

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

**Band:** 13 (1953)

**Artikel:** Poutre sur appui continu élastique

**Autor:** Hahn, L.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-13200>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 09.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Poutre sur appui continu élastique

*Balken auf kontinuierlicher elastischer Unterlage*

*Beam on continuous elastic support*

L. HAHN, Ingénieur Civil, Paris

La courbe de déformation, appelée aussi ligne élastique, des poutres comportant des appuis continus élastiques, est déterminée suivant la méthode classique, en établissant l'équation différentielle de la courbe et en l'intégrant. Cette méthode a un grave inconvénient: il faut établir autant de relations donnant cette courbe, qu'il y a des discontinuités de la ligne de charge, de variations du moment d'inertie de la poutre et des variations des caractéristiques mécaniques des appuis. On conçoit facilement que, dès que l'on s'éloigne un peu du cas simple de la poutre à caractéristiques continues, les calculs deviennent inextricables si non impossibles à mener jusqu'au bout.

L'application des relations de Bresse évite absolument tous ces inconvénients et, de plus, on est dispensé d'employer les fonctions hyperboliques. En effet, il s'agit d'intégrer seulement et l'on sait que l'on peut intégrer facilement des fonctions discontinues.

### Emploi des relations de Bresse

Soit un tronçon de ligne élastique, fig. 1, avec une origine  $y_0$  et une pente  $\Theta_0$  à l'origine. Nous pouvons poser:

$$y_i = y_0 + \Theta_0 x_i - \int_0^{x_i} \omega \zeta_i = y_0 + \Theta_0 x_i - \int_0^{x_i} \eta \zeta_i dx \quad (1)$$

avec:

$$\eta = \frac{M}{EI}, \quad \omega = \eta dx$$

où  $\omega$  est l'angle de contingence, c'est-à-dire l'angle de deux tangentes infiniment voisines,  $I$  le moment d'inertie,  $E$  le module de Young de la poutre- $y$  l'ordonnée de la courbe,  $x$  et  $\zeta$  des abscisses.

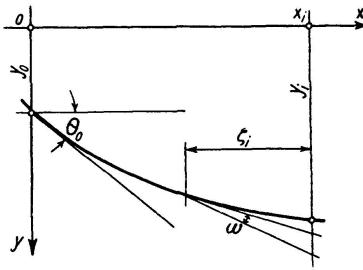


Fig. 1

Pour un point voisin  $i - 1$ , on a une relation analogue:

$$y_{i-1} = y_0 + \Theta_0 x_{i-1} - \int_0^{x_{i-1}} \eta \zeta_{i-1} dx, \quad (2)$$

En soustrayant (1) et (2), on obtient:

$$\Delta y_{i-1} = y_i - y_{i-1} = \Theta_0 \Delta x_{i-1} - \int_0^{x_{i-1}} \eta (\zeta_i - \zeta_{i-1}) dx - \int_{x_i}^{x_{i-1}} \eta \zeta_i dx,$$

soit:

$$\Delta y_{i-1} = \Theta_0 \Delta x_{i-1} - \Delta x_{i-1} \int_0^{x_{i-1}} \eta dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \eta \zeta_i dx \quad (3)$$

car:

$$\zeta_i = \zeta_{i-1} + \Delta x_{i-1} = \zeta_{i-1} + x_i - x_{i-1},$$

on a d'une manière identique

$$\Delta y_i = \Theta_0 \Delta x_i - \Delta x_i \int_0^{x_i} \eta dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \eta \zeta_{i+1} dx \quad (4)$$

En soustrayant (3) et (4), on obtient:

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_{i-1} = \Delta y_i - \Delta y_{i-1} &= \Theta_0 \Delta^2 x_{i-1} - \Delta x_i \int_0^{x_i} \eta dx + \Delta x_{i-1} \int_0^{x_{i-1}} \eta dx \\ &\quad - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \eta \zeta_{i+1} dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \eta \zeta_i dx \end{aligned} \quad (5)$$

Cette relation fondamentale se simplifie singulièrement, si les intervalles  $\Delta x_i$  sont tous égaux. L'uniformité des longueurs des intervalles vaut la peine d'être envisagée, car les calculs sont abrégés de beaucoup. On a d'ailleurs toujours intérêt à diminuer le plus possible la longueur des intervalles, car l'exactitude des résultats s'en ressent. Dans ces conditions, on peut toujours s'arranger afin que les intervalles  $\Delta x_i$  soient tous égaux. La relation (5) devient dans ce cas:

$$\Delta^2 y_{i-1} = -\epsilon \int_{x_{i-1}}^{x_i} \eta dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \eta \zeta_i dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \eta \zeta_{i+1} dx, \quad (6)$$

où:

$$\epsilon = \Delta x_i = \text{constant}, \quad \Delta^2 x_i = 0,$$

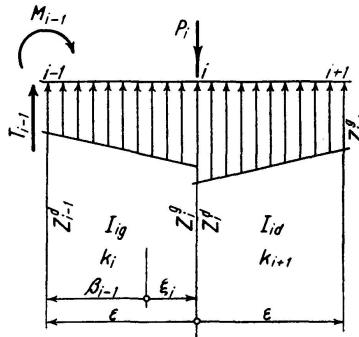


Fig. 2

Nous pouvons effectuer les intégrales, en admettant que les ordonnées y varient linéairement dans un intervalle  $\epsilon$ . *Ce sera la seule approximation admise dans cette étude.* Elle sera d'autant plus valable que  $\epsilon$  sera plus petit. On voit l'intérêt qu'il y a à diminuer la longueur des intervalles  $\epsilon$ .

D'autre part, ces intervalles seront choisis tels, que le moment d'inertie et les caractéristiques mécaniques des appuis ne varient pas le long d'un intervalle et que la ligne de charge soit continue. On aura donc le schéma de la figure 2. Nous allons calculer les moments  $M$ :

Dans la travée  $i - 1, i$ , on a:

$$M = M_{i-1} + T_{i-1} \beta_{i-1} + \frac{Z_{i-1}^d \beta_{i-1}^2}{2} + (Z_i^g - Z_{i-1}^d) \frac{\beta_{i-1}^3}{6\epsilon}$$

et pour  $\beta_{i-1} = \epsilon$ :

$$M_i = M_{i-1} + T_{i-1} \epsilon + \frac{\epsilon^2}{6} (Z_i^g + 2 Z_{i-1}^d)$$

On peut donc éliminer l'effort tranchant

$$T_{i-1} = \frac{M_i - M_{i-1}}{\epsilon} - \frac{(Z_i^g + 2Z_{i-1}^d)\epsilon}{6} \quad (7)$$

Remarquons que la charge  $Z$  est égale à la réaction du sol moins la charge appliquée. Nous avons les intégrales suivantes, facile à calculer:

$$\int_0^\epsilon M \zeta_i d\zeta = \frac{M_{i-1} \epsilon^2}{2} + T_{i-1} \frac{\epsilon^3}{6} + Z_{i-1}^d \frac{\epsilon^4}{24} + (Z_i^g - Z_{i-1}^d) \frac{\epsilon^4}{120}$$

et en éliminant  $T_{i-1}$ , à l'aide de la relation (7)

$$\int_0^\epsilon M \zeta_i d\zeta = \frac{(2M_{i-1} + M_i)\epsilon^2}{6} - \frac{(7Z_i^a + 8Z_{i-1}^d)}{360} \quad (8)$$

on a dans la même travée:

$$\int_0^\epsilon M d\zeta = M_{i-1} \epsilon + T_{i-1} \frac{\epsilon^2}{2} + Z_{i-1}^d \frac{\epsilon^3}{6} + (Z_i^g - Z_{i-1}^d) \frac{\epsilon^3}{24}$$

et en éliminant  $T_{i-1}$ :

$$\int_0^\epsilon M d\zeta = \frac{(M_i + M_{i-1})\epsilon}{2} - \frac{(Z_i^g + Z_{i-1}^d)\epsilon^3}{24} \quad (9)$$

