Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

Band: 13 (1953)

Artikel: Die durch beliebig viele elastische Spanten versteifte, kreiskegelförmige Membrane mit veränderlicher Wandstärke

Autor: Gruber, Ernst

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-13199

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.10.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Die durch beliebig viele elastische Spanten versteifte, kreiskegelförmige Membrane mit veränderlicher Wandstärke

The right-circular conical membrane of variable wall-thickness with any number of elastic ribs

Les membranes coniques circulaires d'épaisseur variable, renforcées par des membrures élastiques en nombre arbitraire

Dr. Ing. habil. Ernst Gruber, Oberregierungsbaurat z. Wv., Eldingen/Hannover

A. Allgemeines

Die Membranen finden im Bauwesen bei Errichtung von hohen Masten, freitragenden Rohrleitungen, Kühltürmen, Gas- und Flüssigkeitsbehältern in ausgedehntem Maße Anwendung. Diese Bauwerke müssen aber fast immer mit formhaltenden Spanten ausgesteift werden. In der Folge wird die Statik derartiger Tragwerke entwickelt.

Wir benutzen die kegelstumpfförmige Membrane ohne Querspanten, die an einem Ende längs eines Parallelkreises fest gelagert ist und im übrigen frei auskragt, als Grundsystem und nennen es in Hinkunft „Kragwerk".

B. Das Kragwerk ohne Spanten

a) Spannungen

Wählt man entsprechend der Fig. 1a x und φ als Koordinaten und stellt für ein infinitesimales Element das Gleichgewicht auf, so erhalten wir

$$\frac{\partial (x\sigma_s)}{\partial x} + \frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{\partial \tau}{\partial \varphi} - \sigma_t + x p_s = 0 \tag{1a}$$

$$\frac{\partial (x\tau)}{\partial x} + \frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{\partial \sigma_t}{\partial \varphi} + \tau + x p_t = 0 \tag{1b}$$

$$\sigma_t + x p \operatorname{tg}\alpha = 0 \quad \text{(Fig. 1b)}, \tag{1c}$$

wobei σ_s, σ_t und τ von der Membranendicke ϑ_x unabhängige Kräfte je Längeneinheit sind. (1c) in (1b) eingesetzt ergibt

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{2}{x}\tau = \frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{\partial p}{\partial \varphi} - p_t \tag{2}$$

mit der Lösung

$$\tau = \frac{1}{x^2} f_1(\varphi) + \frac{1}{x^2}\int x^2\left(\frac{1}{\cos\varphi}\cdot\frac{\partial p}{\partial \varphi} - p_t\right) dx. \tag{3}$$

Setzt man (3) in (1a), so folgt durch Integration nach x und mit Hilfe von (1c)

$$\sigma_s = \frac{1}{x^2} f_1'(\varphi) + \frac{1}{x} f_2(\varphi) - \frac{1}{x\sin\alpha}\int \frac{dx}{x^2}\int x^2 \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\cos\varphi}\cdot\frac{\partial p}{\partial\varphi} - p_t\right) dx$$
$$- \frac{1}{x}\int x\left(\frac{p}{\cos\alpha} + p_s\right) dx. \tag{4}$$

σ_t folgt aus (1c) unmittelbar. Die Funktionen f_1 und f_2 ergeben sich aus den jeweiligen Randbedingungen. Wirkt z. B. längs des oberen Randes $x = x_1$ der Schubfluß $\tau_1(\varphi)$ und die parallel zu den Erzeugenden gerichtete Auflast $\sigma_{s,1}(\varphi)$, so folgen[1]) für das längs des Parallelkreises $x = x_m$ festgelagerte Kragwerk die Spannkräfte in $x = x_n$ zu

$$\tau_{x_n} = \frac{1}{x^2}\left[x_1^2\tau_1 + \int_{x_1}^{x_n} x^2\left(\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{\partial p}{\partial\varphi} - p_t\right) dx\right] \tag{3'}$$

$$\sigma_{s,x_n} = \frac{x_1}{\sin\alpha}\left(\frac{x_1}{x_n} - 1\right)\tau_1' + \frac{x_1}{x_n}\sigma_{s,1} + \int_{x_1}^{x_n} x\left(1 - \frac{x}{x_n}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{\partial p}{\partial\varphi} - p_t\right) dx$$
$$- \frac{1}{x_n}\int_{x_1}^{x_n} (p\cdot\operatorname{tg}\alpha + p_s)\, x\, dx. \tag{4'}$$

Wirkt nur längs x_ν ein Schubfluß $\tau_\nu(\varphi)$ und bedenkt man, daß die Ermittlung der Spannkräfte einer Membrane eine statisch bestimmte Aufgabe ist, so wird für $x < x_\nu$ die Membrane spannungslos. Für $x > x_\nu$ wird hingegen aus (3′) und (4′)

$$\tau_x = \left(\frac{x_\nu}{x}\right)^2 \tau_\nu; \quad \sigma_{s,x} = \frac{x_\nu}{x\sin\alpha}\left(\frac{x_\nu}{x} - 1\right)\tau_\nu'; \quad \sigma_t = 0. \tag{5, 5′, 5″}$$

Ist nur $\sigma_{s,1}$ vorhanden, so treten im Mantel trotz seiner Konizität keine Schubwirkungen auf.

Treten längs eines Parallelkreises beim Fortschreiten in Richtung der Erzeugenden in den Belastungen p, p_s und p_t Unstetigkeiten auf, wie z. B. bei der Abstufung der Winddrücke nach DIN, so werden, da hierbei die Schub-

[1]) Dabei wird das Doppelintegral von (4) wie folgt umgeformt: Nennt man das innere Integral J_x, so wird

$$-\int_{x_1}^{x_n} J_x\, d\left(\frac{1}{x}\right) = -\left[\frac{J_x}{x}\right]_{x_1}^{x_n} + \int_{x_1}^{x_n} x\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{\partial p}{\partial\varphi} - p_t\right) dx = \int_{x_1}^{x_n} x\left(1 - \frac{x}{x_n}\right)\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{\partial p}{\partial\varphi} - p_t\right) dx.$$

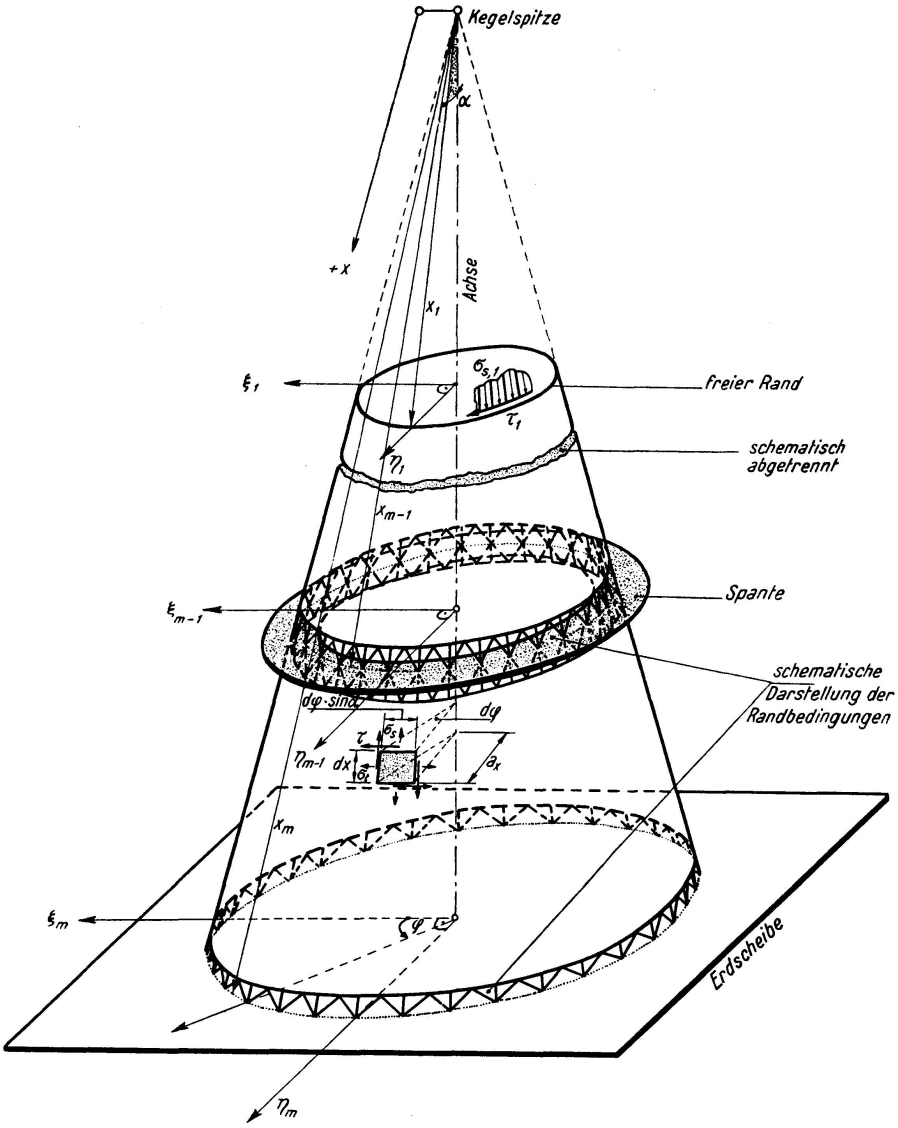
Kegelspitze
α
+x
Achse
x_1
ξ_1
$\sigma_{s,1}$
τ_1
freier Rand
η_1
schematisch abgetrennt
x_{m-1}
Spante
ξ_{m-1}
schematische Darstellung der Randbedingungen
$d\varphi \cdot \sin\alpha$
$d\varphi$
τ
σ_s
η_{m-1}
dx
σ_t
a_x
x_m
ξ_m
φ
Erdscheibe
η_m

Fig. 1a

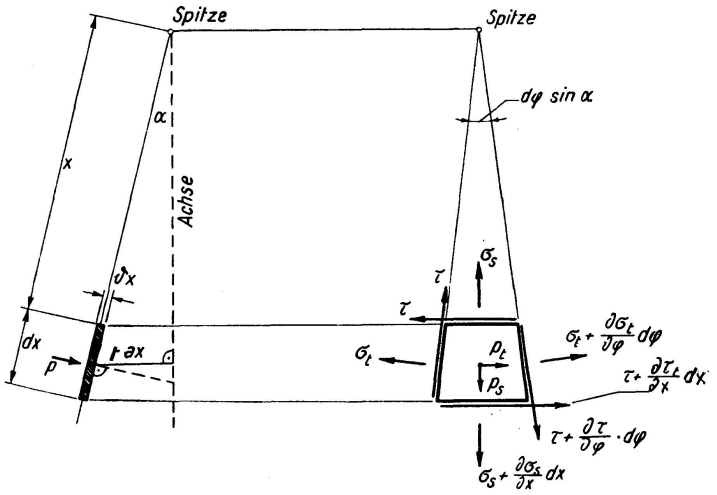
Spitze
Spitze
$d\varphi \sin\alpha$
α
x
Achse
ϑx
dx
p
τ
σ_s
σ_t
p_t
p_s
$\sigma_t + \frac{\partial \sigma_t}{\partial \varphi} d\varphi$
$\tau + \frac{\partial \tau_t}{\partial x} dx$
$\tau + \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} \cdot d\varphi$
$\sigma_s + \frac{\partial \sigma_s}{\partial x} dx$

Fig. 1b

flüsse τ_ν keine Sprünge erleiden, die in den bisherigen Gleichungen auftretenden Quadraturen mit den Unstetigkeitsstellen als Integrationsgrenzen einzeln durchgeführt und die Ergebnisse schlicht summiert.

b) Verformungen

Wir beschreiben die Verschiebung eines Punktes der Membrane durch 3 Komponenten:

1. r normal zur Kegelfläche
2. s in Richtung der Erzeugenden
3. t in Richtung der Parallelkreistangente.

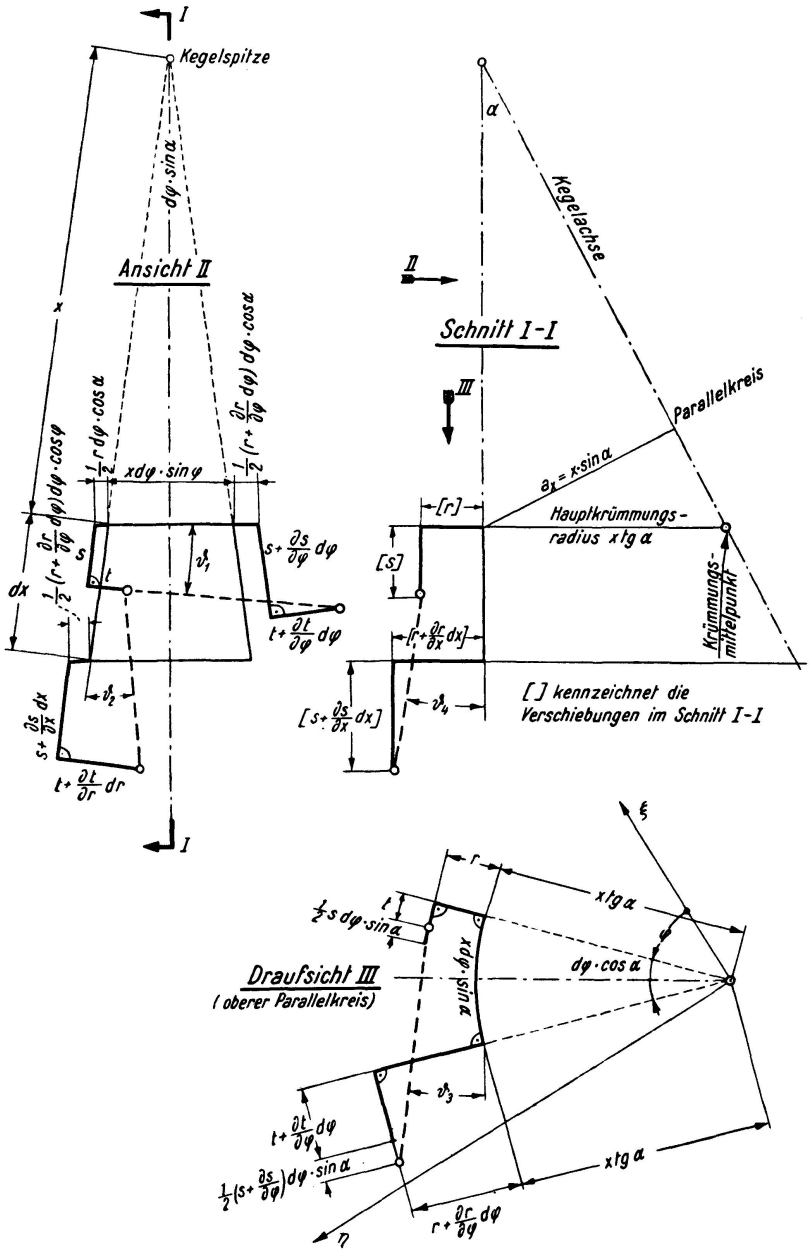

Fig. 2

Aus Fig. 2 kann man bei Voraussetzung der üblichen, für unsere gebräuchlichen Baustoffe geltenden Bedingungen, leicht die Beziehungen

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\sigma_s - \mu\,\sigma_t}{E\,\vartheta_x} \tag{6}$$

$$\frac{s}{x} + \frac{1}{x \sin\alpha} \cdot \frac{\partial t}{\partial \varphi} + \frac{r}{x \operatorname{tg}\alpha} = \frac{\sigma_t - \mu\,\sigma_s}{E\,\vartheta_x} \tag{6'}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{t}{x}\right) + \frac{1}{x^2 \sin\alpha} \cdot \frac{\partial s}{\partial \varphi} = \frac{2\,(1+\mu)}{E\,x\,\vartheta_x}\,\tau \tag{6''}$$

ablesen. Dabei ist zu achten, daß die Tangentialverschiebung t senkrecht zur Erzeugenden steht. Aus (6) folgt die Achsialverschiebung zu

$$s_{P,x_n} = \frac{1}{E} \int_{x_m}^{x_n} (\sigma_s - \mu\,\sigma_t) \frac{dx}{\vartheta_x} + s_m(\varphi)\,. \tag{7}$$

Damit erhalten wir aus (6″)

$$t_{P,x_n} = \frac{1}{E \sin\alpha} \int_{x_m}^{x_n} \left(1 - \frac{x_n}{x}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi}(\sigma_s - \mu\,\sigma_t) \cdot \frac{dx}{\vartheta_x}^{2)} + \frac{2\,(1+\mu)}{E}\, x_n \int_{x_m}^{x_n} \frac{\tau}{x\,\vartheta_x}\, dx$$
$$\underbrace{+ \frac{x_m - x_n}{x_m \sin\alpha}\, s'_m(\varphi) + \frac{x_n}{x_m}\, t_m(\varphi)}_{t_{st,n}}\,. \tag{7'}$$

Mit (7) folgt daraus aus (6′) die Radialverschiebung

$$r_{P,x_n} = \frac{\sigma_t - \mu\,\sigma_s}{E\,\vartheta_x}\, x_n \operatorname{tg}\alpha - \frac{2}{E \sin 2\alpha} \int_{x_m}^{x_n} \left(1 - \frac{x_n}{x}\right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}(\sigma_s - \mu\,\sigma_t) \frac{dx}{\vartheta_x}$$
$$- \frac{2\,(1+\mu)}{E \cos\alpha} \int_{x_m}^{x_n} \frac{\partial \tau}{\partial \varphi}\, \frac{dx}{x\,\vartheta_x} - \frac{\operatorname{tg}\alpha}{E} \int_{x_m}^{x_n} (\sigma_s - \mu\,\sigma_t) \frac{dx}{\vartheta_x}$$
$$- 2\,\frac{x_m - x_n}{x_m \sin 2\alpha}\, s''_m(\varphi) - \operatorname{tg}\alpha \cdot s_m(\varphi) - \frac{x_n}{x_m \cos\alpha}\, t'_m(\varphi)\,. \tag{7''}$$

s_m und t_m stellen die längs $x = x_m$ vorgegebenen Werte der s und t dar, welche z. B. in Form von Fundamentbewegungen auftreten können.

