Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 13 (1953)

Artikel: Instabilité de l'équilibre des voûtes polygonales
Autor: Giangreco, Elio
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-13198

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 06.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Instabilité de l'équilibre des voûtes polygonales

Das Unstabilwerden von Faltwerken

Instability of equilibrium of polygonal arches

Prof. Dr. Ing. Elio Giangreco, Napoli

I.

Dans un précédent travail[1]), j'ai envisagé le problème de la détermination des charges critiques dans les voûtes polygonales en appliquant la méthode habituelle de la membrane. Cette étude, comme je l'ai déjà signalé, constitue un premier essai de recherche dans un domaine qui ne me semble pas, jusqu'à ce jour, suffisamment développé. Ces genres de voûtes ont, par contre, une importance sans cesse croissante dans la Technique Moderne de Construction, d'autant plus qu'elles sont les sœurs jumelles des voûtes minces pour lesquelles le même problème a été largement traité[2]).

Dans la présente étude, je me suis servi des considérations énergétiques en conformité du théorème de Dirichlet que je vais rappeler brièvement[3]).

„La condition nécessaire pour qu'un système ait la forme d'équilibre stable est que l'énergie potentielle totale E (somme de l'énergie totale élastique et de l'énergie de position) soit un minimum." C'est-à-dire que l'énergie E qui doit déjà satisfaire à la condition:

$$\delta_1 E = 0$$

---

[1]) V. Elio Giangreco. Instabilità nell'equilibrio delle strutture scatolari. Rend. Acc. Scienze fis. e mat. della Soc. Naz. di Scienze, Lettere e Arti in Napoli. Serie 4. Vol. XVII. 1950.

[2]) V. A. Galli. Stabilità nell'equilibrio d'una volta trave. Rend. Acc. di Scienze fis. e mat. della Soc. Reale di Napoli. Serie 4. Vol. XI. 1941—1942. — V. G. Krall. Moltiplicatore critico λ_{cr} d'alla distribuzione di carico su una volta autoportante. Rend. Acc. dei Lincei dic. 1946, gen. 1947. — V. Elio Giangreco. Stabilità dell'equilibrio delle volte sottili autoportanti. Atti dell'Istituto di Scienza delle Costruzioni. Università di Napoli. 4° II, febb. 1951.

[3]) Je pense que c'est là le seul moyen d'arriver à des résultats concrets en vue d'application pratique, étant donné que la méthode d'Euler n'a pu me conduire qu'à des formules laborieuses.

pour que le système soit en équilibre, doit encore satisfaire, en vertu du théorème de DIRICHLET, à la condition:

$$\delta_2 E > 0$$

pour que l'équilibre soit stable.

Par suite l'équation: $$\delta_2 E = 0 \tag{1}$$

est la condition de l'équilibre indifférent, c'est-à-dire la limite entre l'équilibre stable et l'équilibre instable. En appelant:

Φ l'énergie potentielle élastique;
L_2 le travail développé par les contraintes internes correspondantes de la forme d'équilibre pour les composantes du deuxième ordre de la déformation;
et L_2' le travail développé par les charges extérieures pour les composantes du deuxième ordre des déplacements;

on peut écrire avec la relation (1)

$$\delta_2 E = \Phi + \lambda (L_2 - L_2') = 0$$ [4])

dans laquelle λ est un coefficient de multiplication des charges assignées.

Pratiquement on fait varier la forme initiale d'équilibre à laquelle correspond l'énergie E de telle façon que la nouvelle forme d'équilibre soit très proche de la précédente[5]). A cet effet, on se sert des variations δu, δv, et δw des composantes des déplacements exprimées par séries de fonctions connues et satisfaisant aux conditions aux extrémités avec des coefficients inconnus. A cette nouvelle forme d'équilibre correspondra une énergie potentielle donnée par:

$$E_1 = E + \delta_1 E + \delta_2 E$$

Pour la condition de minimum $\delta_1 E_1 = 0$, correspondant à cette forme, ainsi qu'avec la condition $\delta_1 E = 0$, on arrive à l'équation:

$$\delta_1 (\delta_2 E) = \frac{\partial \delta_2 E}{\partial \delta u_i} d\delta u_i + \frac{\partial \delta_2 E}{\partial \delta v_i} d\delta v_i + \frac{\partial \delta_2 E}{\partial \delta w_i} d\delta w_i$$

ou:

$$\frac{\partial \delta_2 E}{\partial \delta u_i} = \frac{\partial \delta_2 E}{\partial \delta v_i} = \frac{\partial \delta_2 E}{\partial \delta w_i} = 0 \tag{1'}$$

---

[4]) V. KRALL. Stabilità dell'equilibrio elastico. Annali di matematica pura e applicata. Serie IV. Tomo XXIX. Ed. Zanichelli 1949.

