Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

Band: 13 (1953)

Artikel: Sur une méthode nouvelle de résolution du problème des dalles rectangulaires encastrées

Autor: Lardy, Pierre

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-13201

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Sur une méthode nouvelle de résolution du problème des dalles rectangulaires encastrées

Über eine neue Lösungsmethode des Problems der eingespannten Rechteckplatte

On a new method of resolution for clamped rectangular plates

PIERRE LARDY, Prof. à l'E.P.F., Secrétair Général de l'A. I. P. C., Zurich

1. Introduction

La solution classique du problème de la dalle rectangulaire encastrée, telle qu'elle est traitée dans les ouvrages de la théorie de l'élasticité, exige des développements théoriques et numériques qui s'avèrent probihitifs dans les calculs pratiques. En effet, elle est basée sur la solution de la dalle librement posée, à laquelle vient s'ajouter l'influence des moments d'encastrement sur les 4 bords. La superposition de ces effets conduit à de laborieux développements en séries de fonctions trigonométriques et aboutit, dans le cas général de la dalle rectangulaire, à 2 systèmes infinis d'équations linéaires pour les constantes d'intégration.

L'auteur de ce mémoire propose une solution nouvelle, directe et à priori adaptée à la nature du problème, dans le but de simplifier de façon sensible les calculs numériques et d'ouvrir, pour le cas fondamental de la dalle rectangulaire totalement encastrée, une voie à l'application pratique.

L'idée de la solution est fort simple et consiste à remplacer la superposition des différentes composantes sus-mentionnées (dalle simple plus influences des bords) par des fonctions adaptées d'emblée et de façon rigoureuse *aux conditions aux limites*. Ces fonctions, appelées dans la suite „*fonctions fondamentales*", se déduisent de la ligne élastique d'une poutre encastrée soumise à des vibrations transversales de flexion et conduisent directement, c.-à-d. sans détours, à la solution.

Ces fonctions fondamentales ont des propriétés remarquables, dont la plus importante est qu'elles forment des *familles de fonctions orthogonales* qui per-

mettent de développer très simplement en séries les grandeurs caractéristiques telles que les flèches, les moments de flexion, les efforts tranchants, les surcharges données, etc.

Pour bien mettre en évidence le caractère et le mécanisme de la solution, l'auteur traite d'abord, au moyen de ces fonctions fondamentales, le cas de la poutre et du treillis de poutres encastrées, pour en arriver à la dalle rectangulaire totalement encastrée.

La solution est adaptée, par l'introduction de développements asymptotiques élémentaires, aux besoins du calcul numérique. Quelques exemples soulignent la rapidité de la convergence du procédé. On obtient d'excellentes approximations en ne prenant en compte qu'un nombre très restreint de termes des séries.

Il est nécessaire d'insister sur l'importance de solutions simples rigoureuses et pratiquement accessibles des problèmes de la théorie de l'élasticité dont l'appareil mathématique a trop souvent, au premier abord, un aspect rébarbatif. Ceci s'applique tout particulièrement aux „*problèmes de connexion*", où la coaxion entre différents éléments joue un rôle prépondérant.

Dans un mémoire ultérieur, l'auteur traitera les dalles continues, c.-à-d. connexes dans les deux directions.

2. La poutre encastrée

a) Données

Soit donnée une poutre de section constante, chargée symétriquement par rapport à son milieu, de longueur $l = 2a$ et totalement encastrée à ses 2 extrémités (Fig. 1).

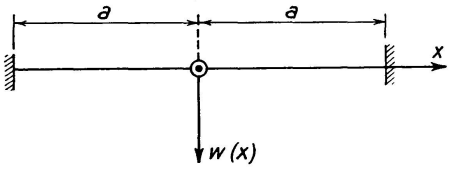

Fig. 1

Désignons par $w(x)$ sa ligne élastique; par raisons de symétrie, $w(x)$ est une fonction paire de x.

L'équation différentielle fondamentale est donnée par:

$$\boxed{\frac{d^4 w}{d x^4} = \frac{p}{E J}} \tag{I}$$

Les conditions aux limites sont:

<u>Pour $x = \pm a$:</u>

$$\boxed{w = 0, \quad \frac{d w}{dx} = 0.} \tag{II}$$

Le problème sera résolu dès que l'on aura trouvé une fonction $w(x)$ satisfaisant aux conditions (I) et (II).

b) Fonctions fondamentales

L'équation des vibrations transversales de flexion peut s'écrire:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\rho \cdot F}{EJ} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

Une solution harmonique est donnée par:

$$y = w(x) \cdot \cos \omega t$$

Il vient dès lors pour $w(x)$ l'équation différentielle:

$$\frac{d^4 w}{d x^4} - \frac{\omega^2 \cdot \rho F}{E J} \cdot w = 0.$$

ou, en posant:

$$\frac{\omega^2 \cdot \rho F}{EJ} = \alpha^4:$$

$$\frac{d^4 w}{d x^4} - \alpha^4 \cdot w = 0.$$

La partie paire de son intégrale est la *fonction fondamentale* à la base de notre problème. On obtient:

$$\boxed{w(x) = C_1 \cdot \mathrm{Ch}\, \alpha x + C_2 \cdot \cos \alpha x} \tag{1}$$

C_1, C_2: constantes d'intégration.
α: paramètre à déterminer.

Les conditions aux limites conduisent, pour $x = \pm a$, aux 2 équations suivantes:

$$\begin{aligned} C_1 \cdot \mathrm{Ch}\, \alpha a + C_2 \cdot \cos \alpha a &= 0 \\ C_1 \cdot \mathrm{Sh}\, \alpha a - C_2 \cdot \sin \alpha a &= 0. \end{aligned} \tag{1'}$$

Pour obtenir une solution non-triviale, c.-à-d. non-identiquement nulle, on annulle le déterminant, ce qui conduit à l'équation transcendante suivante pour le paramètre α:

$$\boxed{\mathrm{tg}\, \alpha a + \mathrm{Th}\, \alpha a = 0} \tag{2}$$

Les valeurs de α, qui sont en nombre infini, seront appelées: *valeurs fondamentales* (ce sont les valeurs propres du problème des vibrations transversales). En posant: $\alpha a = \lambda$, on peut écrire:

$$\underline{\mathrm{tg}\, \lambda + \mathrm{Th}\, \lambda = 0}. \tag{2'}$$

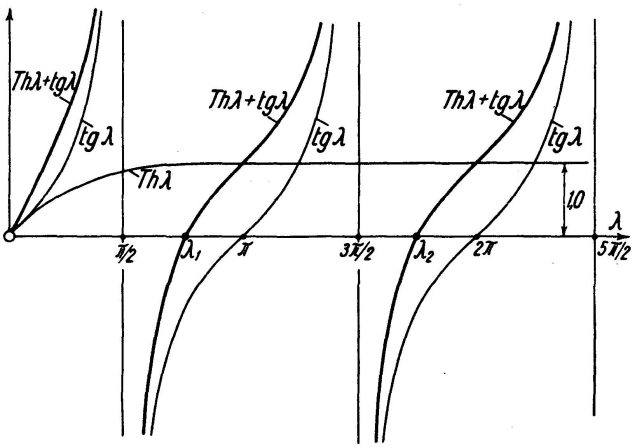

Fig. 2

La figure 2 représente les racines $\lambda = \alpha a$.

On s'aperçoit immédiatement que ces racines ont la propriété remarquable de tendre asymptotiquement très rapidement vers des valeurs simples. On aura, avec une exactitude pratiquement absolue:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 = 2{,}36504, \text{ un peu } > 3\pi/4\\
&\lambda_2 \cong 7\,\pi/4\\
&\lambda_3 \cong 11\,\pi/4\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Dès lors, de manière générale, on a:

$$\boxed{\begin{aligned}
\lambda_1 &= \alpha_1 a = 2{,}36504\\
\lambda_m &= \alpha_m a = \frac{(4m-1)\pi}{4}, \quad (m \geqq 2).
\end{aligned}} \tag{3}$$

Cette forme des racines est extrêmement avantageuse pour les calculs pratiques.