Da in (7″) eine analoge Funktion r_m nicht vorkommt, kann bei $x = x_m$ für r_m keine Vorschrift gemacht werden, das heißt, die Membrane muß an dieser Stelle radial verschieblich gelagert sein, etwa so wie in Fig. 1a. Ist diese Lagerung nicht verwirklicht, so ist ein Gleichgewichtszustand ohne Schalenbiegung nicht möglich. Diese klingt aber vom Auflager ab sehr rasch ab.

Die Verformungsflächen müssen stetige Funktionen von x und φ sein. Das Gegenteil würde einem Zerreißen der Membrane entsprechen. Da eine solche, ideell gesehen, überhaupt keinen Biegewiderstand besitzen darf, könnte man in letztere beliebig viele Knicke hineinfalten, ohne daß dadurch unendlich große Materialanstrengungen entstünden. Das würde bedeuten, daß die ersten

[2]) Wurde durch eine der Fußnote 1 analogen Umformung erhalten.

Differentialquotienten der Verformungsflächen unstetig sein könnten. Da man aber eine Membrane in einer solchen Idealisierung nicht verwirklichen kann, würden dann im Tragwerk trotzdem beträchtliche Biegespannungen auftreten, die wir aber vermeiden wollen. Wir streben also immer die Stetigkeit auch der 1. Ableitungen an. Handelt es sich um Tragwerke, deren Größenausdehnung in der x-Richtung bedeutend mächtiger ist als in der φ-Richtung, so genügt es, wenn man diese differentiellen Bedingungen nur für die letztere Richtung einhält.

Für die Folge sind die tangentiellen Verschiebungen t wichtig, die durch einen im Parallelkreis x_ν wirkenden Schubfluß τ_ν erzeugt werden. Sie ergeben sich für $x_n \geqq x_\nu$ aus (7′), indem man darin für τ, σ_s und σ_t die Werte (5, 5′, 5″) setzt. Es wird

$$t_{\nu\,n} = -\frac{x_\nu \tau_\nu''}{E \sin^2\alpha} \int_{x_m}^{x_n} \left(1 - \frac{x_\nu}{x}\right)\left(1 - \frac{x_n}{x}\right) \frac{dx}{x\vartheta_x} + \frac{2(1+\mu)}{E} x_\nu \tau_\nu \cdot x_\nu x_n \int_{x_m}^{x_n} \frac{dx}{x^3 \vartheta_x}$$
$$+ \frac{x_m - x_n}{a_m} s_m' + \frac{x_n}{x_m} t_m; \quad x_n \geqq x_\nu \quad \text{(Fig. 3a)} \tag{8}$$

mit $a_\rho = x_\rho \sin\alpha$. Analog folgt aus (7)

$$s_{\nu,n} = -\frac{x_\nu \tau_\nu'}{E \sin\alpha} \int_{x_m}^{x_n} \left(1 - \frac{x_\nu}{x}\right) \frac{dx}{x\vartheta_x} + s_m. \tag{9}$$

Ist $x_n \leqq x_\nu$, so ergibt sich zunächst, wenn wieder in x_ν der Schubfluß τ_ν wirkt,

$$t_{\nu,n} = t_{\nu,\nu} \frac{x_n}{x_\nu} + s_{\nu,\nu}' \frac{h_{\nu,n}}{x_\nu \sin\alpha}, \tag{10}$$

wobei wir $t_{\nu,\nu}$ und $s_{\nu,\nu}'$ aus (8) und (9) erhalten, indem wir $x_n = x_\nu$ setzen. Mit $h_{\nu,n} + x_n = x_\nu$ wird dann aus (10)

$$t_{\nu,n} = -\frac{x_\nu \tau_\nu''}{E \sin^2\alpha} \int_{x_m}^{x_\nu} \left(1 - \frac{x_n}{x}\right)\left(1 - \frac{x_\nu}{x}\right) \frac{dx}{x\vartheta_x} + \frac{2(1+\mu)}{E} x_\nu \tau_\nu \cdot x_n x_\nu \int_{x_m}^{x_n} \frac{dx}{x^3 \vartheta_x}$$
$$+ \frac{x_m - x_n}{a_m} s_m' + \frac{x_n}{x_m} t_m; \quad x_n \leqq x_\nu \quad \text{(Fig. 3b)}. \tag{8'}$$

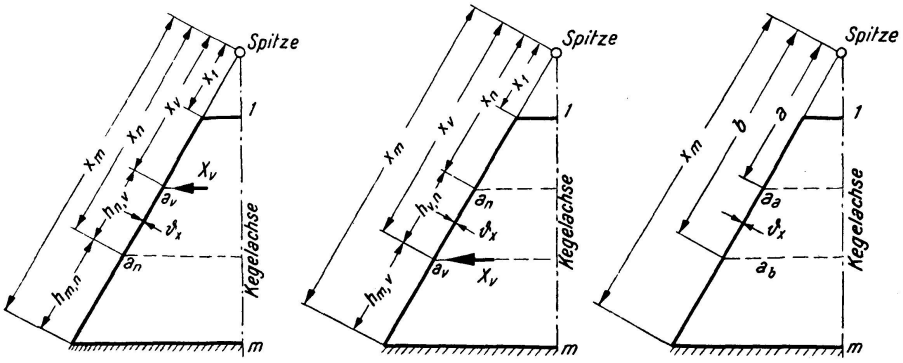

Fig. 3a Fig. 3b Fig. 3c

(8) bzw. (8′) können wir auch als lineare Funktionen von x_ν bzw. x_n anschreiben. Es folgt, wenn man zunächst s_m und t_m außer acht läßt und $x_\nu \tau_\nu$ zur Kraft X_ν zusammenfaßt, die Doppelgleichung

$$t_{\nu,n} = X_\nu'' \left[-\frac{1}{E\sin^2\alpha} \int_{x_m}^{x_{\underset{\nu}{n}}} \left(1 - \frac{x_{\underset{\nu}{n}}}{x}\right) \frac{dx}{x\vartheta_x} + x_{\underset{n}{\nu}} \frac{1}{E\sin^2\alpha} \int_{x_m}^{x_{\underset{\nu}{n}}} \left(1 - \frac{x_{\underset{\nu}{n}}}{x}\right) \frac{dx}{x^2\vartheta_x} \right]$$
$$+ X_\nu x_{\underset{n}{\nu}} \frac{2(1+\mu)}{E} x_{\underset{\nu}{n}} \int_{x_m}^{x_{\underset{\nu}{n}}} \frac{dx}{x^3\vartheta_x} = X_\nu'' [\alpha_{\underset{\nu}{n}}(x_{\underset{\nu}{n}}) + x_{\underset{n}{\nu}} \cdot \beta_{\underset{\nu}{n}}(x_{\underset{\nu}{n}})] + X_\nu \cdot x_{\underset{n}{\nu}} \cdot \gamma_{\underset{\nu}{n}}(x_{\underset{\nu}{n}}); \tag{11a, b}$$
$$x_{\underset{\nu}{n}} \geqq x_{\underset{x}{\nu}}.$$

Setzt man nun entsprechend der Fig. 3a, b das x_ν bzw. x_n der (8′) gleich dem x_n bzw. x_ν der (8), so erhalten wir, wenn wir der Deutlichkeit halber die größere der beiden Ordinaten mit b und die kleinere mit a bezeichnen

$$t_{\underset{b,a}{a,b}} = X''_{\underset{b}{a}} [\alpha_b(b) + a \cdot \beta_b(b)] + X_{\underset{b}{a}} \cdot a \cdot \gamma_b(b), \; b \geqq a; \text{ (Fig. 3c)}. \tag{12a, b}$$

Hierin gibt der erste Index von t immer den Ort der Kraftwirkung und der zweite den Ort der Verschiebung an. Ferner liegt b dem Einspannkreis immer näher als a. In diesem Sinne sind jeder Ordinate x_n die 3 Funktionen α, β und γ zugeordnet.

Man erkennt in diesen Entwicklungen wieder das Prinzip der Gegenseitigkeit der Verschiebungen, wenn man s_m und t_m als nicht elastische Verformungen außer acht läßt.

Zwischen den tangentiellen Verschiebungen bestehen wichtige Beziehungen. Bezeichnet man die zu $(X_n = 1)$ gehörigen, bei $x_{\nu-1}, x_\nu$ und $x_{\nu+1}$ auftretenden Verformungen mit $\vartheta_{n,\nu-1}$, $\vartheta_{n,\nu}$ und $\vartheta_{n,\nu+1}$, so wird nach (11)

$$\vartheta_{n,\nu+1} = (X''_n = 1) \overbrace{[\alpha_n + x_{\nu+1} \cdot \beta_n]}^{\vartheta_{n,\nu+1}} + (X_n = 1) \overbrace{x_{\nu+1} \cdot \gamma_n}^{\vartheta_{n,\nu+1}} \tag{13a}$$

$$\vartheta_{n,\nu} = (X''_n = 1) \overbrace{[a_n + x_\nu \cdot \beta_n]}^{\vartheta''_{n,\nu}} + (X_n = 1) \overbrace{x_\nu \cdot \gamma_n}^{\vartheta'_{n,\nu}} \tag{13b}$$

$$\vartheta_{n,\nu-1} = (X''_n = 1) \overbrace{[\alpha_n + x_{\nu-1} \cdot \beta_n]}^{\vartheta''_{n,\nu-1}} + (X_n = 1) \overbrace{x_{\nu-1} \cdot \gamma_\nu}^{\vartheta_{n,\nu-1}}. \text{ (Fig. 4a)} \tag{13c}$$

Daraus folgt, wenn man in Hinkunft die Ordinatendifferenz $x_\rho - x_\mu$ mit $\Delta_{\rho,\mu}$ bezeichnet,

$$\frac{\vartheta''_{n,\nu+1} - \vartheta''_{n,\nu}}{\Delta_{\nu+1,\nu}} - \frac{\vartheta''_{n,\nu} - \vartheta''_{n,\nu-1}}{\Delta_{\nu,\nu-1}} = 0; \; x_{\nu-1} < x_\nu < x_{\nu+1} \leqq x_n. \tag{14}$$

Für die einmal gestrichenen ϑ gibt es eine analoge Beziehung. Bildet man nun entsprechend der Fig. 4b die algebraischen Summen

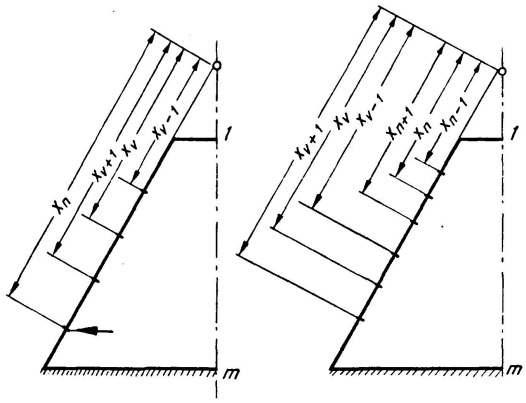

Fig. 4a Fig. 4b

$$\begin{aligned}
&\Bigg(-\frac{\vartheta''_{n-1,\nu-1}}{\Delta_{\nu,\nu-1}}+\frac{\vartheta''_{n-1,\nu}}{\Delta_{\nu,\nu-1}}+\frac{\vartheta''_{n-1,\nu}}{\Delta_{\nu+1,\nu}}-\frac{\vartheta''_{n-1,\nu-1}}{\Delta_{\nu+1,\nu}}\\
&\quad+\frac{\vartheta''_{n,\nu-1}}{\Delta_{\nu,\nu-1}}-\frac{\vartheta''_{n,\nu}}{\Delta_{\nu,\nu-1}}-\frac{\vartheta''_{n,\nu}}{\Delta_{\nu+1,\nu}}+\frac{\vartheta''_{n,\nu+1}}{\Delta_{\nu+1,\nu}}\Bigg):\Delta_{n,n-1}\\
+&\Bigg(+\frac{\vartheta''_{n,\nu-1}}{\Delta_{\nu,\nu-1}}-\frac{\vartheta''_{n,\nu}}{\Delta_{\nu,\nu-1}}-\frac{\vartheta''_{n,\nu}}{\Delta_{\nu+1,\nu}}+\frac{\vartheta''_{n,\nu+1}}{\Delta_{\nu+1,\nu}}\\
&\quad-\frac{\vartheta''_{n+1,\nu+1}}{\Delta_{\nu,\nu-1}}+\frac{\vartheta''_{n+1,\nu}}{\Delta_{\nu,\nu-1}}+\frac{\vartheta''_{n+1,\nu}}{\Delta_{\nu+1,\nu}}-\frac{\vartheta''_{n+1,\nu+1}}{\Delta_{\nu+1,\nu}}\Bigg):\Delta_{n+1,n}
\end{aligned}\tag{15}$$

und faßt jeweils die Glieder der lotrechten Spalten zusammen, so erhalten wir für die erste von diesen

$$\left(-\frac{\vartheta''_{n+1,\nu-1}-\vartheta''_{n,\nu-1}}{\Delta_{n,n-1}}+\frac{\vartheta''_{n,\nu-1}-\vartheta''_{n+1,\nu-1}}{\Delta_{n+1,n}}\right):\Delta_{\nu,\nu-1}. \tag{15'}$$

Denken wir uns nun bei $x_{\nu-1}$ eine Kraftwirkung $[(X''_{\nu-1}=1),(X_{\nu-1}=1)]$ wirkend, bringen die zu dieser gehörigen bei x_{n-1}, x_n und x_{n+1} auftretenden Verschiebungen $\vartheta_{n-1,\nu-1}$, $\vartheta_{\nu-1,n}$ und $\vartheta_{\nu-1,n+1}$ in den durch (14) angegebenen Zusammenhang und vertauschen entsprechend dem Prinzip von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen die Indices der ϑ, so erhalten wir wieder (15′). Da (14) den Wert Null hat, muß also auch (15′) verschwinden. Führen wir für die übrigen 3 Spalten dieselben Rechnungen durch, so folgt, daß der Wert der ganzen (15) Null wird.

Auch hier gelten für die einmal gestrichenen ϑ die analogen Beziehungen.

Das Nullwerden der (14) und (15) tritt nur dann ein, wenn in der zur ersteren gehörigen Fig. 4a $x_{\nu+1}\leqq x_n$ und in der zur letzteren gehörigen Fig. 4b $x_{n+1}\leqq x_{\nu-1}$ ist. Die ν-Gebiete dürfen sich nur berühren, aber nicht ineinandergreifen.

C. Die kreisförmige Spante

a) Der kreisförmig gekrümmte Stab

In der Folge benötigen wir den Zusammenhang zwischen den Verformungen t_n, r_n und den Belastungen $\tau_n, \tau_{p,n}, p_n$ einer solchen Spante. Dabei soll der Anschluß der Membrane an die Querspante so wie am Lagerkreis wieder durch unendlich kleine Fachwerke idealisiert werden, so daß zwischen Membrane und Spante nur Schubwirkungen τ_n als Verbindungskräfte möglich sind (Fig. 1a).

