le souci des promoteurs de relier le plus étroitement possible les deux aspects fondamentaux du problème: la connaissance du matériau d'une part et son utilisation rationnelle d'autre part. D'une manière générale, il comporte des recherches sur les propriétés mécaniques et la soudabilité des aciers courants de construction, l'étude des conditions de livraison des produits laminés et de l'allègement des profilés laminés, l'analyse expérimentale de détails constructifs, l'auscultation approfondie de plusieurs ponts métalliques en service, ainsi que la publication de notes techniques relatives au calcul et à l'exécution des constructions.

La réalisation de ce programme a été rendue possible grâce à l'intervention financière des industriels, aux subsides de l'Etat accordés par l'intermédiaire de l'Institut pour l'encouragement de la Recherche Scientifique dans l'Industrie et l'Agriculture (I.R.S.I.A.) et à l'appui des grandes administrations.

Les travaux sont répartis dans divers groupes d'étude réunissant les délégués des producteurs et des utilisateurs d'acier; ils sont exécutés dans les laboratoires universitaires et industriels, sous l'égide du Centre de Recherches scientifiques de l'Industrie des Fabrications métalliques (C.R.I.F.) et avec la collaboration du Centre National de Recherches Métallurgiques (C.N.R.M.).

Je remercie les industriel et les hautes personnalités qui les représentent au sein de la C.E.C.M. d'avoir rendu possible la réalisation de la présente étude. Mes remerciements vont aussi aux ingénieurs de l'industrie et des grandes administrations qui, au sein du groupe d'étude „flexion plastique", ont collaboré à la mise au point du programme détaillé de cette recherche et en ont approuvé les conclusions.

Fernand Frenay,
Président du Comité exécutif de la C.E.C.M.

CHAPITRE I

1. Concepts fondamentaux

La nécessité d'économiser l'acier a poussé depuis une trentaine d'années certains chercheurs à abandonner la méthode classique de dimensionnement qui considère qu'une construction est mise hors service quand la tension de comparaison maximum y atteint la limite apparente d'élasticité du métal. Ces chercheurs ont montré que les déformations plastiques étaient accompagnées de certains phénomènes de redistribution des efforts, dont on pouvait tenir compte pour accroître les charges admissibles.

Si l'on admet que le métal a un diagramme tensions-dilatations à palier indéfini (fig. 1), il est facile de montrer que le diagramme $\left(M \cdot \frac{1}{\rho}\right)$ donnant la courbure d'une barre soumise à la flexion pure en fonction du moment fléchis-

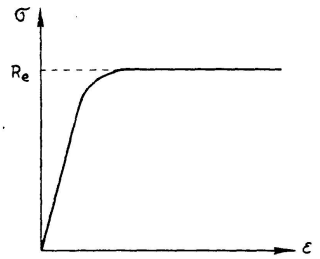

Fig. 1

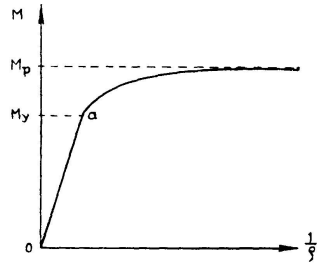

Fig. 2

sant appliqué (fig. 2) présente une forme analogue au diagramme figure 1. Ce diagramme est linéaire tant que M est plus petit que $M_y = R_e \cdot \frac{I}{v}$. Au-delà de cette valeur, les courbures croissent plus vite que les moments et tendent vers l'infini quand le moment tend vers la valeur M_p appelé *moment plastique ultime*. Dès que la courbure devient appréciable, l'écart entre le moment réel et M_p devient négligeable. L'expérience montre que, dans une poutre hyperstatique soumise à des charges croissant proportionnellement l'une à l'autre, les déformations plastiques se concentrent au voisinage immédiat des sections droites où le moment fléchissant est maximum.

Dans la *théorie des rotules plastiques*, on idéalise ce résultat. On admet pour simplifier que, dans les sections dangereuses mn, le moment prend exactement la valeur M_p et de plus que les déformations plastiques se produisent uniquement dans ces sections mn.

Au voisinage d'une section mn, tout se passe donc comme si les deux tronçons adjacents de la poutre étaient articulés autour d'une rotule placée en mn et qui ne pourrait pas transmettre un moment supérieur à M_p. On dit qu'une *rotule plastique* s'est formée dans la section mn.

Supposons que le système étudié soit n fois hyperstatique. Au fur et à

mesure que les charges augmenteront (proportionnellement l'une à l'autre, rappelons-le), de nouvelles rotules plastiques vont naître successivement. Au moment précis où la n plus unième rotule plastique se formera, le système se transformera en un mécanisme à un degré de liberté, qui prendra sous charge constante des déformations considérables et sera mis hors service.

On appelle *charge d'adaptation plastique*, la charge qui correspond à l'apparition de la $(n+1)$ième rotule plastique[1]). C'est la charge la plus élevée que puisse supporter le système sans être mis hors service. Les protagonistes de la théorie de la plasticité appliquée aux constructions recommandent d'adopter cette charge comme charge de référence qui, divisée par le coefficient de sécurité, donnera la charge de service.

Dans les systèmes hyperstatiques, cette charge d'adaptation peut être considérablement supérieure à la *charge maximum élastique* pour laquelle la tension maximum dans le système atteint juste la limite apparente d'élasticité. La conception des rotules plastiques et de la charge d'adaptation conduirait donc à d'importantes économies d'acier.

Malheureusement, il se fait que la théorie brièvement résumée ci-dessus prête le flanc à une critique importante. Elle suppose en effet, que les forces extérieures appliquées grandissent toutes proportionnellement. Or dans un grand nombre de constructions, cette condition n'est pas remplie. Considérons, par exemple, une longrine de pont-rail continue sur trois appuis; au moment où un convoi passe sur cette longrine, on peut avoir successivement les trois mises en charge représentées aux figures 3a, b, c. Les diagrammes des moments fléchissants sont représentés au-dessous de chaque mise en charge. Supposons que la charge P ait une valeur moindre que les deux charges d'adaptation

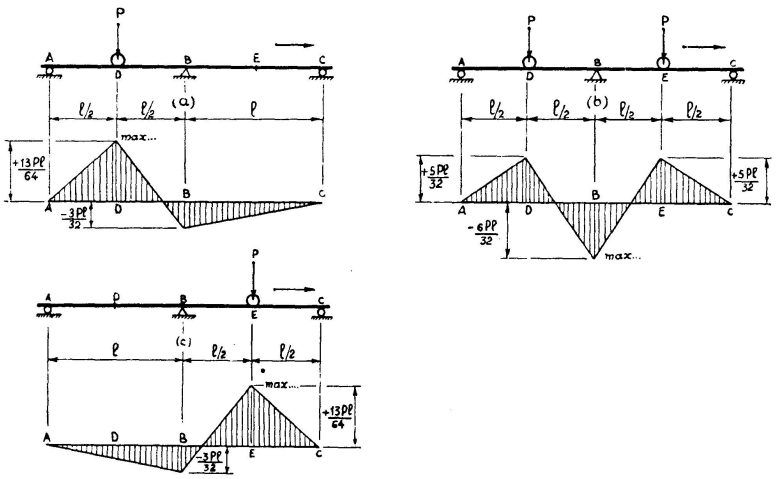

Fig. 3

[1]) Remarquons que, dans certains cas, il est possible qu'une partie du système portant soit mise hors service à la suite de l'apparition d'un nombre de rotules plastiques moindre que $(n+1)$. Nous excluerons de notre analyse ce cas exceptionnel.

correspondant aux mises en charge a ou b, mais supérieure cependant aux deux charges maxima élastiques correspondantes[2]). Voyons les phénomènes qui vont se passer si un train passe sur le pont. Quand la première roue sera en D (mise en charge a), les tensions dépasseront la limite apparente dans la section D, où se produira une légère déformation plastique. Quand la longrine supportera deux roues (mise en charge b), le moment sera maximum sur l'appui central B, où se produira une seconde déformation plastique. Enfin, quand la seconde roue sera en E, c'est la section E qui se déformera plastiquement.

Nous venons de constater que, sous le passage d'un train, il s'était formé un cycle de charges et un cycle de déformations permanentes dans la poutre. Au passage d'un second train, les mêmes phénomènes vont se répéter. Il peut très bien se faire qu'au bout d'un nombre suffisant de cycles ces déformations plastiques prennent une importance telle que la longrine soit mise hors service, alors qu'elle n'a supporté à aucun moment des charges égales à celles d'adaptation plastique.

Il résulte de cette analyse que le bénéfice que l'on veut tirer de la ductilité de l'acier peut se trouver compromis dans le cas des constructions soumises à des charges variables indépendamment l'une de l'autre entre certaines limites bien déterminées. Pour dimensionner de telles constructions, il est indispensable de connaître la grandeur maximum des charges qu'on peut y appliquer un nombre indéfini de fois dans un ordre quelconque, sans provoquer sa mise hors service par accumulation de déformations plastiques.

En d'autres termes, il faut étudier les conditions sous lesquelles les déformations plastiques finissent par cesser, en sorte que la construction finit par se comporter élastiquement, quels que soient le nombre et l'ordre de répétition des charges. Lorsque ceci se produit, nous dirons que la construction *s'est stabilisée*. Le processus de stabilisation est intimement lié à l'existence de moments résiduels provoqués par les déformations plastiques[3]). En effet, à un stade quelconque de la mise en charge, il existe dans la construction une certaine distribution de moments qui diffère, en général, de la distribution que les mêmes charges auraient provoquée si la construction s'était comportée élastiquement. *Nous définirons le moment résiduel m dans toute section comme*

---

[2]) Il est clair par symétrie que les charges d'adaptation sont identiques pour les cas a) et c). La même conclusion vaut pour les charges maxima élastiques correspondant à ces cas.

[3]) Pour éviter toute confusion, soulignons que ces moments naissent par suite de la non-concordance que prend la poutre vis-à-vis de ses appuis. Les tensions résiduelles correspondantes n'ont rien de commun avec celles qui subsistent après déchargement libre d'une barre isostatique fléchie au-delà de la limite élastique. Ces dernières tensions sont telles que dans toute section:

$$M_{résultant},\ N_{résultant} \text{ et } T_{résultant}$$

sont identiquement nuls puisque la barre est à ce moment libre de toute force extérieure.

le moment fléchissant qui, ajouté au moment fléchissant élastique M_e[4]*, donne le moment fléchissant réel M.*

Si la construction est destinée à se stabiliser, elle doit être capable d'atteindre un état de moments résiduels tels que toutes les variations ultérieures des charges entre leurs limites fixées produisent un comportement purement élastique de la construction. Il est possible de calculer, par les méthodes classiques, les valeurs limites des moments élastiques qui peuvent se produire dans toute section sous l'effet de toutes les combinaisons possibles des charges maxima (voir à ce sujet l'exemple numérique de la page 248).

Le moment résiduel dans toute section doit être tel que, si on l'ajoute aux valeurs extrêmes, positives et négatives, du moment fléchissant élastique, on obtient un moment résultant insuffisant pour produire une déformation plastique.

2. Le critère de stabilisation plastique d'une construction hyperstatique

En 1932, H. Bleich [1] a énoncé le critère suivant, qui permet de calculer la charge de stabilisation plastique d'une construction hyperstatique: *s'il est possible de trouver un système quelconque de moments résiduels en équilibre qui permettent à toutes les variations ultérieures des charges appliquées d'être supportées élastiquement, alors la construction se stabilisera.* En fait, H. Bleich n'a démontré ce principe que pour les constructions une ou deux fois hyperstatiques, et il a, de plus, supposé que la courbe moment-courbure des poutres composant la construction avait l'aspect idéalisé représenté à la figure 1. Cette courbe correspondrait à des poutres en double té à tables très minces et âme évanouissante, faites d'un matériau ayant un diagramme tensions-dilatations à angle vif et palier indéfini. Conservant les hypothèses de Bleich pour ce qui concerne la courbe moment-courbure, Melan [2] a réussi à étendre le principe de stabilisation à tous les treillis hyperstatiques articulés, quel que soit leur degré d'hyperstaticité. Enfin, le principe a été étendu par Neal [3] à des constructions hyperstatiques faites d'un matériau écrouissable idéalisé, qui représente de beaucoup plus près la réalité.

Les propriétés du matériau n'intervenant dans les constructions hyperstatiques fléchies que par la loi moment-courbure, il nous suffit de définir quelles hypothèses ont été faites par Neal au sujet de cette loi. La relation entre le moment et la courbure adoptée par lui est définie à la figure 2. Lorsqu'on applique à une barre un moment positif, la loi est d'abord linéaire (domaine de Hooke $0a$). Au point a, les fibres les plus sollicitées deviennent plastiques; le moment correspondant M_y peut être appelé *moment de début de plasticité* (fig. 4).

---

[4]) Nous appelons moment fléchissant élastique celui qui se serait produit sous les charges considérées si *toute la construction* s'était comportée élastiquement.

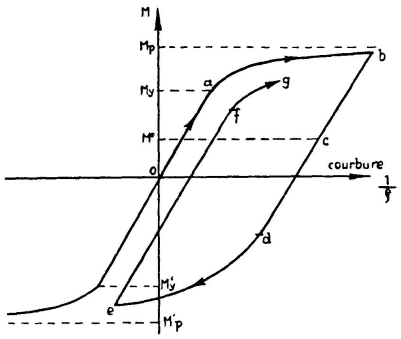

Fig. 4

Si l'on augmente le moment fléchissant au-delà de M_y, la courbure commence à croître plus rapidement que le moment. Eventuellement, lorsque M s'approche de la valeur M_p, la courbure devient infiniment grande; cette valeur de M s'appelle le *moment plastique ultime* pour le sens de flexion choisi comme positif.

Si on applique d'abord le moment fléchissant dans le sens négatif, on appellera M_y' la valeur pour laquelle se produit la première déformation plastique et M_p' le moment plastique ultime correspondant. Si, arrivés au point b du diagramme, nous diminuons le moment appliqué, le point représentatif suit le chemin bde. De b à d, la relation moment-courbure est linéaire et élastique, puis la plasticité intervient à nouveau et le point représentatif décrit l'arc de.

On supposera que la différence entre les moments fléchissants des points b et d est égale à $M_y - M_y'$, de sorte que la déformation plastique qui a eu lieu le long du chemin ab n'affecte pas le domaine des moments fléchissants dans lequel la poutre se comporte élastiquement. En d'autres termes, on considère que la déformation plastique le long de ab a eu pour effet d'augmenter le moment de début de plasticité *positif* d'une certaine quantité M^* et de réduire le moment de début de plasticité *négatif* de la même quantité. Les moments de début de plasticité, après que la poutre a suivi la sollicitation représentée par ab, sont donc $M_y + M^*$, et $M_y' + M^*$ respectivement. C'est le point c qui joue maintenant le rôle d'origine du diagramme pour ce qui concerne le domaine élastique.