A chaque valeur α_m correspond une constante d'intégration C_m qui sera déterminée ultérieurement au moyen de l'équation (I). On peut donc écrire, en tenant compte des équations (1'), la solution générale $w(x)$ sous la forme appropriée suivante:

$$\boxed{\begin{aligned}
w(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} C_m \cdot u_m(x),\\
u_m(x) &= \left(\frac{\operatorname{Ch}\alpha_m x}{\operatorname{Ch}\alpha_m a} - \frac{\cos\alpha_m x}{\cos\alpha_m a}\right)
\end{aligned}} \tag{4}$$

$u_m(x)$ est la *fonction fondamentale* pour la *valeur fondamentale* α_m.

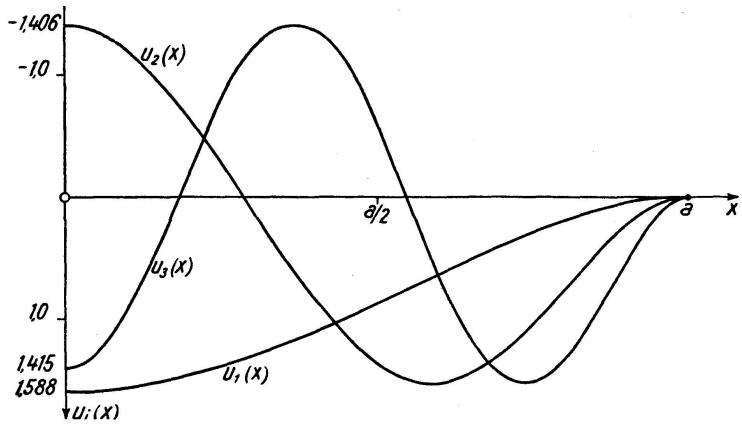

Fig. 3a

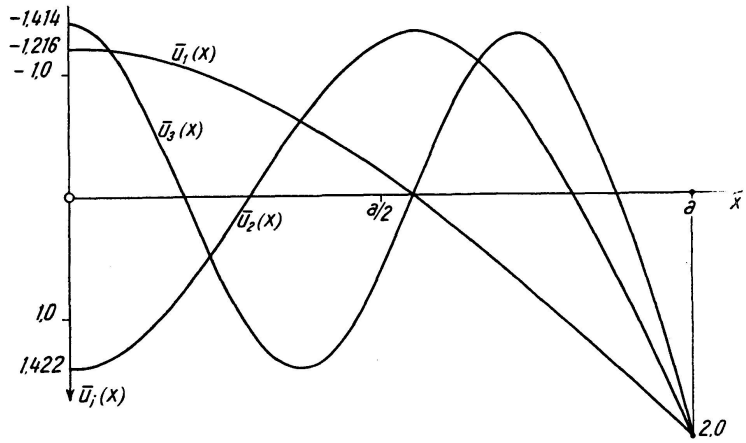

Fig. 3b

Ces fonctions fondamentales ont des propriétés remarquables.

Premièrement, elles se reproduisent, à un facteur constant près, par la 4ème dérivée.

Secondement, et principalement, ces fonctions fondamentales forment une *famille de fonctions orthogonales* entre $-a$ et $+a$. Cette propriété est à la base, comme on le verra, de la simplicité des calculs dans la suite. Cela signifie donc:

$$\boxed{\int_{-a}^{+a} u_m \cdot u_n \cdot dx \equiv 0 \quad (m \neq n).} \tag{5}$$

On le démontre aisément par le calcul intégral élémentaire, compte tenu de l'équation (2)!

On trouve de façon analogue:

$$\boxed{\int_{-a}^{+a} u_m^2 \cdot dx = a\left(\frac{1}{\cos^2 \alpha_m a} + \frac{1}{\mathrm{Ch}^2 \alpha_m a}\right)} \tag{6}$$

Ce résultat peut être mis sous une forme asymptotique extrêmement simple, car avec α_m augmentant, on a:

$$\frac{1}{\mathrm{Ch}^2 \alpha_m a} \cong 0, \qquad \frac{1}{\cos^2 \alpha_m a} \cong 2.$$

Pratiquement, le résultat suivant est déjà valable pour α_1; on obtient:

$$\boxed{\int_{-a}^{+a} u_m^2 \cdot dx \cong 2a. \qquad (m = 1, 2, \ldots\ldots)} \tag{6'}$$

Ces propriétés remarquables des fonctions fondamentales ainsi que les expressions asymptotiques très simples et très exactes démontrent que leur choix peut conduire à une solution également très simple du problème.

c) Solution du problème de la poutre

La solution est donnée par les expressions (4), où les constantes C_m doivent être déterminées par l'équation fondamentale (I), les conditions aux limites étant satisfaites. Ceci revient à développer en série de $u_m(x)$ le membre de droite p/EJ.

Posons donc pour p, puisque EJ est constant:

$$\underline{p = \sum_{m=1}^{\infty} p_m \cdot u_m(x).} \tag{7}$$

C'est ici qu'intervient l'avantage essentiel constitué par l'orthogonalité des fonctions $u_m(x)$. Sans nous arrêter à des considérations de convergence, on obtiendra le coefficient général p_m en multipliant les 2 côtés de l'équation (7) par $u_m(x)$ et en intégrant entre $-a$ et $+a$. Tous les termes de droite sont nuls sauf celui qui contient $u_m(x)$. On a donc:

$$\int_{-a}^{+a} p \cdot u_m \cdot dx = p_m \cdot \int_{-a}^{+a} u_m^2 \cdot dx.$$

Grâce à l'équation (6'), on peut écrire:

$$\boxed{p_m = \frac{1}{2a} \cdot \int_{-a}^{+a} p \cdot u_m \cdot dx} \tag{8}$$

Cas particulier: $p = const.$

Il vient:

$$\boxed{p_m = 2p \cdot \frac{\mathrm{Th}\, \alpha_m a}{\alpha_m a}} \tag{9}$$

p_m atteint rapidement une forme asymptotique simple:

$$\boxed{\begin{aligned} p_1 &\cong 0{,}8308 \cdot p \\ p_m &\cong \frac{8\,p}{\pi} \cdot \frac{1}{(4\,m-1)} \quad (m \geqq 2). \end{aligned}} \tag{9'}$$

Coefficients C_m:

Les C_m sont dès lors déterminés en identifiant les deux côtés de l'équation (I), ce qui conduit à:

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_m \cdot \alpha_m^4 \cdot u_m \equiv \frac{1}{EJ} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} p_m \cdot u_m$$

d'où:

$$C_m = \frac{p_m}{EJ \cdot \alpha_m^4}$$

ou, en introduisant $(\alpha_m \cdot a)$:

$$\boxed{C_m = \frac{a^4 \cdot p_m}{EJ \cdot (\alpha_m a)^4}} \tag{10}$$

La solution de la poutre est donc (éq. 4):

$$w(x) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \cdot u_m(x) = \frac{a^4}{EJ} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_m}{(\alpha_m a)^4} \cdot u_m(x),$$

c.-à-d.

$$\boxed{w(x) = \frac{a^4}{EJ} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_m}{(\alpha_m a)^4} \left(\frac{\operatorname{Ch} \alpha_m x}{\operatorname{Ch} \alpha_m a} - \frac{\cos \alpha_m x}{\cos \alpha_m a} \right).} \tag{11}$$

Les coefficients C_m sous forme asymptotiques sont:

$$\boxed{\begin{aligned} C_1 &\cong \frac{a^4 \cdot p_1}{EJ \cdot (2{,}36504)^4} \\ C_m &\cong \left(\frac{4\,a}{\pi}\right)^4 \cdot \frac{p_m}{EJ} \cdot \frac{1}{(4\,m-1)^4} \end{aligned}} \tag{12}$$

Dans le cas particulier où $p = const.$, on obtient, en utilisant les valeurs asymptotiques (9'):

$$\boxed{\begin{aligned} C_1 &\cong 0{,}0266 \cdot \frac{p \cdot a^4}{EJ} \\ C_m &\cong \frac{2\,p}{a\,EJ} \cdot \left(\frac{4\,a}{\pi}\right)^5 \cdot \frac{1}{(4\,m-1)^5} \end{aligned}} \tag{12'}$$

(12) et (12') sont valables dès que $m \geqq 2$.