Dans la travée  $i, i+1$ , on obtient immédiatement une relation analogue à la relation (8):

$$\int_0^\epsilon M \zeta_{i+1} d\zeta = \frac{(2M_i + M_{i+1})\epsilon^2}{6} - \frac{(7Z_{i+1}^g + 8Z_i^d)\epsilon^4}{360} \quad (10)$$

En remplaçant les intégrales (8), (9) et (10) dans la relation (6) et en posant:

$$\lambda_i = \frac{I_{ig}}{I_{id}} \quad (11)$$

$$\alpha_i = \frac{\epsilon^2}{6E I_{ig}} \quad (12)$$

on obtient après simplification:

$$\boxed{\Delta^2 y_{i-1} = \alpha_i \left\{ -[M_{i-1} + 2(1 + \lambda_i)M_i + \lambda_i M_{i+1}] + \frac{\epsilon^2}{60} [7Z_{i-1}^d + 8(Z_i^g + \lambda_i Z_i^d) + 7\lambda_i Z_{i+1}^g] \right\}} \quad (13)$$

Nous pouvons avoir 3 cas particuliers:

$$\lambda_i = 1, \quad \Delta^2 y_{i-1} = \alpha_i \left\{ -[M_{i-1} + 4M_i + M_{i+1}] + \frac{\epsilon^2}{60} [7Z_{i-1}^d + 8(Z_i^g + Z_i^d) + 7Z_{i+1}^g] \right\} \quad (13a)$$

Charge appliquée non discontinue au point  $i$ ,

$$\lambda_i \neq 1, \quad Z_i^g = Z_i^d = Z_i,$$

$$\Delta^2 y_{i-1} = \alpha_i \left\{ -[M_{i-1} + 2(1 + \lambda_i)M_i + \lambda_i M_{i+1}] + \frac{\epsilon^2}{60} [7Z_{i-1}^d + 8(1 + \lambda_i)Z_i + 7\lambda_i Z_{i+1}^g] \right\} \quad (13b)$$

Charge appliquée non discontinue au point  $i$ ,  $\lambda_i = 1$ , cas fréquent.

$$\boxed{\Delta^2 y_{i-1} = \alpha_i \left[ -(M_{i-1} + 4M_i + M_{i+1}) + \frac{\epsilon^2}{60} (7Z_{i-1}^d + 16Z_i + 7Z_{i+1}^g) \right]} \quad (13c)$$

Les relations (13), (13a), (13b), (13c) résolvent complètement le problème, car elle donnent les variations des ordonnées de la ligne élastique, en supposant connues les valeurs de  $M$  et de  $Z$ . Il y aura là un petit travail de tâtonnement, car le cheminement de  $\Delta y$  conduit à connaître, dans ces relations, tous les  $M$  et  $Z$ , sauf  $M_{i+1}$  et  $Z_{i+1}$ , qui sont déterminés après le calcul numérique de

$\Delta^2 y_{i-1}$ , comme nous le montrerons ci-après. Mais un tableau, complété au fur et à mesure de l'avance des calculs, donnera les premières, les deuxièmes et, à la rigueur, les troisièmes différences des  $M$  et  $Z$  ( $\Delta$ ,  $\Delta^2$  et  $\Delta^3$ ), ce qui permettra d'apprécier rapidement les valeurs de  $M_{i+1}$  et  $Z_{i+1}$ . A la rigueur, après avoir introduit ces valeurs dans les relations (13), on trouvera de légères corrections à appliquer à  $M_{i+1}$  et  $Z_{i+1}$ , et on recalculera à nouveau  $\Delta^2 y_{i-1}$ . L'expérience montre que la convergeance est extrêmement rapide.

### Calcul des moments de flexion

Les figures 2 et 3 permettent le calcul immédiat des moments. Supposons qu'il y a une charge concentrée  $P_i$  au point  $i$ . Nous avons pour la travée  $i-1, i$ :

$$M_i - T_{ig} \epsilon + \frac{\epsilon^2}{6} (Z_{i-1}^a + 2 Z_i^a) - M_{i-1} = 0$$

ou encore

$$\Delta M_{i-1} = M_i - M_{i-1} = T_{ig} \epsilon - \frac{\epsilon^2}{6} (Z_{i-1}^a + 2 Z_i^a), \quad (14)$$

et pour la travée  $i, i+1$ :

$$M_i + T_{ig} \epsilon - P_i \epsilon + \frac{\epsilon^2}{6} (2 Z_i^a + Z_{i+1}^a) - M_{i+1} = 0$$

ou encore:

$$\Delta M_i = M_{i+1} - M_i = T_{ig} \epsilon - P_i \epsilon + \frac{\epsilon^2}{6} (2 Z_i^a + Z_{i+1}^a) \quad (15)$$

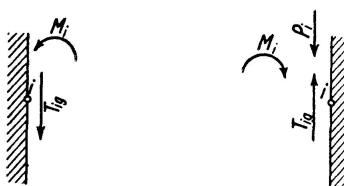


Fig. 3

En soustrayant les relations (14) et (15), on obtient:

$$\Delta^2 M_{i-1} = \Delta M_i - \Delta M_{i-1} = -P_i \epsilon + \frac{\epsilon^2}{6} [Z_{i-1}^a + 2(Z_i^a + Z_i^g) + Z_{i+1}^g] \quad (16)$$

Si la charge  $Z$  est continue au droit de l'appui  $i$ , ( $Z_i^g = Z_i^a = Z_i$ )

$$\Delta^2 M_{i-1} = -P_i \epsilon + \frac{\epsilon^2}{6} (Z_{i-1}^a + 4Z_i^a + Z_{i+1}^a) \quad (16a)$$

### Marche des opérations numériques

Supposons connues les deux premières ordonnées  $y_0$  et  $y_1$  et le moment à l'origine  $M_0$ . On estime la valeur de  $Z_{2g}$ .  $Z_0$  est donné par la relation connue:

$$Z_0 + p_0 = k_1 y_0, \quad Z_0 = -p_0 + k_1 y_0. \quad (17)$$

Rappelons que  $k_1$  est la constante mécanique de l'appui continu dans la travée 0, 1 et que  $Z_0$  est la somme algébrique de la réaction su sol  $s_0$  et la charge répartie appliquée  $p_0$ , supposée descendante, autrement dit (voir fig. 4):

$$Z_0 = s_0 - p_0, \quad s_0 = Z_0 + p_0$$

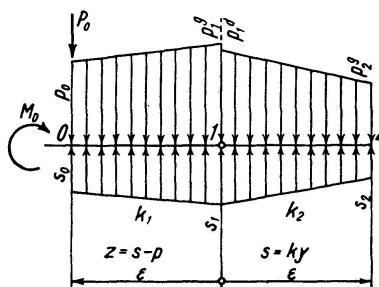


Fig. 4

Au point 1 on a,  $s_1$  gardant évidemment la même valeur à droite et à gauche de ce point:

$$\begin{aligned} s_1 &= Z_{1g} + p_{1g} = Z_{1d} + p_{1d}, \\ s_1 - \nu_1 &= k_1(y_1 - \nu_2), \\ s_1 + \nu_1 &= k_2(y_1 + \nu_2), \end{aligned}$$

où  $\nu_1, \nu_2$  sont des quantités infiniment petites. En ajoutant ces deux dernières relations et en passant à la limite:  $\nu_1 \rightarrow 0, \nu_2 \rightarrow 0$ , on a:

$$s_1 = \frac{(k_1 + k_2)}{2} y_1 = k_{1m} y_1,$$

on appellera  $k_{1m}$  la constante mécanique moyenne de l'appui au droit du point 1. Pour un appui quelconque  $i$ , on a:

$$k_{im} = \frac{1}{2}(k_i + k_{i+1}), \quad s_i = k_{im} y_i, \quad (18)$$

On a donc:

$$Z_{1g} = k_{1m} y_1 - p_{1g}, \quad (19)$$

$$Z_{1d} = k_{1m} y_1 - p_{1d}, \quad (20)$$

En supposant qu'une charge concentrée  $P_0$  est appliquée au point 0, la relation (16) nous donne  $M_1 (i=0)$ :

$$\Delta^2 M_{0-1} = \Delta M_0 = M_1 - M_0 = -P_0 \epsilon + \frac{\epsilon^2}{6} (2Z_0 + Z_{1g}),$$

donc:

$$M_1 = M_0 - P_0 \epsilon + \frac{\epsilon^2}{6} (2Z_0 + Z_{1g}), \quad (21)$$

on a supposé  $\Delta M_{0-1} = Z_{0-1} = Z_0^g = 0$ ,  $Z_0^d = Z_0$ , on peut d'ailleurs établir directement la relation (21) par un calcul immédiat.  $M_2$  sera calculé par la relation (16) complète, soit ( $i = 1$ ):

$$\Delta M_1 = M_2 - M_1 = \Delta M_0 - P_1 \epsilon + \frac{\epsilon^2}{6} [Z_0 + 2(Z_1^g + Z_1^d) + Z_2^g], \quad (22)$$

où, rappelons-le,  $Z_2^g$  seul sera estimé a priori, tous les autres termes étant connus. La relation (13) complète nous donne  $y_2$ , donc  $Z_2^g$ : ( $i = 1$ )

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - \Delta y_0 = \alpha_1 [---], \quad \Delta y_0 = y_1 - y_0,$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y_0 + \alpha_1 \left\{ -[M_0 + 2(1 + \lambda_1)M_1 + \lambda_1 M_2] \right. \\ \left. + \frac{\epsilon^2}{60} [7Z_0 + 8(Z_1^g + \lambda_1 Z_1^d) + 7\lambda_1 Z_2^g] \right\} \quad (23)$$

Dans cette relation, on connaît tous les termes, sauf  $Z_2^g$ , dont la valeur étant estimée, on peut calculer  $y_2$ , donc  $Z_2^g$ :

$$Z_2^g = k_{2m} y_2 - p_{2g}, \quad (24)$$

on reintroduit cette valeur de  $Z_2^g$  dans (22) et (23) et on corrige  $M_2$  et  $y_2$ . Comme il a été déjà dit ci-dessus, la convergeance est très rapide.

La suite des opérations se continue d'une manière identique à l'aide des relations (13) et (16).

### Paramètres à l'origine

Les paramètres à l'origine  $y_0$ ,  $y_1$ , ne sont pas déterminés. Mais nous avons deux conditions aux limites à satisfaire à l'autre extrémité de la poutre. Il faut que la suite des opérations conduise à un effort tranchant et à un moment de flexion connus d'avance à cette autre extrémité, ce qui détermine les valeurs de  $y_0$  et  $y_1$ . On procédera pratiquement de la manière suivante. On détermine 3 lignes élastiques. La première, qu'on appellera I sera établie avec les charges réelles et, les conditions aux limites n'étant pas satisfaites, on la corrigera par deux autres désignées par II et III. En amplifiant ces deux dernières par deux paramètres  $C_2$  et  $C_3$ , on aura les deux relations suivantes:

$$M_{I_n} + C_2 M_{II_n} + C_3 M_{III_n} = M_n, \quad (25)$$

$$T_{I_n} + C_2 T_{II_n} + C_3 T_{III_n} = P_n, \quad (26)$$

où  $n$  désigne l'extrémité de la poutre opposée au point 0,  $M_{I_n}$ ,  $M_{II_n}$ ,  $M_{III_n}$  les moments correspondant aux trois lignes élastiques au point  $n$ ,  $T_{I_n}$ ,  $T_{II_n}$ ,  $T_{III_n}$  les efforts tranchants au point  $n$  et  $M_n$ ,  $P_n$  le moment et la charge ponctuelle, efforts connus, appliqués également au point  $n$ .

On peut éviter le calcul des 3 lignes élastiques, en se limitant à la première seulement, la ligne I. Dans ce cas, les paramètres  $y_0$  et  $y_1$  interviendront dans toutes les opérations et seront déterminés par les 2 conditions aux limites au point  $n$ .

### Applications numériques

#### 1<sup>er</sup> exemple

Nous appliquons la méthode à un exemple très simple, extrait de l'ouvrage de résistance des matériaux de Föppl (1), fig. 5. Une poutre courte en fer, de 80 cm de longueur, chargée en son milieu par une charge ponctuelle de 1000 kg, ayant une section carrée de 6 cm de côté, est appuyée sur un terrain qui se comprime de 0,25 mm, sous l'influence d'une pression de 1 kg par cm<sup>2</sup>. Donc:  $k' = 40 \text{ kg/cm}^3$ ,  $k = 40 \cdot 6 \text{ kg/cm}^2$ ,  $I = 6 \cdot 18 \text{ cm}^4$ ,  $E = 22 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$ .  $k$  étant uniforme, nous pouvons nous dispenser de calculer la déformation  $y$  et nous déterminons directement  $Z$ .

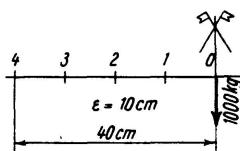


Fig. 5

*Ligne élastique I.* Nous admettons  $Z_0 = Z_1 = 12 \text{ kg/cm}$ , valeurs voisines de la pression uniforme sur le sol. L'effort tranchant en 0 sera par raison de symétrie égal à 500 kg. Nous admettons en 0 un moment  $M_0$  égal à 10 000 kg/cm, correspondant à la pression uniforme sur le sol.

$M_1$  sera déterminé à l'aide de la relation incomplète (21)

$$M_1 = M_0 - P_0 \epsilon + \frac{\epsilon^2}{6} \cdot 3 Z_0 = 10000 - 500 \cdot 10 + \frac{100}{2} \cdot 12 = 5600 \text{ kg/cm},$$

$$\Delta M_0 = M_1 - M_0 = 5600 - 10000 = -4400 \text{ kg/cm}; \quad \Delta Z_0 = 0,$$

On a donc le tableau suivant:

$i$	$\Delta^2 Z$	$\Delta Z$	$Z$	$\Delta^2 M$	$\Delta M$	$M$
0	-0,58	0	12,00	1191	-4400	10000
1	-0,25	-0,58	12,00	1138	-3209	5600
2	-0,04	-0,83	11,42	1058	-2071	2391
3	—	-0,87	10,59	—	-1013	320
4	—	—	9,72	—	—	-693

<sup>1)</sup> Ed. Gauthier-Villars, 1901.