Si le moment fléchissant varie de façon que le point représentatif décrit le chemin $0abcefg$ (fig. 4), le changement de valeur de M le long de la portion linéaire ef sera supposé avoir la valeur $M_y - M_y'$. En résumé, les hypothèses faites par NEAL peuvent se condenser comme suit:

1° Le domaine de moment fléchissant élastique est supposé constant et égal à $M_y - M_y'$, quelle que soit l'évolution antérieure de la mise en charge.

2° Le moment est toujours compris entre les deux moments plastiques ultimes M_p et M_p', qui sont supposés constants, quelle que soit l'évolution antérieure de la mise en charge.

En fait, les expériences faites depuis BAUSCHINGER sur l'acier et les alliages d'aluminium ont montré que le domaine élastique en traction-compression était généralement réduit de 10 à 30% à la suite de cycles de mise en charge. La théorie basée sur les hypothèses précédentes demande donc une confirmation expérimentale avant qu'on puisse l'utiliser avec confiance.

Pour que la construction puisse se stabiliser:

1° Il est nécessaire tout d'abord que le domaine élastique du diagramme moment-courbure soit au moins égal à la différence entre les moments fléchissants élastiques maxima et minima que peuvent produire des charges variant entre leurs limites fixées. Il est visible, en effet, que si cette condition n'est pas satisfaite, il sera toujours possible de produire une déformation plastique, dans un sens ou dans l'autre, en donnant aux charges des valeurs convenables. La condition ci-dessus s'écrit mathématiquement:

$$M^{(i)}_{emax} - M^{(i)}_{emin} \leqq M_y - M_y' \tag{1}$$

2° Il faut que les moments totaux qui naissent dans une section quelconque de la construction puissent être supportés par cette dernière, c'est-à-dire qu'ils soient compris entre les deux moments plastiques ultimes correspondant à cette section. D'une manière plus précise, il faut qu'on puisse trouver un système de moments fléchissants résiduels m, tels que, dans toute section i, en additionnant au moment m un quelconque des moments fléchissants élastiques que les charges peuvent produire dans cette section, on trouve un moment fléchissant total qui ne dépasse pas M_p et ne soit pas moindre que M_p'. Cette nécessité se traduit par les deux inégalités:

$$m_i + M^{(i)}_{emax} \leqq M_p \tag{2}$$

$$m_i + M^{(i)}_{emin} \geqq M_p' \tag{3}$$

Les conditions (1), (2) et (3) sont donc nécessaires pour que la stabilisation se produise. NEAL [3] a montré qu'elles étaient également *suffisantes* si la construction obéit aux deux hypothèses concernant le diagramme moment-courbure qui ont été formulées plus haut.

Divers auteurs ont proposé des méthodes pour rechercher, dans chaque problème particulier, la valeur maximum des charges pour laquelle la stabilisation se produit encore. Le procédé de calcul le plus rapide dans les cas complexes semble être celui proposé par SYMONDS et NEAL [4]. L'objectif que nous poursuivons ici n'est pas d'exposer toutes ces méthodes, mais simplement de disposer de l'une d'entre elles de manière à pouvoir calculer la charge de stabilisation dans le cas particulier de nos expériences.

Dans ce but, nous utiliserons la plus ancienne des méthodes qui fut proposée par F. BLEICH [5]; elle est particulièrement aisée à appliquer si le système est simple; elle consiste, pour un système hyperstatique de degré n, et dans le cas d'une pièce à section dissymétrique, à:

1° Calculer les courbes enveloppes des M_{emax} et des M_{emin} d'après la théorie classique des systèmes hyperstatiques, basée sur la loi de Hooke; les ordonnées de ces courbes-enveloppes sont proportionnelles à la grandeur P d'une des charges extérieures, prise comme charge de référence.

2° Choisir le diagramme des moments résiduels de telle sorte qu'en aucun point le moment m ne dépasse le moment élastique:

$$M_y = R_e \cdot \frac{I}{v} \quad \text{ou} \quad M'_y = R_e \cdot \frac{I}{v'}$$

3° Choisir la grandeur de la charge de référence de telle sorte que:

a) Les $(n+1)$ moments résultants maxima $(M_{emax}+m)$ et minima $(M_{emin}+m)$ les plus dangereux atteignent simultanément les valeurs M_p ou M_p' correspondantes (qui peuvent différer d'une section à l'autre, si le module de flexion varie).

b) L'inégalité $M^{(i)}_{emax} - M^{(i)}_{emin} \leqq M_y - M_y'$ (1)
soit respectée dans les $(n+1)$ sections dangereuses.

3. Recherches des charges d'adaptation et de stabilisation dans le cas d'une poutre continue sur trois appuis à deux travées égales, chargée de deux forces concentrées

A. Généralités: Nous nous proposons d'étudier expérimentalement le phénomène de la stabilisation progressive des déformations plastiques dans une poutre en acier doux à section en double té, continue sur trois appuis à deux travées égales, soumise à des cycles de charge semblables à ceux sollicitant la longrine envisagée au paragraphe 1 (fig. 5).

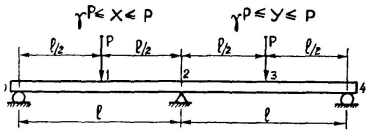

Fig. 5

Comme il est difficile de réaliser des charges roulantes expérimentalement, on a décidé de remplacer ces charges par des charges fixes, appliquées aux milieux des travées et s'exerçant simultanément ou successivement. Dans l'analyse ci-après, on supposera que chacune de ces charges peut varier indépendamment entre un maximum P et un minimum γP, où γ est un paramètre compris entre 0 et 1.

B. Etude de la poutre en régime élastique: Nous allons d'abord déterminer les valeurs minima et maxima des moments élastiques, qui interviennent dans les inégalités (2) et (3). Dans ce but, nous envisagerons le cas de la poutre

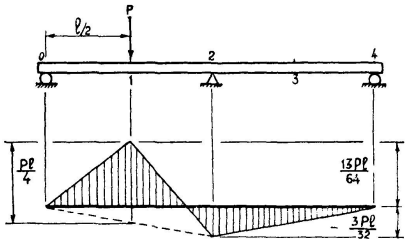

Fig. 6

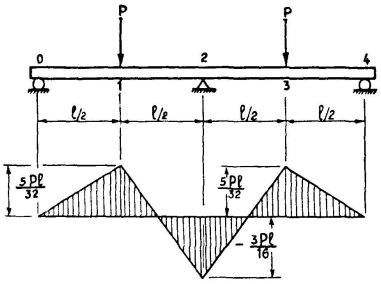

Fig. 7

chargée d'une seule force P agissant à l'abscisse $l/2$ de la travée de gauche (fig. 6). Le théorème des trois moments donne de suite:

$$M_2 = -\frac{3\,Pl}{32}, \tag{4}$$

ce qui permet de construire le diagramme des moments représenté à la figure 6. Les réactions d'appui valent:

$$R_0 = \frac{13}{32}P; \quad R_2 = \frac{22}{32}P; \quad R_4 = -\frac{3}{32}P \tag{5}$$

Par superposition, il est aisé de déduire de ces résultats les diagrammes de moments fléchissants dans la même poutre chargée, d'une part de deux forces égales P (fig. 7), d'autre part d'une force P à gauche et γP à droite ou vice versa. Ce sont évidemment là les trois sollicitations extrêmes, donc celles qui produiront dans les trois sections dangereuses 1, 2, 3, les moments élastiques extrêmes.

C. Calcul de la charge élastique maximum de la poutre chargée de deux forces égales: Le moment maximum que la poutre puisse supporter élastiquement s'obtient en égalant le moment maximum (sur l'appui central) au moment élastique M_y; on obtient ainsi:

$$\frac{3\,Pl}{16} = M_y \text{ d'où l'on déduit } P^{maximum}_{élastique} = \frac{16}{3}\,\frac{M_y}{l} \tag{6}$$

D. Calcul de la charge d'adaptation plastique de la poutre: Le cas le plus défavorable pour la charge d'adaptation est évidemment celui où les charges X, Y, appliquées aux deux travées, atteignent simultanément leur valeur maximum P.

La charge d'adaptation sera atteinte au moment où des rotules plastiques se seront développées dans les sections 1, 2, 3. A cet instant, les moments fléchissants dans ces trois sections seront égaux à M_p (fig. 8). La figure montre qu'on a:

$$AB = AC - B\ C = M_p, \text{ c'est-à-dire } \frac{Pl}{4} - \frac{M_p}{2} = M_p \text{ d'où l'on tire:}$$

$$P_{adaptation} = \frac{6\,M_p}{l} \tag{7}$$

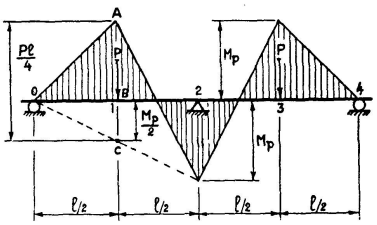

Fig. 8

E. Calcul de la charge de stabilisation par la méthode de Bleich. Pour ne pas compliquer la démonstration, supposons d'abord que les charges X, Y, appliquées à la poutre, ne puissent prendre que les valeurs 0 ou P, c'est-à-dire que le paramètre γ soit égal à zéro. La figure 9 donne, en traits pleins, le diagramme des moments dûs à deux charges P égales et en traits pointillés, celui correspondant à une seule charge P appliquée à la travée de gauche. Enfin, on a représenté en points-tirets le diagramme des moments résiduels dont la poutre est supposée le siège. Dans le cas actuel, ce diagramme ne peut être que triangulaire, car les moments résiduels sont évidemment nuls sur les appuis extrêmes 0 et 4[5]); le diagramme est donc complètement défini par la valeur de son ordonnée médiane m_2. Sa valeur au milieu d'une travée est: $m_2/2$. Pour obtenir la valeur de la charge de stabilisation, il faut, d'après l'exposé de la fin du paragraphe 2, écrire que le moment résultant: $\left[M^{(1)}_{emax}+\frac{m_2}{2}\right]$ au point 1 et le module du moment résultant sur l'appui central 2, soit: $|M^{(2)}_{emax}+m_2|$, sont tous deux égaux à M_p.

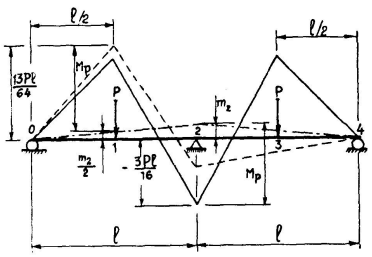

Fig. 9

---

[5]) On a expliqué au bas de la page 242 que les moments résiduels naissent par suite de la non-concordance que la poutre présente par rapport à ses appuis, à la suite des déformations plastiques. Dans le cas actuel, si on libérait la poutre de ses appuis, les trois points 0, 2 et 4 ne resteraient pas en ligne droite. Cependant, en réalité les appuis sont bilatéraux et la poutre est astreinte à conserver ses points d'appui de niveau. On peut réaliser ces conditions d'appui en posant la poutre déchargée sur les appuis extrêmes 0 et 4, puis en appliquant au point 2 une force concentrée telle que la poutre vienne juste au contact de l'appui 2. Cette force se développe naturellement au cours du déchargement du système réel et donne naissance au diagramme des moments résiduels. Ce diagramme se présente donc d'une manière analogue à celui d'une poutre sur deux appuis 0 et 4 chargée d'une charge concentrée en 2.

On trouve ainsi (fig. 9)

$$\frac{13\,Pl}{64}+\frac{m_2}{2}=\frac{3}{16}\,Pl-m_2=M_p \tag{8}$$

On déduit de ces 2 égalités:

$$P^{\gamma=0}_{stabilisation}=\frac{96}{19}\cdot\frac{M_p}{l}=5{,}05\cdot\frac{M_p}{l} \tag{9}$$

et

$$m_2=-\frac{M_p}{19} \tag{10}$$

La solution qui vient d'être obtenue n'est valable que si elle satisfait également, dans toutes les sections de la poutre, à l'inégalité:

$$M^i_{emax}-M^i_{emin}\leqq M_y-M_y' \tag{1}$$

On trouve aisément que, pour $P=P_{adaptation}$, on a dans la section (1)

$$M^{(1)}_{emax}=\frac{13}{64}\cdot\frac{96}{19}\,M_p=1{,}026\,M_p$$

et

$$M^{(1)}_{emin}=-\frac{3}{64}\cdot\frac{96}{19}\,M_p=0{,}263\,M_p$$

on en déduit que:

$$M^{(1)}_{emax}-M^{(1)}_{emin}=\frac{13+3}{64}\cdot\frac{96}{19}\,M_p=1{,}263\,M_p<M_y-M_y'=\frac{2}{1{,}2}\,M_p=1{,}667\,M_p\ ^{6)}$$

ce qui montre que l'inégalité en question est effectivement vérifiée[7]).

On contrôlerait de même que cette inégalité est remplie à la section 2.

On généralise aisément les calculs précédents pour le cas général où les charges X, Y, évoluent entre les valeurs γP et P. La double égalité qui généralise les égalités (8) s'écrit:

$$\frac{13\,Pl}{64}-\frac{3}{64}\gamma\,Pl+\frac{m_2}{2}=\frac{3}{16}\,Pl-m_2=M_p$$

On déduit l'expression la plus générale de la charge de stabilisation:

$$P_{stabilisation}=\frac{96\,M_p}{1\,(19-3\gamma)} \tag{11}$$

---

[6]) En effet, pour une section en double té symétrique, on a $M_y=-M_y'$. D'autre part, en comparant les valeurs de M_y et de M_p applicables à une poutrelle en double té (cf. S. Timoshenko, Résistance des Matériaux, Volume II, p. 334), on trouve, pour le profil adopté dans les essais, la relation $M_p=1{,}2\,M_y$.

[7]) Constatons en passant que la quantité $M^{(1)}_{emax}$ est supérieure au moment plastique ultime M_p. Celà n'a rien d'étonnant si l'on se rappelle, d'une part que le matériau est écrouissable, de sorte que sa limite élastique actuelle est supérieure à la limite élastique initiale, et d'autre part que la section (1) est, avant application de la charge P, le siège d'un moment résiduel $m_2/2$ de signe contraire à $M^{(1)}_{emax}$.

