Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 13 (1953)

Artikel: Adaptions plastiques au bord des surfaces de révolution
Autor: Levi, Franco
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-13202

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Adaptations plastiques au bord des surfaces de révolution[1])

Plastische Anpassungen am Rande von Rotationsflächen

Plastic re-adjustment at the boundary of surfaces of revolution

Prof. Ing. Franco Levi, Politecnico di Torino, Torino

Introduction

La prise en compte des phénomènes d'adaptation qui se vérifient dans les constructions à la suite du dépassement local des limites d'élasticité présente un intérêt tout particulier quand le régime des contraintes, calculées d'après la théorie de l'élasticité, donne lieu à des concentrations d'efforts sur des régions relativement peu étendues. Dans ce cas en effet le calcul des marges de sécurité fondé sur l'hypothèse élastique conduit à des résultats fort éloignés de la réalité du moment que l'intervention des déformations anélastiques (lesquelles peuvent consister soit en de véritables deformations plastiques, soit en une fissuration plus ou moins étendue) peut provoquer une importante redistribution des sollicitations entre les zones surchargées et les régions voisines qui disposent encore d'une bonne marge de résistance.

Ceci se produit en particulier au voisinage des bords des surfaces de révolution en correspondance desquels se développent souvent des efforts considérables qui sont destinés à rendre compatibles les déformations d'ensemble de la surface (déformations du régime de membrane) avec les conditions de liaison auxquelles les bords eux-mêmes se trouvent soumis.

Dans ce genre de problèmes une étude élasto-plastique de l'équilibre est rendue particulièrement intéressante par les raisons suivantes:

a) En général les moments fléchissants et les poussées qui agissent sur les bords ne provoquent des contraintes importantes que dans certains des éléments résistants en présence (méridiennes par exemple), et les efforts intenses

[1]) Ce mémoire, remis au Secrétariat du 4e Congrès avant les réunions de Cambridge, n'a pu être inséré dans le rapport final, le texte n'en ayant pas été discuté au cours des séances.

se concentrent dans une région fort peu étendue. Ceci donne de larges possibilités aux phénomènes de redistribution auxquels nous avons fait allusion.

b) Les déformations que la surface subit „en régime de membrane" sont relativement petites [1] en sorte que des déformations anélastiques même très limitées ont une influence considérable sur le régime des contraintes.

c) Souvent la surface étudiée est soumise à des conditions de charge relativement simples et il est facile de prévoir l'allure de la loi de variation des contraintes locales.

C'est là à notre sens un point très important sur lequel il faut toujours fixer son attention au moment d'entreprendre l'étude d'un problème d'équilibre au delà de la limite élastique. Il faut en effet se rappeler que la loi de déformation des matériaux plastifiés n'est pas réversible et qu'elle n'est pas redevable du principe de superposition. Il s'en suit des complications analytiques inextricables si l'on ne peut se procurer a priori quelques renseignements sur l'allure du phénomène: par exemple si l'adaptation plastique donne lieu à une rétrogradation d'efforts dans une région déjà plastifiée il faudrait, pour cette région, adopter la loi de déformation du matériau écroui. C'est pourquoi la plupart des problèmes élasto-plastiques qui ont été traités jusqu'à présent concernent des exemples dans lesquels on peut prévoir à priori que les contraintes sont une fonction toujours croissante de la sollicitation [2]. Il en sera précisément ainsi dans le réservoir vertical rempli de liquide qui nous servira d'exemple par la suite. Nous démontrerons en effet que les contraintes normales agissant sur la section transversale au voisinage du bord inférieur sont une fonction croissante de la hauteur de remplissage aussi bien en régime élastique qu'en régime elasto-plastique[2]).

Position du problème et hypothèses simplificatrices adoptées

Nous conduirons tout d'abord notre étude dans un cas particulier. Par la suite nous nous efforcerons de dégager des résultats obtenus des conclusions de portée plus générale.

L'exemple dont nous partirons est celui d'un réservoir cylindrique vertical encastré à sa base, rempli d'eau. Après avoir procédé au dimensionnement du réservoir au moyen de procédés ordinaires de calcul, nous imaginerons d'en augmenter la hauteur jusqu'à provoquer le dépassement des limites élastiques dans la section de base.

Pour mener à bien le calcul au delà de la limite élastique, nous adopterons alors deux lois différentes pour la relation moment fléchissant-courbure, l'une valable pour la région plastifiée, l'autre pour la région élastique. Nous serons

[2]) Une autre façon de procéder consiste à fixer intuitivement la localisation des déformations plastiques [3]. Cette méthode donne souvent des résultats intéressants dans les problèmes à faible degré d'hyperstaticité.

ainsi conduits à deux équations différentielles distinctes que nous pourrons écrire indifféremment en fonction de la déformation radiale ou du moment de flexion longitudinal. L'introduction des conditions au contour, qui sont constituées ici par les limites imposées à la déformation aux extrémités du réservoir et par la condition de continuité au passage d'une région à l'autre, nous consentira d'étudier simultanément le régime des deformations et celui des contraintes. En particulier, le calcul des constantes impliquera automatiquement la résolution des conditions d'hyperstaticité.

Ainsi que nous l'avons souligné ci-dessus, notre étude ne sera valable que dans la mesure où nous pourrons démontrer qu'en chaque point de la région plastifiée la contrainte sera une fonction croissante de la hauteur de remplissage.

D'une manière générale, nos développements se fonderont sur les hypothèses suivantes:

a) Localisation des déformations anélastiques sur les bords de la section transversale et conservation des sections planes. Nous verrons cependant que notre procédé peut s'appliquer au cas où les déformations anélastiques interviennent dans la direction circonférentielle.

b) Possibilité de tenir compte de l'effet des déformations non-élastiques par l'adoption, dans le sens des génératrices, d'une loi moment de flexion — courbure opportunément modifiée. Cette hypothèse constituerait certainement une approximation relativement grossière si nous voulions étudier en détail l'effet local du phénomène anélastique. Mais il n'y a pas de doute que si l'on se place au point de vue du technicien qui se préoccupe de l'allure générale du régime d'équilibre, et qui cherche surtout à évaluer les marges de sécurité, une telle façon de procéder suffit à rendre compte des principaux effets des déformations anélastiques.