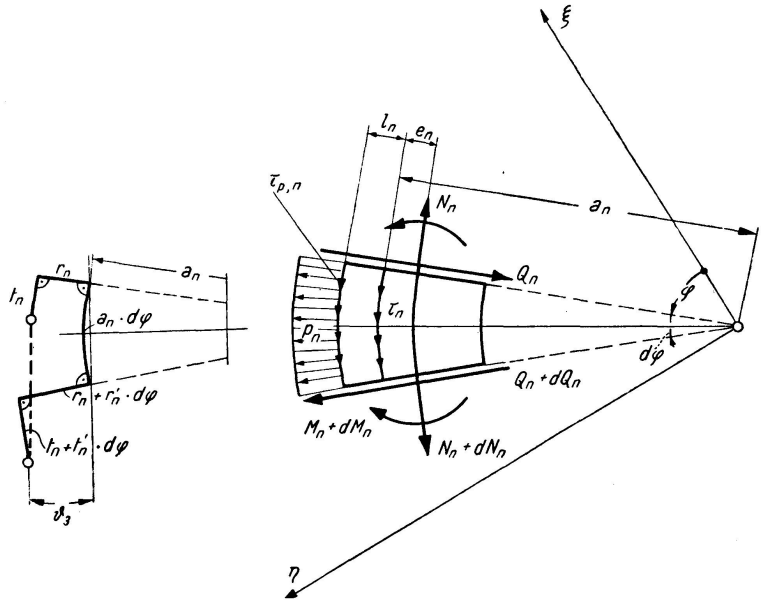

Fig. 5b Fig. 5a

Aus der Fig. 5a, welche ein Elementarelement darstellt, ergeben sich die 3 Gleichgewichtsbedingungen

$$-N_n + Q_n' + a_n(1+\lambda_n)p_n = 0 \tag{16a}$$

$$-N' - Q_n - a_n\tau_n - a_n(1+\lambda_n)\tau_{p,n} = 0 \tag{16b}$$

$$+Q_n \cdot a_n(1-\epsilon_n) + M_n' - a_n e_n \tau_n - a_n^2(1+\lambda_n)(\lambda_n+\epsilon_n)\tau_{p,n} = 0 \tag{16c}$$

mit $\epsilon_n = \dfrac{e_n}{a_n}, \quad \lambda_n = \dfrac{l_n}{a_n},$

während wir aus Fig. 5b die elastostatischen Beziehungen

$$r_n + t_n' = a_n^3(1-\epsilon_n)^3 \kappa_n \frac{N_n}{E_n J_n} \tag{17a}$$

$$-t_n' + r_n'' = a_n^2(1-\epsilon_n)^2 \frac{M_n}{E_n J_n} \tag{17b}$$

mit $\kappa_n = \dfrac{J_n}{a_n^2 F_n (1-\epsilon_n)^2}$ ablesen. Eliminiert man zuerst aus (16a, b, c) Q_n und aus diesem Ergebnis und (17a, b) M_n und N_n, so erhalten wir

$$r_n'' + r_n + t_n''' + t_n' = (1-\epsilon_n)\frac{a_n^4}{E_n J_n}[(1+\lambda_n)(p_n - \tau_{p,n}') - \tau_n'] \tag{18a}$$

$$(1+\kappa_n)t_n'' - \kappa_n r_n''' + r_n' = -\frac{a_n^2}{E_n F_n}[(1+\lambda_n)^2 \tau_{p,n} + \tau_n], \tag{18b}$$

was man leicht in die beiden expliziten Formen

$$D''(t_n) = \frac{d^2}{d\varphi^2}\left[(t_n + t_n'') + \frac{d^2}{d\varphi^2}(t_n + t_n'')\right] = t_n'' + 2t_n^{IV} + t_n^{VI} = -\Psi_{1,n} + \Psi_{2,n}'' = \Phi_{t,n} \tag{19a}$$

$$D'(r_n) = \frac{d}{d\varphi}\left[(r_n + r_n'') + \frac{d^2}{d\varphi^2}(r_n + r_n'')\right] = r_n' + 2r_n''' + r_n^V = \Psi_{1,n} + \Psi_{2,n} = \Phi_{r,n} \tag{19b}$$

mit
$$\Psi_{1,n} = \frac{a_n^4(1-\epsilon_n)^2}{E_n J_n}[\tau_n + \epsilon_n \tau_n'' + (1+\lambda_n)(1-\epsilon_n)p_n' + (1+\lambda_n)^2 \tau_{p,n} + (1+\lambda_n)(\lambda_n + \epsilon_n)\tau_{p,n}''] \tag{20a}$$

$$\Psi_{2,n} = \frac{a_n^4 \kappa_n (1-\epsilon_n)^3}{E_n J_n}[-\tau_n'' + (1+\lambda_n)(p_n' - \tau_{p,n}'')] \tag{20b}$$

umwandeln kann.

Die Lösung von (19a) lautet:

$$\begin{aligned} t_n &= \bar{t}_n + \bar{\bar{t}}_n = (a_n \vartheta_n - \Delta_{\xi,n}\sin\varphi + \Delta_{\eta,n}\cos\varphi) + \varphi(C_1 + C_2\sin\varphi + C_3\cos\varphi) + \eta_{t,n}. \\ \eta_{t,n} &= J_{n\Phi 1}^{(t)} + 3J_{n\Phi 2}^{(t)} + J_{n\phi 3}^{(t)};\ J_{n\Phi 1}^{(t)} = \tfrac{1}{2}\sin\varphi\int d\varphi\int\Phi_{t,n}\sin\varphi\, d\varphi \\ &\qquad + \tfrac{1}{2}\cos\varphi\int d\varphi\int\Phi_{t,n}\cos\varphi\, d\varphi \\ J_{n\Phi 2}^{(t)} &= \tfrac{1}{2}\cos\varphi\int\Phi_{t,n}\sin\varphi\, d\varphi - \tfrac{1}{2}\sin\varphi\int\Phi_{t,n}\cos\varphi\, d\varphi;\ J_{n\Phi 3}^{(t)} = \int d\varphi\int\Phi_{t,n}\, d\varphi. \end{aligned} \tag{21a}$$

Setzt man darin für $\Phi_{t,n}$ die Werte von (20a, b) ein, so erhalten wir nach mehrfachen Umformungen

$$\begin{aligned} \eta_{t,n} = &-\frac{a_n^4(1-\epsilon_n)^2}{E_n J_n}\{[1+\epsilon_n+\kappa_n(1-\epsilon_n)]J_{n\tau 1}^{(t)} + [3-\epsilon_n-\kappa_n(1-\epsilon_n)]J_{n\tau 2}^{(t)} + J_{n\tau 3}^{(t)}\} \\ &-\frac{a_n^4(1-\epsilon_n)^2(1+\lambda_n)}{E_n J_n}\{[1+2\lambda_n+\epsilon_n+\kappa_n(1-\epsilon_n)]\bar{J}_{n\tau 1}^{(t)} \\ &+(3+2\lambda_n-\epsilon_n-\kappa_n(1-\epsilon_n)]\bar{J}_{n\tau 2}^{(t)} + (1+\lambda_n)\bar{J}_{n\tau 3}^{(t)}\} \\ &+\frac{a_n^4(1-\epsilon_n)^3(1+\lambda_n)}{E_n J_n}\{J_{np1}^{(t)} + (1+\kappa_n)J_{np2}^{(t)}\}, \end{aligned} \tag{22a}$$

wobei man die Integrale $J_{n\tau 1}^{(t)}$, $J_{n\tau 2}^{(t)}$ und $J_{n\tau 3}^{(t)}$ bzw. $\bar{J}_{n\tau 1}^{(t)}$, $\bar{J}_{n\tau 2}^{(t)}$ und $\bar{J}_{n\tau 3}^{(t)}$ aus $J_{n\Phi 1}^{(t)}$, $J_{n\Phi 2}^{(t)}$ und $J_{n\Phi 3}^{(t)}$ erhält, indem man statt $\Phi_{t,n}$ die Belastungen τ_n bzw. $\tau_{p,n}$ setzt. Außerdem gilt

$$J_{np1}^{(t)} = \cos\varphi\int p_n\cos\varphi\, d\varphi + \sin\varphi\int p_n\sin\varphi\, d\varphi - \int p_n\, d\varphi \tag{23a}$$

$$J_{np2}^{(t)} = \tfrac{1}{2}\sin\varphi\int d\varphi\int p_n\cos\varphi\, d\varphi - \tfrac{1}{2}\cos\varphi\int d\varphi\int p_n\sin\varphi\, dp. \tag{23b}$$

Eliminiert man aus (18a, b) r_n''' und setzt in dieses Ergebnis t_n ein, so folgt die Lösung für (19a) zu

$$r_n = \bar{r}_n + \bar{\bar{r}}_n = (\Delta_{\xi,n}\cos\varphi + \Delta_{\eta,n}\sin\varphi) + C_2\left(\frac{\kappa_n - 1}{\kappa_n + 1}\sin\varphi - \varphi\cos\varphi\right)$$
$$+ C_3\left(\frac{\kappa_n - 1}{\kappa_n + 1}\cos\varphi + \varphi\sin\varphi\right) + \eta_{r,n} + C \qquad (21\,\mathrm{b})$$

$$\eta_{r,n} = J^{(r)}_{n\Phi 1} - J^{(r)}_{n\Phi 2} + J^{(r)}_{n\Phi 3}; \qquad J^{(r)}_{n\Phi 1} = -\tfrac{1}{2}\sin\varphi\int d\varphi\int\Phi_{r,n}\cos\varphi\, d\varphi +$$
$$+ \tfrac{1}{2}\cos\varphi\int d\varphi\int\Phi_{r,n}\sin\varphi\, d\varphi$$
$$J^{(r)}_{n\Phi 2} = \sin\varphi\int\Phi_{r,n}\sin\varphi\, d\varphi + \cos\varphi\int\Phi_{r,n}\cos\varphi\, d\varphi; \quad J^{(r)}_{n\Phi 3} = \int\Phi_{r,n}\, d\varphi.$$

Setzt man analog für $\Phi_{r,n}$ die Werte von (20a, b) ein, so erhalten wir nach mehreren Umformungen

$$\eta_{r,n} = \frac{a_n^4(1-\epsilon_n)^2}{E_n J_n}\left\{(1-\epsilon_n)(1+\kappa_n)J^{(r)}_{n\tau 1} - J^{(r)}_{n\tau 2} + J^{(r)}_{n\tau 3}\right\}$$
$$+ \frac{a_n^4(1-\epsilon_n)^2(1+\lambda_n)^2}{E_n J_n}\left\{(1-\epsilon_n)\bar{J}^{(r)}_{n\tau 1} - \bar{J}^{(r)}_{n\tau 2} + \bar{J}^{(r)}_{n\tau 3}\right\}$$
$$- \frac{a_n^4(1-\epsilon_n)^3(1+\lambda_n)(1+\kappa_n)}{E_n J_n}\left\{J^{(r)}_{np1} + J^{(r)}_{np2}\right\}. \qquad (22\,\mathrm{b})$$

Die Integrale $J^{(r)}_{n\tau 1}$, $J^{(r)}_{n\tau 2}$ und $J^{(r)}_{n\tau 3}$ bzw. $\bar{J}^{(r)}_{n\tau 1}$, $\bar{J}^{(r)}_{n\tau 2}$ und $\bar{J}^{(r)}_{n\tau 3}$ ergeben sich wieder aus $J^{(r)}_{n\Phi 1}$, $J^{(r)}_{n\Phi 2}$ und $J^{(r)}_{n\Phi 3}$, indem man darin statt $\Phi_{r,n}$ die τ_n bzw. $\tau_{p,n}$ setzt. Außerdem bedeutet

$$J^{(r)}_{np1} = -\tfrac{1}{2}\sin\varphi\int p_n\cos\varphi\, d\varphi + \tfrac{1}{2}\cos\varphi\int p_n\sin\varphi\, d\varphi \qquad (24\,\mathrm{a})$$
$$J^{(r)}_{np2} = \tfrac{1}{2}\sin\varphi\int d\varphi\int p_n\sin\varphi\, d\varphi + \tfrac{1}{2}\cos\varphi\int d\varphi\int p_n\cos\varphi\, d\varphi. \qquad (24\,\mathrm{b})$$

Setzt man (21a) und (21b) in (17a, b) ein, so ergeben sich die Schnittkräfte N_n und M_n zu

$$\frac{a_n^3(1-\epsilon_n)^3\kappa_n}{E_n J_n}N_n = \frac{2\kappa_n}{1+\kappa_n}(C_2\sin\varphi + C_3\cos\varphi) + C + C_1 + \eta_t' + \eta_r \qquad (25\,\mathrm{a})$$
$$\frac{a_n^2(1-\epsilon_n)^2}{E_n J_n}M_n = \frac{2}{1+\kappa_n}(C_2\sin\varphi + C_3\cos\varphi) - C_1 - \eta_t' + \eta_r''. \qquad (25\,\mathrm{b})$$

Aus (16c) in Verbindung mit (25b) folgt

$$\frac{a_n^3(1-\epsilon_n)^3\kappa_n}{E_n J_n}Q_n = \frac{2\kappa_n}{1+\kappa_n}(-C_2\cos\varphi + C_3\sin\varphi) - \eta_t'' - \eta_r'$$
$$- \frac{a_n^4(1-\epsilon_n)^3\kappa_n}{E_n J_n}[\tau_n + (1+\lambda_n)\tau_{p,n}]. \qquad (25\,\mathrm{c})$$

N_n, M_n und Q_n sind also von $a_n\cdot\vartheta_n$, $\Delta_{\xi,n}$ und $\Delta_{\eta,n}$ unabhängig. Ist die Spante starr, also $E_n = \infty$, so geht, da alle Glieder mit E_n im Nenner verschwinden, (25c) in $-C_2\sin\varphi + C_3\sin\varphi = 0$ über. Da dies für jedes φ gelten muß, wird auch $C_2 = 0$ und $C_3 = 0$, woraus nach (25b) $C_1 = 0$ und aus (25a) endlich $C = 0$ folgt. Die Lösungen (21a, b) reduzieren sich daher für die vollkommen starre Spante auf $\bar{t}_n$ und $\bar{r}_n$. Die $\Delta_{\xi,n}$ und $\Delta_{\eta,n}$ sind also die Verschiebungskomponenten des Koordinatenursprungs der Spantenebene, ϑ_n ist deren

Drehwinkel und $\bar{\bar{t}}_n$ bzw. $\bar{\bar{r}}_n$ stellen die von N_n, M_n und Q_n stammenden elastischen Verschiebungen dar.

Da das ϑ_n an der starren Spante keinen Beitrag liefert, ist in (21b) C ständig Null.

Durch κ_n wird der Einfluß der Achsdehnungen erfaßt. Vernachlässigt man diesen, so wird wegen $F_n = \infty$ auch $\kappa_n = 0$, wodurch sich die Rechnung bedeutend vereinfacht.

b) Der geschlossene Ring

Die bisherigen Betrachtungen gelten für segmentartige *oder* geschlossene Spanten, ganz gleichgültig wie diese gelagert sind.

Weisen die Belastungsfunktionen τ_n, $\tau_{p,n}$ und p_n Unstetigkeitsstellen auf, so legen wir durch jede von diesen einen Radiusvektor und zerlegen auf diese Weise die Spante in μ Sektionen. Für jede von diesen besteht ein Lösungspaar (21a, b). An der Berührungsstelle $\nu-1, \nu$ zweier Sektionen $\nu-1$ und ν muß die Biegelinie punkt- und tangentenweise stetig verlaufen (Fig. 6). Es folgt also

$$t_{n,\nu-1} = t_{n,\nu};\ r_{n,\nu-1} = r_{n,\nu};\ (-t_{n,\nu-1} + r'_{n,\nu-1}) = (-t_{n,\nu} + r'_{n,\nu})$$
$$\text{oder } r'_{n,\nu-1} = r'_{n,\nu}. \qquad (26\text{a, b, c, c}')$$

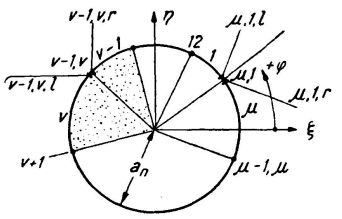

Fig. 6

Stellen wir für die beiden der Sektionsgrenze $\nu-1, \nu$ unendlich benachbarten Punkte $\nu-1, \nu; r$ und $\nu-1, \nu; l$ nach (21b) die Werte der r_n bzw. r_n' auf und ziehen sie voneinander ab, so fallen die für alle Sektionen gleich großen $\vartheta_n, \Delta_{\xi,n}$ und $\Delta_{\eta,n}$ heraus und wir erhalten zwei lineare Gleichungen mit den Unbekannten $(C_{2,\nu-1} - C_{2,\nu})$ und $(C_{3,\nu-1} - C_{3,\nu})$. Die Auflösung ergibt

$$C_{2,\nu-1} - C_{2,\nu} = \frac{1}{N_{\nu-1,\nu}} \left\{ \left[\eta'_{r,\nu-1} - \eta'_{r,\nu} \right]_{\varphi_{\nu-1,\nu}} \left(\frac{1-\kappa_n}{1+\kappa_n} \cos\varphi_{\nu-1,\nu} - \varphi_{\nu-1,\nu} \cdot \sin\varphi_{\nu-1,\nu} \right) \right.$$
$$\left. + \left[\eta_{r,\nu-1} - \eta_{r,\nu} \right]_{\varphi_{\nu-1,\nu}} \left(\frac{2}{1+\kappa_n} \sin\varphi_{\nu-1,\nu} + \varphi_{\nu-1,\nu} \cdot \cos\varphi_{\nu-1,\nu} \right) \right\} \qquad (27\text{a})$$

$$C_{3,\nu-1} - C_{3,\nu} = \frac{1}{N_{\nu-1,\nu}} \left\{ \left[\eta'_{r,\nu-1} - \eta'_{r,\nu} \right]_{\varphi_{\nu-1,\nu}} \left(\frac{1-\kappa_n}{1+\kappa_n} \sin\varphi_{\nu-1,\nu} + \varphi_{\nu-1,\nu} \cdot \cos\varphi_{\nu-1,\nu} \right) \right.$$
$$\left. + \left[\eta_{r,\nu-1} - \eta_{r,\nu} \right]_{\varphi_{\nu-1,\nu}} \left(\frac{2}{1+\kappa_n} \cos\varphi_{\nu-1,\nu} - \varphi_{\nu-1,\nu} \cdot \sin\varphi_{\nu-1,\nu} \right) \right\}. \qquad (27\text{b})$$

mit
$$N_{\nu-1,\nu} = \frac{2(1-\kappa_n)}{(1+\kappa_n)^2} + \varphi^2_{\nu-1,\nu}; \qquad \nu = 2, 3, \ldots \mu.$$

Bei der Bildung unserer Gleichungen begannen wir bei der Sektionsgrenze 1,2 und schritten im Sinne der positiven φ bis zur Grenze $\mu-1, \mu$ vor. Die Sektion μ ist dabei immer diejenige, welche vom Fahrstrahl $\varphi = 0$ geschnitten wird.