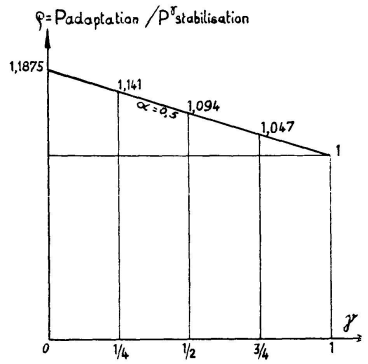

Fig. 10

et du moment résiduel maximum

$$m_2 = \frac{3\gamma - 1}{19 - 3\gamma} \cdot M_p \tag{12}$$

En divisant membre à membre les égalités (7) et (11), on obtient:

$$\rho = \frac{P_{adaptation}}{P^{\gamma}_{stabilisation}} = \frac{19 - 3\gamma}{16} \tag{13}$$

On constate que le rapport ρ dépend linéairement de γ. Pour $\gamma = 1$, il se réduit à l'unité, comme celà doit être puisque, dans ce cas, la charge de stabilisation ne diffère pas de la charge d'adaptation. Le diagramme $\rho = f(\gamma)$ est donc une droite qui joint les points $\left(\gamma = 0,\ \rho = \frac{19}{16} = 1,\ 1875\right)$ et $(\gamma = 1,\ \rho = 1)$[8]. Cette droite est représentée à la figure 10.

4. Expériences entreprises jusqu'ici pour vérifier la théorie de la stabilisation plastique

Vérification de la théorie de stabilisation: A notre connaissance, on n'a exécuté que deux essais pour comparer les charges théorique et expérimentale de stabilisation. Ce sont ceux de Klöppel [6] et ceux entrepris à la demande de Dutheil par les Laboratoires du Bâtiment et des Travaux Publics de Paris [7–8]. Ces deux essais ont été exécutés sur une poutre continue en faisant varier les charges de 0 à P. Le profil utilisé était une poutrelle P. N. n⁰ 12.

---

[8]) On démontrerait aisément que le diagramme reste une droite dans le cas plus général de deux charges concentrées symétriques d'abscisses $\alpha\, l$ comptées par rapport aux extrémités; l'expression de ρ est en effet la suivante

$$\rho = \frac{\alpha^2 + \alpha + 4 - \alpha(1 + \alpha)\gamma}{4}$$

On peut donc tracer dans la figure 10 différentes droites émanant du point ($\gamma = 1$, $\rho = 1$) et cotées en valeurs de α.

Les essais de KLÖPPEL ont été réalisés en plaçant les charges aux milieux des travées ($\alpha = 0{,}5$). La travée de gauche était chargée d'une charge constante P et la travée de droite d'une charge variant, à la fréquence de 10 cycles par minute, entre un minimum très faible (200 kg) et un maximum égal à P. La limite apparente d'élasticité du métal déterminée par un essai de traction était $R_e = 24{,}2$ kg/mm²; pour une longueur de travée $l = 1500$ mm et $(I/v) = 53\,000$ mm³, la charge maximum élastique valait:

$$P_e = R_e \cdot \frac{I}{v} \cdot \frac{64}{13} \cdot \frac{1}{I} = 4210 \text{ kg}$$

La poutre a supporté 700 000 cycles sous cette charge, puis 600 000 autres cycles sous une charge de 5040 kg = 1,20 P_e. Une autre poutre a supporté 500 000 cycles à 5040 kg = 1,20 P_e, puis 500 000 cycles à 5830 kg = 1,38 P_e sans qu'il se produise aucune rupture par fatigue. Après le premier essai, il subsistait une flèche permanente égale à 7% de la flèche totale. Après le second essai, la flèche permanente atteignait 35% de la flèche totale. Nous pouvons faire à propos de ces essais les remarques suivantes:

a) La charge de stabilisation de BLEICH valait, en admettant pour le rapport $\alpha = M_p/M_y$ la valeur 1,20

$$P_{stabilisation} = \frac{5{,}05\, M_p}{l} = \frac{5{,}05 \cdot 1{,}20 \cdot M_y}{l} = 5180 \text{ kg}$$

Les charges appliquées à la poutre d'essai ont correspondu donc respectivement à $\frac{5040}{5180} = 0{,}973$ et $\frac{5830}{5180} = 1{,}125$ fois la charge de stabilisation.

Tout ce qu'on peut tirer des essais est donc:

1° Que le danger de fatigue n'existe pas;
2° qu'on peut dépasser de 12,5% la charge de stabilisation, sans provoquer la mise hors service de la pièce.

Notons que ces deux conclusions sont basées sur la limite d'élasticité du métal et une erreur dans cette détermination les réduirait à néant. De plus, les essais sont en trop petit nombre pour qu'il soit sage d'en tirer des conclusions définitives. Il aurait aussi fallu déterminer expérimentalement, sur les mêmes poutrelles, la charge d'égalisation des moments par adaptation et la comparer à la charge théorique d'adaptation.

b) Les essais entrepris par les L.B.T.P. de Paris ont été effectués sur des poutres en fers PN, à section rectangulaire et à section en losange; on a disposé les charges tout près de l'appui central ($\alpha = 0{,}7$); le cumul des rotations plastiques ne s'est produit que pour une charge supérieure à la charge critique de stabilisation théorique de:

25% pour la section rectangulaire
35% pour la section en losange.

Quant aux essais effectués sur les poutrelles PN, ils présentaient des anomalies empêchant d'en tirer une conclusion. Il semble nécessaire d'entreprendre de nouveaux essais, déclare DUTHEIL, à la fin du compte rendu de ces expériences [7].

5. Conclusions

La prise en compte des phénomènes de stabilisation plastique aurait pour double effet:

a) De compliquer très considérablement la méthode de dimensionnement des constructions prenant en considération les phénomènes plastiques;
b) de diminuer dans une proportion parfois appréciable le bénéfice apporté par la théorie simple de l'adaptation plastique.

Il est dès lors compréhensible que les protagonistes de cette dernière théorie aient tendance à diminuer l'importance pratique des phénomènes de stabilisation, voir même à leur dénier tout effet pratique (cf. DUTHEIL). A notre avis, la légitimité de cette procédure n'est pas suffisamment étayée par les expériences peu étendues de KLÖPPEL et des Laboratoires du Bâtiment de Paris. Il s'impose d'effectuer des expériences plus complètes.

CHAPITRE II

Essais destinés à confronter la théorie de la stabilisation plastique avec l'expérience

6. Programme général des essais

Généralités. Les essais ont été exécutés sur 18 poutrelles normales PN n° 12 formant poutres continues à deux travées égales, sollicitées par deux charges X, Y, appliquées aux milieux des travées et variant indépendamment entre γP et P.

Il était prévu d'effectuer d'abord deux essais d'adaptation plastique sous deux charges égales ($\gamma = 1$), puis 4 séries de 4 essais de stabilisation, correspondant respectivement aux valeurs 0, $^1/_4$, $^1/_2$ et $^3/_4$ du paramètre γ. Dans chaque essai de stabilisation, on a soumis la poutrelle d'essai à une série de cycles de charge du type représenté à la figure 11. Chaque cycle comporte donc quatre mises en charges successives.

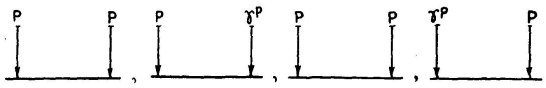

Fig. 11

Les expériences avaient pour but:

1° De comparer le rapport $\frac{P_{stabilisation}}{P_{adaptation}}$ déterminé expérimentalement au même rapport déterminé par la théorie, pour les 4 valeurs de γ indiquées ci-dessus;

2° de déterminer à quelles flèches et quelles déformations plastiques du métal correspondaient les charges mises en jeu;

3° de déterminer le nombre de fois qu'on peut appliquer une charge dépassant la charge théorique de stabilisation avant que la poutre ne soit hors service, et d'apprécier ainsi plus clairement l'utilité pratique de la théorie de stabilisation.

7. Equipement utilisé pour la mise en charge des poutres d'essai

Le montage utilisé est représenté à la figure 12 et aux photographies figures 13 et 14. Il comprend essentiellement une machine hydraulique de 150 tonnes Amsler, munie d'une poutre de flexion sur laquelle on a disposé un ensemble mobile pouvant glisser à frottement doux sur cette poutre. Le piston de la machine, placé à la partie inférieure, peut soulever cet ensemble mobile et l'appliquer contre l'appui supérieur à rouleau.

L'ensemble mobile comprend de bas en haut:

a) Une poutre de support très rigide (DIN n° 34);

b) la poutrelle d'essai, qui repose sur la poutre de support par l'intermédiaire d'un appui central fixe et de deux appuis d'extrémités à rouleau;

c) la poutre de répartition (DIR n° 24), reposant sur la poutrelle d'essai par l'intermédiaire de deux appuis à rouleau placés aux milieux des travées de la poutrelle d'essai;

d) des pièces de guidage et des pièces de solidarisation, qui ont pour but de guider avec un minimum de jeu la poutre C entre les colonnes de la machine et d'empêcher cette poutre de rouler sur la poutrelle d'essai au moment du démarrage de l'ensemble.

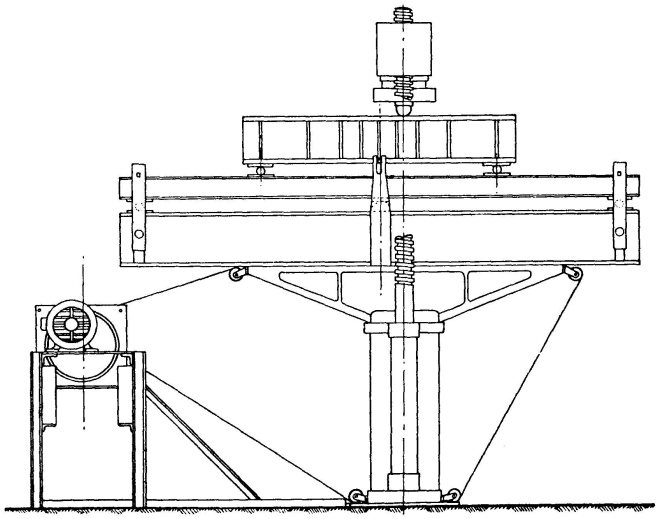

Fig. 12

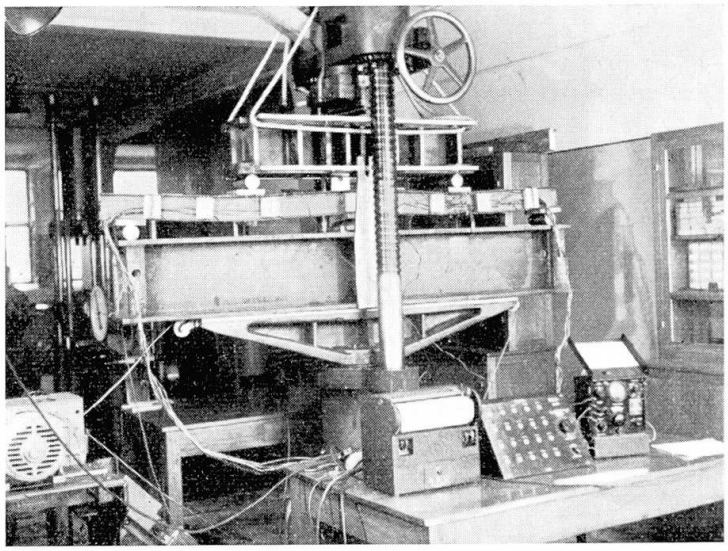

Fig. 13

Le mouvement de glissement dans les deux sens de l'ensemble mobile sur la poutre de flexion de la machine d'essai est assuré par un câble sans fin s'enroulant sur un tambour raînuré actionné par un moteur électrique d'1 C. V. (750 tours minute) et un réducteur au centième, muni d'un inverseur automatique de sens de marche. Des butées réglables fixées sur la poutre de support et des fins de course fixées sur la poutre de flexion de la machine réalisent un arrêt automatique de l'ensemble mobile à l'endroit voulu. La manœuvre consiste à donner à l'ensemble un déplacement tel que l'un des neuf raidisseurs de la poutre de répartition vienne au droit de l'appui supérieur fixe de la machine d'essai. Ces raidisseurs sont disposés de façon que la charge appliquée par l'appui supérieur de la machine se décompose, selon le cas, en

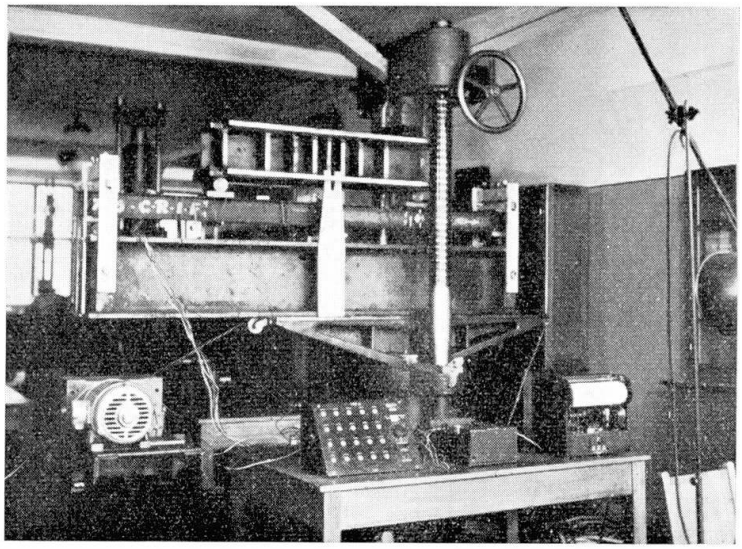

Fig. 14

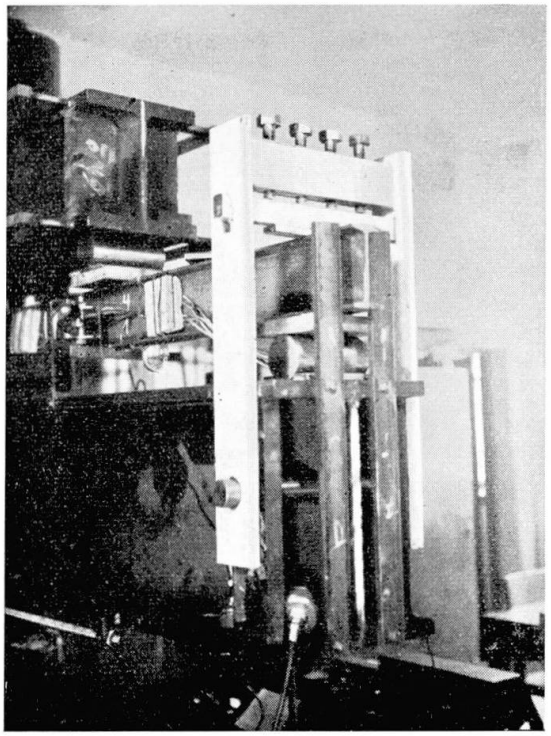

Fig. 15

deux charges P égales (raidisseur central) ou bien P et $3\,P/4$; P et $P/2$; P et $P/4$; P et zéro.