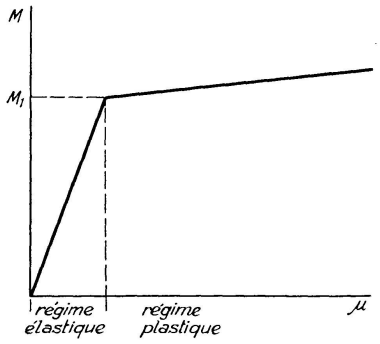

Fig. 1a

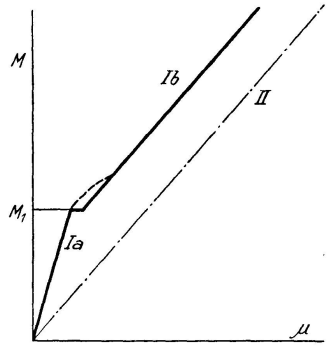

Fig. 1b

En pratique, dans notre exemple, des considérations d'ordre analytique nous conduiront à adopter une loi moment de flexion — courbure formée par deux droites de pente différente (fig. 1a). Cette représentation schématique se rapproche assez bien du phénomène physique quand on a affaire à une construction en béton armé. Dans ce cas, en effet, il a été démontré, aussi bien théoriquement que par voie d'expérience, que si l'on fait abstraction d'un intervalle relativement bref qui suit la fin de la période élastique, la loi de

déformation d'une poutre fléchie est representée, au delà de la limite élastique, par une droite assez fortement couchée sur l'axe des abscisses [4] (fig. 1 b).

Notre représentation s'adapte par contre moins bien au cas d'une construction métallique. On sait en effet que pour une section rectangulaire formée par un matériau qui passe instantanément du régime parfaitement élastique au régime parfaitement plastique, la courbe représentative de la relation moment flechissant — courbure a une allure asymptotique analogue à celle qui est dessinée dans la fig. 2 [5].

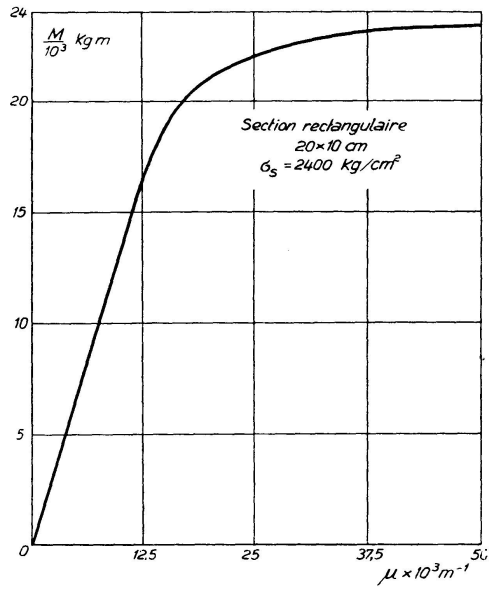

Fig. 2

Cette remarque nous amène à conclure que, d'une manière générale, les résultats que nous obtiendrons se rapprocheront davantage de la réalité dans le cas des constructions en béton armé.

Développements analytiques

La fig. 3 représente le réservoir cylindrique pris comme exemple. Voici d'autre part la liste des notations que nous adopterons par la suite:

Hauteur de remplissage: H.
Epaisseur de la paroi: h.
Moment d'inertie de la paroi (par cm de largeur): I.
Rayon du cylindre: a.
Module d'élasticité: E.
Moment de flexion longitudinal dans la partie plastifiée: M_p.
Id. id. dans la partie élastique: M_e.
Déplacement transversal mesuré suivant le rayon,
dans la partie plastifiée: ω_p.
Id. id. dans la partie élastique: ω_e.
Poids spécifique du liquide qui remplit le réservoir: γ.

Dans la figure 3 nous avons d'autre part indiqué les conventions de signe adoptées pour le moment flechissant, le déplacement transversal et la poussée, cette dernière étant representée par la lettre Q.

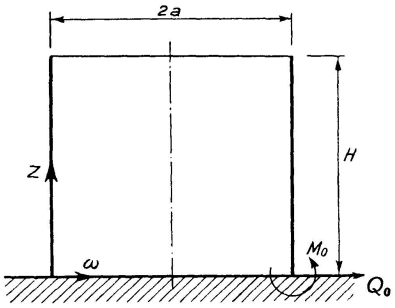

Fig. 3

Voici alors comment on peut écrire les équations différentielles du problème.

Dans la région élastique la relation entre la courbure des génératrices et le déplacement transversal s'écrit:

$$M_e = -D \frac{d^2 \omega_e}{d z^2} \tag{1}$$

où z représente l'abscisse mesurée à partir de la section d'encastrement et où nous avons posé:

$$D = \frac{E I}{1 - \nu^2}$$

Dans la région plastifiée nous écrirons par contre:

$$\frac{d^2 \omega_p}{d z^2} = -f(M_p) \tag{2}$$

Ceci posé, nous remarquons que les conditions d'équilibre nous permettent d'écrire, aussi bien dans la zone élastique que dans la zone plastique, la relation classique:

$$\frac{d^2 M}{d z^2} - \frac{E h}{a^2} \omega = \gamma (H - z) \tag{3}$$

En nous servant de cette dernière équation nous pouvons alors éliminer ω dans les équations (1) et (2). Ceci nous amène aux équations différentielles suivantes:

Dans la région plastifiée ($z \leqq z_1$)

$$\frac{d^4 M_p}{d z^4} - \frac{E h}{a^2} f(M_p) = 0 \tag{4}$$

Dans la région élastique ($z \geqq z_1$)

$$\frac{d^4 M_e}{d z^4} + \frac{h}{a^2 I} M_e = 0 \tag{5}$$

(dans cette dernière relation nous avons posé $\nu = 0$).