Handelt es sich um eine geschlossene Spante, so haben wir bei der letzten Sektionsgrenze zu beachten, daß zu deren linksseitigem Randpunkt $\mu, 1; l$ das Argument $\varphi_{\mu,1}$ und zum rechtsseitigen Randpunkt $\mu, 1; r$ das Argument $\varphi_{\mu,1}+2\pi$ gehört. Stellen wir für die beiden obigen Randpunkte wieder die r_n bzw. r_n' auf und subtrahieren sie voneinander, so wird

$$\begin{aligned}2\pi C_{2,\mu}\cos\varphi_{\mu,1}-2\pi C_{3,\mu}\sin\varphi_{\mu,1}&=\eta_{r,\mu}(\varphi_{\mu,1}+2\pi)-\eta_{r,1}(\varphi_{\mu,1})-\\&-(C_{2,\mu}-C_{2,1})\left(\frac{1-\kappa_n}{1+\kappa_n}\sin\varphi_{\mu,1}+\varphi_{\mu,1}\cos\varphi_{\mu,1}\right)\\&-(C_{3,\mu}-C_{3,1})\left(\frac{1-\kappa_n}{1+\kappa_n}\cos\varphi_{\mu,1}-\varphi_{\mu,1}\sin\varphi_{\mu,1}\right)\end{aligned}\tag{28a}$$

$$\begin{aligned}-2\pi C_{2,\mu}\sin\varphi_{\mu,1}-2\pi C_{3,\mu}\cos\varphi_{\mu,1}&=\eta_{r,\mu}'(\varphi_{\mu,1}+2\pi)-\eta_{r,1}'(\varphi_{\mu,1})\\&-(C_{2,\mu}-C_{2,1})\left(\frac{2}{1+\kappa_n}\cos\varphi_{\mu,1}-\varphi_{\mu,1}\sin\varphi_{\mu,1}\right)\\&+(C_{3,\mu}-C_{3,1})\left(\frac{2}{1+\kappa_n}\sin\varphi_{\mu,1}+\varphi_{\mu,1}\cos\varphi_{\mu,1}\right).\end{aligned}\tag{28b}$$

Bestimmt man daraus $C_{2,\mu}-C_{2,1}$ und $C_{3,\mu}-C_{3,1}$ und addiert dazu die $\mu-1$ Lösungen von (27a, b), so fallen alle Differenzen $C_{\nu-1}-C_\nu$ weg und es verbleiben zwei lineare Gleichungen mit den zur Sektionsgrenze μ gehörigen Integrationskonstanten $C_{2,\mu}$ und $C_{3,\mu}$ als Unbekannte. Die Auflösung ergibt

$$C_{2,\mu}=(\varphi_{\mu,1}-\tfrac{1}{2}\sin 2\varphi_{\mu,1})\Delta_1+\left(\frac{1-\kappa_n}{1+\kappa_n}+\sin^2\varphi_{\mu,1}\right)\Delta_2\tag{29a}$$

$$C_{3,\mu}=-\left(\frac{1-\kappa_n}{1+\kappa_n}+\cos^2\varphi_{\mu,1}\right)\Delta_1+(\varphi_{\mu,1}+\tfrac{1}{2}\sin 2\varphi_{\mu,1})\Delta_2\tag{29b}$$

mit
$$\begin{aligned}\Delta_1=\frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=2}^{\nu=\mu+1}\frac{1}{N_{\nu-1,\nu}}\Bigg[&(\eta_{r\,\nu-1}'-\eta_{r,\nu}')\left(\frac{1-\kappa_n}{1+\kappa_n}\cos\varphi-\varphi\sin\varphi\right)\\&+(\eta_{r,\nu-1}-\eta_{r,\nu})\left(\frac{2}{1+\kappa_n}\sin\varphi+\varphi\cos\varphi\right)\Bigg]_{\varphi_{\nu-1,\nu}}\end{aligned}\tag{29c}$$

$$\begin{aligned}\Delta_2=\frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=2}^{\nu=\mu+1}\frac{1}{N_{\nu-1,\nu}}\Bigg[&-(\eta_{r,\nu-1}'-\eta_{r,\nu}')\left(\frac{1-\kappa_n}{1+\kappa_n}\sin\varphi+\varphi\cos\varphi\right)\\&+(\eta_{r,\nu-1}-\eta_{r,\nu})\left(\frac{2}{1+\kappa_n}\cos\varphi-\varphi\sin\varphi\right)\Bigg]_{\varphi_{\nu-1,\nu}}.\end{aligned}\tag{29d}$$

Aus $C_{2,\mu}$ und $C_{3,\mu}$ ergeben sich die übrigen C_2 und C_3 aus den Lösungen der (27a, b) durch einfache Differenzenbildungen.

Für die Bestimmung der C_1 müssen wir von der Bedingung (26a) ausgehen. Bildet man zunächst für die Grenzpunkte nach der (21a) die t_n und zieht sie voneinander ab, so wird

$$\begin{aligned}C_{1,\nu-1}-C_{1,\nu}=&-(C_{2,\nu-1}-C_{2,\nu})\sin\varphi_{\nu-1,\nu}-(C_{3,\nu-1}-C_{3,\nu})\cos\varphi_{\nu-1,\nu}\\&-\frac{1}{\varphi_{\nu-1,\nu}}\Big[\eta_{t,\nu-1}-\eta_{t,\nu}\Big]_{\varphi_{\nu-1,\nu}};\quad \nu=2,3,\ldots\mu.\end{aligned}$$

Stellen wir noch die den (28) analogen Bedingungen auf und addieren die

daraus folgende Differenz $C_{1,1}-C_{1,\mu}$ zu der vorhergehenden Beziehung, so wird

$$C_{1,\mu}=-\sin\varphi_{\mu,1}C_{2,\mu}-\cos\varphi_{\mu,1}C_{3,\mu}-\frac{\varphi_{\mu,1}}{2\pi}\sum_{\nu=2}^{\nu=\mu+1}\Big\{(C_{2,\nu-1}-C_{2,\nu})\sin\varphi_{\nu-1,\nu}$$
$$+(C_{3,\nu-1}-C_{3,\nu})\cos\varphi_{\nu-1\,\nu}+\frac{1}{\varphi_{\nu-1,\nu}}\Big[\eta_{t,\nu-1}-\eta_{t,\nu}\Big]_{\varphi_{\nu-1,\nu}}\Big\} \qquad (29')$$

worin die bereits errechneten C_2 und C_3 einzusetzen sind.

Bei den Σ-Bildungen ist der Zeiger $\mu+1$ durch 1 und $\varphi_{\mu,1}$ durch φ_1 zu ersetzen. Außerdem müssen die $\eta_{r,\mu}$, $\eta'_{r,\mu}$ und $\eta_{t,\mu}$ mit dem Argument $\varphi_1+2\pi$ gebildet werden.

Sind die Belastungsfunktionen stetig mit der Periode 2π, so liegt im Sinne unserer Betrachtungen nur *eine* Sektion vor, deren Randpunkte wir in $\varphi=0,2\pi$ legen wollen. Berücksichtigt man, daß die τ_n, p_n und $\tau_{n,p}$ im Gleichgewicht stehen, so ergibt eine einfache Zwischenrechnung die 6 Beziehungen

$$\int_0^{2\pi}\Phi_{\substack{t,n\\r,n}}d\varphi=0;\quad \int_0^{2\pi}\Phi_{\substack{t,n\\r,n}}\sin\varphi\,d\varphi=0;\quad \int_0^{2\pi}\Phi_{\substack{t,n\\r,n}}\cos\varphi\,d\varphi=0, \qquad (30\,\mathrm{a,b,c})$$

woraus aus (21 a, b)

$$\eta_{t,\mu}-\eta_{t,1}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int\Phi_{t,n}d\varphi+\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int\Phi_{t,n}\cos\varphi\,d\varphi;\quad \eta_{r,\mu}-\eta_{r,1}=\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int\Phi_{r,n}\sin\varphi\,d\varphi;$$
$$\eta'_{r,\mu}-\eta'_{r,1}=-\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int\Phi_{r,n}\cos\varphi\,d\varphi \qquad (31\,\mathrm{a,b,c})$$

folgt. Durch partielle Integration der rechten Seiten der (19 a, b) ergibt sich, daß die Doppelintegrale der (31 a, b) ihr Vorzeichen ändern, wenn man $\Phi_{t,n}$ durch $\Phi_{r,n}$ ersetzt. Substituiert man (31 a) in (29′) und (31 b, c) in (28 a, b), so erhalten wir die Integrationskonstanten zu

$$C_1=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int\Phi_{t,n}d\varphi;\quad C_2=-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int\Phi_{t,n}\sin\varphi\,d\varphi;$$
$$C_3=-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int\Phi_{t,n}\cos\varphi\,d\varphi \qquad (32\,\mathrm{a,b,c})$$

$$C_1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi\Phi_{t,n}d\varphi;\quad C_2=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\varphi\Phi_{t,n}\sin\varphi\,d\varphi;$$
$$C_3=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\varphi\Phi_{t,n}\cos\varphi\,d\varphi, \qquad (32\,\mathrm{a',b',c'})$$

wobei sich die zweiten Formen aus den ersten durch partielle Integration ergeben.

Wir entwickeln nun die von der Membrane auf die Spante übertragene Schubkraft $x_n \cdot \tau_n$ und die äußeren Belastungen p_n und $\tau_{p,n}$ in Fouriersche Reihen. Es wird

$$x_n \tau_n = X_n = T_{n,1} + T_{n,1} \sin\varphi + \overline{T}_{n,1} \cos\varphi + \sum_2^\infty{}^k T_{n,k} \sin k\varphi + \sum_2^\infty{}^k \overline{T}_{n,k} \cos k\varphi \quad (33\text{a})$$

$$p_n = P_{n,0} + \overline{P}_{n,1} \cos\varphi + P_{n,1} \sin\varphi + \sum_2^\infty{}^k P_{n,k} \cos k\varphi + \sum_2^\infty{}^k P_{n,k} \sin k\varphi \quad (33\text{b})$$

$$\tau_{p,n} = T_{p\ n,0} + T_{p,n,1} \sin\varphi + \overline{T}_{p,n,1} \cos\varphi + \sum_2^\infty{}^k T_{p,n,k} \sin k\varphi + \sum_2^\infty{}^k \overline{T}_{p,n,k} \cos k\varphi, \quad (33\text{c})$$

wobei wir als 1. Wellen jeweils die ersten 3 Glieder bezeichnen wollen. Da $x_n \cdot \tau_n$, p_n und $\tau_{p,n}$ miteinander im Gleichgewicht stehen müssen, erhalten wir 3 Bedingungen, die sich, da alle hierbei auftretenden Integrale bis auf die 3 folgenden

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi; \quad \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi = \pi$$

verschwinden, auf

$$T_{n,0} = x_n (1+\lambda_n)^2 T_{p,n,\theta} = \frac{M_n}{2\pi a_n \sin\alpha}; \quad T_{n,1} = -x_n (1+\lambda_n)(\overline{P}_{n,1} - T_{p,n,1}) = -\frac{P_{\xi,n}}{\pi \sin\alpha};$$

$$\overline{T}_{n,1} = x_n (1+\lambda_n)(P_{n,1} + \overline{T}_{p,n,1}) = \frac{P_{\eta,n}}{\pi \sin\alpha} \quad (34\text{a, b, c})$$

reduzieren. Dabei bedeuten M_n, $P_{\xi,n}$, $P_{\eta,n}$ die auf das Achsenkreuz ξ, η bezogenen Komponenten der auf die Spante einwirkenden Lasten p_n und $\tau_{p,n}$.

Belastet man die Spante nur mit den 1. Wellen, so werden die rechten Seiten der (19a, b) nach (20a, b) und wegen (34a, b, c) identisch Null. Aus den Integralformen der (21a, b) ergeben sich die Beziehungen $\eta_{t,n,1} = \eta_{r,n,1} = 0$[3]). Da wegen $\Phi_{t,n,1} \equiv \Phi_{r,n,1} \equiv 0$ nach (32a, b, c) C_1, C_2 und C_3 Null wird, folgt aus (25a, b, c), daß auch die Schnittkräfte N_n, M_n und Q_n verschwinden müssen. Die Verschiebungen t_n und r_n reduzieren sich also auf $\bar{t}_n$ und $\bar{r}_n$, d. h. die Spante verhält sich unter der obigen Teilbelastung wie eine vollkommen starre Scheibe. Dieses Ergebnis hängt eng mit der Tatsache zusammen, daß jedes Glied der Entwicklungen (33a, b, c) für $k=2$ immer eine gerade Anzahl von Wellenbergen und -tälern mit absolut gleich großen Amplituden aufweist, so daß jede dieser Wellen für sich im Gleichgewicht steht. Hat man also die 1. Wellen der Belastungsfunktionen erledigt, so braucht man sich um das Gleichgewicht der einzelnen Spanten nicht mehr zu kümmern. Man kann dann aber auch andererseits aus dem letzteren keinerlei Randbedingungen herleiten.

Belastet man aber die Spante mit der k. Welle, bestehend aus

$$-T_{n,k} \sin k\varphi; \quad \overline{P}_{n,k} \cos k\varphi; \quad T_{p;\,n,k} \sin k\varphi; \quad -\overline{T}_{n,k} \cos k\varphi; \quad P_{n,k} \sin k\varphi; \quad \overline{T}_{p;\,n,k} \cos k\varphi, \quad (35)$$

---

[3]) Der zusätzliche Index 1 soll die Zugehörigkeit zu den 1. Wellen andeuten.

so erhalten wir die rechte Seite der (19a), indem man diese Werte in die (20a, b) einsetzt zu

$$\Phi_{t,n,k} = (A_{n,k} \cdot T_{n,k} + B_{n,k} \cdot \overline{P}_{n,k} + C_{n,k} \cdot T_{p,n,k}) \sin k\varphi$$
$$+ (A_{n,k} \cdot \overline{T}_{n,k} - B_{n,k} \cdot P_{n,k} + C_{n,k} \cdot \overline{T}_{p,n,k}) \cos k\varphi \tag{36}$$

mit
$$A_{n,k} = \frac{a_n^4 (1-\epsilon_n)^2}{E_n J_n} \sin\alpha \, [1 - \epsilon_n k^2 + \kappa_n (1-\epsilon_n) k^4] \tag{37a}$$

$$B_{n,k} = \frac{a_n^4 (1-\epsilon_n)^3 (1+\lambda_n)}{E_n J_n} k \, [1 + \kappa_n k^2] \tag{37b}$$

$$C_{n,k} = \frac{a_n^4 (1-\epsilon_n)^2 (1+\lambda_n)}{E_n J_n} [-(1+\lambda_n) + (\lambda_n + \epsilon_n) k^2 - \kappa_n (1-\epsilon_n) k^4]. \tag{37c}$$

Damit ergibt sich die zur k. Welle gehörige tangentiale Verschiebung $t_{n,k}$ in der Form

$$t_{n,k} = -\frac{\Phi_{t,n,k}}{k^2 (k^2-1)^2}. \tag{38}$$

D. Die durch Spanten versteifte Kragmembrane

a) Allgemeines

Steht die unversteifte Kragmembrane unter der Einwirkung der unbekannten Schubflüsse τ_n, der äußeren Lasten p, p_s und p_t sowie der vorgegebenen Fundamentbewegungen t_m und r_m, so folgt durch Überlagerung von (11a, b) und (7′) die gesamte tangentielle Verschiebung längs des Parallelkreises x_n, welche der durch (21a) dargestellten Verschiebung t_n der Spante n gleich sein muß. Es wird so

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} [(\alpha_n + x_\nu \beta_n) X_\nu'' + x_\nu \cdot \gamma_n X_\nu] + \sum_{\nu=n+1}^{\nu=m-1} [(\alpha_\nu + x_n \beta_n) X_\nu'' + x_n \cdot \gamma_\nu X_\nu] = -t_{P,n} + t_n = -\Theta_n, \tag{39}$$
$$n = 1, 2, 3, \ldots m-1.$$