[5]) V. DIRICHLET. Über die Stabilität des Gleichgewichts. Journ. f. r. u. angewandte Math. Bd. 32. 1846. — V. LIAPOUNOFF. Sur l'instabilité de l'équilibre dans certains cas où la fonction de force n'est pas maximum. Journ. de Liouville. Ve série 1897. — V. LEVI, Civita e Arnaldi. Meccanica Razionale. Vol. II. Parte I. Ed. Zanichelli 1926. — V. KRALL. Meccanica tecnica delle vibrazioni. Parte I. Ed. Zanichelli 1940.

qui, par la forme quadratique de E dans les coefficients inconnus, conduit à un système linéaire homogène dans ces coefficients. L'annulation du déterminant qui fournit la condition de compatibilité du système offre aussi l'équation de degré n dont les racines représentent les n valeurs critiques cherchées. La racine la plus petite est celle qui, pratiquement, nous intéresse.

II.

Pour ce qui a rapport à l'étude statique de ces voûtes, je pense qu'il n'est pas nécessaire de s'attarder sur une question déjà largement traitée[6]). Je rappelle seulement les deux hypothèses fondamentales ci-après:

1⁰ Que les feuilles ne doivent pas subir des déformations en se gauchissant.

2⁰ Que les efforts internes qui se transmettent pour deux feuilles contigues le long de l'arête commune, se réduisent seulement à un effort parallèle à cette même arête, c'est-à-dire, que la liaison de ces deux feuilles est équivalente à une réalisation au moyen de charnières.

La deuxième hypothèse est non seulement une simplification pour le calcul des efforts internes, mais elle est aussi très utile parce qu'elle nous fournit une valeur de la charge critique qui est plus petite que la valeur réelle pour la plus grande souplesse que cet aspect statique de la voûte présente par rapport aux liaisons effectives.

Convenons de numéroter les arêtes de 0 à n, à partir de l'un des deux bords dans le sens des aiguilles d'une montre. On a ainsi en correspondance n feuilles ou dalles et nous appelons $i^{\text{ème}}$ celle qui est comprise entre les arêtes $(i-1)^{\text{ème}}$ et $i^{\text{ème}}$ (fig. 1). Nous affecterons l'index i à toutes les grandeurs relatives à cette feuille (δ_i = épaisseur; h_i = hauteur; γ_i = angle aigu que fait

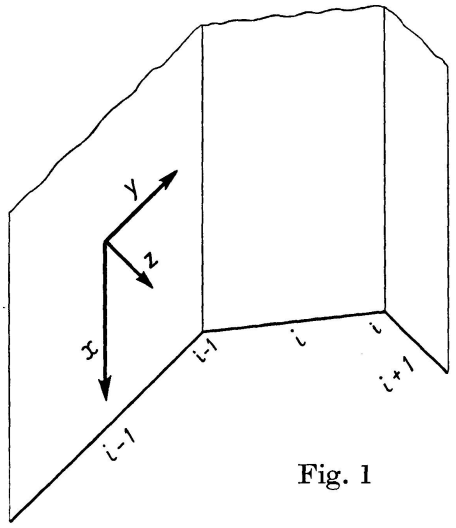


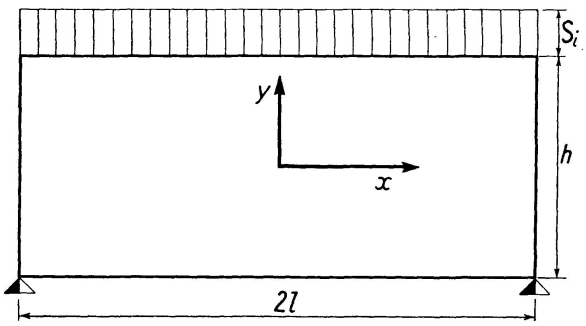
Fig. 1

[6]) V. W. Flügge. Statik und Dynamik der Schalen. Springer. Berlin 1937. — V. G. Krall. Questioni di matematica applicata. Ed. Zanichelli 1939. — V. O. Belluzzi. Scienza delle Costruzioni. Vol. III. Cap. XXIX. Ed. Zanichelli 1951.

la feuille $(i-1)^{\text{ème}}$ avec la feuille $i^{\text{ème}}$). On rapporte chaque feuille à un système d'axes de coordonnées rectangulaires $0x$, $0y$, $0z$ ayant son origine au centre de la feuille, ses axes $0x$ et $0y$ dans le plan même de la feuille, le premier dirigé suivant la longueur de la voûte, le second positif dans le sens croissant du numérotage des arêtes. L'axe des z, perpendiculaire au plan de la feuille, est positif s'il est dirigé vers l'intérieur de la voûte.