L'intégration de l'équation (4) n'étant pratiquement possible que si $f(M_p)$ prend une forme linéaire, nous adopterons la loi representée dans la figure 1a et nous écrirons:

$$f(M_p) = c\,M_p + d \tag{6}$$

L'équation (4) s'écrira donc:

$$\frac{d^4 M_p}{d z^4} + \frac{E h c}{a^2} M_p + \frac{E h d}{a^2} = 0 \tag{4'}$$

Il est alors facile d'écrire les intégrales générales des équations (4') et (5). En fait, pour faciliter le calcul des constantes, nous mettrons ces intégrales sous deux formes différentes, soit:

$$M_p = e^{-\beta z}(C_1 \sin \beta z + C_2 \cos \beta z) + e^{\beta z}(C_3 \sin \beta z + C_4 \cos \beta z) - \frac{d}{c} \tag{7}$$

avec

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{E h c}{a^2}}$$

$$M_e = A\,e^{-\alpha z} \sin(\alpha z + \epsilon) \tag{8}$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{h}{a^2 I}}$$

Notons que l'expression (8) admet implicitement que le réservoir ait une hauteur suffisante pour que l'on puisse négliger l'influence du bord supérieur sur le régime des contraintes.

Dans les expressions (7) et (8) apparaissent six constantes inconnues. Pour les calculer nous devons exprimer les conditions limites qui sont ici les suivantes:

Pour $z = 0$ (section d'encastrement) on doit avoir: $\omega = \frac{d\omega}{dz} = 0$, ce qui peut s'écrire, en tenant compte de l'équation (3):

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 M_p}{d z^2} = \gamma H \\[2ex] \dfrac{d^3 M_p}{d z^3} = -\gamma \end{cases} \tag{9}$$

Pour l'abscisse z_1, en correspondance de laquelle le moment de flexion atteint la valeur limite élastique M_1, les déformées plastiques et élastiques doivent avoir même ordonnée et même tangente. En outre, pour les deux branches, le moment de flexion doit prendre la valeur M_1, tandis que les efforts tranchants doivent s'égaler. Ces dernières conditions s'écrivent: pour $z = z_1$

$$\begin{cases} M_p = M_e = M_1 \\[2ex] \dfrac{d M_p}{d z} = \dfrac{d M_e}{d z} \end{cases} \tag{10}$$

Quant aux conditions de raccord des déformées elles peuvent s'exprimer sous la forme: pour $z = z_1$

$$\begin{cases} \omega_p = \omega_e \\ \dfrac{d\,\omega_p}{dz} = \dfrac{d\,\omega_e}{dz} \end{cases}$$

ce qui s'écrit, en tenant compte de l'équation (3)

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 M_p}{dz^2} = \dfrac{d^2 M_e}{dz^2} \\ \dfrac{d^3 M_p}{dz^3} = \dfrac{d^3 M_e}{dz^3} \end{cases} \tag{11}$$

En définitive, en groupant les égalités (9), (10), (11) nous disposerons de 7 relations qui nous permettront de calculer à la fois les six constantes d'intégration et l'abscisse z_1 qui caractérise le passage de la région plastique à la région élastique.

Commençons alors par utiliser la première des relations (10). En tenant compte de la (8) nous pouvons écrire:

$$M_1 = A\,e^{-\alpha z_1} \sin(\alpha z_1 + \epsilon)$$

et donc:

$$A = M_1 e^{\alpha z_1} \frac{1}{\sin(\alpha z_1 + \epsilon)} \tag{12}$$

En reportant dans l'expression (8) de M_e il vient:

$$M_e = M_1 e^{-\alpha(z-z_1)} \frac{\sin(\alpha z + \epsilon)}{\sin(\alpha z_1 + \epsilon)}$$

Pour introduire les autres conditions de groupe (10) et (11), calculons alors les dérivées successives de M_e et dans les formules obtenues donnons à z la valeur z_1. Il est facile de voir qu'en posant:

$$u = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha z_1 + \epsilon)} \tag{13}$$

il vient:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{d\,M_e}{dz}\right)_1 = -\alpha M_1 (1-u) \\ \left(\dfrac{d^2 M_e}{dz^2}\right)_1 = -2\alpha^2 M_1 u \\ \left(\dfrac{d^3 M_e}{dz^3}\right)_1 = 2\alpha^3 M_1 (1+u) \end{cases} \tag{14}$$

Dès lors les conditions (10) et (11) pourront s'écrire:

$$\begin{cases} e^{-\beta z_1}(C_1 \sin\beta z_1 + C_2 \cos\beta z_1) + e^{\beta z_1}(C_3 \sin\beta z_1 + C_4 \cos\beta z_1) = M_1 + \dfrac{d}{c} \\ \beta\, e^{-\beta z_1}[C_1(\cos\beta z_1 - \sin\beta z_1) - C_2(\sin\beta z_1 + \cos\beta z_1)] + \\ \quad + \beta\, e^{\beta z_1}[C_3(\sin\beta z_1 + \cos\beta z_1) - C_4(\sin\beta z_1 - \cos\beta z_1)] = -\alpha M_1 (1-u) \\ 2\beta^2 e^{-\beta z_1}[-C_1 \cos\beta z_1 + C_2 \sin\beta z_1] + 2\beta^2 e^{\beta z_1}[C_3 \cos\beta z_1 - C_4 \sin\beta z_1] = \\ \qquad\qquad = -2\alpha^2 M_1 u \\ 2\beta^3 e^{-\beta z_1}[C_1(\cos\beta z_1 + \sin\beta z_1) + C_2(\cos\beta z_1 - \sin\beta z_1)] + \\ \quad + 2\beta^3 e^{\beta z_1}[C_3(\cos\beta z_1 - \sin\beta z_1) - C_4(\sin\beta z_1 + \cos\beta z_1)] = 2\alpha^3 M_1 (1+u). \end{cases} \tag{15}$$