Les appuis prévus pour la poutrelle d'essai étaient les suivants:

a) Un appui central cylindrique fixe en acier mi-dur, à rayon de 90 mm;
b) deux appuis à rouleau en acier mi-dur de 70 mm de diamètre.

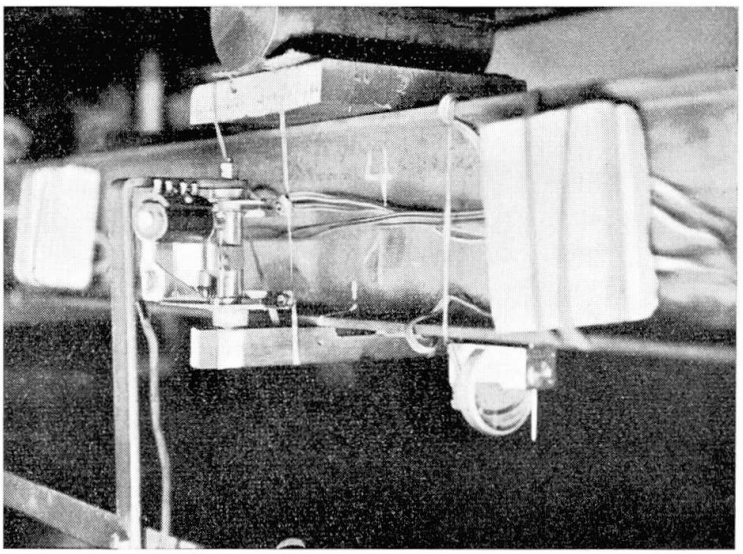

Fig. 16

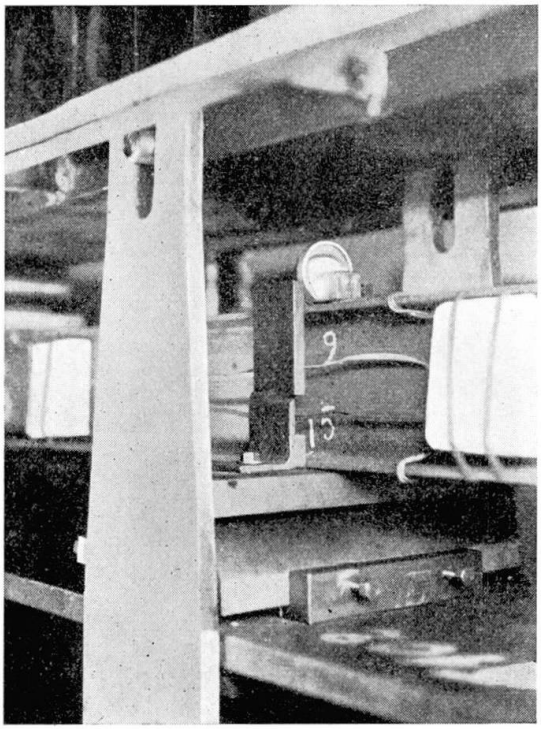

Fig. 17

De plus, dans les cas $\gamma = {}^1/_4$, $\gamma = 0$, où la poutre devait tendre à se soulever sur l'un ou l'autre appui d'extrémité, il était prévu de la maintenir par des contre-appuis en forme de cadres tournant autour d'axes passant par des paliers ménagés aux extrémités de la poutre de répartition. Ces paliers sont visibles sur la photographie figure 13 où les contre-appuis ne sont pas montrés. Les contre-appuis sont représentés à la photographie figure 15.

Les charges étaient appliquées à la poutrelle d'essai par deux rouleaux en acier mi-dur de 70 mm de diamètre. L'appui central et les quatre rouleaux dont question ci-dessus n'étaient pas en contact direct avec la poutrelle d'essai, mais les pressions étaient réparties sur cette dernière par des plaques en acier doux de 150 mm de largeur et 20 mm d'épaisseur.

Dans le premier essai d'adaptation, on avait interposé entre ces plaques de répartition et la poutrelle d'essai des feuilles de plomb de 5 mm d'épaisseur dans le but à la fois de mieux répartir les pressions et de compenser de légères dénivellations des appuis. Ces feuilles de plomb ayant fortement flué sous charge, elles ont été abandonnées dans les essais ultérieurs.

Par contre, il s'est avéré nécessaire de rendre réglable en hauteur l'appui fixe central, en vue de faire toucher la poutrelle sur les trois appuis à la fois, malgré les légers défauts de rectitude inévitables dans des poutrelles laminées. Dans ce but, on a réalisé un appui en deux pièces dans lequel la première pièce formant l'appui cylindrique proprement dit pouvait être déplacée en hauteur par la deuxième pièce formant coin à faces inclinées d'un dixième.

Cet appui a été réglé avant chaque essai de la manière suivante: deux tensomètres Johansson à base de 50 mm étaient fixés dans les sections 1 et 2 de la poutre. Ces tensomètres sont visibles sur les photographies de détail figures 16 et 17. On appliquait à la poutre deux charges égales modérées et on réglait par tâtonnements l'appui central jusqu'à ce que les déformations mesurées par ces deux tensomètres soient entre elles approximativement comme les moments fléchissants correspondants dans une poutre continue sur appuis fixes. La condition à réaliser était ainsi:

$$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \frac{M_2}{M_1} = \frac{\frac{3}{16}Pl}{\frac{5}{32}Pl} = 1{,}20^{9)}$$

Dans une première série d'expériences, neuf poutrelles ont été essayées sans guidage autre que les appuis décrits ci-dessus. Ces poutrelles ont manifesté en général d'importantes déformations horizontales accompagnées parfois de torsion et allant jusqu'à la mise hors service par déversement. On a constaté qu'elles se déplaçaient peu à peu latéralement sur leurs appuis; c'est pourquoi il a été nécessaire, dans les essais ultérieurs, de guider les poutrelles au droit des trois appuis.

Ce guidage a été réalisé comme suit:

a) On a boulonné à chaque extrémité de la poutre de répartition deux plats d'acier formant glissière verticale et maintenant les extrémités de la poutrelle d'essai par ses ailes;
b) on a fixé sur l'appui cylindrique central deux équerres formant glissière verticale et maintenant la poutrelle d'essai.

Ces glissières d'extrémité et ces équerres de l'appui central sont visibles sur les photos de détail, figures 15 et 17.

8. Equipement utilisé pour les mesures

Dans toutes les expériences, on a mesuré les flèches prises par la poutrelle d'essai. Dans une partie d'entre elles, on a en outre mesuré les déformations du métal dans un certain nombre de sections droites.

A. Fleximètres. Les fleximètres employés ont été de deux types. Dans la section médiane de la travée droite, on a mesuré les flèches à l'aide de comparateurs au centième de millimètre de part et d'autre de la poutrelle. Ces comparateurs étaient montés de façon à se détendre au cours de la déformation de la poutrelle; ils étaient placés à fin de course au début de chaque

[9]) En fait, cette technique a conduit à surélever un peu trop l'appui central, car le rapport M_2/M_1 exact, compte tenu de l'effet des déformations par cisaillement, ne vaut que 1,13 (cf. annexe).

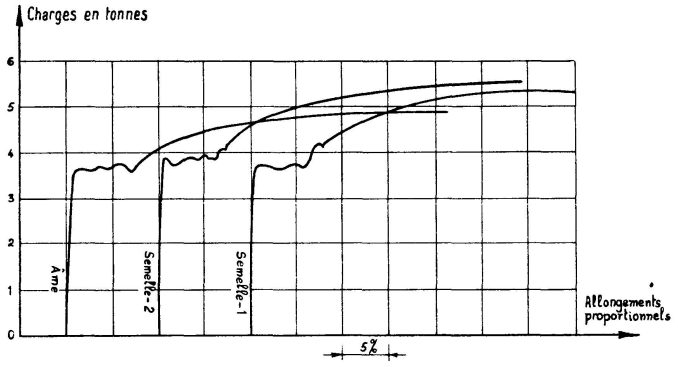

Fig. 18

essai. Dans la section médiane de la travée gauche, on a fixé d'un côté seulement, un fleximètre enregistreur électronique. Ce fleximètre a été réalisé en transformant légèrement un enregistreur électronique de diagrammes forces-allongements de la marque Baldwin. L'appareil est visible sur la photographie figure 16. Les déformations de la poutrelle ont pour effet de déplacer un noyau de fer doux placé dans l'axe de deux bobines accolées. Ces bobines font partie de deux circuits électriques alimentés en courant alternatif. Tout déplacement du noyau a pour effet de déséquilibrer les circuits; le courant de déséquilibre, après passage dans un amplificateur à lampes, actionne un servo-moteur qui déplace, dans l'axe de deux autres bobines placées également dans les circuits, un second noyau de fer doux, identique au premier, jusqu'à rétablir l'équilibre de ces circuits. Tout déplacement du premier noyau est ainsi fidèlement répété par le second. Le servo-moteur actionne un tambour garni de papier millimétré et l'on peut amplifier à volonté les flèches de la poutre 5, 10 ou 20 fois par l'emploi d'une boite de vitesses à engrenages. Par ailleurs, la pression d'huile dans la machine hydraulique Amsler a pour effet de déformer un tube de Bourdon relié lui aussi au noyau d'une bobine double. Par un processus électronique identique à celui exposé ci-dessus, la charge appliquée à la machine commande un servo-moteur actionnant une plume qui se déplace selon une génératrice du tambour d'une quantité proportionnelle à la charge.

En résumé, le fleximètre enregistreur fournit avec une grande précision un diagramme cartésien flèches-charges. Quelques exemples d'enregistrement obtenus avec cet appareil sont reproduits dans la suite de ce rapport.

B. Tensomètres. A part les deux tensomètres mécaniques Johansson qui ont été employés pour le réglage de l'appui central, on a utilisé exclusivement des tensomètres ohmiques.

On a employé normalement des tensomètres Philips GM 4473 de 120 ohms de résistance; aux endroits où l'on prévoyait de fortes déformations plastiques, ils ont été remplacés par des tensomètres Baldwin „post-yield". Ces tensomètres fonctionnent jusqu'à des dilatations de 8 à 10%, alors que les tensomètres ordinaires sont mis hors service après une dilatation de 1,5 à 2%.

9. Essais de définition de l'acier. Charges théoriques correspondantes d'adaptation et de stabilisation

On a prélevé des éprouvettes dans trois poutrelles différentes numérotées 7, 15 et 16. Dans chacune de ces poutrelles, on a prélevé une éprouvette dans l'âme, et une dans chaque semelle. Les dimensions des éprouvettes sont conformes aux normes I.B.N. Les résultats de ces neuf essais et les valeurs moyennes sont résumées par le tableau ci-dessous.

Dans chacun des essais, on a enregistré électroniquement le diagramme forces-allongements. Trois des neuf diagrammes ainsi obtenus sont représentés à la figure 18. Les allongements étaient mesurés sur une base de 2 pouces et amplifiés 20 fois; il est possible de mesurer avec précision sur chaque diagramme la longueur du palier d'étirage de l'acier. La dernière colonne du tableau indique les valeurs de ces longueurs converties en centièmes d'allongement proportionnel. Par ailleurs, on a contrôlé indirectement les dimensions des poutrelles en déterminant avec précision leur poids par mètre courant. Les valeurs trouvées pour trois poutrelles ont été respectivement 11,36; 11,13; et 11,11 kg/m courant, donnant une moyenne de 11,2 kg/m courant, identique au poids théorique de la PN 12 indiqué dans les catalogues de profilés.

Ce résultat montre qu'on peut adopter sans correction les caractéristiques géométriques du profil consignées dans les catalogues, et en particulier le module de flexion $I/v = 54{,}7$ cm³.

Il résulte des recherches récentes sur la flexion plastique des poutres en acier doux (10,11) que c'est la limite apparente supérieure d'élasticité des

Poutrelle	Endroit des prélèvements	R_{ei}	R_{es}	R_r	Allongements de rupture en %		Striction en % St	longueur du palier en %
		en kg/mm²			$A_{5,65}$	$A_{8,16}$		
7	Sem. 1	24,4	25,6	35,2	39,9	34,5	68,7	3,25
	Sem. 2	23,6	26,8	35,4	40,5	36,0	63,8	2,75
	Ame	24,1	27,2	34,0	36,6	30,0	63,4	3,75
15	Sem. 1	25,1	25,6	37,7	37,6	33,0	62,2	3,25
	Sem. 2	24,5	24,7	36,4	39,6	34,0	61,6	3,00
	Ame	26,9	27,5	38,1	37,0	32,4	61,7	3,38
16	Sem. 1	24,4	24,8	36,8	39,4	32,3	66,2	2,75
	Sem. 2	24,6	25,4	36,6	40,1	34,7	59,5	3,08
	Ame	27,5	29,4	38,7	(19,7)	(17,6)	48,9	3,38
moyenne des semelles		24,4	25,5	36,4	39,5	34,1	63,7	3,01
moyenne des âmes		26,2	28,0	36,8	36,8	31,2	58,0	3,50

semelles qui conditionne le moment maximum que la poutre peut supporter élastiquement. D'après la théorie de la flexion, on a

$$M_{élastique} = R_{es} \frac{I}{v}$$

Le module de flexion vaut, d'après les catalogues de profilés, $I/v = 54{,}7\ \text{cm}^3$. Par ailleurs, on a en moyenne:

$R_{es}^{semelles} = 25{,}5\ \text{kg/mm}^2$; d'où $M_{élastique} = 25{,}5 \cdot 54{,}7 \cdot 10^3 = 1\,394\,000\ \text{kg mm}$.