Nous donnons le détail des opérations du point 2 à titre d'exemple. La relation (13c), dans laquelle on multiplie les 2 membres par  $k$ , nous donne:

$$\alpha_i k = \frac{\epsilon^2 k}{6 E I_g} = \frac{100 \cdot 40 \cdot 6}{6 \cdot 22 \cdot 10^5 \cdot 6 \cdot 18} = \frac{1}{59400}, \quad \frac{\epsilon^2}{60} = \frac{10}{6},$$

$$\Delta^2 Z_0 = \frac{1}{59400} \left[ -(10000 + 4 \cdot 5600 + 2391) + \frac{10}{6} (7 \cdot 12 + 16 \cdot 12 + 7 \cdot 11,42) \right]$$

$$\Delta^2 Z_0 = \Delta Z_1 - \Delta Z_0 = -0,58, \quad \Delta Z_1 = \Delta Z_0 - 0,58 = -0,58,$$

$$Z_2 = Z_1 + \Delta Z_1 = 12,00 - 0,58 = 11,42 \text{ kg/cm}$$

La relation (16a) nous donne:

$$\Delta^2 M_0 = \frac{100}{6} (12 + 4 \cdot 12 + 11,42) = 1191 = \Delta M_1 - \Delta M_0,$$

$$\Delta M_1 = 1191 - 4400 = -3209, \quad M_2 = M_1 + \Delta M_1 = 5600 - 3209 = 2391 \text{ kg/cm}$$

*Ligne élastique II.* Nous admettons  $Z_0 = Z_1 = 0$ . En 0 nous admettons  $M_0 = 693 \text{ kgm}$ , a fin de corriger le résidu du tableau précédent. On aura le tableau suivant:

$i$	$\Delta^2 Z$	$\Delta Z$	$Z$	$\Delta^2 M$	$\Delta M$	$M$
0	-0,07	0	0	-1	0	693
1	-0,07	-0,07	0	-8	-1	693
2	-0,07	-0,14	-0,07	-22	-9	692
3	—	-0,21	-0,21	—	-31	683
4	—	—	-0,42	—	—	652

*Ligne élastique III.* Nous admettons  $Z_0 = Z_1 = 1$  et  $M_0 = 0$ . On aura le tableau suivant:

$i$	$\Delta^2 Z$	$\Delta Z$	$Z$	$\Delta^2 M$	$\Delta M$	$M$
0	-0,01	0	1,00	100	50	0
1	-0,02	-0,01	1,00	99	150	50
2	-0,05	-0,03	0,99	95	249	200
3	—	-0,08	0,96	—	344	449
4	—	—	0,88	—	—	793

Il faut calculer l'effort tranchant en 4 pour les trois lignes élastiques.

$$\text{Ligne I } T_4 = 10(6 + 12 + 11,42 + 10,59 + 4,86) - 500 = -51,3 \text{ kg}$$

$$\text{,, II } T_4 = -10(0,07 + 0,14 + 0,21) = -4,9 \text{ kg}$$

$$\text{,, III } T_4 = 10(0,50 + 1,00 + 0,99 + 0,96 + 0,44) = 38,9 \text{ kg.}$$

Nous pouvons poser les 2 équations (25), (26):

$$\begin{aligned} 652 C_2 + 793 C_3 &= 693, \\ -4,9 C_2 + 38,9 C_3 &= 51,3. \end{aligned}$$

La résolution de ces 2 équations, qui est immédiate, donne:

$$C_2 = -0,4692, \quad C_3 = 1,2597,$$

on a donc:

$$\begin{aligned} M_0 &= 10000 - 652 \cdot 0,4692 = 9675 \text{ kgm}, \\ Z_0 &= 12,0 + 1,26 = 13,26 \text{ kg/cm}, \end{aligned}$$

Föppl donne à l'aide d'un calcul très long:

$$M_0 = 9560 \text{ kg/cm}, \quad Z_0 = 13,8 \text{ kg/cm}$$

soit 1% de différence pour  $M$  et 5% pour  $Z$ .

### 2<sup>ème</sup> exemple

Nous examinons un cas analogue au précédent, mais le moment d'inertie de la poutre et la constante mécanique du sol ne sont pas constants et de plus il n'y a plus de symétrie. Cet exemple est extrait de l'ouvrage de M. VERDEYEN<sup>2)</sup>, voir fig. 6. Il s'agit d'une poutre en béton.

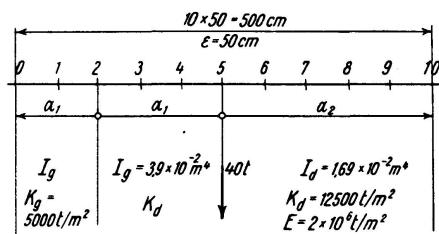


Fig. 6

*Ligne élastique I.* Nous admettons  $Z_0 = Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_4 = Z_5 = 0$ .

$$M_0 = M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = M_5 = 0 \text{ et } T_5 = -40 \text{ t.}$$

Nous calculons directement  $Z$ , les opérations sont un peu plus compliquées pour les autres 2 lignes élastiques, mais les résultats sont plus précis. Nous avons trouvé après un seul essai  $Z_6 = 0,31 \text{ t/m}$  et pouvons donc calculer  $M_6$ :

$$M_6 = -40 \cdot 0,5 + 0,31 \cdot \frac{0,50^2}{6} = -19,99 \text{ tm.}$$

Le tableau ci-dessous donne tous les résultats, dont le calcul ne présente rien de particulier.

<sup>2)</sup> Mécanique du Sol et Fondations, Ed. Eyrolles, Paris.

$i$	$\Delta^2 Z$	$\Delta Z$	$Z$	$\Delta^2 M$	$\Delta M$	$M$
5	1,85	0,31	0	0,15	-19,99	0
6	3,68	2,16	0,31	0,77	-19,84	-19,99
7	5,43	5,84	2,47	2,30	-19,07	-39,83
8	6,96	11,27	8,31	5,19	-16,77	-58,90
9	—	18,23	19,58	—	-11,58	-75,67
10	—	—	37,81	—	—	-87,25

$$T_{10} = 0,5 \left[ \sum_0^9 Z + 0,5 Z_{10} \right] - 40,0 = -15,21 \text{ t}$$

*Ligne élastique II.* Nous admettons  $Z_0 = 0$ ,  $Z_1 = 6,0 \text{ t/m}$ ,  $M_0 = 0$ . Nous pouvons calculer immédiatement  $M_1$ :

$$M_1 = +6 \cdot \overline{0,50^2} / 6 = 0,25 \text{ tm}$$

Nous donnons ci-dessous le tableau des  $Z$  et  $M$  et indiquons les opérations dans certains points particuliers.

$i$	$\Delta^2 Z$	$\Delta Z$	$Z$	$\Delta^2 M$	$\Delta M$	$M$
0	6,00	6,00	0	1,87	0,25	0
1	—	—	6,00	5,62	2,12	0,25
2	—	—	20,99	10,82	7,74	2,37
3	- 1,20	14,43	44,86	14,74	18,56	10,11
4	- 4,57	13,23	59,29	17,94	33,30	28,67
5	- 10,62	8,66	72,52	19,85	51,24	61,97
6	- 17,19	- 1,96	81,18	19,09	71,09	113,21
7	- 25,49	- 19,15	79,22	13,96	90,18	184,30
8	- 35,03	- 44,64	60,07	2,40	104,14	274,48
9	—	- 79,67	15,43	—	106,54	378,62
10	—	—	- 64,24	—	—	485,16

Nous donnons le détail des opérations pour les points 2 et 5, en utilisant respectivement la relation (13c) et (13b), car la charge  $Z$  est continue.

Point 2,  $i=2$

$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = \alpha_1 [----].$$

Nous multiplions les 2 membres par  $K_g$ . Suivant la relation (18), on a:

$$Z_2 = k_{m,2} y_2 = 8750 y_2, \quad y_2 = \frac{Z_2}{8750},$$

$$K_g y_2 = \frac{5000}{8750} Z_2 = \frac{Z_2}{1,75},$$

D'autre part nous avons:

$$K_g(y_1 - y_0) = \Delta Z_0, \quad K_g y_1 = Z_1,$$

$$\alpha_1 k_g = \frac{\epsilon^2 k_g}{6 E I_g} = \frac{0,25 \cdot 5000}{6 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 3,9 \cdot 10^{-2}} = \frac{1}{374,4}, \quad \frac{\epsilon^2}{60} = \frac{1}{240},$$

La relation ci-dessus devient donc:

$$Z_2 = 1,75 \left\{ Z_1 + \Delta Z_0 + \frac{1}{374,4} \left[ -(4 \cdot 0,25 + 2,37) + \frac{1}{240} (16 \cdot 6 + 7 \cdot 20,99) \right] \right\}$$

$$Z_2 = 1,75 \left( 6 + 6 - \frac{2,4}{374,4} \right) = 20,99 \text{ t/m}$$

Pour les points 1 et 3, où la variation de  $K$  intervient, le calcul est absolument analogue.