On voit que la méthode de calcul adoptée nous permet de séparer le calcul de quatre des constantes recherchées[3]). En résolvant le système d'équations (15) nous aboutissons en effet aux expressions suivantes des constantes C_1, C_2, C_3, C_4, écrites en fonction de u (soit implicitement de z_1 et de ϵ):

$$\left\{\begin{aligned}
C_1 &= e^{\beta z_1}\left[\frac{1}{2}\sin\beta z_1\left(M_1+\frac{d}{c}\right)-\frac{1}{4}\cos\beta z_1\frac{\alpha}{\beta}M_1(1-u)+\frac{1}{4}\sin\beta z_1\frac{\alpha}{\beta}M_1(1-u)+\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{2}\cos\beta z_1\frac{\alpha^2}{\beta^2}M_1 u+\frac{1}{4}\sin\beta z_1\frac{\alpha^3}{\beta^3}M_1(1+u)+\frac{1}{4}\cos\beta z_1\frac{\alpha^3}{\beta^3}M_1(1+u)\right]\\
C_2 &= e^{\beta z_1}\left[\frac{1}{2}\cos\beta z_1\left(M_1+\frac{d}{c}\right)+\frac{1}{4}\sin\beta z_1\frac{\alpha}{\beta}M_1(1-u)+\frac{1}{4}\cos\beta z_1\frac{\alpha}{\beta}M_1(1-u)-\right.\\
&\quad\left.-\frac{1}{2}\sin\beta z_1\frac{\alpha^2}{\beta^2}M_1 u+\frac{1}{4}\cos\beta z_1\frac{\alpha^3}{\beta^3}M_1(1+u)-\frac{1}{4}\sin\beta z_1\frac{\alpha^3}{\beta^3}M_1(1+u)\right]\\
C_3 &= e^{-\beta z_1}\left[\frac{1}{2}\sin\beta z_1\left(M_1+\frac{d}{c}\right)-\frac{1}{4}\sin\beta z_1\frac{\alpha}{\beta}M_1(1-u)-\right.\\
&\quad-\frac{1}{4}\cos\beta z_1\frac{\alpha}{\beta}M_1(1-u)-\frac{1}{2}\cos\beta z_1\frac{\alpha^2}{\beta^2}M_1 u+\frac{1}{4}\cos\beta z_1\frac{\alpha^3}{\beta^3}M_1(1+u)-\\
&\quad\left.-\frac{1}{4}\sin\beta z_1\frac{\alpha^3}{\beta^3}M_1(1+u)\right]\\
C_4 &= e^{-\beta z_1}\left[\frac{1}{2}\cos\beta z_1\left(M_1+\frac{d}{c}\right)-\frac{1}{4}\cos\beta z_1\frac{\alpha}{\beta}M_1(1-u)+\frac{1}{4}\sin\beta z_1\frac{\alpha}{\beta}M_1(1-u)+\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{2}\sin\beta z_1\frac{\alpha^2}{\beta^2}M_1 u-\frac{1}{4}\sin\beta z_1\frac{\alpha^3}{\beta^3}M_1(1+u)-\frac{1}{4}\cos\beta z_1\frac{\alpha^3}{\beta^3}M_1(1+u)\right]
\end{aligned}\right. \tag{16}$$

Il nous faut maintenant introduire les conditions du groupe (9) qui peuvent se mettre sous la forme:

$$\left\{\begin{aligned}
2\beta^2(-C_1+C_3) &= \gamma H\\
2\beta^3(C_1+C_2+C_3-C_4) &= -\gamma
\end{aligned}\right. \tag{17}$$

En introduisant dans le système (17) les valeurs de C_1, C_2, C_3, C_4 on aboutit, après simplification, aux équations suivantes:

$$\left\{\begin{aligned}
&-2\beta^2\left(M_1+\frac{d}{c}\right)\sin\beta z_1\cdot\sinh\beta z_1+\frac{\alpha}{\beta}M_1(\beta^2-\alpha^2)\cos\beta z_1\cdot\sinh\beta z_1-\\
&-\frac{\alpha}{\beta}M_1(\beta^2+\alpha^2)\sin\beta z_1\cdot\cosh\beta z_1-\frac{\alpha}{\beta}M_1(\beta^2+\alpha^2)\cos\beta z_1\cdot\sinh\beta z_1\cdot u+\\
&+\frac{\alpha}{\beta}M_1(\beta^2-\alpha^2)\sin\beta z_1\cosh\beta z_1\cdot u-2\alpha^2 M_1\cos\beta z_1\cosh\beta z_1\cdot u=\gamma H\\
&2M_1\alpha(\alpha\cos\beta z_1-\beta\sin\beta z_1)(\alpha\cosh\beta z_1+\beta\sinh\beta z_1)\cdot u=-\gamma-\\
&-2\cosh\beta z_1\left[\left(M_1+\frac{d}{c}\right)\beta^3\sin\beta z_1+M_1\alpha^3\cos\beta z_1\right]-\\
&-2\beta^2\sinh\beta z_1\left[M_1\alpha\sin\beta z_1+\left(M_1+\frac{d}{c}\right)\beta\cos\beta z_1\right]
\end{aligned}\right. \tag{18}$$

[3]) Les calculs qui suivent ont été effectués par le „Ufficio Calcoli Numerici" de l'Ecole Polytechnique de Turin sous la direction de M. le professeur Buzano.

En éliminant u on est alors conduit à l'expression transcendente suivante qui ne contient que z_1:

$$\begin{aligned}
&2\beta\gamma H(\alpha\cos\beta z_1-\beta\sin\beta z_1)(\alpha\cosh\beta z_1+\beta\sinh\beta z_1)-\gamma(\beta^2+\alpha^2)\cos\beta z_1\sinh\beta z_1+\\
&+\gamma(\beta^2-\alpha^2)\sin\beta z_1\cosh\beta z_1-2\alpha\beta\gamma\cos\beta z_1\cosh\beta z_1-2\left(M_1+\frac{d}{c}\right)\alpha\beta^4(\sin 2\beta z_1+\sinh 2\beta z_1)-\\
&-\left(M_1+\frac{d}{c}\right)\alpha^2\beta^3(\cosh 2\beta z_1-\cos 2\beta z_1)+\left(M_1+\frac{d}{c}\right)\beta^5(2-\cos 2\beta z_1-\cosh 2\beta z_1)- \qquad (19)\\
&-M_1\alpha^4\beta(2+\cos 2\beta z_1+\cosh 2\beta z_1)+2M_1\alpha^3\beta^2(\sin 2\beta z_1-\sinh 2\beta z_1)-\\
&-M_1\alpha^2\beta^3(\cosh 2\beta z_1-\cos 2\beta z_1)=0
\end{aligned}$$

On remarque que dans cette équation z_1 ne figure que sous forme du produit βz_1. Comme la constante β est toujours très petite, nous pouvons simplifier le calcul en développant en série les fonctions qui contiennent le produit βz_1 et nous arrêter aux termes du deuxième degré. Cela nous amène à l'équation:

$$\begin{aligned}
&\beta^4\left(\gamma H+4M_1\alpha^2+2\frac{d}{c}\alpha^2\right)z_1^2+\alpha\left(\alpha\gamma+4M_1\beta^4+4\frac{d}{c}\beta^4\right)z_1-\\
&-\alpha(\alpha\gamma H-\gamma-2M_1\alpha^3)=0
\end{aligned} \qquad (20)$$

dont on tire facilement z_1, en fonction de quantités connues. Pour terminer le calcul il faut alors reporter la valeur de z_1 dans l'expression de u qui dérive de la deuxième équation du groupe (18), après quoi on peut calculer les constantes C_1, C_2, C_3, C_4 d'après les formules (16) et ensuite écrire l'expression (7) du moment M_p. En calculant par ailleurs la constante ϵ d'après la formule (13) et la constante A d'après la formule (12), on peut également écrire l'expression (8) du moment flechissant dans la région élastique.