La qualité de la convergence est mise en évidence par la 5ème puissance de $(4m-1)$ au dénominateur.

Les moments et efforts tranchants sont donnés par:

$$\boxed{\begin{aligned} M &= -EJ \cdot \frac{d^2 w}{d x^2} = -EJ \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^2 \cdot C_m \left(\frac{\operatorname{Ch} \alpha_m x}{\operatorname{Ch} \alpha_m a} + \frac{\cos \alpha_m x}{\cos \alpha_m a} \right). \\ Q &= -EJ \cdot \frac{d^3 w}{d x^3} = -EJ \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^3 \cdot C_m \left(\frac{\operatorname{Sh} \alpha_m x}{\operatorname{Ch} \alpha_m a} - \frac{\sin \alpha_m x}{\cos \alpha_m a} \right). \end{aligned}} \tag{13}$$

Dans la suite, on introduira l'abbréviation:

$$\underline{\bar{u}_m(x) = \frac{\operatorname{Ch} \alpha_m x}{\operatorname{Ch} \alpha_m a} + \frac{\cos \alpha_m x}{\cos \alpha_m a}}. \tag{14}$$

d) Exemple numérique

Nous choisissons $p = \text{const.}$; la portée de la poutre est $l = 2a$.

Coefficients p_m (éq. 9'):

$$p_1 = 0{,}8308 \cdot p, \quad p_2 = 0{,}364 \cdot p, \quad p_3 = 0{,}232 \cdot p, \quad p_4 = 0{,}170 \cdot p, \text{ etc.}$$

Coefficients C_m (éq. 12'):

Avec $a = \frac{l}{2}$, on aura:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= 0{,}0016620 \\ C_2 &= 0{,}0000248 \\ C_3 &= 0{,}0000026 \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \cdot \frac{p \cdot l^4}{EJ}$$

Fonctions u_m (éq. 4):

$$u_1 = \frac{\operatorname{Ch} 2{,}365 \cdot x/a}{5{,}3692} + \frac{\cos 2{,}365 \cdot x/a}{0{,}7133}$$

$$u_2 = \frac{\operatorname{Ch} \frac{7 \pi x}{4a}}{122{,}078} - \frac{\cos \frac{7 \pi x}{4a}}{0{,}7071}$$

$$u_3 = \frac{\operatorname{Ch} \frac{11 \pi x}{4a}}{2824{,}9} + \frac{\cos \frac{11 \pi x}{4a}}{0{,}7071}$$

etc.

Ligne élastique (éq. 11):

En posant: $a = l/2$, on aura:

$$w(x) = \frac{p \cdot l^4}{EJ} [0{,}0016620 \cdot u_1 + 0{,}0000248 \cdot u_2 + 0{,}0000026 \cdot u_3 + \ldots\ldots].$$

Flèche pour $x=0$:

$$\text{Vraie valeur: } w(0) = \frac{1}{384}\cdot\frac{p\,l^4}{EJ} \cong 0{,}002604\cdot\frac{p\,l^4}{EJ}.$$

$$\text{1. terme: } w'(0) = 0{,}00264\cdot\frac{p\,l^4}{EJ} \rightarrow \underline{\text{erreur } 1{,}38\%}.$$

$$\text{1. et 2. terme: } w''(0) = 0{,}002605\cdot\frac{p\,l^4}{EJ} \rightarrow \underline{\text{erreur } \sim 0{,}04\%}.$$

Pratiquement, le premier terme suffit.

Moments (éq. 13):

Pour $x=0$: Vraie valeur: $\dfrac{p\cdot l^2}{24} = 0{,}041667\cdot p\cdot l^2$.

Nous n'indiquerons que les erreurs:

1. terme:	erreur	+8,30%
1. et 2. terme	,,	−1,96%
1., 2. et 3. terme:	,,	+0,66%
1., 2., 3. et 4. terme:	,,	−0,04%

L'erreur alterne de signe; pratiquement, les 2 ou, au plus, les 3 premiers termes suffisent.

Pour $x=\pm a$: Vraie valeur: $-\dfrac{p\,l^2}{12} = -0{,}083333\cdot p\,l^2$.

Les erreurs sont, en valeur absolue:

1. terme:	erreur	−10,92%
1. et 2. terme:	,,	− 3,72%
1., 2. et 3. terme:	,,	− 1,85%
1., 2., 3. et 4. terme:	,,	− 1,11%
1., 2., 3., 4. et 5. terme:	,,	− 0,75%

Pratiquement, les 3 premiers termes suffisent.
La convergence est dès lors pratiquement suffisamment rapide.

e) Cas antimétrique

La poutre est symétrique, la charge supposée antimétrique par rapport à son milieu. *Les fonctions fondamentales sont impaires en x.* On posera:

$$\underline{w'(x) = C_1\cdot \operatorname{Sh}\alpha' x + C_2\cdot\sin\alpha' x}. \tag{15}$$

Les conditions aux limites sont celles données par (II), soit:

$$\text{Pour } x=\pm a: \quad w'=0, \quad \frac{d\,w'}{d\,x}=0.$$

Ceci conduit à l'équation transcendante pour α' suivante:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha' a - \operatorname{Th}\alpha' a = 0.} \tag{16}$$

Les valeurs fondamentales α' ou $\lambda' = \alpha' a$ sont indiquées sur la figure 4.

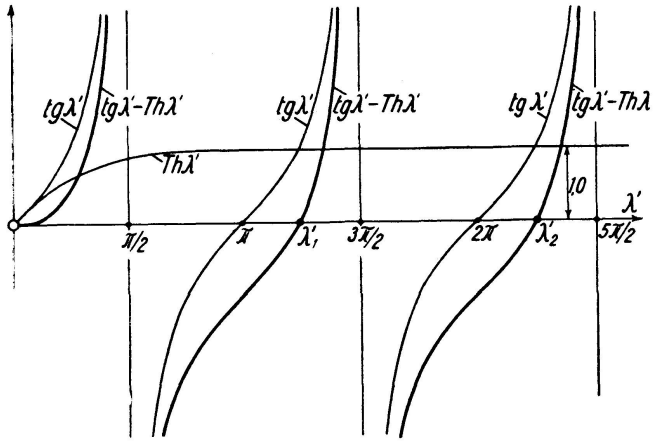

Fig. 4

On peut leur donner, pour toutes les valeurs de m, la forme:

$$\boxed{\lambda'_m = \alpha'_m \cdot a = \frac{(4m+1)\pi}{4}} \tag{17}$$

La solution générale, par analogie avec l'équation (4), prend la forme:

$$\boxed{\begin{aligned} w'(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} C'_m \cdot u'_m(x), \\ u'_m(x) &= \left(\frac{\operatorname{Sh}\alpha'_m x}{\operatorname{Sh}\alpha'_m a} - \frac{\sin\alpha'_m x}{\sin\alpha'_m a}\right). \end{aligned}} \tag{18}$$

On démontre que les fonctions $u'_m(x)$ sont, elles aussi, orthogonales:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-a}^{+a} u'_m \cdot u'_n \cdot dx = 0. \\ &\int_{-a}^{+a} \cdot u'^2_m \cdot dx = a\left(\frac{1}{\sin^2\alpha'_m a} - \frac{1}{\operatorname{Sh}^2\alpha'_m a}\right) \\ &\qquad \cong 2a \quad (\text{pour } m \geqq 1). \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

La solution pour une charge p antimétrique donnée est analogue au cas symétrique. On trouve:

$$\boxed{p'_m = \frac{1}{2a} \cdot \int_{-a}^{+a} p \cdot u'_m \cdot dx} \tag{20}$$

Il vient, en utilisant l'éq. (I) et en identifiant:

$$\boxed{C'_m = \frac{p'_m}{EJ \cdot \alpha'^4_m} \cong \left(\frac{4a}{\pi}\right)^4 \cdot \frac{p'_m}{EJ} \cdot \frac{1}{(4m+1)^4}} \tag{21}$$

(Forme asymptotique valable pour toutes les valeurs de m).