$$\text{Point 5, } i = 5, \quad \alpha_1 k_d = \frac{1}{374,4} \cdot \frac{12500}{5000} = \frac{1}{149,76}, \quad \lambda_5 = \frac{3,9}{1,69}$$

Nous multiplions les 2 membres de la relation (13 b) par  $kd$ .

$$149,76 \Delta^2 Z_4 = - \left[ 28,67 + 2 \left( 1 + \frac{3,9}{1,69} \right) \cdot 61,97 + \frac{3,9}{1,69} \cdot 113,21 \right] \\ + \frac{1}{240} \left[ 7 \cdot 59,29 + 8 \left( 1 + \frac{3,9}{1,69} \right) \cdot 72,52 + 7 \cdot \frac{3,9}{1,69} \cdot 81,18 \right] \\ \Delta^2 Z_4 = \frac{1}{149,76} \left( -700,4 + \frac{3645,1}{240} \right) = \frac{1}{149,76} (-700,4 + 15,2) = -4,57, \\ T_{10} = 0,5 \left[ \sum_1^9 Z + 0,5 Z_{10} \right] = 0,5 \cdot 407,44 = 203,72 \text{ t.}$$

*Ligne élastique III.* Nous admettons  $Z_0 = Z_1 = 13,0 \text{ t/m}$ ,  $M_0 = 0$ . Les calculs sont tout-à-fait analogues à ceux de la ligne élastique II. Nous donnons ci-dessous le tableau des  $Z$  et  $M$ .

$i$	$\Delta^2 Z$	$\Delta Z$	$Z$	$\Delta^2 M$	$\Delta M$	$M$
0	—	0	13,00	3,65	1,62	0
1	—	—	13,00	5,66	5,27	1,62
2	—	—	22,70	7,58	10,93	6,89
3	- 1,48	- 1,10	32,07	7,68	18,51	17,82
4	- 4,44	- 2,58	30,97	6,91	26,19	36,33
5	- 8,88	- 7,02	28,39	4,97	33,10	62,52
6	- 12,37	- 15,90	21,37	0,85	38,07	95,62
7	- 15,91	- 28,27	5,47	- 6,36	38,92	133,69
8	- 18,84	- 44,18	- 22,80	- 17,53	32,56	172,61
9	—	- 63,02	- 66,98	—	15,03	205,17
10	—	—	- 130,00	—	—	220,20

$$T_{10} = 0,5 \left[ 0,5 Z_0 + \sum_1^9 Z + 0,5 Z_{10} \right] = 0,5 \cdot 5,69 = 2,85 \text{ t}$$

Les deux équations (25), (26) deviennent:

$$485,16 C_2 + 220,2 C_3 = 87,25,$$

$$203,72 C_2 + 2,85 C_3 = 15,21,$$

$$C_2 = 0,071315, \quad C_3 = 0,2391,$$

on a donc:

$$M_5 = 61,97 \cdot 0,071315 + 62,52 \cdot 0,2391 = 4,42 + 14,95 = 19,37 \text{ t/m}$$

$$Z_5 = 72,52 \cdot 0,071315 + 28,39 \cdot 0,2391 = 5,17 + 6,79 = 11,96 \text{ t/m}$$

Nous avons recommencé tous les calculs de la ligne élastique vraie en partant de  $Z_0 = 3,11$ ,  $Z_1 = 3,54$  et  $M_0 = 0$ , et avons trouvé peu de différence avec les trois états I,  $C_2$  II,  $C_3$  III cumulés, par exemple  $Z_5 = 11,95$  au lieu de  $11,96 \text{ t/m}$ , pour  $M_5$  on retrouve exactement la même valeur. Ceci constitue une excellente vérification. La fig. 7 donne tous les  $Z$  et  $M$  vrais.

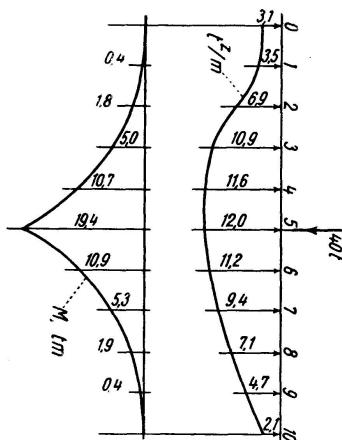


Fig. 7

Monsieur VERDEYEN trouve à l'aide d'un calcul graphique:

$$M_5 = 24,2 \text{ t/m}, \quad \text{différence } 25\%.$$

$$y_5 = 0,98 \text{ mm}, \quad Z_5 = \frac{0,98}{1000} \cdot 12500 = 12,3 \text{ t/m}, \quad \text{différence } 3\%.$$

### 3<sup>ème</sup> exemple

Nous étudions un cas plus compliqué, traité par la méthode de relaxation, due à Southwell, par M. WRIGHT<sup>3</sup>). Nous maintenons les mesures anglaises, afin de rendre la comparaison des résultats plus facile (fig. 8).  $k$  étant constant, on peut calculer directement  $Z$ . Suivant les notations de M. WRIGHT:

$$k^v = \frac{k h^4}{E I_i} = \frac{k}{E I_i},$$

<sup>3</sup>) The Structural Engineer, Août 1952.

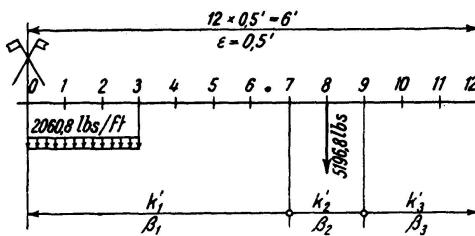


Fig. 8

car  $h = 1'$  dans cette étude. Suivant notre relation (12), on a:

$$k\alpha_i = \frac{\epsilon^2 k}{6EI_i} = \frac{k' \epsilon^2}{6} = \frac{k^v}{24} = \beta_i,$$

Suivant la fig. 8, on a:

$$k_1^v = 0,03, \quad \beta_1 = \frac{1}{800}, \quad k_2^v = 0,04, \quad \beta_2 = \frac{1}{600}, \quad k_3^v = 0,06, \quad \beta_3 = \frac{1}{400},$$

*Ligne élastique I.* Nous admettons  $Z_0 = Z_1 = 0, M_0 = 0$ . Afin de ne pas compliquer les notations nous appelons  $Z$  uniquement la réaction du sol, c'est-à-dire  $s$ . Par conséquent  $Z$  ne comprend pas la pression appliquée  $p$ . Nous pouvons calculer immédiatement  $M_1$ :

$$M_1 = -\frac{2060,8}{8} = -257,6 \text{ lbs} \cdot \text{ft}.$$

En multipliant les deux membres de la relation (13a) par  $k$ , en supposant  $Z_2$  et  $M_2$  connus et en se rappelant que dans cette relation  $Z$  représente  $s - p$  et non  $Z$  on obtient:  $i = 1, Z_2 = 2,25, M_2 = -1030,3$ ,

$$\begin{aligned} \Delta^2 Z_0 &= \beta_1 \left\{ (4 \cdot 257,6 + 1030,3) + \frac{1}{240} [-7 \cdot 2060,8 - 16 \cdot 2060,8 + 7(-2060,8 + 2,25)] \right\} \\ \Delta^2 Z_0 &= \beta_1 \left( 2060,7 - \frac{61808,6}{240} \right) = \beta_1 (2060,7 - 257,5) = \frac{1803,2}{800} = 2,25, \end{aligned}$$

Nous avons donc:

$$\Delta Z_0 = 0, \quad \Delta^2 Z_0 = \Delta Z_1 - \Delta Z_0 = Z_2 - Z_1 = Z_2 = 2,25 \text{ lbs/ft},$$

valeur qui coïncide avec la valeur admise, évidemment déterminée après un essai.