En posant $z=0$ dans l'expression de M_p et dans sa dérivée par rapport à z on pourra aussi calculer la valeur du moment flechissant et de la poussée dans la section d'encastrement. Enfin, s'il le faut, on tirera de l'équation (3) la loi de variation de ω en fonction de z.

Exemple numérique

Imaginons d'avoir affaire à un réservoir cylindrique parfaitement encastré à sa base ayant les caractéristiques suivantes:

Rayon du cylindre	$a = 400$ cm
Epaisseur de la paroi	$h = 20$ cm
Moment d'inertie par centimètre de paroi	$I = 739{,}7$ cm^3
Densité du liquide de remplissage	$\gamma = 1\cdot 10^{-3}$ kg/cm^3
Module d'élasticité	$E = 210\,000$ kg/cm^2

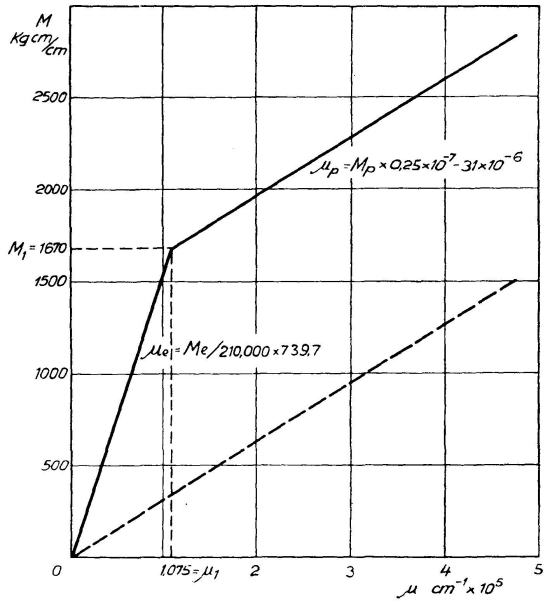

Fig. 4

Si l'on suppose que le niveau de remplissage atteigne 600 cm on trouve par les formules classiques que le moment fléchissant et la poussée à la base prennent les valeurs respectives:

$$M_0 = +1326{,}3 \text{ kg} \cdot \text{cm/cm} \quad H_0 = -41 \text{ kg/cm}$$

Nous admettrons que, dans ces conditions, la paroi se comporte encore d'une manière parfaitement élastique. Plus précisément nous imaginerons que la loi moment de flexion — courbure ait l'allure qui est représentée dans la figure 4 d'après laquelle le moment fléchissant M_1 qui caractérise le passage de la phase élastique à la phase plastique prend la valeur de 1670 kg·cm/cm. Au-dessous de cette valeur la courbure μ et le moment de flexion du régime élastique M_e sont liés par la relation:

$$\mu = -\frac{M_e}{EI} = -\frac{M_e}{210\,000 \cdot 739{,}7} \text{ cm}^{-1}$$

tandis que pour $M > 1670$ la courbure s'exprime en fonction du moment (désigné par M_p pour rappeler que nous avons dépassé la limite élastique):

$$\mu = -\,c\,M_p - d$$

avec:

$$c = +0{,}25 \cdot 10^{-7} \text{ kg}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$$

$$d = -31 \cdot 10^{-6} \cdot \text{cm}^{-1}$$

Naturellement pour $M = 1670$ kg·cm/cm les deux expressions donnent la même valeur de μ soit $1{,}075 \cdot 10^{-5}$ cm^{-1}.

Pour une hauteur de remplissage atteignant 10 mètres les sollicitations à la base du réservoir, calculées en régime élastique, prendraient les valeurs:

$$M_0 = 2325{,}1 \text{ kg} \cdot \text{cm/cm} \quad Q_0 = -70 \text{ kg/cm}$$

Le moment fléchissant serait donc supérieur à la limite élastique. Cela signifie que le calcul doit être effectué en régime élasto-plastique, nous aurons donc recours au procédé de calcul exposé plus haut.

Dans le cas particulier les coefficients des exponentielles qui interviennent dans le calcul (exprimés en kg, cm) valent:

$$\alpha = 1{,}4525 \cdot 10^{-2} \qquad \beta = 0{,}20126 \cdot 10^{-1}$$

De l'équation approchée (20) on tire alors:

$$z_1 = 2{,}77417 \text{ cm}$$

(notons que cette valeur, substituée dans l'équation exacte (19), donne lieu à une verification très satisfaisante).

L'étendue de la région plastifiée est donc inférieure à 3 cm.

La deuxième équation du groupe (18) donne de son côté:

$$u = -1{,}40935$$

On en déduit par l'équation (13):

$$\epsilon = -0{,}65736$$

et donc (d'après la formule (12))

$$A = -3004{,}72394$$

Nous pouvons alors calculer les constantes qui figurent dans l'expression de M_p en nous servant des formules (16); il vient:

$$\begin{aligned} C_1 &= -1393{,}10095 \\ C_2 &= +1662{,}91693 \\ C_3 &= -\ \ 158{,}22441 \\ C_4 &= +\ \ 172{,}91220 \end{aligned}$$

Ces données numériques nous permettent en passant de vérifier que pour $z = z_1$ on a bien $M_e = M_p$. Il vient en effet ici:

$$\text{pour } z = 2{,}77417$$
$$M_e = 1669{,}99552 \qquad M_p = 1669{,}99694$$

De même on vérifie facilement que pour $z = 0$ il vient sensiblement:

$$\frac{d^2 M_p}{d z^2} = \gamma H \qquad \frac{d^3 M_p}{d z^3} = -\gamma$$

ce qui correspond aux conditions limites (9).