Les moments fléchissants et les efforts tranchants se déduisent comme précédemment.

f) Cas général de charge

On peut former le cas d'une charge générale en superposant les parties symétrique et antimétrique. On posera dès lors, pour la solution générale:

$$\boxed{\begin{aligned} w(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} (C_m \cdot u_m + C'_m \cdot u'_m), \\ p(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} (p_m \cdot u_m + p'_m \cdot u'_m). \end{aligned}} \tag{22}$$

g) Cas général d'encastrement élastique

Le cas d'encastrement élastique de la poutre peut être traité sur la même base. Les conditions aux limites sont:

$\underline{x = \pm a}$: $\underline{w = 0, \quad \frac{dw}{dx} = \pm \epsilon \cdot M_1}$ (cas symétrique).

où: ϵ = degré d'encastrement, M_1 = moment d'encastrement.

En posant: $w(x) = C_1 \cdot \mathrm{Ch}\,\alpha x + C_2 \cdot \cos \alpha x$, on trouve pour α l'équation caractéristique:

$$\underline{\mathrm{tg}\,\lambda + \mathrm{Th}\,\lambda + \rho \cdot \lambda = 0.} \tag{23}$$

où:

$$\lambda = \alpha a$$

$$\rho = \frac{2\epsilon EJ}{a} = \text{nombre constant.}$$

Les racines se déduisent de la fig. 1 par intersection des courbes $(\mathrm{tg}\,\lambda + \mathrm{Th}\,\lambda)$ par la droite $(\rho \cdot \lambda)$.

On aura de nouveau:

$$\left.\begin{aligned} w(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} C_m \cdot u_m(x), \\ u_m(x) &= \left(\frac{\mathrm{Ch}\,\alpha_m x}{\mathrm{Ch}\,\alpha_m a} - \frac{\cos \alpha_m x}{\cos \alpha_m a}\right) \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Le fait remarquable persiste, à savoir que les fonctions $u_m(x)$ sont *orthogonales* pour tous les degrés d'encastrement ϵ.

Cas particulier: la poutre simplement appuyée.

En posant également:

$$w = C_1 \cdot \mathrm{Ch}\,\alpha x + C_2 \cdot \cos \alpha x$$

et en exprimant pour $x = \pm a$ les conditions aux limites: $w = 0$, $\frac{d^2 w}{dx_2} = 0$, il vient:

$$C_1 = 0, \qquad \cos \alpha a = 0 \rightarrow \alpha a = \frac{(2m-1)\pi}{2}.$$

On retrouve donc automatiquement les développements en *Séries de Fourier.*

Remarquons que la notion d'encastrement élastique, définie pour les poutres, ne peut être transposée directement aux treillis de poutres et aux dalles.

3. Le treillis de poutres encastré

a) Généralités

Nous considérons un treillis rectangulaire de poutres, supposées en nombre infini dans les 2 directions x et y et infiniment minces. Le treillis diffère de la dalle par l'absence des moments de torsion et par le fait que la dilatation latérale est nulle; ceci revient à poser:

$$\nu = \frac{1}{m} = 0.$$

Supposons de plus $EJ = \text{const.}$ et la charge symétrique dans les deux directions. L'encastrement est total.

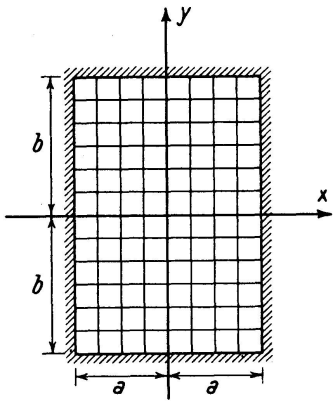

Fig. 5

L'équation différentielle fondamentale du treillis sans torsion peut s'écrire, en désignant la flèche par $w(x, y)$:

$$\boxed{\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{EJ}} \qquad \text{(I')}$$

Les conditions aux limites sont:

$$\text{Pour: } x = \pm a: \quad \boxed{w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0.} \qquad (\mathrm{II}')$$

$$y = \pm b: \quad \boxed{w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0.}$$

b) Solution

La forme de l'éq. (I') suggère immédiatement la forme de la solution, qui sera le produit des fonctions $u_m(x)$ et de celles analogues $v_n(y)$. On posera dès lors:

$$\boxed{w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \cdot u_m(x) \cdot v_n(y).} \qquad (25)$$

où l'on a:

$$\left.\begin{aligned} u_m(x) &= \frac{\operatorname{Ch} \alpha_m x}{\operatorname{Ch} \alpha_m a} - \frac{\cos \alpha_m x}{\cos \alpha_m a}, \\ v_n(y) &= \frac{\operatorname{Ch} \beta_n y}{\operatorname{Ch} \beta_n b} - \frac{\cos \beta_n y}{\cos \beta_n b}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(voir éq. 4)}$$

Cela signifie que la fonction w, donnée par l'éq. (25), satisfait automatiquement aux conditions aux limites (II'), pourvu que $\lambda_m = \alpha_m a$ et $\lambda_n = \beta_n b$ vérifient l'équation transcendante (2).

Il suffit donc de déterminer les coefficients C_{mn} en procédant à l'identification dans l'équation fondamentale (I'). Ceci conduit, en parfaite analogie avec la poutre, au développement de p en série des u_m et v_n:

$$\boxed{p = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \cdot u_m \cdot v_n} \qquad (26)$$

N.B.: La double $\sum\limits_m \sum\limits_n$ s'effectuera en variant les indices m et n de façon que leur somme soit constante; p. ex.: $m = 1,\ n = 1 \rightarrow m + n = 2$

$$\left.\begin{aligned} m = 1,\ n = 2 \\ m = 2,\ n = 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow m + n = 3, \text{ etc.}$$

u_m et v_n formant 2 familles de fonctions orthogonales; on trouve p_{mn} en multipliant les deux côtés de l'éq. (26) par $u_m \cdot v_n$ et en établissant l'intégrale double entre les limites $-a$ et $+a$, $-b$ et $+b$. On trouve, en raison de l'orthogonalité:

$$\int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} p \cdot u_m \cdot v_n \cdot dx = p_{mn} \cdot \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} u_m^2 \cdot v_n^2 \cdot dx \cdot dy$$

En raison de l'éq. (6'), on aura:

$$\int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} u_m^2 \cdot v_n^2 \cdot dx \cdot dy = \int_{-a}^{+a} u_m^2 \cdot dx \cdot \int_{-b}^{+b} v_n^2 \cdot dy = 4ab.$$

et:

$$\boxed{p_{mn} = \frac{\int_{-a}^{+a}\int_{-b}^{+b} p \cdot u_m \cdot v_n \cdot dx \cdot dy}{4ab}} \tag{27}$$