Eine analoge Betrachtung für die achsialen Verschiebungen führt zu

$$\sin\alpha \left[\alpha_n \sum_{\nu=1}^{\nu=n} X_\nu' + \sum_{\nu=n+1}^{\nu=m-1} \alpha_\nu X_\nu' \right] = -s_{P,n} + s_n, \quad n = 1, 2, \ldots m-1. \tag{39′}$$

b) Belastung durch die 1. Wellen

Da man eine periodische Funktion nur auf eine einzige Art in eine Fouriersche Reihe entwickeln kann, ersieht man, daß die 1. Welle von t_n durch das $\bar{t}_n$ der (21a) und jede k. Welle durch (38) bereits dargestellt ist. Vereinigen wir die 1. Wellen von $t_{P,n}$ und t_n, so erhalten wir zunächst

$$\Theta_n = -(D_{n,0} - a_n \vartheta_n) - (D_{n,1} + \Delta_{\xi,n}) \sin\varphi - (\bar{D}_{n,1} - \Delta_{\eta,n}) \cos\varphi - R_{P,n} + R_{t,n}$$
$$= -\Theta_n^0 - R_{P,n} + R_{t,n} = -\Theta_n^0 - \Omega_n, \qquad (40\text{a})$$

wobei
$$R_{P,n} = \sum_{n=2}^{k=\infty} D_{n,k} \sin k\varphi + \sum_{k=2}^{k=\infty} \bar{D}_{n,k} \cos k\varphi \qquad (40\text{b})$$

$$R_{t,n} = -\sum_{k=2}^{k=\infty} \frac{1}{k^2(k^2-1)^2} [(A_{n,k} \cdot T_{n,k} + B_{n,k} \cdot \bar{P}_{n,k} + C_{n,k} \cdot T_{p;\,n,k}) \sin k\varphi$$
$$+ (A_{n,k} \cdot \bar{T}_{n,k} - B_{n,k} \cdot P_{n,k} + C_{n,k} \cdot \bar{T}_{p;\,n,k}) \cos k\varphi] \qquad (40\text{c})$$

bedeutet und die Fourierschen Koeffizienten die Werte

$$D_{n,0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t_{P,n}\, d\varphi; \quad D_{n,k} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t_{P,n} \sin k\varphi\, d\varphi; \quad \bar{D}_{n,k} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t_{P,n} \cos k\varphi\, d\varphi;$$
$$k = 1, 2, \ldots \infty \qquad (40\text{d})$$

$$P_{n,k} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p_n \sin k\varphi\, d\varphi; \quad \bar{P}_{n,k} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p_n \cos k\varphi\, d\varphi; \quad T_{p;\,n,k} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tau_{p;\,n,k} \sin k\varphi\, d\varphi;$$
$$\bar{T}_{p;\,n,k} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tau_{p;\,n,k} \cos k\varphi\, d\varphi \qquad k = 2, 3, \ldots \infty \qquad (40\text{e})$$

annehmen. $T_{n,k}$ sind als Beiwerte der X_ν noch unbekannt. Da wir in (34a, b, c) die 1. Welle der X_ν bereits ohne Hilfe der (39) gefunden haben, können wir an Stelle der ersteren aus den letzteren noch weitere Größen bestimmen. Da die (39) linear sind, werden sie auch von den 1. Wellen unserer Fourierschen Entwicklungen allein befriedigt. Berücksichtigt man dabei, daß hierbei $-R_{P,n} + R_{t,n} = -\Omega_n = 0$ wird und ersetzen wir die Funktionen α_ν, β_ν und γ_ν durch die Werte der (11a, b), so folgen mit (34a, b, c) die zur Membranenachse normalen Verschiebungen $\Delta_{\xi,n}$, $\Delta_{\eta,n}$ und ϑ_n der Spantenmittelpunkte zu

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} P_{\xi,\nu} \cdot \int_{x_m}^{x_n} (x - x_n)(x - x_\nu) \frac{dx}{E J_\nu} + \sum_{\nu=n+1}^{\nu=m-1} P_{\xi,n} \cdot \int_{x_m}^{x_\nu} (x - x_\nu)(x - x_n) \frac{dx}{E J_x}$$
$$+ \frac{4 x_n (1+\mu)}{E} \left[\int_{x_m}^{x_n} \frac{dx}{x^2 F_x} \cdot \sum_{\nu=1}^{\nu=n} x_\nu P_{\xi,n} + \sum_{\nu=n+1}^{\nu=m-1} x_\nu P_{\xi,n} \cdot \int_{x_m}^{x_\nu} \frac{dx}{x^2 F_x} \right] + D_{n,1} = \Delta_{\xi,n}^0 + D_{n,1} = \Delta_{\xi,n}$$
$$(41\text{a})$$

$$\frac{1+\mu}{E \sin\alpha} \left[\int_{x_m}^{x_n} \frac{dx}{x \vartheta_x \bar{F}_x} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} M_\nu + \sum_{\nu=n+1}^{\nu=m-1} M_\nu \int_{x_m}^{x_\nu} \frac{dx}{x \vartheta_x \bar{F}_x} \right] + \frac{D_{n,0}}{a_n} = \vartheta_n^0 + \frac{D_{n,0}}{a_n} = \vartheta_n. \qquad (41\text{c})$$

Die nicht angeschriebene (41b) folgt aus (41a), indem man ξ mit η und $D_{n,1}$ mit $\bar{D}_{n,1}$ vertauscht. $J_x = \pi \vartheta_x x^3 \sin^3\alpha$ bedeutet das Trägheitsmoment und $F_x = 2\pi x \vartheta_x \sin\alpha$ die Fläche eines achsnormalen Membranenquerschnittes. $\bar{F}_x$ soll jedoch den Flächeninhalt eines Parallelkreises darstellen.

Man ersieht, daß $\Delta^0_{\xi,n}$, $\Delta^0_{\eta,n}$, ϑ^0_n denjenigen Anteil der Gesamtverschiebungen darstellen, der nur von den Spantenbelastungen herrührt, während die $D_{n,1}$, $\bar{D}_{n,1}$, $\frac{D_{n,0}}{a_n}$ nur von der Mantelbelastung abhängen.

Zusammenfassend können wir sagen:

1. Ist nur der Mantel belastet und zwar so, daß für das unversteifte Kragwerk längs der zu den Spanten n gehörigen Parallelkreise x_n die Tangentialverschiebungen $t_{P,n}$ nur aus der 1. Welle

$$t^0_{P,n} = D_{n,0} + D_{n,1} \sin\varphi + \bar{D}_{n,1} \cos\varphi \tag{42}$$

der Entwicklung (40a) bestehen, so sind im versteiften Tragwerk wegen $P_{\xi,n} = P_{\eta,n} = M_n = 0$ nach (34a, b, c) alle Berührungsflüsse Null. Die achsnormalen Bewegungen betragen hierbei

$$\Delta_{\xi,n} = D_{n,1}; \quad \Delta_{\eta,n} = \bar{D}_{n,1}; \quad \vartheta_n = \frac{D_{n,0}}{a_n}$$

2. Ist hingegen der Mantel lastfrei und greifen an den Spanten die Lastwirkungen $P_{\xi,n}$, $P_{\eta,n}$ und M_n an, so ergeben sich nach (34a, b, c) die Berührungsflüsse zu

$$\tau_n = \frac{M_n}{2\pi a_n^2} - \frac{P_{\xi,n}}{\pi a_n} \sin\varphi + \frac{P_{\eta,n}}{\pi a_n} \cos\varphi, \tag{43}$$

während die Verschiebungen durch die Anteile $\Delta^0_{\xi,n}$, $\Delta^0_{\eta,n}$, ϑ^0_n gegeben sind.

In beiden Fällen rühren die achsnormalen Verschiebungen nur von den 1. Wellen her. Es ist auch leicht zu erkennen, daß für diese die σ_n, σ_t und τ einen ebenen Verlauf annehmen.

Die beiden ersten Σ der (41a, b) sind identisch mit den Biegeformeln eines durch transversale Einzellasten belegten, vollwandigen Kragträgers mit veränderlichem J_x. Die beiden übrigen Σ stellen den Einfluß der Schubkräfte unter Berücksichtigung der Konizität dar. In (41c) erkennt man die für den Kegel abgewandelte Bredtsche Torsionsformel.

c) Restbelastungen, genaue Randbedingungen und Konstantenbestimmung

Um die Gesamtwirkung der Lasten zu erfassen, müssen wir (39) mit $-\Omega_n = -R_{P,n} + R_{t,n}$ als Absolutglieder integrieren. Wendet man auf (39) den Differentialoperator D an, so folgen mit (19a) die simultanen, linearen Differentialgleichungen 8. Ordnung

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} [(\alpha_n + x_\nu \cdot \beta_n) D^{IV}(X_\nu) + x_\nu \cdot \gamma_n D''(X_\nu)] + \sum_{\nu=n+1}^{\nu=m-1} [(\alpha_\nu + x_n \cdot \beta_\nu) D^{IV}(X_\nu)$$
$$+ x_n \cdot \gamma_\nu D''(X_\nu) - \Phi_{t,n} = -D''(R_{P,n}); \quad n = 1, 2, \ldots m-1 \tag{44}$$

mit $8(m-1)$ Integrationskonstanten, wobei in $\Phi_{t,n}$ die X_n, X_n'' und X_n^{IV} noch latent enthalten sind.

Aus der Ansicht II der Fig. 2 erkennt man, daß bei unstetigem $\frac{\partial s_n}{\partial \varphi}$ der Winkel ϑ_1 endlich groß und somit $\tau = \infty$ wird. Da ein Zerreißen der Membrane

nicht eintreten darf, müssen also s_n und s_n' längs eines jeden Spantenkreises punktweise stetig verlaufen. Erinnern wir uns an (26a, b, c') und bedenkt man, daß aus dem Gleichgewicht eines Elementarelementes einer Spante der punktweise stetige Verlauf auch der Schnittkräfte N_n, M_n und Q_n folgt, so sind wir im Besitze der notwendigen und hinreichenden 8 Randbedingungen[4]).

Wir legen nun durch jede Stelle, an welcher wenigstens eine von den Funktionen $s_{P,n}$, $s'_{P,n}$, $t_{P,n}$, $t'_{P,n}$, $t''_{P,n}$, $t'''_{P,n}$, $t^{\mathrm{IV}}_{P,n}$, $\tau_{p,n}$, $\tau''_{p,n}$, $\tau^{\mathrm{IV}}_{p,n}$, p_n', p_n''' unstetig wird, eine Kegelerzeugende und teilen auf diese Weise das Tragwerk in μ Sektionen. Für jede von diesen besteht ein Gleichungssatz (44), so daß nun $8\mu(m-1)$ Integrationskonstante zu bestimmen sind.

Es sei $\Delta f_{\nu-1,\nu} = f_{\nu+1}(\varphi_{\nu-1}) - f_\nu(\varphi_\nu)$ der endliche Wert, um den die Funktion f beim Übergang von der Sektion $\nu-1$ zur Sektion ν abnimmt, wenn deren Numerierung im Sinne des zunehmenden Argumentes φ erfolgt. Dabei sei $\varphi_{\nu-1,\nu}$ dessen Wert an der Übergangsstelle. Damit lauten die ersten fünf der vorhin beschriebenen Bedingungen[5])

$$\Delta s_{P,n} = 0;\ \Delta s'_{P,n} = 0;\ \Delta t_n = 0;\ \Delta r_n = 0;\ \Delta r' = 0, \qquad (45\,\mathrm{a,b,c})(46\,\mathrm{a,b})$$

wobei (45c) und (46a, b) identisch mit (26a, b, c') sind. Aus (17a) folgt mit (46a) aus der Stetigkeit der N_n

$$\Delta t_n' = 0. \tag{45d}$$

Ebenso erhalten wir aus (17b) mit (45d) aus der Stetigkeit der M_n

$$\Delta r_n'' = 0. \tag{46c}$$

Setzt man (17a) in (16b), so folgt mit (46b) aus der Stetigkeit der Q_n

$$\Delta t_n'' = -\frac{a_n^3(1-\epsilon_n)^3\kappa_n \sin\alpha}{E_n J_n}\Delta X_n - \frac{a_n^4(1-\epsilon_n)^3(1+\lambda_n)}{E_n J_n}\Delta \tau_{p,n}. \tag{45e}$$

Es ist nun zweckmäßig, in diesen Bedingungen die r_n durch t_n zu ersetzen. So folgt aus (18a) mit (46a, c) und (45d)

$$\Delta t_n''' = -\frac{a_n^3(1-\epsilon_n)^3\kappa_n \sin\alpha}{E_n J_n}\Delta X_n' + \frac{a_n^4(1-\epsilon_n)^3(1+\lambda_n)}{E_n J_n}\Delta(p_n - \tau'_{p,n}). \tag{45f}$$

Ferner ergibt sich mit Hilfe der (46b) und (45e) aus $\frac{d}{d\varphi}$ (18a) und (18b)

$$\begin{aligned}\Delta t_n^{IV} = &-\frac{a_n^3(1-\epsilon_n)^2\sin\alpha}{E_n J_n}\{[\dot{\epsilon}_n + 2\kappa_n(1-\epsilon_n)]\Delta X_n + \kappa_n(1-\epsilon_n)\Delta X_n''\}\\ &-\frac{a_n^4(1-\epsilon_n)^2(1+\lambda_n)}{E_n J_n}\{[(\epsilon_n+\lambda_n) - 2\kappa_n(1-\epsilon_n)]\Delta\tau_{p,n}\\ &\qquad + \kappa_n(1-\epsilon_n)\Delta(\tau''_{p,n} - p_n')\}.\end{aligned} \tag{45g}$$

---

[4]) Die ersten fünf dieser Bedingungen gelten auch dann, wenn konzentrierte Kraftwirkungen auftreten. Sind solche vorhanden, so machen bei den letzten drei Bedingungen die N_n, M_n, Q_n endliche Sprünge, die den Größen dieser konzentrierten Kraftwirkungen gleich sind.

[5]) Wir lassen vorläufig den Index $\nu-1$, ν weg.

Aus (19a) erhalten wir endlich mit (45e, g) die letzte Randbedingung

$$\begin{aligned}\Delta t_n^{VI} = {} & \frac{a_n{}^3(1-\epsilon_n)^2 \sin\alpha}{E_n J_n}\{[\epsilon_n-(1-\epsilon_n)(1+3\kappa_n)]\Delta X_n \\ & -[\epsilon_n-2\kappa_n(1-\epsilon_n)]\Delta X_n''-\kappa_n(1-\epsilon_n)\Delta X_n^{IV}\} \\ & +\frac{a_n{}^4(1-\epsilon_n)^2(1+\lambda_n)}{E_n J_n}\{[(1+\lambda_n)-(1-\epsilon_n)(2+3\kappa_n)]\Delta\tau_{p,n} \\ & -[(\lambda_n+\epsilon_n)-2\kappa_n(1-\epsilon_n)]\Delta\tau_{p,n}''-\kappa_n(1-\epsilon_n)\Delta\tau_{p,n}^{IV} \\ & -\kappa_n(1-\epsilon_n)\Delta(2p_n'-p_n''')\}.\end{aligned} \tag{45h}$$

In der Folge werden wir nur die (45a, b, c, d, e, f, g, h) benutzen. Sie gelten in dieser Form nur, wenn konzentrierte Lastwirkungen nicht vorhanden sind. Sind jedoch solche zu berücksichtigen, so haben wir bei den Differenzenbildungen an Stelle der N_n, M_n und Q_n deren sprunghafte Änderungen einzusetzen, welche den konzentrierten Kraftwirkungen selbst gleich sind.

Wir bezeichnen, entsprechend den (40), mit $R_{p,n}$ und $R_{\tau_p,n}$ die Reste, welche übrig bleiben, wenn man von p_n und $\tau_{p,n}$ die dazugehörigen 1. Wellen abzieht. Da die letzteren als stetige Funktionen bei der Bildung der Differenzen $\Delta_{\nu-1,\nu}$ wegfallen, gelten dann die (45a, b, c, d, e, f, g, h) auch für $R_{t,n}$, $R_{P,n}$, $R_{p,n}$ und $R_{\tau_p,n}$.

Die für die Aufstellung der obigen Randbedingungen nötigen Werte der Δs_n und $\Delta s_n'$, sowie der Δt_n, $\Delta t_n'$, $\Delta t_n''$, $\Delta t_n'''$, Δt_n^{IV} und Δt_n^{VI} erhalten wir, durch Differenzenbildung der (39′) und deren 1. Ableitung, sowie der (39) und deren 1., 2., 3., 4. und 6. Ableitung, wenn man vorher die t_n, $t_{P,n}$, p_n und $\tau_{p,n}$ durch die Reste $R_{t,n}$, $R_{P,n}$, $R_{p,n}$ und $R_{\tau_p,n}$ ersetzt. Stellen wir nun für die Schnittpunkte der Sektionsgrenze $\nu-1,\nu$ mit den Spantenkreisen n zuerst die (45a) und dann die (45b) usw. bis (45h) auf, so erhalten wir 8 Gruppen linearer Gleichungen mit den Unbekannten $\Delta X_n'$, $\Delta X_n''$, ΔX_n, $\Delta X_n'''$, ΔX_n^{IV}, ΔX_n^{V}, ΔX_n^{VI}, $\Delta X_n^{\mathrm{VIII}}$ $(n=1,2,3,\ldots m-1)$, deren Absolutglieder lineare Funktionen der $\Delta s_{P,n}$, $\Delta s_{P,n}'$, $\Delta R_{P,n}$, $\Delta R_{P,n}'$, $\Delta R_{P,n}''$, $\Delta R_{P,n}'''$, $\Delta R_{P,n}^{\mathrm{IV}}$, $\Delta R_{P,n}^{\mathrm{VI}}$, $\Delta R_{\tau p,n}$, $\Delta R_{\tau p,n}''$, $\Delta R_{p,1}^{\mathrm{IV}}$, $\Delta R_{p,n}'$, $\Delta R_{p,n}'''$ sind. Wir wollen diese Beziehungen „Zwischenbedingungen" nennen[6]).