Supposons que les charges extérieures soient localisées et réparties sur les arêtes. Appelons F_i le vecteur de la force concentrée par unité de longueur de l'arête, $S_{i,i}$, $S_{i,i+1}$ ses composantes dans les plans de deux feuilles contigues i et $i+1$, T_i la force qui s'exerce par unité de longueur de l'arête $i^{\text{ème}}$ entre la feuille $i^{\text{ème}}$ et la feuille $(i+1)^{\text{ème}}$. De cette façon, une feuille isolée sera soumise à l'action d'une force $S_i = S_{i,i-1} - S_{i,i}$ par unité de longueur dans la direction de l'axe $0y$ et à une répartition de contraintes tangentielles T_{i-1} et T_i dans la direction de l'axe $0x$. Nous avons ainsi dans une section quelconque de la feuille:

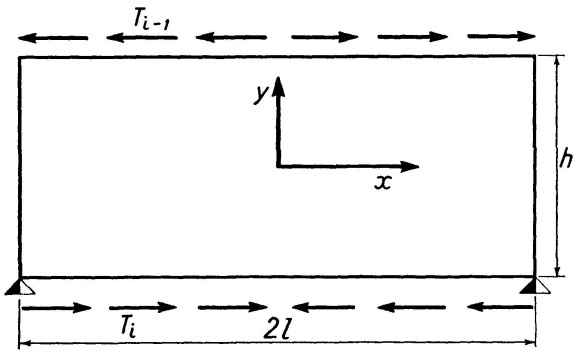
1⁰ Pour la charge uniformément répartie (fig. 2):



$$Q_i(x) = -S_i(x)$$
$$M_i(x) = S_i \frac{l^2 - x^2}{2} \tag{2}$$

Fig. 2

2⁰ Pour les efforts tangentiels variables linéairement (fig. 3):



$$N_i(x) = \int_0^x (T_{i-1} - T_i)\,dx \tag{3}$$
$$M_i(x) = -\frac{h_i}{2} \int_0^x (T_{i-1} + T_i)\,dx$$

Fig. 3

Nous pouvons alors déterminer les contraintes normales σ_x en chaque point, en particulier celles situées sur les bords de chaque feuille. En égalant les contraintes en correspondance avec chaque arête commune à deux feuilles, on arrive à l'équation de laquelle on tire la valeurs des efforts inconnus T_i. L'état des contraintes est ainsi déterminé complètement en chaque point en fonction des charges extérieures S_i. Passons maintenant à la caractérisation de l'état

de déformation. En nous rapportant au système de coordonnées déjà adopté, nous remarquons que, pour une feuille quelconque, lorsque la charge S aura atteint une certaine valeur, nous aurons la déformation de la poutre caractérisée par une flèche latérale telle que les divers points P de la poutre subissent un déplacement dans la direction de l'axe des z. Nous aurons, en outre, une rotation autour de l'axe des x qui fait subir à ces mêmes points P un autre déplacement dans la même direction $0z$, proportionnel à leur distance à l'axe $0x$. Choisissons alors en respectant les conditions ci-après des déplacements:

$$u = 0 \quad v = 0 \quad w = \overline{w}_0(x) + \bar{\beta}_0(x)\, y = (w_0 + \beta_0 y) \cos \frac{\pi x}{2l} \tag{4}$$

dans lesquelles w_0 et β_0 sont liés aux déplacements correspondants des extrémités inférieure $i-1$ et supérieure et inférieure $i^{\text{ème}}$ dans la section faite au milieu de cette feuille, par les relations suivantes:

$$w_i = \frac{w_{i,i} + w_{i,i-1}}{2} \qquad \beta_i = \frac{w_{i,i} - w_{i,i-1}}{2h_i} \tag{5}$$