Cas particulier: $p = const.$

$$p_{mn} = \frac{p \cdot \int_{-a}^{+a} u_m \cdot dx \cdot \int_{-b}^{+b} v_n \cdot dy}{4ab} = \frac{p \cdot 4a \cdot \frac{\operatorname{Th} \alpha_m a}{\alpha_m a} \cdot 4b \cdot \frac{\operatorname{Th} \beta_n b}{\beta_n b}}{4ab},$$

d'où:

$$\boxed{p_{mn} = 4p \cdot \frac{\operatorname{Th} \alpha_m a}{\alpha_m a} \cdot \frac{\operatorname{Th} \beta_n b}{\beta_n b}} \tag{28}$$

et:

$$p_{nm} = p_{mn}.$$

La forme asymptotique de p_{mn} est analogue à celle de l'éq. (9'):

$$\boxed{\begin{aligned} p_{11} &\cong 0{,}69032 \cdot p \\ p_{mn} &\cong \frac{64p}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(4m-1)(4n-1)}. \\ &(m \geqq 2, \quad n \geqq 2) \end{aligned}} \tag{28'}$$

Si l'un des 2 indices m ou n est $=1$, on aura, p. ex. pour p_{1n}:

$$p_{1n} \cong 4p \cdot \frac{\operatorname{Th} \alpha_1 a}{\alpha_1 a} \cdot \frac{4}{(4n-1)\pi} \cong \frac{16 \cdot p}{\pi} \cdot 0{,}41543 \cdot \frac{1}{(4n-1)},$$

donc:

$$\underline{p_{1n} \cong \frac{6{,}64682 \cdot p}{\pi} \cdot \frac{1}{(4n-1)}} \quad (n \geqq 2)$$

et:

$$\underline{p_{m1} \cong \frac{6{,}64682 \cdot p}{\pi} \cdot \frac{1}{(4m-1)}} \quad (m \geqq 2)$$

Coefficients C_{mn}:

En introduisant l'expression (25) pour $w(x, y)$ dans l'équation fondamentale (I'), on obtiendra:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} (\alpha_m^4 + \beta_n^4) \cdot u_m \cdot v_n \equiv \frac{1}{EJ} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \cdot u_m \cdot v_n.$$

On identifiera pour les couples (m, n) et l'on aura:

$$\boxed{\begin{aligned} C_{mn} &= \frac{p_{mn}}{EJ \cdot (\alpha_m^4 + \beta_n^4)} \\ \text{ou:} \quad C_{mn} &= \frac{p_{mn}}{EJ \left[\frac{(\alpha_m a)^4}{a^4} + \frac{(\beta_n b)^4}{b^4} \right]} \end{aligned}} \tag{29}$$

La forme asymptotique est:

$$\boxed{\begin{aligned} C_{11} &\cong \left(\frac{a\cdot b}{2{,}36504}\right)^4 \cdot \frac{p_{11}}{EJ}\cdot\frac{1}{(a^4+b^4)}. \\ C_{mn} &\cong \left(\frac{4\,a\,b}{\pi}\right)^4 \cdot \frac{p_{mn}}{EJ}\cdot\frac{1}{[b^4(4\,m-1)^4+a^4(4\,n-1)^4]}. \\ &\qquad (m \geqq 2, \quad n \geqq 2). \end{aligned}} \tag{29'}$$

C_{1n} $(n \geqq 2)$ et C_{m1} $(m \geqq 2)$ auront une forme asymptotique qui découle de l'introduction des racines $(\alpha_1 a)$, resp. $(\beta_1 b)$.

Moments: $$M_x = -EJ\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad M_y = -EJ\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

c) Exemple: Treillis carré

On a: $b = a = \frac{l}{2}$. La charge p est supposée constante. Dès lors, les coefficients C_{mn} sont donnés, pour le calcul pratique, sous leur forme asymptotique, compte tenu des éq. (28′) et (29′). Pour $p = \text{const.}$, on a: $C_{nm} = C_{mn}$.

$$\begin{aligned}
p_{11} &= 0{,}69032\cdot p & C_{11} &= 0{,}011032\cdot\frac{pa^4}{EJ} \\
p_{21} = p_{12} &= 0{,}30225\cdot p & C_{21} = C_{12} &= 0{,}000320\cdot\frac{pa^4}{EJ} \\
p_{13} = p_{31} &= 0{,}19234\cdot p & C_{13} = C_{31} &= 0{,}000034\cdot\frac{pa^4}{EJ} \\
p_{22} &= 0{,}13234\cdot p & C_{22} &= 0{,}000072\cdot\frac{pa^4}{EJ} \\
p_{14} = p_{41} &= 0{,}14105\cdot p & C_{14} = C_{41} &= 0{,}000007\cdot\frac{pa^4}{EJ} \\
p_{23} = p_{32} &= 0{,}08422\cdot p & C_{23} = C_{32} &= 0{,}000013\cdot\frac{pa^4}{EJ} \\
p_{15} = p_{51} &= 0{,}11135\cdot p & C_{15} = C_{51} &= 0{,}000002\cdot\frac{pa^4}{EJ} \\
p_{24} = p_{42} &= 0{,}06177\cdot p & C_{24} = C_{42} &= 0{,}000003\cdot\frac{pa^4}{EJ} \\
p_{33} &= 0{,}05359\cdot p & C_{33} &= 0{,}000005\cdot\frac{pa^4}{EJ}
\end{aligned}$$

On obtient pour $w(x,y)$, en remplaçant a par $\frac{l}{2}$ (l = portée), la série (éq. 25):

$$\begin{aligned} w(x,y) = \frac{pl^4}{EJ}\,[&0{,}0006895\cdot u_1 v_1 + 0{,}0000200\,(u_1 v_2 + u_2 v_1) + \\ &+ 0{,}0000021\,(u_1 v_3 + u_3 v_1) + 0{,}0000045\cdot u_2 v_2 + \\ &+ 0{,}0000004\,(u_1 v_4 + u_4 v_1) + 0{,}0000008\,(u_2 v_3 + u_3 v_2) + \ldots\ldots] \end{aligned}$$

Flèche pour $x = y = 0$:

1. terme: $$w(0{,}0) = 0{,}001650\cdot\frac{pl^4}{EJ}$$

1. et 2. terme: $w(0,0) = 0{,}001669 \cdot \frac{p l^4}{EJ}$

1., 2. et 3. terme: $w(0,0) = 0{,}001664 \cdot \frac{p l^4}{EJ}$

Après 7 termes: $w(0,0) = 0{,}001665 \cdot \frac{p l^4}{EJ} \cong \frac{p l^4}{600 \cdot EJ}$.

Moments

Pour: $x = y = 0$: $M_x(0,0) = 0{,}0255 \cdot p l^2 \cong \frac{p l^2}{39{,}2}$

Après 3 termes, l'erreur n'est que de 2,7%.

Pour: $x = l/2,\ y = 0$ (moment d'encastrement):

$$M_x(l/2, 0) = -0{,}05646 \cdot p l^2 \cong -\frac{p \cdot l^2}{17{,}7}$$

Les résultats convergent rapidement. Il est facile de généraliser la méthode indiquée pour des moments d'inertie différents dans les deux directions en partant de l'équation fondamentale du treillis *orthotrope*.

L'encastrement élastique peut être pris en compte facilement en procédant comme indiqué au chap. 2, g.

4. La dalle encastrée

a) Equations fondamentales

La dalle rectangulaire est supposée totalement encastrée et chargée symétriquement par rapport aux axes x et y (voir fig. 5, de disposition analogue à celle du treillis).

L'équation fondamentale de Lagrange s'exprime par:

$$\boxed{\Delta\Delta w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{B}} \qquad \text{(I}''\text{)}$$

où: w = flèche,

$B = \frac{EJ}{1-\nu^2}$: rigidité à la flexion.