Fangen wir bei der Bildung der obigen Bedingungen mit der Spante 1 an, so läßt sich die zu (45a) gehörige Gruppe leicht lösen. Man zieht zunächst immer die folgende Gleichung von der vorhergehenden ab und dividiert dieses Ergebnis jeweils durch $\alpha_{\nu-1}-\alpha_\nu$. Dadurch verschwinden die oberhalb der Hauptdiagonale liegenden Beiwerte, während alle andern einander gleich werden. Subtrahiert man in diesem System wieder jeweils zwei aufeinanderfolgende Gleichungen, so wird

$$\Delta X_1' = -\frac{\Delta s_{P,1}-\Delta s_{P,2}}{\alpha_1-\alpha_2} \tag{39″a}$$

[6]) Infolge der Zentralsymmetrie der Tragwerksanlage sind die Funktionen α, β und γ der (39) für alle Sektionen gleich.

$$\Delta X'_\rho = + \frac{\Delta s_{P,\rho-1} - \Delta_{P,\rho}}{\alpha_{\rho-1} - \alpha_\rho} - \frac{\Delta s_{P,\rho} - \Delta s_{P,\rho+1}}{\alpha_\rho - \alpha_{\rho+1}} \tag{39''ρ}$$

$$\Delta X' = + \frac{\Delta s_{P,m-2} - \Delta s_{P,m-1}}{\alpha_{m-2} - \alpha_{m-1}} - \frac{\Delta s_{P,m-1}}{\alpha_{m-1}}, \tag{39''m-1}$$

wobei für die letzte dieser Lösungen die letzte Zeile der (39′) zur Elimination herangezogen wurde. Die Ergebnisse der zu (45b) gehörigen Gruppe folgen aus (39″$a, \ldots m-1$) formal durch einmalige Differentiation. Die Matrixen dieser beiden Gleichungsgruppen sind einander gleich, während deren Absolutglieder im allgemeinen von einander verschieden sein werden, da $\Delta s'_{P,n}$ nicht immer der 1. Ableitung von $\Delta s_{P,n}$ gleich sein wird. Setzen wir nun in die zu (45c) gehörigen Gleichungen die soeben gefundenen $\Delta X_n''$, so ergeben sich $m-1$ Beziehungen, die sich nach den X_n ebenso leicht lösen lassen, wie die aus (45a) entstandenen. Bilden wir weiter die zu (45d) gehörige Gruppe und setzen in diese die bereits errechneten X_n', so folgen $m-1$ Gleichungen mit den Unbekannten X_n'''. Verfahren wir mit den übrigen, zu den Randbedingungen (45e, f, g, h) gehörigen Gleichungsgruppen genau so, so ergeben sich schließlich auch die ΔX_n^{VI}, ΔX_n^{V}, ΔX_n^{VI} und $\Delta X_n^{\mathrm{VIII}}$. Diesen Vorgang muß man für jede Sektionsgrenze durchführen. Wir zerspalten auf diese Weise die $8\mu(m-1)$ Bedingungen in 8μ Gruppen mit je $m-1$ Unbekannten.

Das allgemeine Integral der (44) hat bekanntlich die Form

$$X_{\nu,n} = \xi_{\nu,n} + \sum_{\rho=1}^{\rho=8(m-1)} C_{\rho,\nu} \cdot \Gamma_\rho \quad \begin{matrix}(n=1,2,3,\ldots m-1)\\ (\nu=1,2,3,\ldots\mu)\end{matrix}, \tag{47}$$

wobei wegen der Zentralsymmetrie der Tragwerksanlage die Elementarlösungen Γ_ρ für alle Sektionen gleich sind. Daraus erhält man für die Erzeugende $\nu-1, \nu$

$$\Delta X^{(\beta)}_{\nu-1;\,\nu,n} = \Delta \xi^{(\beta)}_{\nu-1;\,\nu,n} + \sum_{\rho=1}^{\rho=8(m-1)} (C_{\rho,\nu-1} - C_{\rho,\nu}) \cdot \Gamma^{(\beta)}_\rho(\varphi_{\nu-1,\nu}), \tag{47'}$$

wobei für den Grad β der Ableitungen nacheinander 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 8 zu setzen ist. Für die letzte Sektionsgrenze $\mu\,1$ folgt analog (28a, b)

$$\begin{aligned} X^{(\beta)}_{\mu;\,n}(\varphi_1 + 2\pi) - X^{(\beta)}_{1;\,n}(\varphi_1) = {} & [\xi^{(\beta)}_{\mu;\,n}(\varphi_1 + 2\pi) - \xi^{(\beta)}_{1;\,\mu}(\varphi_1)] \\ & + \sum_{\rho=1}^{\rho=8(m-1)} [C_{\rho,\mu}\Gamma^{(\beta)}_\rho(\varphi_1 + 2\pi) - C_{\rho,1}\Gamma^{(\beta)}_\rho(\varphi_1)]. \end{aligned} \tag{47''}$$

Setzen wir nun an Stelle der linken Seiten dieser Beziehungen die aus den Zwischenbedingungen gefundenen Werte der $\Delta X_n^{(\beta)}$, so erhalten wir $8(m-1)$ lineare Gleichungen mit den Unbekannten $[C_{\rho,\nu-1} - C_{\rho,\nu}]$. Bilden wir auch für die Sektionsgrenzen $1,2; 2,3; \ldots \mu-1, \mu$ dieselben Gleichungssätze, lösen alle nach den $[C_{\rho,\nu-1} - C_{\rho,\nu}]$ $(\nu = 1, 2, \ldots \mu)$ auf und addieren diese Ergebnisse, so ergeben sich die $[C_{\rho,1} - C_{\rho,\mu}]$ $(\rho = 1, 2, \ldots m-1)$. Führt man diese Betrachtung schließlich auch für (47″) durch und ersetzt die $C_{\rho,1}$ mit Hilfe der soeben gewonnenen Differenzen $[C_{\rho,1} - C_{\rho,\mu}]$, so folgen $8(m-1)$ Gleichungen mit den Unbekannten $C_{\rho,\mu}$ $(\rho = 1, 2, \ldots m-1)$. Bestimmt man daraus diese letzteren, so

ergeben sich aus $[C_{\rho,\nu-1}-C_{\rho,\nu}]$ die $C_{\rho,1}$ und daraus mit Hilfe der $[C_{\rho,\nu-1}-C_{\rho,\nu}]$ die übrigen Integrationskonstanten[7]). Bei diesem Rechnungsgang sind immer $8(m-1)$ lineare Gleichungen mit ebensovielen Unbekannten aufzulösen.

Sind die Belastungen alle stetig, so werden alle ΔR Null, so daß alle Absolutglieder der Zwischenbedingungen verschwinden, weshalb auch alle $\Delta X_n^{(\beta)}$ $(\beta=0,1,2,3,4,5,6,8)$ den Wert Null annehmen. Die Randbedingungen für stetige Belastungen lauten also

$$X_n^{(\beta)}(\varphi_1+2\pi)=X_n^{(\beta)}(\varphi_1); \quad (n=1,2,\ldots m-1); \quad (\beta=0,1,2,3,4,5,6,8). \tag{48}$$

was für jedes φ_1 gelten muß. Zweckmäßig setzt man $\varphi_1=0$.

Sind die Spanten vollkommen starr, so werden die Bedingungen (45c–h) trivial und es liefern nur die (45a, b) effektive Rechnungsansätze, was aber auch genügt, da in diesem Falle die (39) nur vom 2. Grade sind. Für stetige Belastungen nehmen daher in (48) die β nur die Werte 0 und 2 an.

Nach diesen Methoden kann man für beliebige Belastungen das exakte Integral bestimmen. Ist hierbei die Anzahl der Spanten und Sektionen gering, so kann man die damit verbundene Rechenarbeit noch bewältigen. Im gegenteiligen Falle ist es zweckmäßig, die (39) nach dem nächsten Abschnitt umzuformen.

Man ersieht aus diesen Betrachtungen, daß eine Membrane durch den Einbau von biegesteifen Spanten befähigt wird, auch unstetige Lasten durch reine Membranenwirkung — also ohne Heranziehung der örtlichen Schalenwirkung — aufnehmen zu können. Die Unstetigkeiten, welche in der unversteiften Haut auftreten würden, lösen bei den Schubflüssen τ_n sprunghafte Änderungen aus, die endlich in den biegesteifen Versteifungsringen so ausgeglichen werden, daß Trennungen, Kanten und Ecken bei den Verformungsflächen nicht mehr auftreten. Durch den Einbau von Ringsteifen wird also das Tragverhalten so grundsätzlich verbessert, daß bei unstetigen Belastungen zur Herstellung der Tragfähigkeit eine örtliche Heranziehung der praktisch immer vorhandenen Schalenwirkung nicht mehr unbedingt notwendig ist, letztere nunmehr als zusätzliche Sicherheit gewertet werden kann. Hiervon sind allerdings örtlich unendlich konzentrierte Belastungen, sofern sie unmittelbar auf die Membrane und nicht direkt auf eine Spante einwirken, ausgeschlossen.

d) Vereinfachung der Grundgleichungen

Zu diesem Zwecke führen wir durch die Transformation

$$X_\nu=-\frac{Y_{\nu-1}}{\Delta_{\nu,\nu-1}}+\frac{Y_\nu}{\Delta_{\nu,\nu-1}}+\frac{Y_\nu}{\Delta_{\nu+1,\nu}}-\frac{Y_{\nu+1}}{\Delta_{\nu+1,\nu}}; \quad X''_\nu=-\frac{Y''_{\nu-1}}{\Delta_{\nu,\nu-1}}+\frac{Y''_\nu}{\Delta_{\nu,\nu-1}}+\frac{Y''_\nu}{\Delta_{\nu+1,\nu}}-\frac{Y''_{\nu+1}}{\Delta_{\nu+1,\nu}}$$
$$\nu=1,2,\ldots m-1 \tag{49a, b}$$

[7]) Man kann die Auflösung der Zwischenbedingungen auch ersparen, wenn man die (47′) unmittelbar in die Zwischenbedingungen einsetzt. Der übrige Vorgang bleibt derselbe.

mit den beiden, zunächst vorhandenen Randbedingungen

$$Y_0 = Y_{+1} \equiv 0 \tag{50}$$

die neue Unbekannte Y_ν ein, d. h. wir setzen die (49a, b) in die (39) ein. Dabei soll der Einsatz der 1. Wellen als erledigt gelten, so daß nach (40) die Absolutglieder nur mehr $-\Omega_n$ betragen. Beachtet man dabei die (14), so erhalten wir für die m—1 Unbekannten Y_n auch m—1 Gleichungen, in welchen die Beiwerte, die unterhalb der Hauptdiagonale der Matrix liegen, bis auf die der letzteren unmittelbar anliegenden verschwinden (Fig. 7). Die rechten Seiten bleiben bei dieser Transformation noch unverändert. Bezeichnen wir diese Zwischenergebnisse vorübergehend mit G_n und bilden die linearen Ausdrücke

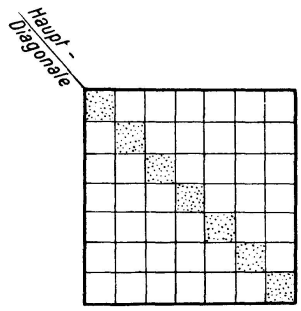

Fig. 7

$$(G_{n-1} - G_n) : \Delta_{n,n-1} - (G_n - G_{n+1}) : \Delta_{n+1,n}, \tag{51}$$

so erhalten wir bei Beachtung der Relation (15) ein 3-gliederiges System, welches mit den Bezeichnungen der (13a, b, c) die Form

$$\begin{aligned}
&Y''_{n-1}\left(-\frac{\vartheta''_{n-1,n-2}}{\Delta_{n-1,n-2}} + \frac{\vartheta''_{n-1,n-1}}{\Delta_{n-1,n-2}} + \frac{\vartheta''_{n-1,n-1}}{\Delta_{n,n-1}} - \frac{\vartheta''_{n-1,n}}{\Delta_{n,n-1}}\right) : \Delta_{n,n-1} \\
&+ Y_{n-1}\left(-\frac{\vartheta'_{n-1,n-2}}{\Delta_{n-1,n-2}} + \frac{\vartheta'_{n-1,n-1}}{\Delta_{n-1,n-2}} + \frac{\vartheta'_{n-1,n-1}}{\Delta_{n,n-1}} - \frac{\vartheta'_{n-1,n}}{\Delta_{n,n-1}}\right) : \Delta_{n,n-1} \\
&+ Y''_n\left[\left(-\frac{\vartheta''_{n-1,n-1}}{\Delta_{n,n-1}} + \frac{\vartheta''_{n-1,n}}{\Delta_{n,n-1}} + \frac{\vartheta''_{n-1,n}}{\Delta_{n+1,n}} - \frac{\vartheta''_{n-1,n-1}}{\Delta_{n+1,n}}\right.\right. \\
&\qquad \left. + \frac{\vartheta''_{n,n-1}}{\Delta_{n,n-1}} - \frac{\vartheta''_{n,n}}{\Delta_{n,n-1}} - \frac{\vartheta''_{n,n}}{\Delta_{n+1,n}} + \frac{\vartheta''_{n,n+1}}{\Delta_{n+1,n}}\right) : \Delta_{n,n-1} \\
&\qquad + \left.\left(+\frac{\vartheta''_{n,n-1}}{\Delta_{n,n-1}} - \frac{\vartheta''_{n,n}}{\Delta_{n,n-1}} - \frac{\vartheta''_{n,n}}{\Delta_{n+1,n}} - \frac{\vartheta''_{n,n+1}}{\Delta_{n+1,n}}\right) : \Delta_{n+1,n}\right] \\
&+ Y_n\left[\left(-\frac{\vartheta'_{n-1,n-1}}{\Delta_{n,n-1}} + \frac{\vartheta'_{n-1,n}}{\Delta_{n,n-1}} + \frac{\vartheta'_{n-1,n}}{\Delta_{n+1,n}} - \frac{\vartheta'_{n-1,n+1}}{\Delta_{n+1,n}}\right.\right. \\
&\qquad \left. + \frac{\vartheta'_{n,n-1}}{\Delta_{n,n-1}} - \frac{\vartheta'_{n,n}}{\Delta_{n,n-1}} - \frac{\vartheta'_{n,n}}{\Delta_{n+1,n}} + \frac{\vartheta'_{n,n+1}}{\Delta_{n+1,n}}\right) : \Delta_{n,n-1} \\
&\qquad + \left.\left(+\frac{\vartheta'_{n,n-1}}{\Delta_{n,n-1}} - \frac{\vartheta'_{n,n}}{\Delta_{n,n-1}} - \frac{\vartheta'_{n,n}}{\Delta_{n+1,n}} + \frac{\vartheta'_{n,n+1}}{\Delta_{n+1,n}}\right) : \Delta_{n+1,n}\right] \\
&+ Y''_{n+1}\left(-\frac{\vartheta''_{n-1,n}}{\Delta_{n,n-1}} + \frac{\vartheta''_{n,n}}{\Delta_{n,n-1}} + \frac{\vartheta''_{n,n}}{\Delta_{n+1,n}} - \frac{\vartheta''_{n+1,n}}{\Delta_{n+1,n}}\right) : \Delta_{n+1,n} \\
&+ Y_{n+1}\left(-\frac{\vartheta'_{n-1,n}}{\Delta_{n,n-1}} + \frac{\vartheta'_{n,n}}{\Delta_{n,n-1}} + \frac{\vartheta'_{n,n}}{\Delta_{n+1,n}} - \frac{\vartheta'_{n+1,n}}{\Delta_{n+1,n}}\right) : \Delta_{n+1,n} \\
&= -\frac{\Omega_{n-1}}{\Delta_{n,n-1}} + \frac{\Omega_n}{\Delta_{n,n-1}} + \frac{\Omega_n}{\Delta_{n+1,n}} - \frac{\Omega_{n+1}}{\Delta_{n+1,n}}
\end{aligned} \tag{52}$$

annimmt. Setzt man $n=2$ und beachtet die Randbedingung (50), so erhalten wir die obere Randgleichung, die nur die Unbekannten Y_2 und Y_3 enthält. Da jedoch hierbei $\Omega_1 \neq 0$ wird, lautet hiefür die rechte Seite noch

$$-\frac{\Omega_1}{\Delta_{2,1}}+\frac{\Omega_2}{\Delta_{2,1}}+\frac{\Omega_2}{\Delta_{3,2}}-\frac{\Omega_3}{\Delta_{3,2}}.$$