La charge maximum élastique vaut, d'après la formule (6):

$$P_{maximum}^{élastique} = \frac{16}{3} \cdot \frac{M_y}{l} = \frac{16}{3} \cdot \frac{1\,394\,000}{1145} = 6500\ \text{kg}$$

Par ailleurs, la limite élastique supérieure à prendre en compte dans le calcul du moment plastique ultime M_p n'est pas celle de la semelle, mais une moyenne pondérée de celles de l'âme et des semelles. Le diagramme idéal des tensions dans les rotules plastiques étant formé théoriquement de deux rectangles, il est logique de prendre comme limite élastique supérieure moyenne la quantité:

$$R_{es}^{moyen} = \frac{S\, R_{es}^{semelles} + A\, R_{es}^{âme}}{S + A}$$

où S est le moment statique d'une semelle et A celui de la demi-âme, comptés par rapport à l'axe neutre. Avec:

$$S = 24\,500\ \text{mm}^3, \qquad A = 7010\ \text{mm}^3$$
$$R_{es}^{semelles} = 25{,}5\ \text{kg/mm}^2, \qquad R_{es}^{âme} = 28{,}0\ \text{kg/mm}^2$$

on trouve: $R_{es}^{moyen} = 26{,}1\ \text{kg/mm}^2$

Pour les profilés de la série normale, on peut d'ailleurs admettre que le rapport $\frac{M_p}{M_y}$ vaut 1,20[10]); on a donc

$$M_p = 1{,}20 \cdot 26{,}1 \cdot 54{,}7 \cdot 10^3 = 1\,715\,000\ \text{kg mm}.$$

La charge d'adaptation plastique théorique vaut alors d'après la formule (7)

$$P_{adaptation} = \frac{6 M_p}{l} = \frac{6 \cdot 1\,715\,000}{1145} = 8990\ \text{kg}$$

Enfin, en appliquant les coefficients de réduction indiqués au diagramme figure 10, on obtient, pour les charges de stabilisation théoriques:

$$\gamma = 0 \quad P_{stabilisation}^{\gamma=0} = \frac{8990}{1{,}1875} = 7570\ \text{kg}$$

$$\gamma = \tfrac{1}{4} \quad P_{stabilisation}^{\gamma=1/4} = \frac{8990}{1{,}141} = 7880\ \text{kg}$$

$$\gamma = \tfrac{1}{2} \quad P_{stabilisation}^{\gamma=1/2} = \frac{8990}{1{,}094} = 8220\ \text{kg}$$

$$\gamma = \tfrac{3}{4} \quad P_{stabilisation}^{\gamma=3/4} = \frac{8990}{1{,}047} = 8590\ \text{kg}$$

[10]) Cf. note no. 6.

10. Critères adoptés pour définir les charges expérimentales d'adaptation et de stabilisation

Les théories de l'adaptation et de la stabilisation sont basées sur l'hypothèse d'un matériau présentant un palier de longueur indéfinie. En réalité, le métal se renforce par écrouissage, de sorte qu'on ne doit pas s'attendre à observer sous les charges d'adaptation ou de stabilisation théoriques des flèches infiniment grandes.

Les expériences de flexion plastique publiées montrent que l'adaptation est précédée expérimentalement par un coude très net dans la courbe flèches-charges représentée à la figure 19 ou encore par un accroissement marqué du taux de variation de la flèche df/dP. Nous n'avons trouvé nulle part de critère définissant avec précision le point de la courbe (P, f) donnant la charge expérimentale d'adaptation. Nous croyons être en accord avec les autres expérimentateurs *en adoptant comme charge d'adaptation celle pour laquelle la déformation plastique est égale à la déformation élastique.*

Si par le point correspondant de la courbe (P, f) on mène la parallèle à la droite de Hooke, cette parallèle rencontre l'axe des f en un point dont l'abscisse est par définition *la flèche permanente expérimentale d'adaptation.* Il nous faut à présent adopter une définition analogue pour la charge de stabilisation, qui tienne également compte du phénomène d'écrouissage et qui soit compatible avec la définition ci-dessus de la charge d'adaptation quand le paramètre γ tend vers l'unité.

A ce propos, l'expérience montre que, si la charge P choisie ne dépasse pas 1,10 fois la charge d'adaptation expérimentale, la poutre tend à prendre une déformée stabilisée bien déterminée qu'elle atteint pratiquement après 10 à 20 cycles de charge. Compte tenu de cette constatation et après examen des différentes possibilités, il est apparu que la définition la plus rationnelle de la charge de stabilisation était la suivante:

La charge de stabilisation expérimentale est la charge pour laquelle la flèche résiduelle de la déformée stabilisée prise par la poutre est égale à la flèche permanente d'adaptation expérimentale.

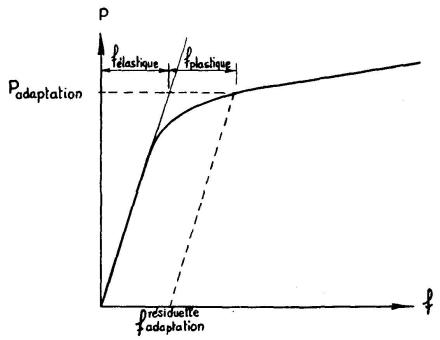

Fig. 19

11. Essais d'adaptation

Il a été effectué en tout quatre essais d'adaptation. Dans les deux premiers, on n'a pas guidé la poutre latéralement. Les deux derniers ont été exécutés après les expériences de stabilisation, à l'aide des deux poutres les moins déformées, qui étaient guidées latéralement.

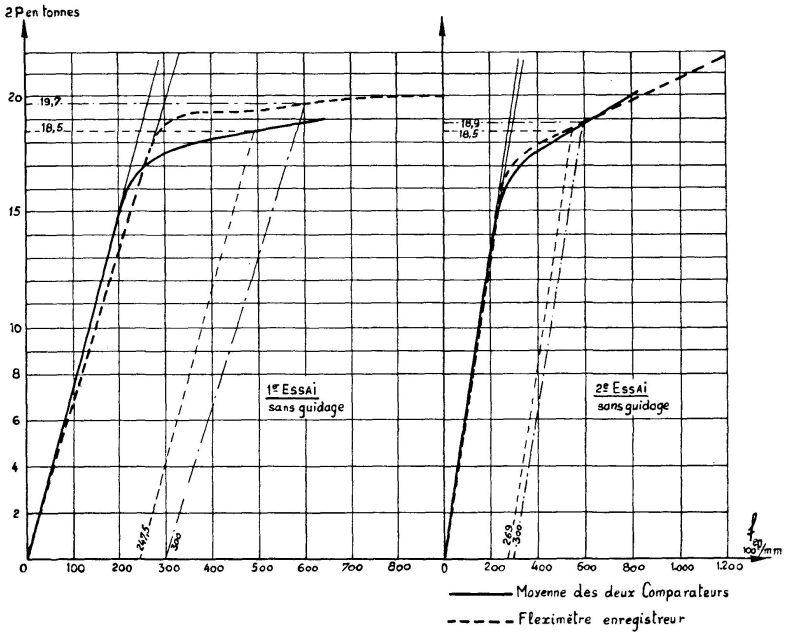

Fig. 20

a) *Premier essai sans guidage.* La figure 20 donne les diagrammes flèches-charges relevés au fleximètre enregistreur et aux comparateurs respectivement. La poutre a été mise hors service par déversement de la travée de droite, qui s'est produit sous la charge de 21 tonnes. La figure 20 indique les valeurs des charges et flèches d'adaptation dans les deux travées déterminées en admettant une flèche plastique égale à la flèche élastique, comme on l'a dit au paragraphe 9.

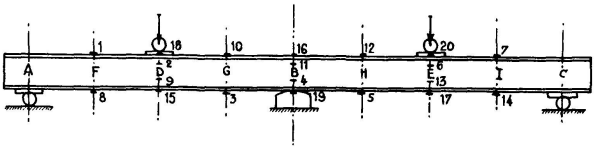

Fig. 21

La poutre était garnie de 20 tensomètres ohmiques, disposés comme l'indique la figure 21. Les limites d'élasticité à 0,1% ont été atteintes pour les divers tensomètres, sous les charges suivantes:

Section	N° du tensomètre	Charges en tonnes
B	16	17,3
	11	17,8
	4	17,7
	19	cassé
D	18	19,1
	2	19,5
	9	19,4
	15	19,1
E	20	17,7
	6	18,5
	13	17,9
	7	17,7

Il résulte de ce tableau que la section médiane de la poutre n'a subi des déformations plastiques notables qu'à partir de 17,3 tonnes. Les deux autres sections dangereuses se sont plastifiées peu après, à savoir la section médiane de la travée droite sous 17,7 tonnes, puis la section médiane de la travée gauche sous 19,1 tonnes. Ces chiffres indiquent un retard dans la plastification de la section médiane dû au fait que l'appui central était légèrement plus bas que les appuis extrêmes. Cette dénivellation révélée après coup a montré la nécessité de réaliser un appui central réglable.

Cependant, il a été démontré théoriquement et expérimentalement [12] que la charge d'adaptation n'est pas influencée par une légère dénivellation des appuis, de sorte qu'on peut utiliser la charge d'adaptation déterminée dans ce premier essai.

Les mêmes tensomètres ohmiques nous permettent de rechercher le diagramme des moments réels dans la poutre dans le domaine élastique, par exemple sous une charge $2\,P = 10$ tonnes. En effet, la résistance des matériaux nous apprend que $M = \frac{E\,I}{\rho}$ et que $\frac{1}{\rho} = \frac{2\,\epsilon_{max}}{h}$ d'où l'on déduit que $M = E\,\epsilon_{max} \cdot \frac{I}{v}$.

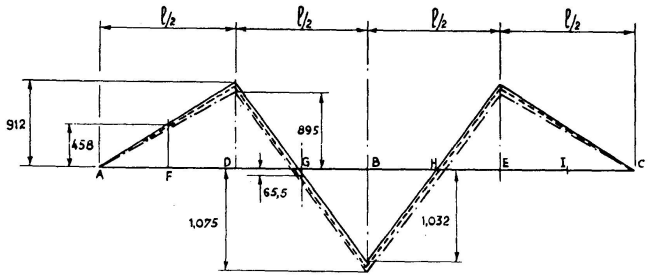

Fig. 22

En prenant pour ϵ_{max} la moyenne des indications des tensomètres collés sur les semelles, on peut calculer les moments fléchissants dans les sections B, D, E, F, G, H, I. Ajoutons que les moments en F, G, H, I, sont certainement plus précis que les moments en B, D, E, car la loi simple de flexion $\sigma = M\,y/I$ n'est pas exactement satisfaite dans ces trois sections où sont appliquées des forces extérieures importantes et où la poutrelle est renforcée par des plaques d'appui.

En se basant sur les indications des tensomètres ohmiques placés en F, G, H, I, on obtient le diagramme de moments en pointillé de la figure 22. En utilisant les tensomètres placés dans les sections B, D, E, on obtient un diagramme légèrement différent, qui est représenté en points-tirets. Enfin, on a représenté sur la même figure le diagramme théorique des moments, compte tenu de l'effet des déformations dues à l'effort tranchant (cf. annexe). On constate que la valeur expérimentale du rapport M_B/M_D est 1,132 donc très voisine du rapport théorique 1,13 (cf. annexe 1). L'accord entre trois diagrammes est très satisfaisant.

Enfin, les tensomètres ohmiques ont montré que la loi de conservation des sections planes n'est plus respectée dès que les déformations plastiques deviennent importantes. Ce fait se conçoit aisément si l'on remarque que B, D, E, sont des sections où des forces extérieures importantes sont appliquées. En particulier, les tensions normales transversales dans l'âme sont considérables et entraînent une plastification prématurée de cette âme dans les trois sections précitées. Notons de plus que, dans ces sections, la semelle comprimée est renforcée considérablement par l'action de la plaque d'appui.

b) *Deuxième essai sans guidage.* Le deuxième essai a été réalisé comme le premier, mais en réglant par tâtonnements la hauteur de l'appui central jusqu'à obtenir, sous faible charge ($2\,P = 6$ tonnes), un diagramme des moments théoriquement correct. Les diagrammes flèches-charges relevés par les fleximètres sont représentés à la figure 20. La poutre a été mise hors service sous une charge de 22 tonnes par déversement de la travée de droite. Les charges et flèches d'adaptation ont été déterminées sur ce diagramme en suivant les mêmes critères que dans l'essai précédent. Les limites d'élasticité à 0,1% ont été atteintes par les divers tensomètres sous les charges suivantes:

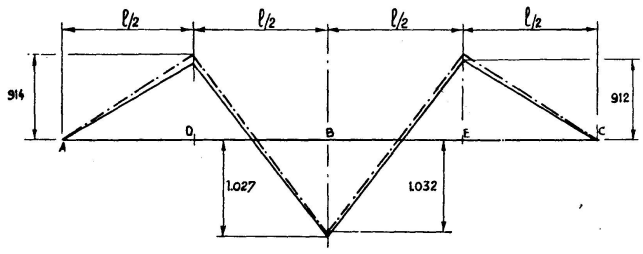

Fig. 23

Section	N° du tensomètre	Charges en tonnes
B	16	17,1
	11	16,0
	4	17,3
	19	16,9
D	18	15,9
	2	15,8
	9	14,5
	15	16,7
E	20	17,5
	6	16,6
	13	17,3
	7	17,3

En se basant sur les indications des tensomètres ohmiques, on a construit comme dans l'essai précédent le diagramme des moments expérimentaux sous $2P = 10$ tonnes. Ces diagrammes sont représentés à la figure 23. On voit que le diagramme expérimental coïncide pratiquement ici encore avec le diagramme théorique. En effet, la valeur expérimentale du rapport M_B/M_D est ici de 1,129, donc très voisine de la valeur théorique de 1,13 (cf. annexe 1).

c) *Essais d'adaptation avec guidage latéral au droit des 3 appuis.* Ces essais ont été exécutés après achèvement des expériences de stabilisation sur les poutrelles n° 10 et 11 qui avaient subi de très faibles déformations permanentes (voir à ce sujet le tableau général du paragraphe 12). Dans ces deux essais,

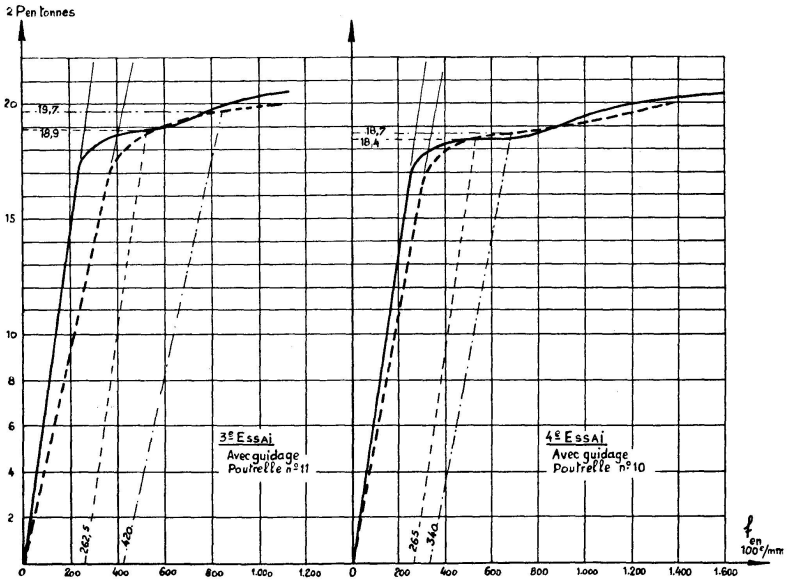

Fig. 24

l'appui central a été réglé en hauteur en s'aidant des indications des deux tensomètres Johansson. On a mesuré les flèches comme d'habitude, mais on n'a fait aucune mesure de dilatation. Les courbes flèches-charges sont représentées à la figure 24. En appliquant le critère: flèche plastique d'adaptation = flèche élastique, on a déterminé sur cette figure les charges et flèches d'adaptation pour chacun des deux essais et pour les deux travées de la poutre.