Les conditions aux limites sont:

$$\boxed{\begin{array}{ll} x = \pm a: & w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ y = \pm b: & w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{array}} \qquad \text{(II}''\text{)}$$

La dalle diffère du treillis par le fait que les moments de torsion ainsi que le facteur ν de la dilatation latérale sont différents de zéro.

b) Solution

Nous choisirons une solution de même forme que l'éq. (25) pour le treillis, afin de satisfaire d'emblée aux conditions aux limites (II″):

$$\boxed{w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \cdot u_m(x) \cdot v_n(y).}$$

Les fonctions u_m et v_n sont celles définies pour la poutre et le treillis (voir chap. 2 et 3).

La solution, c.-à-d. la détermination des coefficients C_{mn}, suit, en principe, le même chemin que pour le treillis. On établira tout d'abord le développement de la surcharge p (voir éq. (26)):

$$p = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \cdot u_m \cdot v_n,$$

dont les coefficients p_{mn} sont ceux des éq. (27), (28) etc.

La différence essentielle avec le treillis (moments de torsion, $\nu \neq 0$) apparaît dans l'expression $\Delta\Delta w$ au membre de gauche de l'éq. (I″):

$$\Delta\Delta w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} [(\alpha_m^4 + \beta_n^4) u_m \cdot v_n + 2 \alpha_m^2 \cdot \beta_n^2 \cdot \bar{u}_m \cdot \bar{v}_n]$$

La dérivée mixte $2 \cdot \dfrac{\partial^4 w}{\partial x^2 \cdot \partial y^2}$ introduit les fonctions $\bar{u}_m$, $\bar{v}_n$, définies en fin du chap. 2, c):

$$\bar{u}_m(x) = \frac{\operatorname{Ch} \alpha_m x}{\operatorname{Ch} \alpha_m a} + \frac{\cos \alpha_m x}{\cos \alpha_m a},$$

$$\bar{v}_n(y) = \frac{\operatorname{Ch} \beta_n y}{\operatorname{Ch} \beta_n b} + \frac{\cos \beta_n y}{\cos \beta_n b}.$$

Ces fonctions représentent l'existence des moments de torsion.

Dès lors, pour procéder à l'identification des deux membres de l'éq. (I′), il est nécessaire de développer les produits $\bar{u}_m \cdot \bar{v}_n$ en fonction des $u_i \cdot v_k$. On procédera en développant chaque fonction $\bar{u}$ et $\bar{v}$ séparément et en effectuant les multiplications. Ces calculs sont faits une fois pour toutes! Posons donc:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_1 &= k_1^1 \cdot u_1 + k_2^1 \cdot u_2 + k_3^1 \cdot u_3 + \ldots + k_i^1 \cdot u_i + \ldots \\
\bar{u}_2 &= k_1^2 \cdot u_1 + k_2^2 \cdot u_2 + k_3^2 \cdot u_3 + \ldots + k_i^2 \cdot u_i + \ldots \\
&\vdots \\
\bar{u}_m &= k_1^m \cdot u_1 + k_2^m \cdot u_2 + k_3^m \cdot u_3 + \ldots + k_i^m \cdot u_i + \ldots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

De manière analogue:

$$\begin{aligned}
\bar{v}_1 &= h_1^1 \cdot v_1 + h_2^1 \cdot v_2 + h_3^1 \cdot v_3 + \ldots + h_l^1 \cdot v_l + \ldots \\
\bar{v}_2 &= h_1^2 \cdot v_1 + h_2^2 \cdot v_2 + h_3^2 \cdot v_3 + \ldots + h_l^2 \cdot v_l + \ldots \\
&\vdots \\
\bar{v}_n &= h_1^n \cdot v_1 + h_2^n \cdot v_2 + h_3^n \cdot v_3 + \ldots + h_l^n \cdot v_l + \ldots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Les coefficients k_i^m, h_l^n, etc. sont déterminés par le procédé déjà utilisé pour p_{mn}. On trouve, par intégration élémentaire, compte tenu de l'orthogonalité des fonctions u et v:

$$\int_{-a}^{+a} \bar{u}_m \cdot u_i \cdot dx = k_i^m \cdot \int_{-a}^{+a} u_i^2 \cdot dx = 2\,a \cdot k_i^m$$

et:

$$k_i^m = \frac{1}{2\,a} \cdot \int_{-a}^{+a} \bar{u}_m \cdot u_i \cdot dx$$

En particulier:

$$k_m^m = \frac{1}{2\,a} \cdot \int_{-a}^{+a} \bar{u}_m \cdot u_m \cdot dx,$$

ainsi que des expressions analogues pour h_l^n et h_n^n. On trouve, en posant:

$$\alpha_m a = \lambda_m, \quad \alpha_n a = \lambda_n, \quad \text{etc.}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
k_i^m &= \frac{4\,\lambda_i^2}{(\lambda_m^4 - \lambda_i^4)} \left[\lambda_m \cdot \operatorname{Th} \lambda_m - \lambda_i \cdot \operatorname{Th} \lambda_i\right] \\
k_m^m &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{Ch}^2 \lambda_m} - \frac{1}{\cos^2 \lambda_m}\right) + \frac{\operatorname{Th} \lambda_m}{\lambda_m}
\end{aligned}} \tag{30}$$

Il est aisé de trouver des expressions asymptotiques simples pour les indices $\geqq 2$.

Les racines λ_m étant les mêmes pour les fonctions v_n, on en déduit que:

$$\underline{h_i^m = k_i^m}.$$

Les premières valeurs des k sont données dans le tableau ci-dessous:

Tableau k_i^m

m \ $i=$	1	2	3	4 ...
1	−0,54984	0,43495	0,34037	0,27302
2	0,08050	−0,81811	0,20139	0,19010
3	0,02551	0,08155	−0,88425	0,12738
4	0,01100	0,04140	0,06850	−0,91512
⋮				

Les produits $\bar{u}_m \cdot \bar{v}_n$ s'écrivent:

$$\begin{aligned}\bar{u}_m \cdot \bar{v}_n &= (k_1^m \cdot u_1 + k_2^m \cdot u_2 + k_3^m \cdot u_3 + \ldots + k_i^m \cdot u_i + \ldots) \cdot \\ &\quad \cdot (k_1^n \cdot v_1 + k_2^n \cdot v_2 + k_3^n \cdot v_3 + \ldots + k_l^n \cdot v_l + \ldots) = \\ &= k_1^m \cdot k_1^n \cdot u_1 v_1 + \\ &\quad + k_1^m \cdot k_2^n \cdot u_1 v_2 + k_2^m \cdot k_1^n \cdot u_2 v_1 + \\ &\quad + k_1^m \cdot k_3^n \cdot u_1 v_3 + k_2^m \cdot k_2^n \cdot u_2 v_2 + k_3^m \cdot k_1^n \cdot u_3 \cdot v_1 + \\ &\quad + \ldots\ldots\end{aligned}$$

Le tableau suivant contient quelques coefficients des développements:

	$u_1 v_1$	$u_1 v_2$	$u_2 v_1$	$u_1 v_3$	$u_2 v_2$	$u_3 v_1 \ldots$
$\bar{u}_1 . \bar{v}_1$	0,30234	−0,23916	−0,23916	−0,18715	0,18918	−0,1875
$\bar{u}_1 . \bar{v}_2$	−0,04426	0,44984	0,03501	−0,11073	−0,35584	0,02740
$\bar{u}_2 . \bar{v}_1$	−0,04426	0,03501	0,44984	0,02740	−0,35584	−0,11073
$\bar{u}_1 . \bar{v}_3$	−0,01403	−0,04484	0,01110	0,48620	0,03547	0,00868
$\bar{u}_2 . \bar{v}_2$	0,00648	−0,06586	−0,06586	0,01621	0,66930	0,01621
$\bar{u}_3 . \bar{v}_1$	−0,01403	0,01110	−0,04484	0,00868	0,03547	0,48620
⋮						

Nous insistons sur le fait que ces coefficients sont calculés *une fois pour toutes*.