Les calculs effectués nous permettent d'exprimer sous forme explicite les lois de variation de M_p et M_e en fonction de z. En particulier on trouve que le moment d'encastrement, obtenu en faisant $z = 0$ dans l'expression de M_p, vaut

$$(M_p)_0 = +1835{,}95 \text{ kg} \cdot \text{cm/cm}$$

En posant $z=0$ dans l'expression de dM_p/dz on obtient d'autre part la valeur de la poussée à la base:

$$Q_0 = -61{,}22 \text{ kg/cm}$$

Au passage d'une zone à l'autre l'effort tranchant prend la valeur:

$$(Q)_{z=z_1} = -58{,}46 \text{ kg/cm}$$

Pour résumer les résultats de cette première partie du calcul, nous avons représenté dans la figure 5 la loi de variation du moment de flexion en fonction de l'abscisse z. Cette représentation a été obtenue en calculant les expressions de M_e et de M_p pour un certain nombre de points. Pour mettre en évidence l'effet de l'entrée en régime plastique du bord inférieur du réservoir, nous avons d'autre part représenté en trait discontinu sur la même figure l'allure que prendrait la loi de variation du moment fléchissant si le réservoir restait élastique dans les conditions de remplissage considérées, soit $H = 1000$ cm *).

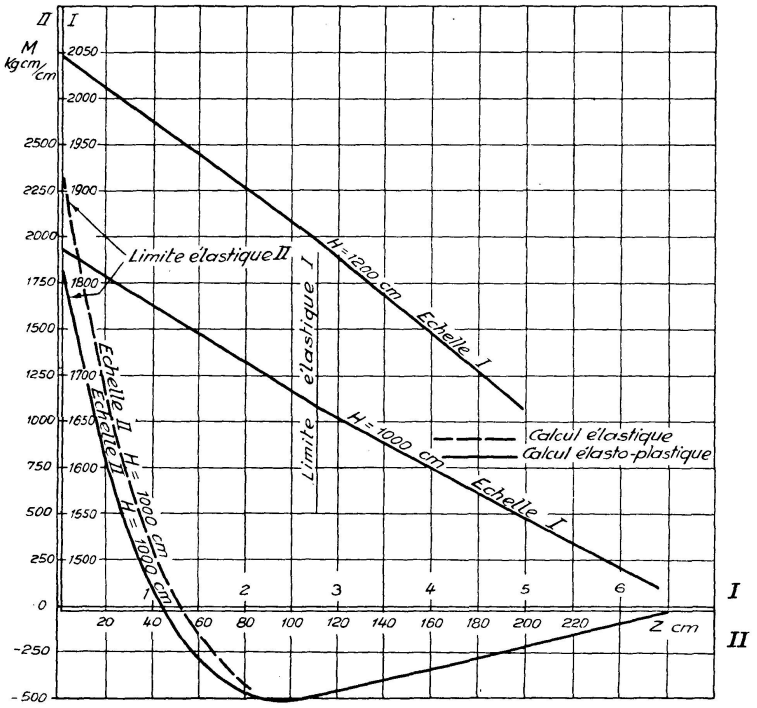

Fig. 5

Sur la figure 5 on peut faire les remarques suivantes. Comme on pouvait le prévoir, l'intervention du phénomène anélastique se traduit par une diminution considérable du moment d'encastrement. Cette diminution atteint ici le 22%. Une autre remarque intéressante tient à la forme de la loi de variation de M_p en fonction de z. On voit sur la figure que la courbe représentative de cette loi est, aux approximations du tracé près, une droite.

*) Pour bien mettre en évidence l'effet local du phénomène plastique la partie des deux courbes se rapportant à la région d'encastrement a été représentée à plus grande échelle.

Pour nous rendre compte de la raison de cette constatation assez surprenante (et qui d'ailleurs ne peut pas être rigoureusement exacte car elle contredirait aux conditions imposées par l'équation différentielle (4')), développons en série la loi de variation de M_p en négligeant les termes de degré supérieur à deux. Il vient:

$$M_p = (-C_1 + C_3)\beta^2 z^2 + (C_1 - C_2 + C_3 + C_4)\beta z + C_2 + C_4 - \frac{d}{c}$$

Si l'on tient compte de la première des équation (17) le coefficient du terme de 2° degré en z peut s'écrire:

$$(-C_1 + C_3)\beta^2 = \frac{\gamma H}{2}$$

La valeur numérique de ce coefficient est inférieure à l'unité. Du moment que dans la région plastifiée z conserve nécessairement des valeurs très petites, il s'en suit que l'influence du terme du 2° degré sur la valeur de M sera toujours petite. On voit donc que l'allure sensiblement rectiligne du diagramme des moments n'est pas le fait du hasard et qu'elle se retrouvera chaque fois que les données numériques en présence conserveront les mêmes ordres de grandeur que dans le problème qui nous occupe.

Avant de quitter l'étude de la loi de représentation du moment fléchissant, il nous faut encore établir si dans la zone plastifiée les contraintes sont des fonctions croissantes de la hauteur de remplissage.

L'étude analytique complète du phénomène étant assez complexe, limitons-nous à analyser l'allure du diagramme du moment de flexion pour une valeur de H supérieure à 1000 cm. Pour $H = 1200$ cm on trouve:

$$z_1 = 4{,}93316 \text{ cm}$$

(valeur qui vérifie très bien l'équation (19))

$$u = -1{,}67793$$
$$\epsilon = -0{,}60910$$

$$C_1 = -1642{,}21863 \qquad C_2 = 1902{,}78840$$
$$C_3 = -\ 182{,}49091 \qquad C_4 = \ 141{,}45296$$

$$(M_p)_{z=0} = 2044{,}36 \text{ kg}\cdot\text{cm/cm}$$
$$(M_p)_{z=2{,}77} = 1848{,}71 \text{ kg}\cdot\text{cm/cm}$$

Sur la figure 5 nous avons représenté la loi de variation de M_p pour $H = 1200$ cm. On voit qu'en tous les points de la zone qui était plastifiée pour $H = 1000$ cm le moment est augmenté à la suite de l'acroissement de H. D'ailleurs l'allure presque linéaire de la loi de variation de M_p et la constatation intuitive qu'à une augmentation de H doit correspondre un accroissement de l'abscisse z_1 et du moment d'encastrement, suffit pratiquement à démontrer qu'il ne peut y avoir de rétrogradation des contraintes dans les régions plastifiées à la suite d'une augmentation du niveau du liquide. D'après

ce que nous avons dit dans l'introduction, ceci nous permet d'affirmer que notre manière de poser le problème de l'équilibre élasto-plastique est correcte.