La relation (16), où  $Z$  représente en réalité  $Z - s$  et non  $Z$  donne,  $i = 1$ :

$$\Delta^2 M_0 = \frac{1}{24} [-2060,8 - 4 \cdot 2060,8 + (-2060,8 + 2,25)] = -515,1$$

Donc:

$$\begin{aligned} \Delta^2 M_0 &= \Delta M_1 - \Delta M_0 = (M_2 - M_1) - (M_1 - M_0) = M_2 + 257,6 + 257,6 = -515,1 \\ M_2 &= -1030,3 \text{ lbs/ft}, \end{aligned}$$

qui coïncide avec la valeur admise.

Au point 2 les calculs sont tout-à-fait analogues. Du point 3 la discontinuité de la charge mérite qu'on s'y arrête,  $i = 3$ .

$$800 \Delta^2 Z_2 = 1030,3 + 4 \cdot 2317,3 + 3858,0 + \frac{1}{240} [7(2,25 - 2060,8) + 8(12,55 - 2060,8) + 8 \cdot 12,55 + 7 \cdot 40,39]$$

Pour les valeurs de  $Z$  et  $M$  introduites dans cette relation, voir tableau ci-dessous. On trouve, tous calculs faits:

$$\Delta^2 Z_2 = 17,54,$$

$$24 \Delta^2 M_2 = [(2,25 - 2060,8) + 2(12,55 - 2060,8) + 2 \cdot 12,55 + 40,39] = -6089,3$$

$$\Delta^2 M_2 = -253,7.$$

Le tableau ci-dessous donne les  $Z$  et les  $M$ .

$i$	$\Delta^2 Z$	$\Delta Z$	$Z$	$\Delta^2 M$	$\Delta M$	$M$
0	2,25	0	0	-515,1	-257,6	0
1	8,05	2,25	0	-514,3	-772,7	-257,6
2	17,54	10,30	2,25	-253,7	-1287,0	-1030,3
3	28,93	27,84	12,55	11,3	-1540,7	-2317,3
4	40,39	56,77	40,39	26,0	-1529,4	-3858,0
5	51,65	97,16	97,16	50,7	-1503,4	-5387,4
6	73,53	148,81	194,32	88,8	-1452,7	-6890,8
7	101,28	222,34	343,13	-2452,8	-1363,9	-8343,5
8	171,91	323,62	565,47	229,4	-3816,7	-9707,4
9	256,23	495,53	889,09	356,8	-3587,3	-13524,1
10	304,45	751,76	1384,62	546,8	-3230,5	-17111,4
11	—	1056,21	2136,38	—	-2683,7	-20341,9
12	—	—	3192,59	—	—	-23025,6

$$T_{12} = \left( \sum_2^{11} Z + 0,5 Z_{12} \right) \cdot 0,5 - 2060,8 \cdot 1,5 - 5196,8 = -4657,1 \text{ lbs.}$$

*Ligne élastique II.* On suppose  $Z_0 = Z_1 = 100$ ,  $M_0 = 100$ . Nous donnons le détail des calculs du point 7, où le moment d'inertie de la poutre change.

En multipliant les 2 membres de la relation (13b) par  $k$ , et compte tenu de:

$$\lambda_7 = \frac{I_1}{I_2} = \frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{800}{600} = \frac{4}{3},$$

on a pour  $i = 7$ :

$$800 \Delta^2 Z_6 = - \left[ 539,8 + 2 \left( 1 + \frac{4}{3} \right) \cdot 690,8 + \frac{4}{3} \cdot 858 \right] + \frac{1}{240} \left[ 7 \cdot 78,73 + 8 \left( 1 + \frac{4}{3} \right) \cdot 65,73 + 7 \cdot \frac{4}{3} \cdot 46,61 \right]$$

$$800 \Delta^2 Z_6 = -4907,5 + \frac{2212,2}{240} = -4907,5 + 9,2 = -4898,3,$$

$$\Delta^2 Z_6 = -6,12,$$

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de  $z$  et  $M$ .

$i$	$\Delta^2 Z$	$\Delta Z$	$Z$	$\Delta^2 M$	$\Delta M$	$M$
0	- 0,86	0	100,00	25,0	12,5	100,0
1	- 1,14	- 0,86	100,00	24,7	37,5	112,5
2	- 1,61	- 2,00	99,14	24,2	62,2	150,0
3	- 2,25	- 3,61	97,14	23,3	86,4	212,2
4	- 3,08	- 5,86	93,53	21,8	109,7	298,6
5	- 4,06	- 8,94	87,67	19,5	131,5	408,3
6	- 6,12	- 13,00	78,73	16,2	151,0	539,8
7	- 8,59	- 19,12	65,73	11,3	167,2	690,8
8	- 13,11	- 27,71	46,61	4,2	178,5	858,0
9	- 18,28	- 40,82	18,90	- 6,2	182,7	1036,5
10	- 20,91	- 59,10	- 21,92	- 21,1	176,5	1219,2
11	—	- 80,01	- 81,02	—	155,4	1395,7
12	—	—	- 161,03	—	—	1551,1

$$T_{12} = \left( 0,5 Z_0 + \sum_1^{11} Z + 0,5 Z_{12} \right) \cdot 0,5 = 554,1 \cdot 0,5 = 277 \text{ lbs.}$$

*Ligne élastique III.* On suppose  $Z_0 = Z_1 = 100$ ,  $M_0 = 0$ . Les calculs sont analogues à ceux de la ligne II et le tableau correspondant est donné ci-dessous.

$i$	$\Delta^2 Z$	$\Delta Z$	$Z$	$\Delta^2 M$	$\Delta M$	$M$
0	- 0,11	0	100,00	25,0	12,5	0
1	- 0,39	- 0,11	100,00	25,0	37,5	12,5
2	- 0,86	- 0,50	99,89	24,8	62,5	50,0
3	- 1,51	- 1,36	99,39	24,4	87,3	112,5
4	- 2,35	- 2,87	98,03	23,7	111,7	199,8
5	- 3,37	- 5,22	95,16	22,3	135,4	311,5
6	- 5,37	- 8,59	89,94	20,1	157,7	446,9
7	- 7,84	- 13,96	81,35	16,5	177,8	604,6
8	- 12,39	- 21,80	67,39	10,9	194,3	782,4
9	- 17,73	- 34,19	45,59	2,1	205,2	976,7
10	- 20,82	- 51,92	11,40	- 11,0	207,3	1181,9
11	—	- 72,74	- 40,52	—	196,3	1389,2
12	—	—	- 113,26	—	—	1585,5

$$T_{12} = 0,5 \left[ 0,5 (Z_0 + Z_{12}) + \sum_1^{11} Z \right] = 0,5 \cdot 741,1 = 370,5 \text{ lbs.}$$

Les équations (25), (26) donnent:

$$1551,1 C_2 + 1585,5 C_3 = 23025,6$$

$$277 C_2 + 370,5 C_3 = 4657,1$$

La résolution de ces 2 équations donne:

$$C_2 = 8,46605, \quad C_3 = 6,24013$$

Le moment positif maximum a lieu au droit du point 8.

$$M_8 = -9707,4 + 8,46605 \cdot 858 + 6,24013 \cdot 782,4$$

$$= -9707,4 + 7263,9 + 4882,3 = +2438,8 \text{ lbs/ft.}$$

La réaction du sol la plus forte a lieu au droit du point 0.

$$Z_0 = (8,46605 + 6,24013) \cdot 100 = 1470,6 \text{ lbs/ft.}$$

Nous avons repris le calcul complet de la ligne élastique vraie, en partant de  $Z_0 = Z_1 = 1470,6$  et  $M_0 = 846,6$  et nous avons trouvé peu de différence avec les trois états I, II, III cumulés, par exemple  $M_0 = 2438,5$  au lieu de 2438,8 lbs/ft. La figure 9 donne tous les  $Z$  et  $M$  vrais. Nous avons trouvé des différences sensibles avec les résultats trouvés par M. WRIGHT.