Il suffit maintenant de remplacer les expressions $\bar{u}_m \cdot \bar{v}_n$ dans $\Delta\Delta w$ par leurs développements en série pour procéder à l'identification qui permettra de calculer les coefficients C_{mn}. On aura tout d'abord:

$$\sum_m \sum_n C_{mn} [(\alpha_m^4 + \beta_n^4) \cdot u_m \cdot v_n + 2\, \alpha_m^2 \cdot \beta_n^2 \cdot \sum_i k_i^m \cdot u_i \cdot \sum_l k_l^n \cdot v_l] \equiv \frac{1}{B} \cdot \sum_m \sum_n p_{mn} \cdot u_m \cdot v_n .$$

Posons:

$$D_{mn} = C_{mn} \cdot (\alpha_m^4 + \beta_n^4) \tag{31}$$

$$\rho_{mn} = \frac{2\, \alpha_m^2 \cdot \beta_n^2}{(\alpha_m^4 + \beta_n^4)} = 2\, a^2 b^2 \cdot \frac{\lambda_m^2 \cdot \lambda_n^2}{b^4 \cdot \lambda_m^4 + a^4 \cdot \lambda_n^4} \tag{32}$$

il s'en suit:

$$\sum_m \sum_n D_{mn} [u_m \cdot v_n + \rho_{mn} \cdot \sum_i \sum_k k_i^m \cdot k_l^n \cdot u_i v_l] \equiv \frac{1}{B} \sum_m \sum_n p_{mn} \cdot u_m \cdot v_n .$$

Il faut donc égaliser à gauche et à droite de cette identité les coefficients du même produit $u_m \cdot v_n$. Nous indiquons, pour bien mettre en évidence le procédé, les premiers termes de l'identité:

$$\begin{aligned}&D_{11} [u_1 \cdot v_1 + \rho_{11} (k_1^1 \cdot k_1^1 \cdot u_1 v_1 + k_1^1 \cdot k_2^1 \cdot u_1 v_2 + k_2^1 \cdot k_1^1 \cdot u_2 v_1 + \ldots)] + \\ &+ D_{12} [u_1 \cdot v_2 + \rho_{12} (k_1^1 \cdot k_1^2 \cdot u_1 v_1 + k_1^1 \cdot k_2^2 \cdot u_1 v_2 + k_2^1 \cdot k_1^2 \cdot u_2 v_1 + \ldots)] + \\ &+ D_{21} [u_2 \cdot v_1 + \rho_{21} (k_1^2 \cdot k_1^1 \cdot u_1 \cdot v_1 + k_1^2 \cdot k_2^1 \cdot u_1 v_2 + k_2^2 \cdot k_1^1 \cdot u_2 v_1 + \ldots)] + \\ &+ \ldots\ldots \qquad \equiv \frac{1}{B} [p_{11} \cdot u_1 \cdot v_1 + p_{12} \cdot u_1 v_2 + p_{21} \cdot u_2 v_1 + \ldots] .\end{aligned}$$

D'où l'on tire les équations (coefficients de $u_1 \cdot v_1$, $u_1 \cdot v_2$, etc.):

$$\left.\begin{aligned}
&D_{11}(1+\rho_{11}\cdot k_1^1\cdot k_1^1)+D_{12}\cdot\rho_{12}\cdot k_1^1\cdot k_1^2+D_{21}\cdot\rho_{21}\cdot k_1^2\cdot k_1^1+\ldots=\frac{p_{11}}{B}\\
&D_{11}\cdot\rho_{11}\cdot k_1^1\cdot k_2^1+D_{12}(1+\rho_{12}\cdot k_1^1\cdot k_2^2)+D_{21}\cdot\rho_{21}\cdot k_1^2\cdot k_2^1+\ldots=\frac{p_{12}}{B}\\
&D_{11}\cdot\rho_{11}\cdot k_2^1\cdot k_1^1+D_{12}\cdot\rho_{12}\cdot k_2^1\cdot k_1^2+D_{21}(1+\rho_{21}\cdot k_2^2\cdot k_1^1)+\ldots=\frac{p_{21}}{B}\\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\qquad(33)$$

La forme générale, pour le coefficient de $u_m \cdot v_n$, peut s'écrire, en mettant en évidence le terme de la diagonale principale pour $i=m$ et $l=n$:

$$\boxed{\sum_i\sum_l D_{il}\cdot\rho_{il}\cdot k_m^i\cdot k_n^l+D_{mn}(1+\rho_{mn}\cdot k_m^m\cdot k_n^n)=\frac{p_{mn}}{B}}\qquad(33')$$

$$\sum_i\sum_l:\ \left.\begin{matrix} i\neq m\\ l\neq n\end{matrix}\right\}\ \text{simultanément!}$$

Ce système a des coefficients qui décroissent rapidement, car tel est le cas pour les ρ_{il}, les k_m^i, etc. En plus, la constante C_{mn} cherchée s'obtient de D_{mn} par division par $(\alpha_m^4+\beta_n^4)$ selon l'éq. (31).

Pratiquement, on peut résoudre ce système en procédant par étappes le long de la diagonale principale suivant le schéma (fig. 6) et en utilisant le procédé d'itération par étapes:

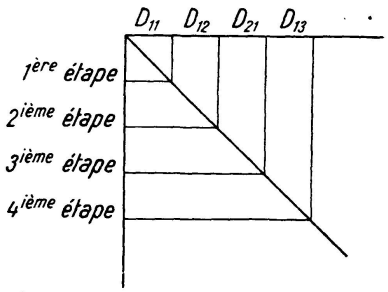

Fig. 6

Les valeurs calculées d'une étape peuvent être utilisées comme *valeurs approchées* de la suivante. C'est ainsi que l'on obtient:

1ère étape: D'_{11}

2ème étape: D''_{11}, D'_{12}

3ème étape: D'''_{11}, D''_{12}, D'_{21}

etc. L'approximation peut être poussée aussi loin que l'on voudra.

La convergence rapide des calculs sera illustrée par l'exemple du paragraphe suivant.

Les constantes dont se compose le système d'équation sont en partie générales, c.-à-d. indépendantes des côtés a et b, p. ex. k_m^n; par contre, les α_m, β_n, ρ_n contiennent a et b et caractérisent la forme de la dalle rectangulaire.

Les moments, efforts tranchants etc. sont donnés en fonction des secondes, troisièmes dérivées partielles de w.

La convergence numérique est remarquablement rapide.

c) Exemple numérique: dalle carrée

On a: $b = a = \frac{l}{2}$, d'où, avec: $\lambda_m = \alpha_m a$, $\lambda_n = \beta_n a$:

$$D_{mn} = C_{mn} \cdot \frac{(\lambda_m^4 + \lambda_n^4)}{a^4}.$$

$$\rho_{mn} = \frac{2\lambda_m^2 \cdot \lambda_n^2}{\lambda_m^4 + \lambda_n^4}.$$

La charge p est uniformément répartie. Nous indiquons immédiatement le système d'équations (33), dont chaque équation est donnée par l'équation-type (33′). Nous nous bornons ici aux premiers termes; les calculs ont été effectués avec 9 équations.

La convergence est très rapide, aussi bien pour les coefficients-mêmes que pour les inconnues D_{mn}.