Die der Einspannstelle anliegenden Randgleichungen erhält man hingegen aus

$$(G_{m-2}-G_{m-1}):\Delta_{m-1,m-2}-G_{m-1}:\Delta_{m,m-1} \tag{51a}$$

und

$$G_{m-1}:\Delta_{m,m-1}, \tag{51b}$$

was sich auch aus (51) ergibt, indem man $n=m-1$, $n=m$ setzt und bedenkt, daß G_m und G_{m+1} gar nicht existiert. Es wird also mit den Bezeichnungen der (13a, b, c)

$$\begin{aligned}
&Y''_{m-2}\left(-\frac{\vartheta''_{m-2,m-3}}{\Delta_{m-2,m-3}}+\frac{\vartheta''_{m-2,m-2}}{\Delta_{m-2,m-3}}+\frac{\vartheta''_{m-2,m-2}}{\Delta_{m-1,m-2}}-\frac{\vartheta''_{m-2,m-1}}{\Delta_{m-1,m-2}}\right):\Delta_{m-1,m-2}\\
&+Y_{m-2}\left(-\frac{\vartheta'_{m-2,m-3}}{\Delta_{m-2,m-3}}+\frac{\vartheta'_{m-2,m-2}}{\Delta_{m-2,m-3}}+\frac{\vartheta'_{m-2,m-2}}{\Delta_{m-1,m-2}}-\frac{\vartheta'_{m-2,m-1}}{\Delta_{m-1,m-2}}\right):\Delta_{m-1,m-2}\\
&+Y''_{m-1}\left[\left(-\frac{\vartheta''_{m-2,m-2}}{\Delta_{m-1,m-2}}+\frac{\vartheta''_{m-2,m-1}}{\Delta_{m-1,m-2}}+\frac{\vartheta''_{m-2,m-1}}{\Delta_{m,m-1}}+\frac{\vartheta''_{m-1,m-2}}{\Delta_{m-1,m-2}}-\frac{\vartheta''_{m-1,m-1}}{\Delta_{m-1,m-2}}-\frac{\vartheta''_{m-1,m-1}}{\Delta_{m,m-1}}\right):\Delta_{m-1,m-2}\right.\\
&\qquad\left.+\left(+\frac{\vartheta''_{m-1,m-1}}{\Delta_{m-1,m-2}}-\frac{\vartheta''_{m-1,m-1}}{\Delta_{m-1,m-2}}-\frac{\vartheta''_{m-1,m-1}}{\Delta_{m,m-1}}\right):\Delta_{m,m-1}\right]\\
&+Y_{m-1}\left[\left(-\frac{\vartheta'_{m-2,m-2}}{\Delta_{m-1,m-2}}+\frac{\vartheta'_{m-2,m-1}}{\Delta_{m-1,m-2}}+\frac{\vartheta'_{m-2,m-1}}{\Delta_{m,m-1}}+\frac{\vartheta'_{m-1,m-2}}{\Delta_{m-1,m-2}}-\frac{\vartheta'_{m-1,m-1}}{\Delta_{m-1,m-2}}-\frac{\vartheta'_{m-1,m-1}}{\Delta_{m\ m-1}}\right):\Delta_{m-1,m-2}\right.\\
&\qquad\left.+\left(+\frac{\vartheta'_{m-1,m-2}}{\Delta_{m-1,m-2}}-\frac{\vartheta'_{m-1,m-1}}{\Delta_{m-1,m-2}}-\frac{\vartheta'_{m-1,m-1}}{\Delta_{m,m-1}}\right):\Delta_{m,m+1}\right]\\
&+Y''_{m}\left(-\frac{\vartheta''_{m-2,m-1}}{\Delta_{m-1,m-2}}+\frac{\vartheta''_{m-1,m-1}}{\Delta_{m-1,m-2}}+\frac{\vartheta''_{m-1,m-1}}{\Delta_{m,m-1}}\right):\Delta_{m,m-1}\\
&+Y_{m}\left(-\frac{\vartheta'_{m-2,m-1}}{\Delta_{m-1,m-2}}+\frac{\vartheta'_{m-1,m-1}}{\Delta_{m-1,m-2}}+\frac{\vartheta'_{m-1,m-1}}{\Delta_{m,m-1}}\right):\Delta_{m,m-1}=-\frac{\Omega_{m-2}}{\Delta_{m-1,m-2}}+\frac{\Omega_{m-1}}{\Delta_{m-1,m-2}}+\frac{\Omega_{m-1}}{\Delta_{m,m-1}}
\end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned}
&Y''_{m-1}\left(-\frac{\vartheta''_{m-1,m-2}}{\Delta_{m-1,m-2}}+\frac{\vartheta''_{m-1,m-1}}{\Delta_{m-1,m-1}}+\frac{\vartheta''_{m-1,m-1}}{\Delta_{m,m-1}}\right):\Delta_{m,m-1}\\
&+Y_{m-1}\left(-\frac{\vartheta'_{m-1,m-2}}{\Delta_{m-1,m-2}}+\frac{\vartheta'_{m-1,m-1}}{\Delta_{m-1,m-2}}+\frac{\vartheta'_{m-1,m-1}}{\Delta_{m,m-1}}\right):\Delta_{m,m-1}\\
&+Y''_{m}\left(-\frac{\vartheta''_{m-1,m-1}}{\Delta_{m,m-1}}\right):\Delta_{m,m-1}+Y_{m}\left(-\frac{\vartheta'_{m-1,m-1}}{\Delta_{m,m-1}}\right):\Delta_{m,m-1}=-\frac{\Omega_{m-1}}{\Delta_{m,m-1}}.
\end{aligned} \tag{54}$$

Man bekommt diese beiden Randgleichungen auch aus der (52), indem man darin zunächst $n=m-1$ bzw. $n=m$ setzt. Bedenkt man, daß das Tragwerk außerhalb der Einspannstelle nicht mehr existiert, so müssen wir noch

$$Y_{m+1}=0;\ \Omega_m=\Omega_{m+1}=0;\ \Delta_{m+1,m+1}=\infty \tag{55}$$

setzen. Außerdem verschwinden wegen $\int_{x_m}^{x_m} = 0$ für die Stelle m die Beiwerte der (12a, b), d. h., es gilt

$$\alpha_m = 0;\ \beta_m = 0;\ \gamma_m = 0\ (56\text{a});\ \alpha_{m+1} = 0;\ \beta_{m+1} = 0;\ \gamma_{m+1} = 0. \tag{56b}$$

Daraus folgt wieder, daß auch die ϑ'' und ϑ' verschwinden, in denen der Zeiger m oder $m+1$ vorkommt. (55), (56a, b) und (50) sind somit die Randbedingungen des eingespannten, versteiften Systems.

Die Beiwerte der Bestimmungsgleichungen (52) und deren Randgleichungen lassen sich noch bedeutend vereinfachen. Aus den (11a, b) ergibt sich zunächst

$$\vartheta''_{\rho\kappa} = -\frac{1}{E\sin^2\alpha}\int_{x_m}^{x_\rho}\left(1-\frac{x_\rho}{x}\right)\left(1-\frac{x_\kappa}{x}\right)\frac{dx}{x\,\vartheta_x};\quad \vartheta'_{\rho,\kappa} = \frac{2(1+\mu)}{E}x_\rho\int_{x_m}^{x_\rho}\frac{dx}{x^3\vartheta_x};\ \rho > \kappa. \tag{57a, b}$$

Damit erhalten wir für den Koeffizienten von Y''_{n-1} der (52)

$$\begin{aligned} A_{n-1} = \Bigg[&\frac{1}{\Delta_{n-1,n-2}}\int_{x_m}^{x_{n-1}}\left(1-\frac{x_{n-1}}{x}\right)\left(1-\frac{x_{n-2}}{x}\right)\frac{dx}{x\vartheta_x} - \frac{1}{\Delta_{n-1,n-2}}\int_{x_m}^{x_{n-1}}\left(1-\frac{x_{n-1}}{x}\right)^2\frac{dx}{x\vartheta_x} \\ &- \frac{1}{\Delta_{n,n-1}}\int_{x_m}^{x_{n-1}}\left(1-\frac{x_{n-1}}{x}\right)^2\frac{dx}{x\vartheta_x} + \frac{1}{\Delta_{n,n-1}}\int_{x_m}^{x_{n-1}}\left(1-\frac{x_{n-1}}{x}\right)\left(1-\frac{x_n}{x}\right)\frac{dx}{x\vartheta_x} \\ &+ \frac{1}{\Delta_{n,n-1}}\int_{x_{n-1}}^{x_n}\left(1-\frac{x_{n-1}}{x}\right)\left(1-\frac{x_n}{x}\right)\frac{dx}{x\vartheta_x}\Bigg] : E\sin^2\alpha\,\Delta_{n,n-1}. \end{aligned} \tag{58}$$

Dabei haben wir für das letzte Glied $\vartheta''_{n-1,n}$ das Integrationsintervall $[x_m, x_n]$ in $[x_m, x_{n-1}]$ und $[x_{n-1}, x_n]$ zerlegt. Da nun die ersten 4 Integrale gleiche Grenzen haben, kann man sie zu einem vereinigen, dessen Integrant

$$\left(1-\frac{x_{n-1}}{x}\right)\left[\frac{1}{\Delta_{n-1,n-2}}\left(1-\frac{x_{n-2}}{x}-1+\frac{x_{n-1}}{x}\right)+\frac{1}{\Delta_{n,n-1}}\left(-1+\frac{x_{n-1}}{x}+1-\frac{x_n}{x}\right)\right]\frac{dx}{x\vartheta_x}$$

verschwindet, so daß nur

$$A_n = \frac{1}{E\sin^2\alpha\cdot\Delta^2_{n,n-1}}\int_{x_{n-1}}^{x_n}\left(1-\frac{x_{n-1}}{x}\right)\left(1-\frac{x_n}{x}\right)\frac{dx}{x\vartheta_x} \tag{59}$$

übrig bleibt.

Eine analoge Betrachtung ergibt den Beiwert von Y_{n-1} zu

$$B_{n-1} = -\frac{2(1+\mu)\pi\sin^3\alpha}{E\,\Delta^2_{n,n-1}}x_{n-1}\cdot x_n\int_{x_{n-1}}^{x_n}\frac{dx}{J_x}. \tag{60}$$

Für den Beiwert von Y_n'' ermitteln wir zunächst den Wert seiner 1. Zeile. Wir erhalten nach Multiplikation mit $E\sin^2\alpha\cdot\Delta_{n,n-1}$

$$-\left\{\frac{1}{\Delta_{n,n-1}}\left[\int_{x_m}^{x_{n-1}}\left(1-\frac{x_{n-1}}{x}\right)^2\frac{dx}{x\vartheta_x}-\int_{x_m}^{x_{n-1}}\left(1-\frac{x_{n-1}}{x}\right)\left(1-\frac{x_n}{x}\right)\frac{dx}{x\vartheta_x}\right.\right.$$

$$\left.-\int_{x_{n-1}}^{x_n}\left(1-\frac{x_{n-1}}{x}\right)\left(1-\frac{x_n}{x}\right)\frac{dx}{x\vartheta_x}\right]$$

$$+\frac{1}{\Delta_{n+1,n}}\left[-\int_{x_{n-1}}^{x_n}\left(1-\frac{x_{n-1}}{x}\right)\left(1-\frac{x_n}{x}\right)\frac{dx}{x\vartheta_x}-\int_{x_m}^{x_{n-1}}\left(1-\frac{x_{n-1}}{x}\right)\left(1-\frac{x_n}{x}\right)\frac{dx}{x\vartheta_x}\right.$$

$$+\int_{x_m}^{x_{n-1}}\left(1-\frac{x_{n-1}}{x}\right)\left(1-\frac{x_{n+1}}{x}\right)\frac{dx}{x\vartheta_x}+\int_{x_{n-1}}^{x_n}\left(1-\frac{x_{n-1}}{x}\right)\left(1-\frac{x_{n+1}}{x}\right)\frac{dx}{x\vartheta_x}$$

$$\left.\left.+\int_{x_n}^{x_{n+1}}\left(1-\frac{x_{n-1}}{x}\right)\left(1-\frac{x_{n+1}}{x}\right)\frac{dx}{x\vartheta_x}\right]\right\}. \tag{61}$$

Dabei haben wir wieder die Integrationsintervalle $[x_m, x_n]$ und $[x_m, x_{n+1}]$ in $[x_m, x_{n-1}]$, $[x_{n-1}, x_n]$ und in $[x_m, x_{n-1}]$, $[x_{n-1}, x_n)$, $[x_n, x_{n+1}]$ zerlegt. Faßt man wieder die Integrale gleicher Grenzen zusammen, so ergeben die ersten 4 Summanden von (61) wie bei (58) wieder Null und der Rest zieht sich auf

$$\frac{1}{E\sin^2\alpha}\left[-\frac{1}{\Delta_{n,n-1}^2}\int_{x_{n-1}}^{x_n}\left(1-\frac{x_{n-1}}{x}\right)^2\frac{dx}{x\vartheta_x}+\frac{1}{\Delta_{n,n-1}\Delta_{n+1,n}}\int_{x_n}^{x_{n+1}}\left(1-\frac{x_{n-1}}{x}\right)\left(1-\frac{x_{n+1}}{x}\right)\frac{dx}{x\vartheta_x}\right] \tag{62}$$

zusammen, wenn man bedenkt, daß

$$\left[-\frac{1}{\Delta_{n,n-1}}-\frac{1}{x}+\frac{x_n}{x\Delta_{n,n-1}}\right]=-\frac{1}{\Delta_{n,n-1}}\left(1-\frac{x_{n-1}}{x}\right)$$

ist. Beachtet man bei Auswertung der 2. und 3. Zeile, daß die Indices derselben aus denjenigen des Beiwertes von Y''_{-1} durch Vermehrung um 1 entstehen, so erhalten wir

$$-\frac{1}{E\sin^2\alpha}\left[\frac{1}{\Delta_{n,n-1}\Delta_{n+1,n}}\int_{x_n}^{x_{n+1}}\left(1-\frac{x_n}{x}\right)\left(1-\frac{x_{n+1}}{x}\right)\frac{dx}{x\vartheta_x}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\Delta_{n+1,n}^2}\int_{x_n}^{x_{n+1}}\left(1-\frac{x_n}{x}\right)\left(1-\frac{x_{n+1}}{x}\right)\frac{dx}{x\vartheta_x}\right]. \tag{63}$$

Fassen wir in den (62) und (63) wieder die Integrale gleicher Grenzen zusammen, so wird der Beiwert von Y_n''

$$A_n=-\frac{1}{E\sin^2\alpha}\left[\frac{1}{\Delta_{n,n-1}^2}\int_{x_{n-1}}^{x_n}\left(1-\frac{x_{n-1}}{x}\right)^2\frac{dx}{x\vartheta_x}+\frac{1}{\Delta_{n+1,n}^2}\int_{x_n}^{x_{n+1}}\left(1-\frac{x_{n+1}}{x}\right)^2\frac{dx}{x\vartheta_x}\right],$$

wenn man beachtet, daß nun auch

$$\left[-\frac{1}{\Delta_{n+1,n}}+\frac{1}{x}+\frac{x_n}{x\Delta_{n+1,n}}\right]=-\frac{1}{\Delta_{n+1,n}}\left(1-\frac{x_{n+1}}{x}\right)$$

ist.

Eine analoge Betrachtung liefert den Beiwert von Y_n zu

$$B_n=\frac{2(1+\mu)}{E}\left[\frac{x_{n-1}^2}{\Delta_{n,n-1}^2}\int\limits_{x_{n-1}}^{x_n}\frac{dx}{x^3\vartheta_x}+\frac{x_{n+1}^2}{\Delta_{n+1,n}^2}\int\limits_{x_n}^{x_{n+1}}\frac{dx}{x^3\vartheta_n}\right]. \tag{64}$$

Die übrigen Koeffizienten folgen aus den bisherigen durch Indexvermehrungen. Die Mittelgleichungen von (39) nehmen nach einigen weiteren Umformungen schließlich die Form an

$$\begin{aligned}
&M''_{n-1}\cdot\frac{a_{n-1}}{\Delta_{n,n-1}^2}\int\limits_{x_{n-1}}^{x_n}(x-x_{n-1})(x-x_n)\frac{dx}{J_x}-M_{n-1}\cdot\frac{2(1+\mu)}{\Delta_{n,n-1}^2}a_{n-1}^2\cdot a_n\int\limits_{x_{n-1}}^{x_n}\frac{dx}{J_x}\\
&-M''_n\left[\frac{a_n}{\Delta_{n,n-1}^2}\int\limits_{x_{n-1}}^{x_n}(x-x_{n-1})^2\frac{dx}{J_x}+\frac{a_n}{\Delta_{n+1,n}^2}\int\limits_{x_n}^{x_{n+1}}(x-x_{n+1})^2\frac{dx}{J_x}\right]\\
&+M_n\cdot 2(1+\mu)\left[\frac{a_{n-1}^2\cdot a_n}{\Delta_{n,n-1}^2}\int\limits_{x_{n-1}}^{x_n}\frac{dx}{J_x}+\frac{a_n a_{n+1}^2}{\Delta_{n+1,n}^2}\int\limits_{x_n}^{x_{n+1}}\frac{dx}{J_x}\right]\\
&+M''_{n+1}\frac{a_{n+1}}{\Delta_{n+1,n}^2}\int\limits_{x_n}^{x_{n+1}}(x-x_n)(x-x_{n+1})\frac{dx}{J_x}-M_{n+1}\cdot\frac{2(1+\mu)}{\Delta_{n+1,n}^2}a_n\cdot a_{n+1}^2\int\limits_{x_n}^{x_{n+1}}\frac{dx}{J_x}\\
&=\frac{E}{\pi}\left[-\frac{\Omega_{n-1}}{\Delta_{n,n-1}}+\frac{\Omega_n}{\Delta_{n,n-1}}+\frac{\Omega_n}{\Delta_{n+1,n}}-\frac{\Omega_{n+1}}{\Delta_{n+1,n}}\right];\\
&\qquad J_x=\pi\vartheta_x x_n^3\sin^3\alpha;\quad a_n=x_n\sin\alpha;\quad M_n=\frac{1}{x_n}Y_n.
\end{aligned} \tag{65}$$

Die obere Randgleichung erhält man daraus, indem man $n=2$ setzt und die Randbedingung (50) berücksichtigt.