Les résultats obtenus dans les quatre essais d'adaptation sont représentés au tableau ci-après. On en retiendra deux données importantes:

Charge d'adaptation expérimentale moyenne $P = 9{,}45$ tonnes
flèche permanente d'adaptation expérimentale moyenne = 3,00 mm.

En vue d'apprécier l'influence du choix du critère d'adaptation, nous avons comparé les résultats ci-dessous à ceux qu'on obtiendrait en admettant que la charge d'adaptation correspond au point d'inflexion du diagramme flèches-charges.

Les charges et flèches d'adaptation déterminées par ce nouveau critère figurent dans les quatre dernières colonnes du tableau. Les moyennes générales obtenues sont:

Charge d'adaptation expérimentale moyenne $P = 9{,}45$ tonnes,
flèche permanente d'adaptation expérimentale moyenne = 2,98 mm.

On constate que l'écart entre ces valeurs, par rapport aux précédentes, est totalement négligeable.

Critère d'adaptation	flèche plastique = flèche élastique				point d'inflexion			
Numéro essai	travée de gauche		travée de droite		travée de gauche		travée de droite	
	$2P$ en tonnes	f en 100èmes de mm	$2P$ en tonnes	f en 100èmes de mm	$2P$ en tonnes	f en 100èmes de mm	$2P$ en tonnes	f en 100èmes de mm
1	19,7	300	18,5	247,5	19,7	300	19,0	325
2	18,9	300	18,5	269	—	—	18,5	269
3	19,7	420	18,9	262,5	19,0	265	18,9	262,5
4	18,7	340	18,4	265	18,7	340	18,5	315
moyenne p. travée	19,25	340	18,6	261	19,1	302	18,7	293
moyenne générale	18,9	300	—	—	18,9	298	—	—

A l'aide de la charge d'adaptation expérimentale moyenne de 9,45 tonnes, nous pouvons déterminer, par la relation

$$P_{stabilisation} = \frac{16}{19 - 3\gamma} \cdot P_{adaptation}$$

tirée de la formule (13) des valeurs des différentes charges de stabilisation qui ne sont ni purement théoriques, ni purement expérimentales. Nous les appellerons les valeurs mixtes. On a:

$$\gamma = 0 \quad P^{mixte}_{stabilisation} = \frac{9{,}45}{1{,}1875} = 7{,}96 \text{ tonnes}$$

$$\gamma = \tfrac{1}{4} \quad P^{mixte}_{stabilisation} = \frac{9{,}45}{1{,}141} = 8{,}28 \text{ tonnes}$$

$$\gamma = \tfrac{1}{2} \quad P^{mixte}_{stabilisation} = \frac{9{,}45}{1{,}094} = 8{,}64 \text{ tonnes}$$

$$\gamma = \tfrac{3}{4} \quad P^{mixte}_{stabilisation} = \frac{9{,}45}{1{,}047} = 9{,}03 \text{ tonnes}$$

12. Essais de stabilisation sans guidage latéral

Généralités. Rappelons tout d'abord brièvement la technique d'un essai déjà exposée au paragraphe 5: on fait choix d'une valeur déterminée P de la charge maximum à appliquer; ensuite, on soumet la poutrelle d'essai à une série de cycles de charges du type ci-après, figure 15. On n'a pas fixé de tensomètres ohmiques sur les poutrelles d'essai, excepté dans une des expériences relatives à $\gamma = {}^1/_4$ (poutrelle n° 9).

On a enregistré les cycles de flèches à l'aide du fleximètre enregistreur et noté les flèches résiduelles marquées par les comparateurs à la fin de chaque cycle.

On a observé qu'au cours des cycles de charge, les poutrelles prenaient progressivement une déformation dans le plan horizontal, leur donnant la forme d'une ligne brisée dans ce plan. Tout s'est passé comme si les différents tronçons étaient au droit des trois rotules plastiques B, D, E, articulés autour d'axes verticaux.

Ce mouvement de serpentement a été probablement provoqué par une légère dissymétrie du montage d'essai, dissymétrie qui n'était cependant pas appréciable à l'œil nu.

C'est ce serpentement qui a entraîné la mise hors service de la plupart des poutrelles, alors que leurs déformations verticales étaient, dans certains cas, relativement modérées.

A titre d'exemple, on donne aux figures 26 et 27 des diagrammes flèches-charges pour un cas de stabilisation et un cas de non stabilisation. Ces deux figures correspondent à des expériences faites avec la valeur ${}^1/_4$ du paramètre γ.

Fig. 25

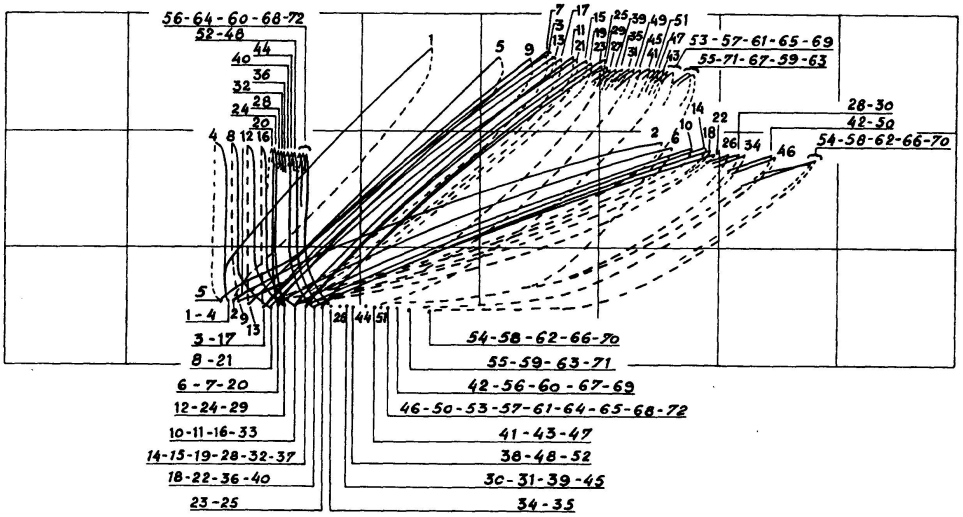

Fig. 26

La figure 26 correspond à l'essai sur la poutrelle n⁰ 9 réalisé avec la charge $P =$ 7,70 tonnes, dans lequel on a obtenu, après 18 cycles, la stabilisation pratique: flèches n'augmentant plus que de 0,5 centième de millimètre par cycle, déformations dans les rotules n'augmentant plus que de 5 millionièmes par cycle. La déformation plastique maximum lue aux tensomètres ohmiques a été de 4485 millionièmes.

La figure 27, elle, correspond au premier essai $\gamma = {}^1/_4$, réalisé avec la charge $P = 8{,}11$ tonnes, dans lequel aucune stabilisation n'était visible après 16 cycles. Bien que les flèches résiduelles verticales aient marqué une certaine tendance à se stabiliser, la poutre a pris des déplacements transversaux rapidement croissants qui ont fini par la mettre hors service (les valeurs des déplacements permanents à la fin du 16e cycle étaient $-5{,}5$ mm en D et $+10{,}5$ mm en E).

On a représenté à la figure 28 les courbes montrant l'augmentation de la flèche résiduelle verticale en fonction du nombre des cycles, dans le cas $\gamma = {}^1/_2$. Les courbes sont cotées en valeurs de la force appliquée. La figure 29 donne les courbes analogues pour le cas $\gamma = {}^1/_4$. Le tableau ci-après récapitule les principaux renseignements tirés des sept essais de stabilisation.

On peut conclure que:

1⁰ La charge expérimentale pour laquelle les déformations plastiques dans le plan de l'âme tendent à se stabiliser est sensiblement égale à la charge de stabilisation théorique.

2⁰ Les déformations dans le plan de l'âme sont accompagnées de déformations horizontales qui finissent par mettre la poutrelle hors service, sûrement pour des charges supérieures aux charges de stabilisation théoriques et probablement dès que la charge dépasse 95% des charges théoriques.

On notera spécialement l'importance des déformations horizontales que présentent toutes les poutrelles après l'essai. Ces déformations sont un effet

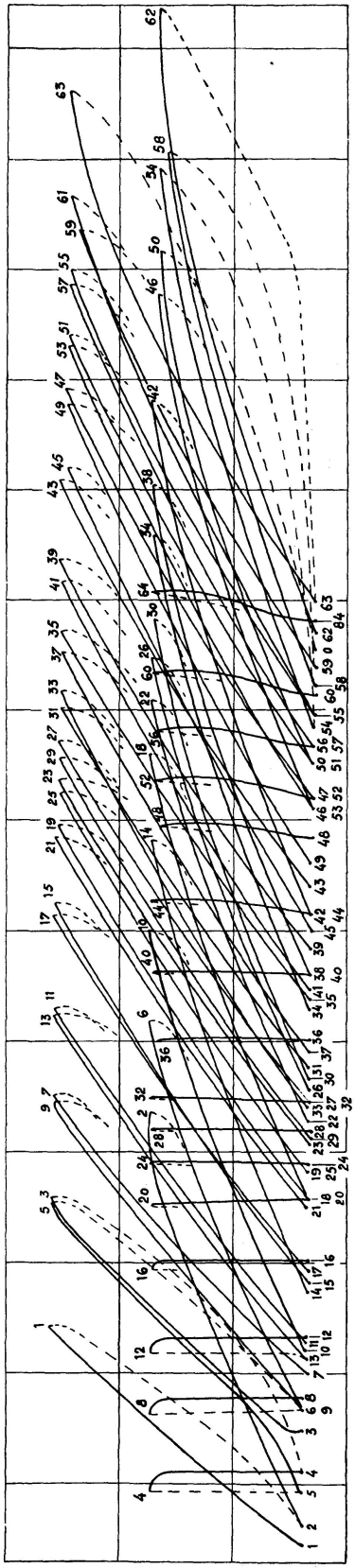

Fig. 27

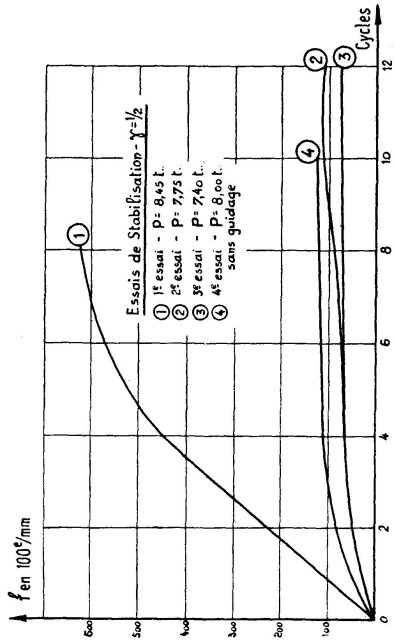

Fig. 28

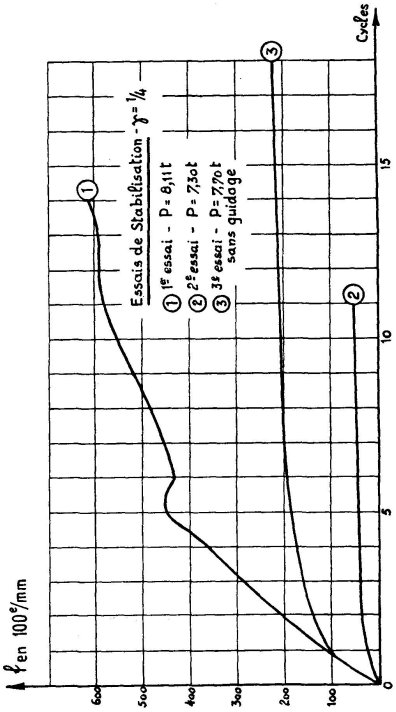

Fig. 29

absolument caractéristique et inattendu des cycles de charge appliqués à des poutrelles non maintenues latéralement. On notera aussi que, pour les charges inférieures à la charge de stabilisation théorique, les flèches verticales tendaient nettement vers une limite, tandis qu'il n'y avait pas de limite visible pour les essais sur les poutrelles 3 et 7 à des charges supérieures à la charge théorique de stabilisation. L'écart entre les flèches finales mesurées par les comparateurs et le fleximètre enregistreur s'explique par le fait que cet appareil était fixé excentriquement et que la poutrelle prenait des déformations de torsion appréciables.

13. Essais de stabilisation avec guidage latéral

Généralités. On a exécuté neuf essais de stabilisation sur des poutrelles neuves guidées latéralement au droit des appuis comme il a été décrit au paragraphe 6. Dans sept de ces neuf essais, on a muni la poutrelle de 6 tensomètres ohmiques disposés sur les deux semelles, dans les trois sections où devaient se produire les rotules plastiques.