Dans le cas de la dalle carrée, on a:

$$\underline{D_{mn} \equiv D_{nm}}.$$

Dès lors, il suffit d'établir les équations pour les D_{mn} différents. Le système est le suivant, indiqué pour les 6 premiers termes:

D_{11}	D_{12}	D_{13}	D_{22}	D_{14}	D_{23}	p_{mn}/B
1,30234	−0,03168	−0,00418	0,00648	−0,00098	0,00286	0,69032 p/B
−0,23916	1,17351	−0,00503	−0,06586	−0,00145	−0,00996	0,30225 p/B
−0,18715	−0,02982	1,07375	0,01621	−0,00273	−0,04595	0,19234 p/B
0,18918	−0,25468	0,01058	1,66930	0,00290	−0,09284	0,13234 p/B
−0,15013	−0,02954	−0,00940	0,01530	1,04073	0,01050	0,14105 p/B
0,14804	−0,06830	−0,05318	−0,16476	0,00353	1,51479	0,08422 p/B

Après avoir calculé les D_{mn} par étapes (voir schéma de la fig. 6), on obtient les constantes C_{mn} par l'éq. (31):

$$C_{mn} = \frac{D_{mn}}{(\alpha_m^4 + \beta_n^4)} = \frac{a^4 \cdot D_{mn}}{(\lambda_m^4 + \lambda_n^4)}.$$

Après un calcul de 9 étapes (fig. 6), par itération, on obtient les valeurs suivantes:

$$C_{11} = 0{,}0086270, \qquad C_{12} = C_{21} = 0{,}0003956,$$
$$C_{13} = C_{31} = 0{,}0000508, \qquad C_{22} = 0{,}0000412,$$
$$C_{14} = C_{41} = 0{,}0000117, \qquad C_{23} = C_{32} = 0{,}0000058,$$

Ajoutons encore les valeurs:

$$C_{15} = C_{51} = 0{,}0000037, \qquad C_{24} = C_{42} = 0{,}0000013,$$
$$C_{33} = 0{,}0000002.$$

La convergence est, comme on voit, très rapide. En calculant par itération d'autres étapes, les premiers coefficients ne changent pratiquement plus!

Il est intéressant de comparer la convergence, c.-à-d. l'exactitude du procédé exposé dans ce mémoire à celle des méthodes classiques. En ne calculant qu'une étape, c.-à-d. seulement le coefficient C_{11}, l'erreur sur la flèche ne comporte que 4,7%, tandis que par les méthodes classiques, l'erreur est de 8,5%. Donc, le premier terme C_{11} suffirait pratiquement au calcul de la flèche.

Flèche au milieu: $x = y = 0$:

$$\underline{w(0{,}0) = 0{,}0012640 \cdot \frac{p\,l^4}{B} \cong \frac{p\,l^4}{791 \cdot B}}.$$

D'après TIMOSHENKO („Plates and Shells"), la différence est de 0,024% = 0,24 ‰.

Moment au milieu: $x = y = 0$:

Avec: $\nu = \frac{1}{m} = 0{,}3$: $\underline{M(0{,}0) = 0{,}02291 \cdot p\,l^2 \cong \frac{p\,l^2}{43{,}6}}$.

Cette valeur correspond pleinement avec celles indiquées dans la littérature.

Moment d'encastrement: $x = a = l/2$, $y = 0$:

$$\underline{M(l/2, 0) = -0{,}0503 \cdot p\,l^2 \cong -\frac{p\,l^2}{19{,}9}}.$$

L'exemple traité démontre suffisamment la rapidité et l'exactitude de la méthode exposée.

5. Généralisations; remarques finales

Le calcul de la dalle demande, par rapport à celui du treillis, un développement plus prononcé. Mais l'ampleur du travail numérique reste bien inférieur à celui de la méthode ordinaire qui consiste à superposer 3 fonctions $w(x, y)$ et de développer ces trois composantes en séries, ce qui conduit à 2 systèmes infinis d'équations linéaires pour les constantes. Dans notre méthode proposée, il n'y a aucun calcul „d'orthogonalisation" à effectuer, les fonctions fondamentales u et v l'étant d'emblée.

La méthode peut être utilisée pour des cas de charges antimétriques et généraux ainsi que pour les cas où 3 bords seuls sont encastrés, le quatrième librement appuyé, etc.

Le cas important d'un ou deux bords libres, les autres étant totalement encastrés, sera traité ultérieurement. Il en sera de même du cas beaucoup plus général où l'encastrement, sans être total, est dû à la connexion avec d'autres éléments: dalles, poutres, etc.

C'est avant tout ce „*problème de connexion*" qui joue un rôle fondamental dans la construction, et qui mérite d'être traité par une méthode appropriée aux besoins numériques.

Résumé

L'auteur propose une méthode nouvelle pour le calcul des dalles rectangulaires encastrées, en se basant d'emblée sur des fonctions fondamentales vérifiant automatiquement les conditions aux limites. Il suffit dès lors d'un seul développement de la surcharge p en série de ces fonctions fondamentales, qui représentent la ligne élastique de la poutre encastrée sous l'effet de vibrations transversales.

Les calculs sont grandement simplifiés par le fait que ces fonctions fondamentales sont orthogonales et qu'elles donnent lieu à des expressions asymptotiques simples, facilitant les calculs numériques.

Les bases étant établies, l'auteur montre le mécanisme de la solution en traitant d'abord la poutre, ensuite le treillis de poutres et enfin la dalle rectangulaire elle-même.

Les exemples numériques démontrent que la convergence est rapide et les calculs aisés.

La méthode exposée permet de remplacer la superposition de plusieurs solutions partielles, comme c'était le cas jusqu'ici, par une solution unique; elle peut être appliquée à un nombre de cas très divers quant aux conditions de bord et à la surcharge considérées.

Il est prévu de généraliser cette méthode au problème des dalles rectangulaires continues en deux directions.

Zusammenfassung

Der Verfasser schlägt eine neue Methode für die Berechnung der eingespannten Rechteck-Platten vor, indem er von vornherein Grund-Funktionen einführt, die automatisch die Randbedingungen erfüllen.

Es genügt daher, für die Belastung p eine einzige Reihenentwicklung in diesen Grundfunktionen aufzustellen, die übrigens der Biegelinie des eingespannten Balkens bei Querschwingungen entsprechen.

Die Berechnungen werden dadurch stark vereinfacht, daß die Funktionen orthogonal sind und daß sie zu einfachen asymptotischen Ausdrücken führen, was die numerische Auswertung erheblich abkürzt.

Nachdem er die Grundlagen dargelegt hat, zeigt der Verfasser den Mechanismus der Lösung, indem er zuerst den Balken, dann den Balkenrost und schließlich die rechteckige Platte selbst behandelt.

Die numerischen Beispiele zeigen, daß die Methode sehr rasch konvergiert und leicht anzuwenden ist.

Die dargestellte Methode ersetzt die bisher unumgängliche, umständliche Superposition von vielen partiellen Lösungen durch eine einzige Lösung.

Sie kann auf verschiedenste Fälle angewendet werden (verschiedene Randbedingungen und Belastungen).

Es ist vorgesehen, diese Methode noch auf Rechteck-Platten zu verallgemeinern, die nach beiden Richtungen durchlaufend sind.

Summary

The author proposed a new method for calculating fixed rectangular slabs, in that he introduces, right at the start, fundamental functions which automatically fulfil the edge conditions.

It is therefore sufficient, for the loading p, to establish a single series development in these fundamental functions, which also correspond to the bending line of the fixed beam under transverse vibrations.

The calculations were greatly simplified in that the functions are orthogonal and that they lead to simple asymptotic expressions, thus considerably shortening the numerical evaluation.

After explaining the fundamental bases, the author demonstrates the mechanism of the solution, in that he first of all deals with the beam, then with the beam-grid, and finally with the rectangular slab itself.

The numerical examples show that the method converges very quickly and is easy to apply.

The proposed method replaces the hitherto unavoidable, cumbersome superposing of many partial solutions by one single solution.

It can be adopted for cases of very different kinds (various edge conditions and loadings).

It is intended to generalise this method also to rectangular slabs which are continuous in both directions.