Remarquons que pour $H = 1200$ cm nous aurions en régime parfaitement élastique:

$$M_0 = 2824{,}5 \text{ kg} \cdot \text{cm/cm} \qquad Q_0 = -84{,}55 \text{ kg/cm}$$

Cette fois la diminution du moment d'encastrement provoquée par l'apparition des déformations anélastiques est d'environ 28% ce qui montre que l'efficacité du phénomène plastique s'accroît rapidement.

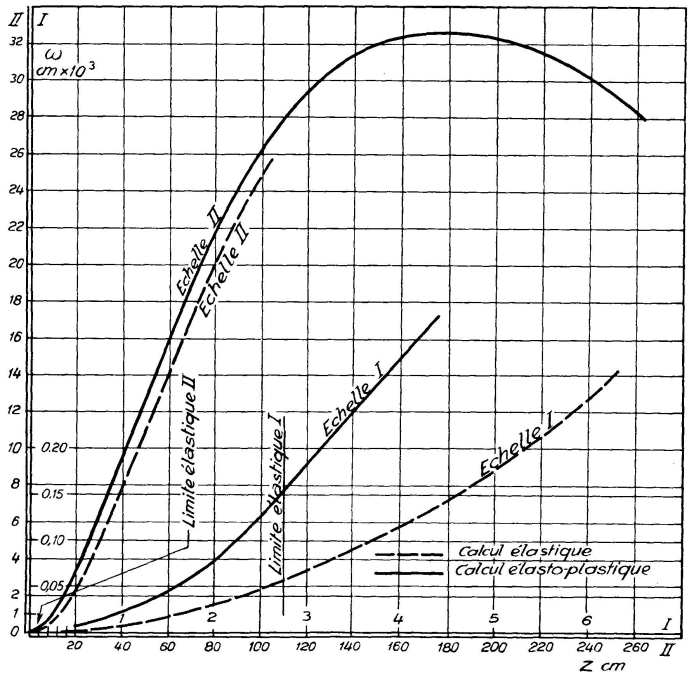

Fig. 6

D'autres considérations intéressantes dérivent de la figure 6 dans laquelle nous avons comparé pour $H = 1000$ cm la déformée du réservoir supposé en régime élasto-plastique et la déformée qui correspondrait à un comportement entièrement élastique.

On voit sur cette figure qu'au voisinage de la base le dépassement de la limite élastique entraîne un accroissement de l'ordonnée. Cela signifie que lorsque le réservoir tend à céder dans le sens longitudinal par suite de l'apparition des déformations plastiques la sollicitation tend à se reporter sur les parallèles, qui sont supposés dans notre étude rester parfaitement élastiques. Or il n'est pas sans intérêt de remarquer que dans notre cas le complément de sollicitation va se concentrer sur des éléments résistants (les parallèles) qui ne subissaient, en regime élastique, que des contraintes très modérées et qui disposaient donc encore d'une très large marge de résistance.

Il résulte de ce qui précède que, d'une manière générale, l'intervention des déformations plastiques a un effet très favorable et de grande amplitude sur le régime des efforts. Il est alors naturel de se demander quelle est l'importance

des déformations anélastiques qui interviennent afin de se rendre compte si le matériau constituant la paroi est en mesure de les supporter sans dommage.

Pour répondre à cette question, calculons la courbure totale au voisinage de l'encastrement. Il vient en valeur absolue: pour $H = 1000$ cm

$$\mu = c M_p + d = 0{,}25 \cdot 10^{-7} \cdot 1835{,}9 - 31 \cdot 10^{-6} = 1{,}489 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{cm}^{-1}.$$

A cette valeur de la courbure correspond sur les bords de la section transversale, haute de 20 cm, une déformation relative

$$\frac{\Delta l}{l} = \mu \frac{h}{2} = 1{,}489 \cdot 10^{-4}$$

pour $H = 1200$ cm on aura

$$\mu = 0{,}25 \cdot 10^{-7} \cdot 2044{,}3 - 31 \cdot 10^{-6} = 2{,}0 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{cm}^{-1}$$

$$\frac{\Delta l}{l} = 2 \cdot 10^{-4}$$

On voit donc que dans un cas comme dans l'autre les déformations qui entrent en jeu sont encore très faibles, même au voisinage du bord où le phénomène anélastique est plus intense. Nul doute qu'une construction en béton munie d'une armature bien répartie est susceptible de subir sans inconvénient des déformations de cet ordre de grandeur (soit en se déformant d'une manière plastique, soit en donnant lieu à une très légère fissuration. Naturellement il faut admettre que toutes précautions soient prises pour empêcher l'introduction du liquide dans les fissures éventuelles).

Possibilité de généralisation des résultats obtenus

Nous avons vu, au cours de la discussion qui précède, que l'allure générale du phénomène étudié n'est pas strictement liée aux valeurs des données numériques dont nous sommes partis. En fait on constate que les résultats obtenus restent valables pour autant que le rapport entre le rayon du cylindre et l'épaisseur de la paroi conserve une valeur suffisamment élevée. Qu'il s'agisse de l'étendue de la zone plastifiée, de l'ampleur des déformations anélastiques ou de l'importance de l'effet de redistribution des contraintes, on peut donc affirmer que ce que nous avons trouvé s'applique à n'importe quel cylindre suffisamment mince.