Ensuite, on a exécuté, avec de très fortes charges, trois essais de stabilisation sur celles des poutrelles essayées antérieurement qui avaient subi les plus faibles déformations permanentes. Dans ces expériences, on n'a pas mesuré les déformations, mais uniquement les flèches. Les diagrammes figures 30, 31, 32 et 33 indiquent comment ont varié, dans les douze essais, les flèches résiduelles lues aux comparateurs en fonction du nombre de cycles. On constate que les flèches verticales tendent généralement à se stabiliser, même pour des charges nettement supérieures à la charge théorique de stabilisation. *Cependant,*

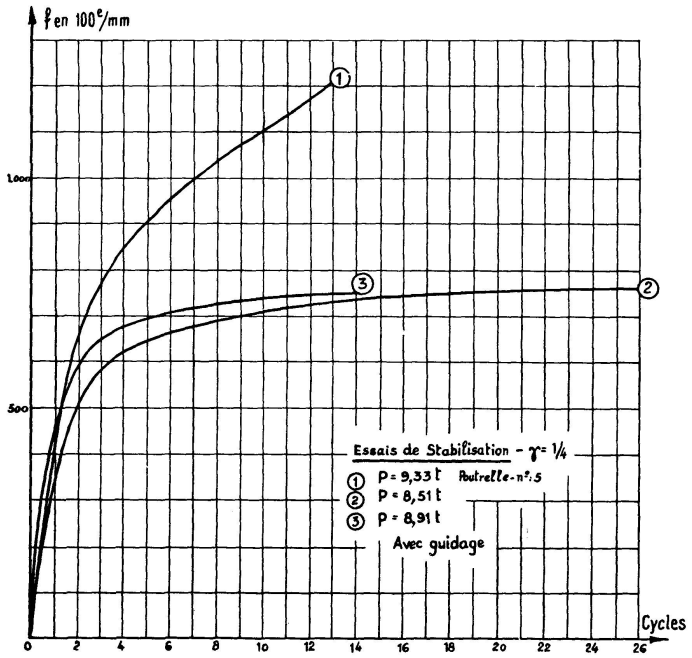

Fig. 30

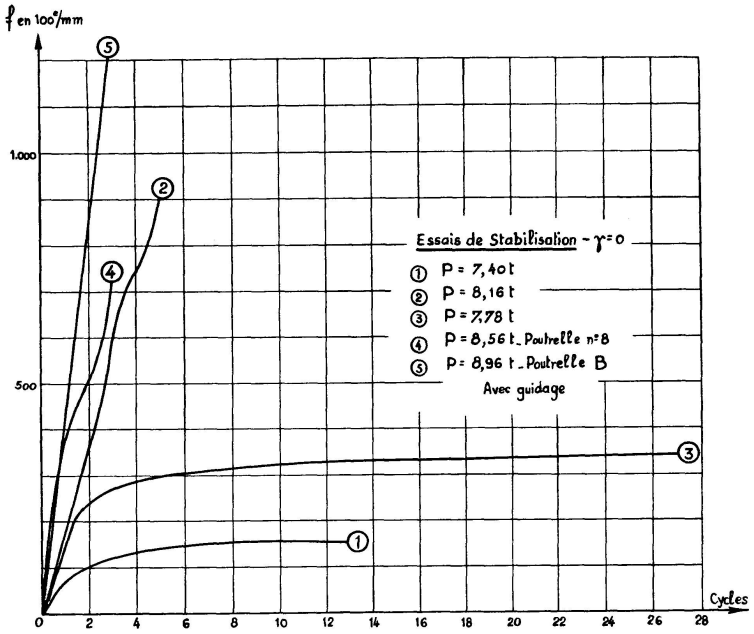

Fig. 31

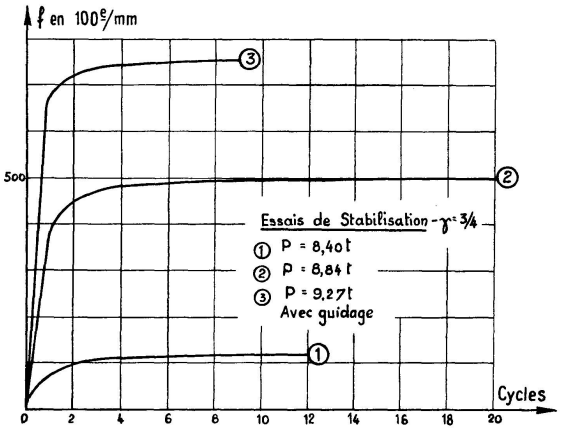

Fig. 32

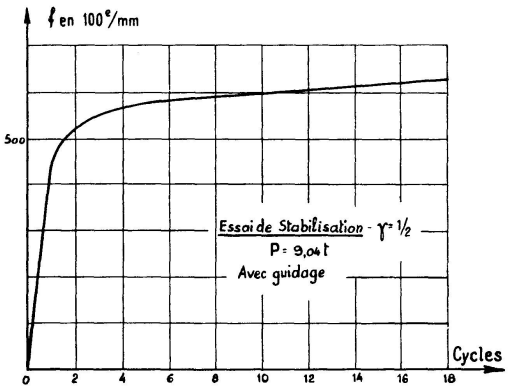

Fig. 33

Observations	forte déformation horizontale	idem	déversement final	forte déformation horizontale	déversement final
déformations horizontales finales en 100e de mm	+ 50 + 200	+ 400 − 1400		0 + 500	+ 1050
déformations horizontales finales en 100e de mm	− 300 + 1200	+ 50 + 1100		− 100 0	− 550
flèche finale relevée au fleximètre enregistreur	? 675	? 825		50 190	1410
écart final Δf en 100e de mm	0,5 2,5	1,0 28		0 0,5	33
f_2/f_1	1,193 2,12	1,44 > 2,92		1,41 1,58	3,04
flèche en 100e de mm à la fin de l'essai = f_2	74 110	124 > 671		49,5 222	639
flèche en 100e de mm après 2 cycles = f_1	62 52	86 230		35 141	210
Nombre de cycles exécutés	12 18	11 9		11 18	16
$P/P^{\text{expérimental}}_{\text{adaptation}}$	0,783 0,820	0,847 0,894		0,772 0,815	0,858
$P/P^{\text{mixte}}_{\text{stabilisation}}$	0,856 0,897	0,926 0,978		0,882 0,930	0,979
$P/P^{\text{théorique}}_{\text{stabilisation}}$	0,900 0,942	0,973 1,028		0,926 0,977	1,030
charge P en tonnes	7,40 7,75	8,00 8,45		7,30 7,70	8,11
valeur de γ	$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{4}$	
N° de la poutrelle	5 4	6 3		8 9	7

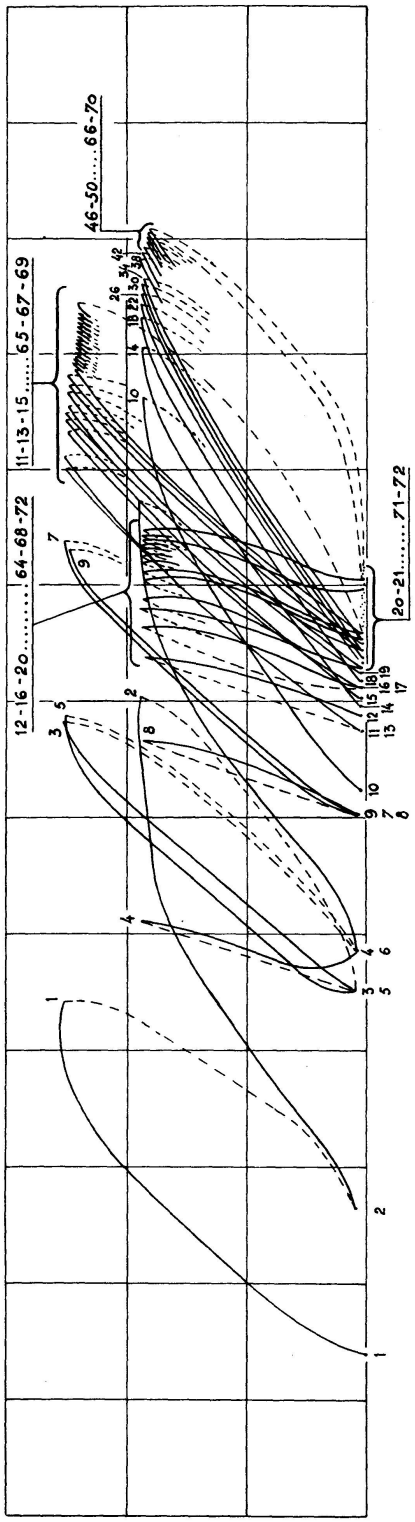

Fig. 34

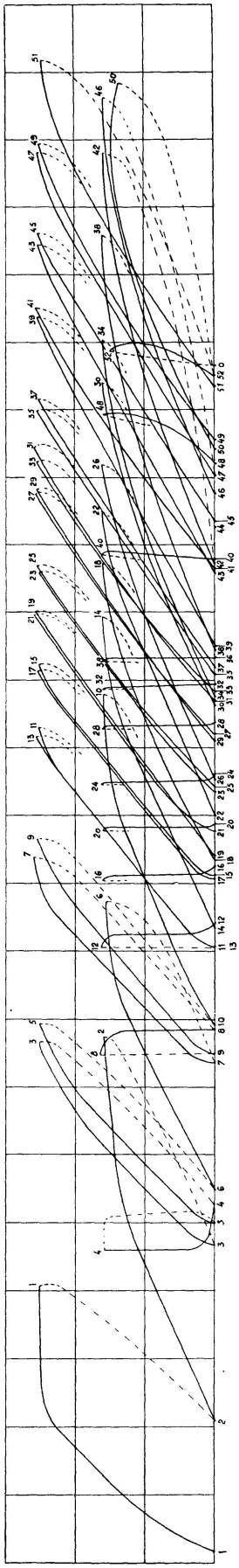

Fig. 35

cette stabilisation correspond, pour les charges les plus élevées, à des flèches inacceptables en service, de sorte que la poutrelle doit, malgré cette stabilisation, être considérée comme hors service. Les diagrammes obtenus au fleximètre enregistreur présentent, selon le cas, un aspect semblable à celui des figures 26 ou 27; il est donc inutile de les reproduire tous.

On se bornera à donner deux exemples de diagrammes obtenus dans les essais complémentaires. Le premier de ces diagrammes (figure 34) correspond à l'essai de la poutrelle n° 18 sous une charge $P = 9{,}04$ tonnes, dépassant de 10% la charge de stabilisation théorique. Les flèches ont fini par se stabiliser, mais la flèche de stabilisation dépasse 6 mm, de sorte qu'à ce moment la poutre doit être considérée comme hors service.

Le second diagramme (figure 35) a été relevé dans l'essai complémentaire de la poutrelle n° 5 avec $\gamma = {}^1/_4$, sous une charge 9,33 tonnes dépassant de 18% la charge de stabilisation théorique. Les flèches verticales ont fini par recommencer à croître et la poutrelle a été finalement mise hors service par excès de déformation.

Les principaux résultats tirés des douze essais de stabilisation sont consignés au tableau ci-après.

Rappelons la définition de la charge expérimentale de stabilisation énoncée au paragraphe 9, d'après laquelle $P_{stabilisation}$ correspond à une flèche:

$$f_{résiduelle\ stabilisation} = f_{permanente\ adaptation} = 3{,}00 \text{ mm}$$

En se basant sur cette définition et sur les résultats consignés dans le tableau, on peut déterminer les charges expérimentales de stabilisation en traçant les diagrammes donnant la flèche de stabilisation en fonction de la charge P:

a) Pour $\gamma = 0$, en utilisant les essais 13, 15, 19, on obtient le diagramme représenté à la figure 36. On constate que

$$P^{\gamma=0}_{stabilisation} = 7{,}70 \text{ tonnes}$$

b) D'une façon analogue, on construira le diagramme relatif à $\gamma = {}^1/_4$, en utilisant les essais n° 8, 9, 7, réalisés sans guidage latéral et les essais n° 16, 17 et 5 réessayé. Ce diagramme est représenté à la figure 37; il donne

$$P^{\gamma=1/4}_{stabilisation} = 7{,}80 \text{ tonnes}$$

c) Pour $\gamma = {}^1/_2$, les essais 5, 4 et 6, réalisés sans guidage latéral et l'essai n° 18 sur poutrelle guidée donnent le diagramme figure 38. On a abandonné l'essai n° 3, dans lequel l'absence de guidage a occasionné un déversement prématuré de la poutrelle. On déduit du diagramme que

$$P^{\gamma=1/2}_{stabilisation} = 8{,}65 \text{ tonnes}$$

d) Enfin, pour $\gamma = {}^3/_4$, les essais n° 10, 11, 12, donnent le diagramme figure 39, d'où l'on déduit

$$P^{\gamma=3/4}_{stabilisation} = 8{,}60 \text{ tonnes}$$

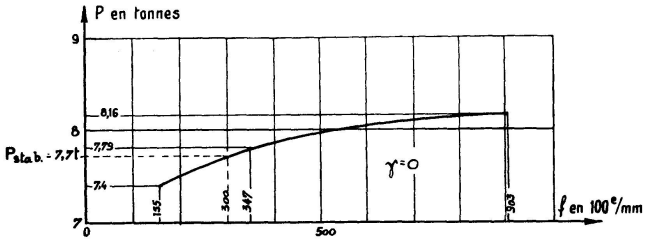

Fig. 36

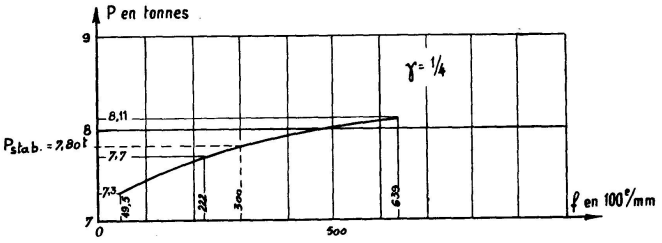

Fig. 37

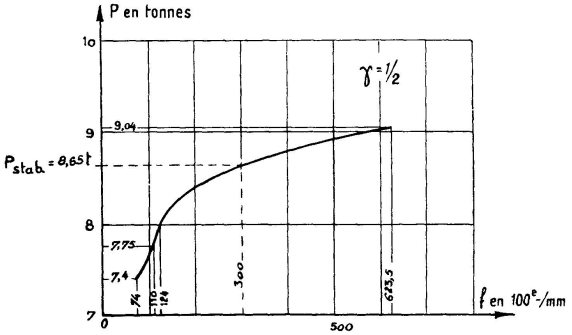

Fig. 38

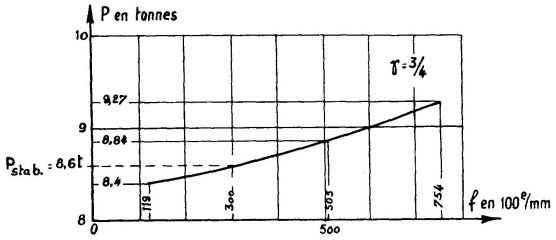

Fig. 39

| Observations | | |

14. Diagrammes résumant les résultats obtenus

On peut résumer les principaux résultats obtenus jusqu'ici en construisant un diagramme (figure 40) dans lequel on porte le paramètre γ en abscisses et les charges expérimentales de stabilisation en ordonnées. On a fait figurer en pointillé sur ce diagramme, la courbe théorique d'équation:

$$P_{stabilisation} = \frac{96\,M_p}{l\,(19-3\,\gamma)} = \frac{16\,P_{adaptation}}{19-3\,\gamma} \tag{11}$$

déduite des équations (7) et (11), dans laquelle on a remplacé $P_{adaptation}$ par la moyenne (9,45 tonnes) des valeurs expérimentales.