Wertet man die (53) und (54) auf dieselbe Weise aus, so erhalten wir die beiden Schlußgleichungen, welche sich auch aus (65) ergeben, indem man darin $n=m-1$ bzw. $n=m$ setzt, die Randbedingungen (55) berücksichtigt und beachtet, daß wegen (56b) alle $\int\limits_{x_{m+1}}^{x_{m+1}}$ in Wegfall kommen. Die linke Seite der vorletzten dieser beiden Schlußgleichungen ist 3-gliederig und hat dieselbe Gestalt wie in (65). Ihre rechte Seite ist jedoch der der (53) gleich. Die letzte der beiden Schlußgleichungen ist hingegen nur 2-gliederig und lautet

$$M''_{m-1}\frac{a_{m-1}}{\Delta^2_{m,m-1}}\int\limits_{x_{m-1}}^{x_m}(x-x_{m-1})(x-x_m)\frac{dx}{J_x}-M_m\cdot\frac{2(1+\mu)}{\Delta^2_{m,m+1}}a^2_{m-1}\cdot a_m\int\limits_{x_{m-1}}^{x_m}\frac{dx}{J_x}$$

$$-M''_m\frac{a_m}{\Delta^2_{m,m-1}}\int\limits_{x_{m-1}}^{x_m}(x-x_{m-1})^2\frac{dx}{J_x}+M_m\cdot\frac{2(1+\mu)}{\Delta^2_{m,m-1}}a^2_{m-1}\cdot a_m\int\limits_{x_{m-1}}^{x_m}\frac{dx}{J_x}=-\frac{E}{\pi}\cdot\frac{\Omega_{m-1}}{\Delta_{m,m-1}}. \quad (66)$$

Sind die Spanten vollkommen starr, so verschwinden in (40) bei den Ω_n die $R_{t,n}$, so daß in den (65) die rechten Seiten nur mehr lineare Funktionen der nur von den Belastungen abhängigen $R_{P,n}$ sind. Man kann also aus den so erhaltenen Bedingungen die Unbekannten M_n bestimmen. Es sind dabei simultane, lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit 3-gliederigen Formen zu lösen.

Sind hingegen die Spanten elastisch, so wenden wir auf die (65) und deren Randgleichungen wieder den Differentialoperator D an. Für die Absolutglieder wird dann bei Berücksichtigung der (40a, b)

$$D(\Omega_n) = -\Phi_{t,n}+D(R_{P,n}) \quad n=1,2,\ldots m-1. \quad (67)$$

Da nach (19a)

$$\Phi_{t,n} = -\Psi_{1,n}+\Psi_{2,n}$$

ist, ersieht man aus den (20a, b), daß in den $\Phi_{t,n}$ die X_n, X_n'' und X_n^{IV} enthalten sind. Übt man auf diese die durch (49a) und deren 2. und 4. Ableitung dargestellte Transformation aus, so erkennt man, daß dann in der rechten Seite der n-ten Gleichung von (65) die Y_{n-2}, Y_{n-1}, Y_n, Y_{n+1}, Y_{n+2} und deren 2. und 4. Ableitungen auftreten Es entstehen also Differentialgleichungen 8. Ordnung in 5-gliederiger Form, wobei deren Randgleichungen aus den zum System (65) gehörigen auf analoge Weise folgen. Diesen gesamten simultanen Gleichungssatz wollen wir mit (65′) bezeichnen.

Für die Bestimmung der zu (65′) gehörigen Integrationskonstanten bilden wir zunächst aus (49a) die Transformationsgleichung

$$\Delta X_\nu^{(\beta)} = -\frac{x_{\nu-1}\cdot\Delta M_{\nu-1}^{(\beta)}}{\Delta_{\nu,\nu-1}}+\frac{x_\nu\cdot\Delta M_\nu^{(\beta)}}{\Delta_{\nu,\nu-1}}+\frac{x_\nu\cdot\Delta M_\nu^{(\beta)}}{\Delta_{\nu+1,\nu}}-\frac{x_{\nu+1}\cdot\Delta M_{\nu+1}^{(\beta)}}{\Delta_{\nu+1,\nu}}. \quad (49')$$

Kehren wir diese für $\beta=1$ unter Bedachtnahme auf (50) um, so ergeben sich die $\Delta M_n'$ als lineare Funktionen der $\Delta X_n'$. Setzt man in diese die zu den Randbedingungen (45a, b) gehörigen Lösungen (39″) ein, so folgen die $\Delta M_n'$ als Funktionen der vorgegebenen Δs_P. Analog ergeben sich die $\Delta M_n''$. Die (65) bzw. (65′) stellen mit ihren 1., 2., 3., 4. und 6. Ableitungen die restlichen, zu den Randbedingungen (45c, d, e, f, g, h) gehörigen Zwischenbedingungen dar, aus denen entsprechend dem Absatz c) die noch fehlenden ΔM_n, $\Delta M_n'''$, ΔM_n^{IV}, ΔM_n^{V}, ΔM_n^{VI} und $\Delta M_n^{\mathrm{VIII}}$ gefunden werden können. Hierbei haben wir bei starren Spanten mit 3-gliederigen und bei elastischen Spanten mit

5-gliederigen Gleichungsgruppen zu operieren. Dieser Rechnungsgang ist für jede Sektionsgrenze durchzuführen. Nachdem man das allgemeine Integral für (65) bzw. (65′) aufgestellt hat, gestaltet sich der restliche Rechnungsgang analog Absatz c). Dabei werden die $8\mu(m-1)$ Gleichungen wieder in μ Gruppen mit je $8(m-1)$ Unbekannten zerspalten. Da in jeder n-ten Gleichung die Beiwerte von X_n gegenüber den anderen Beiwerten dominieren, kann man sich bei der Auflösung dieser Systeme der Iterationsverfahren bedienen.

Mit dieser Umformung der Grundgleichungen ist auch eine bedeutende Vereinfachung der *charakteristischen Gleichung* des Systems verbunden.

Aus den M_n folgen nach Multiplikation mit x_n die Y_n, woraus sich aus (49a) bei Einhaltung der (50) endlich die Schubkräfte X_n und daraus die Schubflüsse τ_n ergeben.

e) Lösung mittelst Fourierscher Reihen

Die im Absatz c) beschriebene genaue Anpassung des allgemeinen Integrals an die Randbedingungen ist selbst bei einer geringen Zahl von Spanten und Unstetigkeitsstellen auch bei Benutzung der vereinfachten Grundgleichungen noch umständlich und führt meist zu unübersichtlichen Endformeln. Man entwickelt dann zunächst die Restfunktionen $R_{P,n}$ und $R_{t,n}$ nach (40a, b, c, d, e) in Fouriersche Reihen. Setzt man das sin-Glied der k. Welle in die (39) ein, so ergibt sich nach Kürzung durch $\sin k\varphi$ der Satz algebraischer, linearer Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n}[(\alpha_n+x_\nu\cdot\beta_n)k^2-x_\nu\cdot\gamma_n]T_{\nu,k}+\sum_{\nu=n+1}^{\nu=m-1}[(\alpha_\nu+x_n\cdot\beta_\nu)k^2-x_n\cdot\gamma_\nu]T_{\nu,k}-\frac{A_{n,k}}{k^2(k^2-1)^2}T_{n,k}$$
$$=D_{n,k}+B_{n,k}\cdot\overline{P}_{n,k}+C_{n,k}\cdot T_{p;n,k};\ (n=1,2,\ldots m-1). \qquad (68a)$$

Zum Glied $\overline{T}_{\nu,k}\cdot\cos k\varphi$ gehört ein analoger Gleichungssatz (68b) mit den Unbekannten $\overline{T}_{\nu,k}$ und den rechten Seiten $\overline{D}_{n,k}-B_{n,k}\cdot P_{n,k}+C_{n,k}\cdot\overline{T}_{p,n,k}$. Aus (68a) und (68b), deren Matrixen einander gleich sind, erhalten wir also die Beiwerte $T_{n,k}$ und $\overline{T}_{n,k}$ der Schubkräfte durch algebraische Auflösungsprozesse. Benutzt man die umgestalteten Grundgleichungen (65) mit ihren Randformen, so werden (68a, b) bei starren Spanten 3-gliederig und bei elastischen Spanten 5-gliederig.

Wendet man diesen Rechnungsgang auf sämtliche Glieder von (33a) an, so erhalten wir die X_n in Form von Fourierschen Reihen, deren Summenwerte mit den Funktionswerten der nach Absatz c) ermittelten exakten Lösungen bis auf die Unstetigstellen übereinstimmen, an welchen der Reihenwert gleich dem arithmetischen Mittel aus links- und rechtsseitigem exakten Funktionswert ist. Da jede Welle die Periode 2π hat, sind die Randbedingungen (48) für jedes Glied von (33a) erfüllt, so daß die so erhaltenen Ergebnisse, bei

Bedachtnahme auf die obigen Einschränkungen, als exakte Integrale der Grundgleichungen gelten können[8]).

Der Vollständigkeit halber weisen wir noch darauf hin, daß auch hier bei allen Gleichungssystemen, und zwar besonders bei den 3-gliederigen und 5-gliederigen Formen, in jeder Gleichung ein Beiwert gegenüber den anderen dominiert, so daß die Auflösungen auch durch Iteration gefunden werden können.

Die Konvergenz des gesamten Verfahrens wächst mit steigendem k ganz bedeutend.

f) Fundamentbewegungen

Wir erinnern zunächst daran, daß entsprechend den Ausführungen zu (7″) r_m hierbei keinen Einfluß ausüben kann.

Der Rechnungsgang gestaltet sich genau so wie in den Absätzen b) und c) dieses Abschnittes, nur muß man an Stelle der von den äußeren Belastungen p_s, p_t, und p herrührenden Verschiebungen $t_{p,n}$ der Kragmembrane die durch die Fundamentbewegungen s_m und t_m in Höhe eines jeden Spantenkreises auftretenden tangentiellen Verschiebungen

$$t_{st,n} = \frac{x_m - x_n}{x_m \sin\alpha} s'_m + \frac{x_n}{x_m} t_m; \quad (n = 1, 2, \ldots m-1) \tag{69}$$

setzen.

Bedient man sich wieder der Fourierschen Reihen, so muß man, da s_m in ihrer 1. Ableitung auftritt, jeweils ein cos-Glied der s_m mit einem sin-Glied der t_m zusammenfassen und umgekehrt.

Es ist leicht einzusehen, daß durch die 1. Wellen keine Schubflüsse τ_n entstehen.

Zusammenfassung

Mit den in dieser Abhandlung entwickelten Verfahren kann man jede kreiskegelförmige, zentralsymmetrisch geformte, durch beliebig viele starre oder elastische Spanten versteifte Membrane mit veränderlicher Wandstärke für unsymmetrische, stetige oder unstetige Belastungen berechnen. Nach einer genauen Erläuterung der Randbedingungen des Problems wird für die Grundgleichungen, die in Form von linearen, simultanen Differentialgleichungen 2. oder 8. Ordnung — je nachdem die Spanten starr oder elastisch sind — auftreten, die Anpassung der allgemeinen Integrale an die obigen Randbedingungen für unstetige oder stetige Belastungen generell durchgeführt.

[8]) Näheres, insbesondere bzgl. des Konvergenzbeweises, analog wie in der Abhandlung des Verfassers: «Die genaue Membranentheorie der prismatischen Faltwerke.» Int. Ver. f. Brückenbau und Hochbau, Abh. XI. Seite 129 (1951).

Diese Grundgleichungen können in 3- bzw. 5-gliederige Formen umgewandelt werden, wodurch die Berechnung beim Vorhandensein beliebig vieler Spanten praktisch überhaupt erst ermöglicht wird.

Für verwickelte, unstetige Belastungen ist es immer zweckmäßig, sich der Fourierschen Reihen zu bedienen. Dadurch wird die Rechnung schematischer, so daß man ungeschultere Hilfskräfte mit Erfolg einsetzen kann.

Ist die Veränderlichkeit der Wandstärke analytisch festgelegt, so kann man die auftretenden Koeffizienten ein für allemal in zweidimensionalen Tabellen festlegen.

Durch die Aussteifung mittelst Spanten wird das Tragverhalten grundsätzlich verbessert.

Zwischen diesen Tragwerken und den gewöhnlichen Durchlaufträgern besteht eine enge Verwandtschaft, die besonders in den umgeformten Grundgleichungen erkenntlich wird.

Bestimmt man auch die radialen Verschiebungen r_m, so kann man die durch diese verursachte, aber nach beiden Seiten hin rasch abklingende Schalenbiegung nach den bekannten Iterationsverfahren näherungsweise bestimmen.

Wählt man das hier ausführlich behandelte „Kragwerk" als Grundsystem, so kann man daraus die Theorie der beliebig gestützten Balken- und Durchlaufträger von kreiskegelförmiger Form entwickeln.

Summary

With the procedure developed in this paper any axially symmetrical right-circular conical membrane of variable wall-thickness stiffened with any number of rigid or elastic ribs can be computed for unsymmetrical continuous or dis-continuous loading. For any exact interpretation of the boundary conditions of the problem, the adjustment of the general integral to the upper edge conditions for continuous or dis-continuous loading is carried out in all cases from the basic equations which appear in the form of linear simultaneous differential equations of the second or the eighth order according to whether the ribs are rigid or elastic.

These basic equations can be transformed into three- or five-linked forms whereby the calculation is for the first time made generally practicable in the case of any desired number of ribs.

For complicated dis-continuous loads, it is always desirable to make use of Fourier series. Thereby the calculation becomes orderly so that irregular auxiliary forces can be successfully brought in.

If the variation of wall stiffness is analytically established, the relevant coefficients can be laid down once for all in two-dimensional tables.

The load-bearing capacity is basically improved by stiffening the middlemost ribs.

Between this type of girder and the ordinary continuous girders, there is a close relationship which is especially recognisable in the transformed basic equations.

If these should be needed to find the radial displacements r_n, they can be approximately determined by known methods of iteration, as can be the shell-bending produced by them, though rapidly diminishing on both sides.

If the "Collar-work" so fully treated here, is chosen as the basic system, the theory can be developed from it for any braced girder-work or continuous girder of right-circular conical form.

Résumé

Le procédé ici exposé permet de calculer toute membrane d'épaisseur variable, de forme conique circulaire à symétrie axiale, renforcée par un nombre arbitraire de membrures rigides ou élastiques, continues ou discontinues et dissymétriques. Après avoir présenté d'une manière précise les données marginales du problème, l'auteur adapte l'intégrale générale aux conditions marginales ci-dessus, pour des charges continues ou discontinues, pour les équations de base qui se présentent sous la forme d'équations différentielles linéaires simultanées, du deuxième ou du huitième ordre, suivant que les membrures sont rigides ou élastiques. Ces équations de base peuvent être transformées en relations à 3 ou 5 termes, seule disposition permettant un calcul pratique, lorsque la membrane comporte un nombre arbitraire de membrures.

Dans le cas des charges complexes non continues, il est toujours opportun d'utiliser les séries de Fourier. Le calcul est ainsi rendu plus schématique, ce qui permet de faire appel à des calculateurs auxiliaires non spécialisés.

Si la variabilité de l'épaisseur de la paroi est définie analytiquement, les coefficients qui interviennent peuvent être déterminés une fois pour toutes dans des tableaux à deux dimensions.

Le renforcement par des membrures améliore essentiellement les possibilités de charge.

Il existe une parenté étroite entre ces dispositifs porteurs et les poutres continues habituelles, parenté qui est particulièrement mise en évidence dans les équations de base transformées.

En déterminant également les déformations radiales r_m, on peut calculer d'une manière approchée, par les méthodes connues de récurrence, la flexion qui en résulte, mais qui s'atténue rapidement des deux côtés.

En choisissant comme système de base le dispositif en encorbellement, largement traité ici, on peut en déduire la théorie des poutres continues de forme conique circulaire, avec appuis arbitraires.