Mais on peut encore élargir considérablement le champ d'application de nos conclusions si l'on remarque que l'étude du comportement des régions voisines des bords des surfaces de révolution peut pratiquement toujours se fonder sur une équation différentielle analogue à l'équation (4) qui nous a servi de point de départ pour le cylindre. On sait en effet que l'étude des bords d'une sphère qui ne soit pas excessivement surbaissée, et dans laquelle le

rapport du rayon à l'épaisseur de la paroi reste suffisamment élevé, peut se faire au moyen d'une méthode asymptotique [6, 7] qui conduit à une équation de la forme:

$$\frac{d^4 R}{d\varphi^4} + 4\beta^4 R = 0 \tag{21}$$

dans laquelle on a posé:

$$R = Q_\varphi \sqrt{\sin\varphi}$$

(Q_φ étant l'effort tranchant et φ l'angle au centre).

Et il est évident que rien n'empêche d'opérer sur l'équation (21) comme nous l'avons fait sur l'équation (4).

Dès lors nous pouvons faire encore un pas dans notre généralisation si nous tenons compte de la possibilité bien connue d'assimiler le bord d'une surface de révolution quelconque à celui d'une sphère de même rayon, tangente à notre surface en correspondence du bord étudié. Quelle que soit la forme de la surface de révolution considérée, l'allure des phénomènes d'adaptation sera donc toujours analogue à celle que nous avons trouvée pour le cylindre (du moins tant que nous aurons affaire à une surface mince, non surbaissée).

Enfin nous voulons en terminant attirer l'attention sur la possibilité qu'offre le procédé indiqué ci-dessus de tenir compte d'une plastification éventuelle des parallèles. Si ces derniers atteignent leur limite élastique on pourra en effet mettre en compte la nouvelle loi efforts — déformations qui caractérise leur comportement en régime anélastique en modifiant opportunément le coefficient du terme en ω de l'équation (3) qui représente l'action de cerclage exercée par les parallèles sur les génératrices.

Il est évident que cette façon de procéder constitue elle aussi une approximation relativement grossière. Mais on a le droit de se demander si dans les problèmes d'equilibre elasto-plastique l'ingénieur a intérêt à rechercher une plus grande précision du moment que les hypothèses que l'on adopte sont toujours nécessairement très imprécises et que les procédés de calcul finissent toujours par introduire des approximations importantes. Ce point de vue nous paraît d'autant plus raisonnable si le but que l'on se propose est celui d'évaluer d'une façon approchée les marges de sécurité disponibles.

Bibliographie

1. O. Belluzzi: Scienza delle Costruzioni. Zanichelli, Bologna. Vol. III, pag. 399.
2. W. W. Sokolowsky: Theory of Plasticity, Moscou, 1946.
3. G. Colonnetti: Scienza delle Costruzioni. Einaudi, Torino, 1948.
4. A. I. Johnson: Deformations of reinforced concrete. Mémoires A.I.P.C., XI⁰ vol. 1951.
5. F. Levi: Les déformations plastiques et le dimensionnement des systèmes hyperstatiques. Ossature Métallique, n⁰ 9, 1938.
6. O. Blumenthal: 5⁰ Congrès de Mécanique Appliquée. Cambridge, 1912.
7. S. Timoshenko: Theory of plates and shells. Mc.Graw-Hill, 1940.

Résumé

Les efforts considérables qui se développent au bord des surfaces de révolution subissent fortement l'influence des phénomènes d'adaptation qui prennent naissance au delà de la limite élastique. Le présent mémoire propose une méthode approchée pour analyser l'effet des déformations anélastiques dans ce genre de problèmes. L'étude est tout d'abord conduite dans le cas d'un réservoir vertical encastré. On admet que la loi moment fléchissant longitudinal-courbure prenne une forme différente dans la zone plastifiée et dans la zone élastique et l'on écrit en conséquence les équations différentielles du problème. On introduit ensuite les conditions limites: conditions imposées par l'encastrement et conditions de continuité. Le procédé, appliqué à un exemple numérique, met en évidence l'importance de l'effet d'adaptation et la petitesse des déformations anélastiques correspondantes. Le dernier paragraphe est consacré à la généralisation des résultats obtenus fondée sur la prise en considération des équations approchées au moyen desquelles on peut étudier le comportement des bords d'une sphère mince non surbaissée et sur l'assimilation du bord d'une surface de révolution quelconque à celui d'une sphère tangente.

Zusammenfassung

Die beträchtlichen Beanspruchungen, die am Rande von Rotationsflächen auftreten, unterliegen sehr stark dem Einfluß von Anpassungserscheinungen, die nach Überschreiten der Elastizitätsgrenze beginnen. Der vorliegende Beitrag schlägt eine Näherungsmethode vor, um die Auswirkung der unelastischen Formänderungen bei diesen Problemen zu untersuchen. Vorerst wird das Beispiel des unten eingespannten Behälters betrachtet. Unter der Annahme, daß der Zusammenhang zwischen Biegemoment in der Längsrichtung und Krümmung eine für die plastifizierte und die elastische Zone verschiedene Form habe, werden die Differentialgleichungen des Problems aufgestellt. Sodann werden die Randbedingungen (Einspannung) und Übergangsbedingungen eingeführt. Die Anwendung der Methode in einem numerischen Beispiel macht die Wichtigkeit des Anpassungsvorgangs und die Kleinheit der entsprechenden plastischen Formänderungen augenfällig. Der letzte Abschnitt ist der Verallgemeinerung der erhaltenen Resultate gewidmet unter Verwendung von Näherungsgleichungen, mit welchen das Verhalten der Randzone einer nicht abgeflachten, dünnen Kugelschale studiert werden kann, und der Annahme, daß sich der Rand einer beliebigen Rotationsfläche demjenigen einer tangierenden Kugel angleicht.

Summary

The considerable stresses developed at the boundary of surfaces of revolution are strongly influenced by phenomena of re-adjustment which are initiated there at the elastic limit. The present memoir proposes an approximate method for analysing the effect of inelastic deformations in this class of problems. The study is first of all directed to the case of a vertical encastred reservoir. It is assumed that the relation between bending moment and longitudinal curvature takes a different form in the plastic and in the elastic zone and the differential equations of the problem are written accordingly. There are then introduced the boundary conditions imposed by fixation and the conditions of continuity. The procedure applied to a numerical example demonstrates the importance of the effect of re-adjustment and the smallness of the corresponding inelastic deformations. The last paragraph is devoted to the generalisation of the results obtained by taking into account the approximate equations by means of which can be studied the behaviour of the boundaries of a thin sphere not excessively deformed, and representation of the boundary of any surface of revolution by that of a tangent sphere.