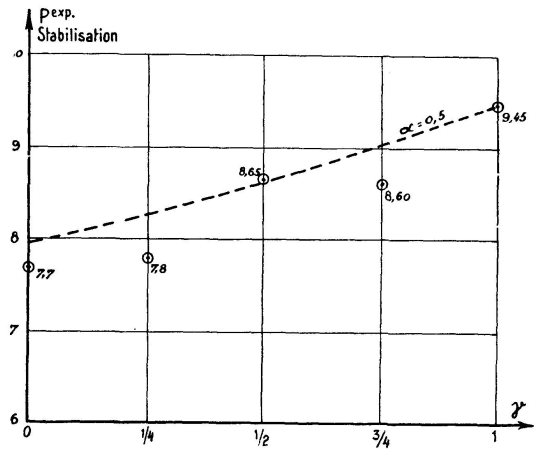

Fig. 40

Les points expérimentaux obtenus à l'aide de poutrelles non guidées sont représentés sur le diagramme par un petit triangle, et ceux correspondant aux poutrelles guidées latéralement par un petit cercle.

A la figure 41, on a reproduit à nouveau en pointillé le diagramme théorique de la figure 10, établi en détail au paragraphe 3, et on y a reporté les valeurs du rapport

$$\rho = \frac{P^{expérimentale}_{adaptation}}{P^{expérimentale}_{stabilisation}}$$

correspondant respectivement à $\gamma = 0$, $^1/_4$, $^1/_2$, $^3/_4$ et 1.

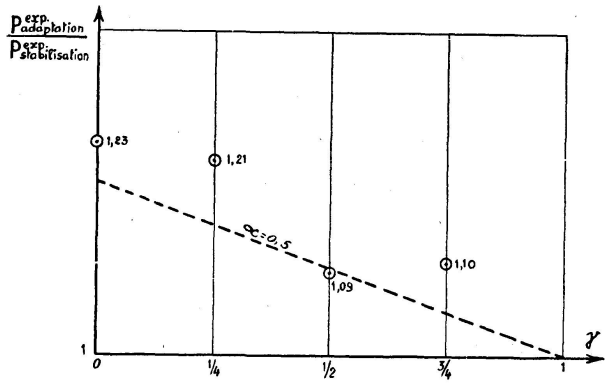

Fig. 41

Les diagrammes figures 40 et 41 montrent que les valeurs expérimentales du rapport ρ sont généralement supérieures aux valeurs théoriques, c'est-à-dire que les charges de stabilisation sont généralement moindres que celles calculées par la formule (11).

15. Conclusions générales

En condensant les résultats obtenus dans les paragraphes précédents, on peut formuler les cinq conclusions générales suivantes:

1. Les valeurs expérimentales des charges de stabilisation et d'adaptation plastique dépendent légèrement du critère expérimental admis pour définir ces charges. Avec les critères qui ont été adoptés dans la présente recherche (cf. § 9), on obtient les valeurs moyennes suivantes:

γ	charges expérimentales	charges théoriques
1	9,45	8,99
¾	8,60	8,59
½	8,65	8,22
¼	7,80	7,88
0	7,70	7,57

On constate que les charges expérimentales sont en général légèrement supérieures aux valeurs théoriques; celà est dû principalement à ce que la théorie néglige l'écrouissage de l'acier dans la zône des grands allongements.

On peut donc se fier en pratique aux valeurs théoriques.

2. Par contre, le rapport de la charge expérimentale de stabilisation à la charge expérimentale d'adaptation est généralement plus faible que celui prédit par la théorie et est inférieur à ce dernier d'environ 6 pour cent.

3. La diminution de résistance due aux cycles de charge est sensible et indiscutable. *Contrairement à l'opinion émise par plusieurs auteurs, il est donc absolument nécessaire de prendre en considération l'effet de ces cycles dans les calculs de stabilité.*

4. Pour une poutrelle en double té continue sur trois appuis, mais non guidée sur ces appuis, les cycles de charge provoquent progressivement des déformations horizontales excessives dès que la charge dépasse les 95 pour cent de la charge de stabilisation théorique. *Il serait donc dangereux de vouloir appliquer la théorie de la flexion plastique à des poutres hyperstatiques qui ne sont pas convenablement maintenues latéralement.*

5. La charge maximum élastique que peut supporter la poutre est 6,5 tonnes. Si l'on compare ce nombre aux valeurs théoriques des charges d'adaptation et de stabilisation, on constate que la théorie de la flexion plastique permet, dans le cas actuel, d'augmenter les charges de service d'environ 38% quand $\gamma = 1$ et que ce chiffre se réduit à 16% pour $\gamma = 0$.

16. Remerciements

Je tiens, en terminant, à remercier les hautes personnalités de la C.E.C.M. qui ont permis la réalisation de cette étude.

Je me fais un plaisir particulier de signaler que, comme toutes les recherches prévues au programme de la C.E.C.M., celle-ci est le résultat d'une collaboration étroite et continue entre M. H. Louis, Inspecteur Général des Ponts et Chaussées, M. F. Hebrant, Directeur Technique de la C.E.C.M. et le signataire de ces lignes.

Mes remerciements vont enfin au personnel du Bureau Technique de la C.E.C.M. ainsi qu'à celui du Laboratoire, dont la collaboration dévouée a permis de mener cette étude à bonne fin.

Annexe

Etude de l'effet des déformations dues à l'effort tranchant sur
$P_{élastique}$, $P_{adaptation}$, $P_{stabilisation}$

A. Etudions d'abord la sollicitation de la poutre chargée d'une force P au milieu de la travée de gauche. La méthode la plus simple consiste à prendre comme inconnue hyperstatique la réaction de l'appui central, puis à appliquer une force X à la poutre en ce point et à écrire que la somme des flèches du point 2 doit être nulle:

$$f^P_{flexion} + f^P_{cisaill.} + f^X_{flexion} + f^X_{cisaill.} = 0 \tag{1}$$

Avec les notations de la figure 42, et en appelant G le module d'élasticité transversale et Ω' la section réduite de la poutre intervenant dans sa déformation par cisaillement, on trouve:

$$f^X_{flexion} = \frac{X l^3}{6 EI}; \qquad f^X_{cisaill.} = -\frac{X l}{2 G\Omega'}$$

$$f^P_{flexion} = \frac{11}{96} \cdot \frac{P l^3}{EI}; \qquad f^P_{cisaill.} = \frac{P l}{4 G\Omega'}$$

L'équation (1), après quelques calculs, donne:

$$X = \frac{11 + 24 \dfrac{EI}{G\Omega' l^2}}{16 + 48 \dfrac{EI}{G\Omega' l^2}} = P$$

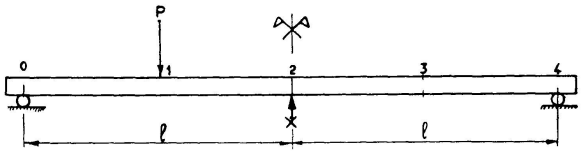

Fig. 42

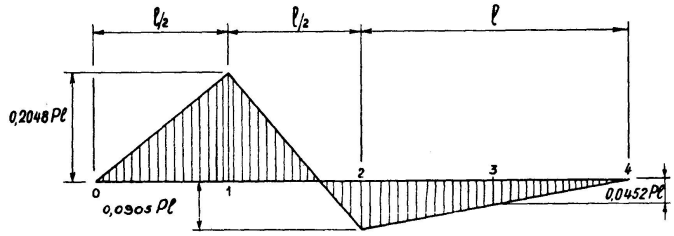

Fig. 43

on a $E/G = 2(1+\eta) = 2{,}6$. Ω' vaut pratiquement la section de l'âme de la poutrelle, soit $\Omega' = 105 \cdot 5{,}1 = 536$ mm²; $l = 1145$ mm; on trouve

$$\frac{24\,EI}{G\,\Omega'\,l^2} = 0{,}2875$$

et

$$X \equiv R_2 = 0{,}6810\,P$$

On en déduit par la statique:

$$R_0 = 0{,}4095\,P\,;\quad R_4 = -0{,}0905\,P$$

Le diagramme des moments correspondants est représenté à la figure 43.

Par superposition, on obtient le diagramme des moments correspondant à deux charges P égales.

On a

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{0{,}1805}{0{,}1596} = 1{,}13$$

au lieu de 1,20 par la théorie classique. La correction vaut la peine d'être prise en considération.

B. Examinons à présent l'*effet des déformations dues à l'effort tranchant sur la charge de stabilisation.* Les équations définissant la charge de stabilisation s'écrivent, par analogie avec le paragraphe 3 E.,

$$0{,}2048\,Pl - 0{,}0452\,\gamma\,Pl + \frac{m_2}{2} = 0{,}1805\,Pl - m_2 = M_p$$

On en déduit aisément:

$$P_{stabilisation} = \frac{M_p}{l\,(0{,}1968 - 0{,}0301\,\gamma)}$$

Pour $\gamma = 1$, on trouve:

$$P^{\gamma=1}_{stabilisation} = P_{adaptation} = \frac{M_p}{0{,}1667\,l} = \frac{6\,M_p}{l}$$

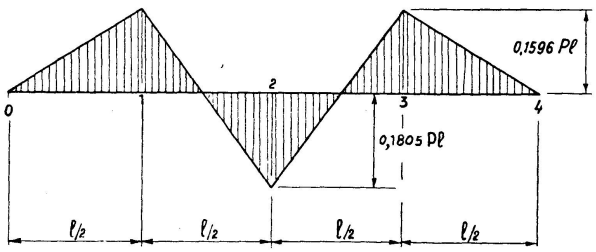

Fig. 44

ce qui doit être puisque les déformations dues à l'effort tranchant n'interviennent pas dans le calcul de $P_{adaptation}$, qui est un pur calcul de statique.

Pour $\gamma = 0$, on trouve:

$$P^{\gamma=0}_{stabilisation} = \frac{M_p}{0{,}1968\, l} = 5{,}08 \cdot \frac{M_p}{l} \text{ au lieu de } \frac{5{,}05\, M_p}{l}$$

par la théorie classique.

La correction est inférieure à 1%, c'est-à-dire négligeable.

Bibliographie

1. H. Bleich: Über die Bemessung statisch unbestimmter Stahltragwerke unter Berücksichtigung des elastisch-plastischen Verhaltens des Baustoffes. Bauingenieur, vol. 19/20, p. 261, 1932.
2. E. Melan: Theorie statisch unbestimmter Systeme. Publ. Prelim. Congr. Berlin de l'A.I.P.C., 1936, p. 45.
3. B. G. Neal: Plastic collapse and shake-down theorems for structures composed of strain-hardening material. Journ. Aero. Sci., vol. 17, p. 297, mai 1950.
4. P. S. Symonds et B. G. Neal: The calculation of failure loads on plane frames under arbitrary loading programmes. Journ. Inst. Civil Engrs., vol. 35, p. 40, nov. 1950.
5. F. Bleich: Dimensionnement des systèmes hyperstatiques d'après la théorie de la plasticité. 2e congrès de l'A.I.P.C., Berlin 1936, Publ. Prélim., p. 135.
6. K. Klöppel: Sur la plasticité dans les poutres continues sollicitées dynamiquement. 2e congrès de l'A.I.P.C., Berlin 1936, Rapport final, p. 77.
7. J. Dutheil: L'exploitation des phénomènes d'adaptation dans les ossatures en acier doux. Ann. Inst. Techn. Bât. Trav. Publ., janvier 1949, p. 32.
8. J. Dutheil: La conception des ossatures métalliques basée sur la déformation plastique „l'Ossature Métallique" n° 3, 1949, p. 143.
10. J. W. Roderick et I. H. Philips: Engineering Structures, Butterworths Scientific Publications, London 1949, pp. 9—48.
11. J. W. Roderick et J. Heyman: Proc. Inst. Mech. Engrs., vol. 165, 1951, pp. 189—197.
12. M. R. Horne: Publ. Prélim. 4e Congrès de l'A.I.P.C., Cambridge 1952, pp. 147—164.

Résumé

Le gain de résistance résultant de l'égalisation progressive des moments dans les systèmes hyperstatiques en acier doux par formation d'une série de rotules plastiques ne s'applique qu'au cas où toutes les charges extérieures grandissent proportionnellement.

Si les charges maxima sont appliquées dans un ordre quelconque ou se déplacent sur la construction, la théorie montre que le système peut être mis hors service sous des charges plus faibles que celles d'adaptation plastique, par suite du cumul des petites déformations plastiques.

Les expériences réalisées montrent que, contrairement à l'avis de plusieurs spécialistes, ce cumul des déformations se produit sous des charges approximativement égales à celles prédites par la théorie. On peut donc se fier en

pratique aux valeurs théoriques et il est d'ailleurs absolument nécessaire de prendre le phénomène de cumul en considération dans les calculs de stabilité.

Les essais ont en outre montré qu'il est dangereux d'appliquer la théorie de la flexion plastique à des poutres hyperstatiques qui ne sont pas convenablement maintenues latéralement.

Zusammenfassung

Wenn alle äußern Lasten gleichmäßig anwachsen, darf bei statisch unbestimmten Systemen eine Erhöhung der Tragfähigkeit erwartet werden, die so zustande kommt, daß an einigen Stellen plastische Gelenke entstehen, was zu einem Ausgleich der Momente führt.

Werden die größten Lasten nach irgend einer Reihenfolge aufgebracht oder sind sie beweglich, dann zeigt die Theorie, daß infolge einer Überlagerung von kleinen plastischen Verformungen das System schon unter Lasten außer Gebrauch gesetzt wird, die unter der für den Fall völliger plastischer Anpassung ermittelten Maximallast liegen.

Die ausgeführten Versuche decken sich mit den theoretischen Ergebnissen; auch bei Stabilitätsberechnungen muß die Erscheinung der Häufung plastischer Verformungen berücksichtigt werden.

Überdies haben die Versuche gezeigt, daß es gefährlich sein kann, die Theorie der Biegung im plastischen Bereich auf seitlich ungenügend ausgesteifte Träger anzuwenden.

Summary

The increase in strength resulting from the progressive equalisation of moments in statically redundant systems of mild steel, by the formation of a series of plastic hinges, only applies to the case in which all the external loads increase proportionally.

If the maximum loads are applied to the structure or removed from it in random order, the theory shows that the system can be made unserviceable under loads less than those which produce total plastic yield (collapse), in consequence of the aggregation of small plastic deformations.

The experiments undertaken show that, contrary to the opinion of several specialists, this aggregation of deformations is produced under loads approximately equal to those predicted by the theory. One can therefore rely in practice on theoretical values and it is moreover absolutely necessary to take into consideration the phenomenon of shake-down in calculations of stability.

The tests have further shown that it is dangerous to apply the theory of plastic bending to statically indeterminate beams which are not adequately supported laterally.