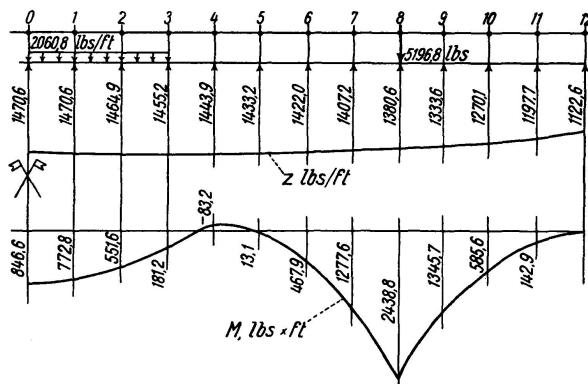


Fig. 9

#### 4<sup>ème</sup> exemple

Il s'agit d'une poutre en béton armé de 19 m de longueur, de moment d'inertie variable, supportant quatre charges concentrées. La caractéristique mécanique du sol est constante, mais la largeur de la semelle qui s'appuie sur le sol étant variable, notre coefficient  $k$  sera également variable. La figure 10 indique l'emplacement des charges. Les moments d'inertie sont

$$I_1 = 6,53 \cdot 10^{-2} \text{ m}^4, \quad I_2 = 6,99 \cdot 10^{-2} \text{ m}^4, \quad I_3 = 6,12 \cdot 10^{-2} \text{ m}^4,$$

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2.$$

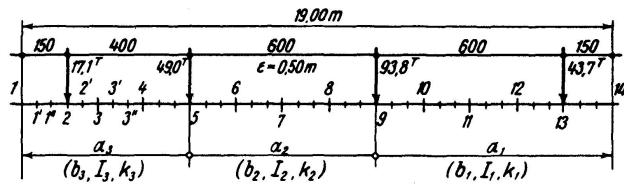


Fig. 10

La constante mécanique du sol étant de  $5 \text{ kg/cm}^3$  et les largeurs de la semelle d'appui sur le sol étant:

$$b_1 = 130 \text{ cm}, \quad b_2 = 150 \text{ cm}, \quad b_3 = 110 \text{ cm},$$

notre coefficient  $k$  sera:

$$k_1 = 6500 \text{ t/m}^2, \quad k_2 = 7500 \text{ t/m}^2, \quad k_3 = 5500 \text{ t/m}^2$$

Afin d'obtenir des intervalles égaux, nous avons adopté  $\epsilon = 0,50 \text{ m}$ . Nous avons donc:

$$\alpha_1 = \frac{\overline{0,50^2}}{6 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 6,53 \cdot 10^{-2}} = \frac{10^{-4}}{329}, \quad \alpha_2 = \frac{10^{-4}}{352}, \quad \alpha_3 = \frac{10^{-4}}{308},$$

Nous ne donnons pas le détail de tous les calculs. Pour la ligne élastique I, comportant les charges appliquées, nous avons admis  $Z_1 = Z_1' = Z_1'' = Z_2 = 0$ ,  $M_1 = M_1' = M_1'' = M_2 = 0$ . Nous avons trouvé:

$$M_{I14} = +1184,2 \text{ t/m}, \quad T_{I14} = -1894,4 \text{ t}.$$

Pour la ligne élastique II, nous avons admis  $Z_1 = 0$ ,  $Z_1' = 1,1$  et  $M_1 = 0$ . Nous avons trouvé:

$$M_{II14} = -4225,6 \text{ t/m}, \quad T_{II14} = -90,9 \text{ t}.$$

Pour la ligne élastique III, nous avons admis  $Z_1 = Z_1' = 3,3$  et  $M_1 = 0$ . Nous avons trouvé:

$$M_{III14} = +378,1 \text{ t/m}, \quad T_{III14} = +1558,7 \text{ t}.$$

Les équations (25), (26) deviennent:

$$\begin{aligned} -4225,6 C_2 + 378,1 C_3 + 1184,2 &= 0 \\ -90,9 C_2 + 1558,7 C_3 - 1894,4 &= 0 \end{aligned}$$

D'où  $C_2 = 0,3910$ ,  $C_3 = 1,2382$

Le plus grand moment de flexion et la plus forte réaction du sol ont lieu au droit du point 9 où est appliquée la charge de 93,8 t

$$\begin{aligned} M_9 &= 325,7 + 89,5 \cdot (0,3910) - 247,7 \cdot (1,2382) = 325,7 + 35,0 - 306,7 = +54,0 \text{ t/m} \\ Z_9 &= 132,2 - 109,3 \cdot (0,3910) - 59,5 \cdot (1,2382) = 132,2 - 42,7 - 73,7 = +15,8 \text{ t/m} \end{aligned}$$

La figure 11 donne les  $Z$  et les  $M$ . Nous avons effectué également les calculs suivant la méthode classique, mais nous avons été obligés d'envisager des approximations, car ni le moment d'inertie, ni la caractéristique mécanique

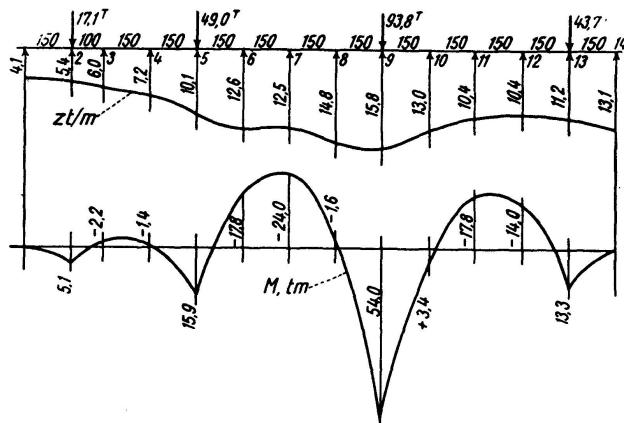


Fig. 11

du sol, compte tenu des largeurs de la semelle d'appui, ne sont constants. Nous avons enlevé la difficulté de la poutre courte à l'aide de l'artifice de calculs imaginé par M. BLEICH. Rappelons qu'il faut ajouter aux forces réelles appliquées, quatre forces fictives, qui agissent par groupe de deux sur chaque prolongement fictif de la poutre. Les conditions aux limites donnent 4 équations. Mais comme la poutre est très longue, l'influence des forces fictives agissant à l'extrémité opposée, est négligeable. On n'aurait donc que 2 inconnues dans chaque équation, mais les points d'application des forces fictives sont choisis tels, qu'une seule inconnue figure dans chaque équation. On trouve, tous calculs faits (voir fig. 12):

$$T_1 = 54,0 \text{ t}, \quad T_2 = 0, \quad T_3 = 22,0 \text{ t}, \quad T_4 = -29,0 \text{ t}.$$

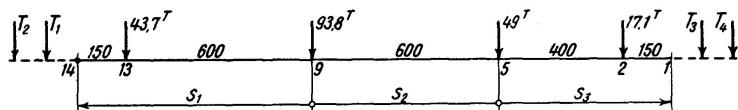


Fig. 12

Pour le calcul des moments et des réactions du sol, on sait que la caractéristique élastique  $s$ :

$$s^4 = \frac{4 EI}{k}$$

intervient. Nous avons admis pour les nœuds 5, 9 où  $s$  change, des valeurs moyennes, c'est-à-dire:

$$2s_5 = s_2 + s_3, \quad 2s_9 = s_1 + s_2.$$

La figure 13 donne les  $Z$  et les  $M$ . En la comparant avec la figure 11, on constate les différences suivantes:

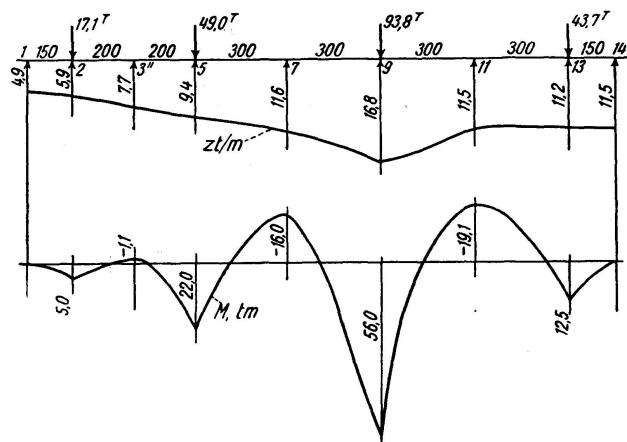


Fig. 13

	$M_2$	$M_5$	$M_7$	$M_9$	$M_{11}$	$M_{13}$	$Z_5$	$Z_9$	$Z_{13}$
Formules classiques	+ 5,0	+ 22,0	- 16,0	+ 56,0	- 19,1	+ 12,5	9,4	16,8	11,2
Méthode utilisée	+ 5,1	+ 15,9	- 24,0	+ 54,0	- 17,8	+ 13,3	10,1	15,8	11,2
Différence %	2	28	50	4	7	6	8	6	—

Les différences sont donc bien plus importantes pour les moments de flexion. Pour les réactions du sol, elles sont plus faibles.

### Résumé

Le calcul des poutres sur appuis élastiques est bien connu et il est devenu classique. Mais il comporte certaines restrictions qui le rende inutilisable dans des cas très fréquents. Par exemple, si le moment d'inertie de la poutre n'est pas constant, ou si les charges appliquées ne sont pas ponctuelles, le calcul classique n'est absolument d'aucun secours. On a imaginé, dans ces cas, des calculs graphiques, ou des calculs par approximations successives. Dans ces deux méthodes, on part de l'équation différentielle bien connue du quatrième degré. L'auteur estime que le calcul graphique est loin d'être précis et que la méthode des approximations successives est très longue et souvent peu convergente.

Il propose une méthode qui évite complètement l'équation différentielle en utilisant les relations de Bresse. Il arrive à une relation de recurrence donnant les valeurs des ordonnées de la ligne élastique en fonction des deux valeurs voisines des réactions du sol et des moments de flexion. Dans cette relation, il n'y a que deux inconnues, à savoir: la réaction du sol  $Z$  et le moment de flexion  $M$  au point considéré. En établissant une suite des valeurs des différences finies des  $Z$  et  $M$ , on arrive presque toujours, après 2 essais, à obtenir les valeurs de  $Z$  et de  $M$ .

Il y a lieu de mentionner que le point de départ de la ligne élastique comporte deux paramètres non connus, à savoir: l'ordonnée et la pente à l'origine. On est donc obligé d'établir 3 lignes élastiques et de déterminer à l'aide de 2 équations linéaires, deux coefficients qui satisfont aux conditions aux limites. Ces conditions consistent, dans la plupart des cas, à annuler l'effort tranchant et le moment de flexion aux deux extrémités de la poutre. D'ailleurs, on retrouve les mêmes opérations dans le calcul classique pour la poutre appelée courte, car la résolution de l'équation différentielle du quatrième degré n'est pratiquement utilisable que pour les poutres infiniment longues.

De nombreuses applications numériques effectuées par l'auteur, montrent que la méthode proposée ne comporte aucun tâtonnement et la précision des résultats est uniquement fonction des intervalles choisis entre les points de la ligne élastique. Il faut noter que la méthode est applicable même pour un appui non homogène.

### Zusammenfassung

Die Berechnungsmethode des Balkens auf elastischer Unterlage ist wohl bekannt und ist klassisch geworden. Da sie aber gewisse Schranken enthält, wird sie unbrauchbar in häufig vorkommenden Fällen. Zum Beispiel, wenn das Trägheitsmoment des Balkens nicht konstant ist, oder wenn die aufgebrachten Lasten nicht punktförmig angreifen, ist die klassische Methode wertlos. Man hat für diese Fälle graphische Methoden oder die Berechnung mit sukzessiver Approximation vorgeschlagen. In diesen beiden Methoden geht man von der Differentialgleichung 4. Ordnung aus. Der Verfasser ist der Ansicht, daß die graphische Methode sehr ungenau und die Methode der sukzessiven Approximation sehr lang ist und oft schlecht konvergiert.

Er schlägt eine Methode vor, die die Differentialgleichung völlig vermeidet, indem er die Gleichung von Bresse benutzt. Er gelangt zu einer Rekursionsformel, die die Ordinaten der Biegelinie gibt als Funktion der beiden Nachbarwerte der Bodenreaktion und der Biegemomente. In dieser Beziehung hat es nur zwei Unbekannte, nämlich die Reaktion  $Z$  des Bodens und das Moment  $M$  im betrachteten Punkt. Indem man eine Folge der endlichen Differenzwerte der  $Z$  und  $M$  aufstellt, gelingt es fast immer, schon nach 2 Versuchen die richtigen Werte von  $Z$  und  $M$  zu erhalten.

Man muß noch erwähnen, daß der Anfangspunkt der Biegelinie zwei unbekannte Parameter enthält: nämlich die Ordinate sowie den Neigungswinkel am Ursprung. Man muß daher 3 Biegelinien aufstellen und mit Hilfe von 2 linearen Gleichungen zwei Koeffizienten bestimmen, die die Randbedingungen erfüllen. Diese Bedingungen bestehen meistens darin, die Querkraft und das Biegungsmoment an beiden Enden des Balkens zum Verschwinden zu bringen. Übrigens findet man dieselben Operationen in der klassischen Berech-

nung für den sogenannten kurzen Balken, denn das Auflösen der Differentialgleichung 4. Grades ist praktisch nur verwendbar für den unendlich langen Balken.

Zahlreiche, vom Verfasser ausgeführte numerische Anwendungen zeigen, daß die vorgeschlagene Methode keine Unsicherheiten aufweist und daß die Genauigkeit der Ergebnisse allein von der Wahl der Intervallgröße zwischen den Punkten der Biegelinie abhängt. Es ist noch zu bemerken, daß die Methode sogar für eine inhomogene Unterlage angewendet werden kann.

### Summary

The calculation of beams on elastic supports is well-known and has become classical. But it embodies certain restrictions which make it inapplicable in some cases which arise very frequently. For example, if the moment of inertia of the beam is not constant, or if the applied loads are not point loads, the classical method of calculation is of no use at all. For such cases graphical or iterative methods have been proposed. In these two methods one starts from the well-known fourth order differential equation. The author opines that the graphical method is far from precise and that the method of successive approximations is very long and often barely convergent.

He proposes a method which completely avoids the differential equation, by using the relations of Bresse. He deduces a recurrence relation giving values of the ordinates of the elastic line as a function of two consecutive values of the ground reaction and of the bending moments. In this relation there are only two unknowns, namely the reaction of the ground  $Z$  and the bending moment  $M$  at the point considered. On establishing a sequence of values of the finite differences of  $Z$  and  $M$  the values of  $Z$  and  $M$  are almost always obtained after two trials.

It should be mentioned that the point of departure of the elastic line involves two unknown parameters, namely the ordinate and the slope at the origin. 3 elastic lines must therefore be established and, with the aid of 2 linear equations, two coefficients which satisfy the boundary conditions are determined. These conditions comprise in the majority of cases the neutralisation of the shearing force and bending moment at the two ends of the beam. Moreover, the same operations are found in the classical analysis for the so-called short beam, for the solution of the differential equation of the fourth order is in practice only applicable to infinitely long beams.

Numerous computational applications carried out by the author show that the proposed method does not involve any guess-work and the precision of the results is uniquely a function of the intervals chosen between points on the elastic line. It may be noted that the method is also applicable to a support which is not homogeneous.