Et l'expression de w sera en fonction de ces derniers déplacements:

$$w = \left(\frac{w_{i,i} + w_{i,i-1}}{2} + \frac{w_{i,i} - w_{i,i-1}}{2h_i}\, y \right) \cos \frac{\pi x}{2l} \tag{4'}$$

Il faut maintenant tenir compte des liaisons entre les feuilles. En appelant v la composante du déplacement dans le sens $0y$, on a dans le milieu de la feuille (v. fig. 4):

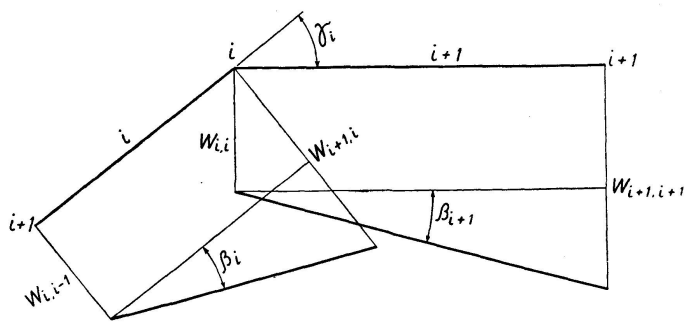


Fig. 4

$$w_{i,i-1} = \frac{v_i \cos \gamma_{i-1} - v_{i-1}}{\sin \gamma_{i-1}} \qquad (i = 0 \ldots\ldots n-2) \tag{6}$$

$$w_{i,i} = \frac{v_{i+1} - v_i \cos \gamma_i}{\sin \gamma_i} \qquad (i = 1 \ldots\ldots n-1) \tag{6'}$$

Ecrivons les mêmes relations pour le déplacement de l'extrémité supérieure de la feuille $(i-1)^{\text{ème}}$ et pour celui de l'extrémité inférieure de la feuille $(i+1)^{\text{ème}}$

$$w_{i-1,i} = \frac{v_i - v_{i-1}\cos\gamma_{i-1}}{\sin\gamma_{i-1}} \qquad (i = 1 \ldots\ldots n-1) \tag{7}$$

$$w_{i+1,i} = \frac{v_{i+1}\cos\gamma_i - v_i}{\sin\gamma_i} \qquad (i = 0 \ldots\ldots n-2) \tag{7'}$$

Tirons v des relations (6) et (6′) accouplées. Les mêmes opérations répétées avec les relations (7) et (7′) accouplées permettent d'écrire une autre expression de v que nous égalons à la précédente. Nous obtenons ainsi la relation suivante entre les grandeurs $w_{i-1,i}$, $w_{i,i-1}$, $w_{i,i}$ et $w_{i+1,i}$:

$$\frac{w_{i-1,i} - w_{i,i-1}\cos\gamma_{i-1}}{\sin\gamma_{i-1}} = \frac{w_{i,i}\cos\gamma_i - w_{i+1,i}}{\sin\gamma_i} \tag{8}$$

ou entre les grandeurs w_{i-1}, w_i, w_{i+1}, β_{i-1}, β_i, et β_{i+1}:

$$\frac{\left(w_{i-1} + \frac{\beta_{i-1}h_{i-1}}{2}\right) - \left(w_i - \frac{\beta_i h_i}{2}\right)\cos\gamma_{i-1}}{\sin\gamma_{i-1}} = \frac{\left(w_i + \frac{\beta_i h_i}{2}\right)\cos\gamma_i - \left(w_{i+1} - \frac{\beta_{i+1}h_{i+1}}{2}\right)}{\sin\gamma_i} \tag{8'}$$

Cette relation nous permet de lier entre elles les déformations w et de trois feuilles consécutives, de sorte que le déplacement imprimé à chaque feuille est, non seulement compatible avec les conditions aux extrémités, mais en plus, avec la déformation de toute la voûte.

Passons à exprimer les composantes de la déformation du déplacement que nous avons établi en tenant compte des infinitésimales du deuxième ordre et en nous servant des relations suivantes[7]):

$$\begin{aligned}
\epsilon_x &= \epsilon_x^{(1)} + \epsilon_x^{(2)} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] \\
\epsilon_y &= \epsilon_y^{(1)} + \epsilon_y^{(2)} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] \\
\epsilon_z &= \epsilon_z^{(1)} + \epsilon_z^{(2)} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right] \\
\gamma_{yz} &= \gamma_{yz}^{(1)} + \gamma_{yz}^{(2)} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z} \\
\gamma_{xz} &= \gamma_{xz}^{(1)} + \gamma_{xz}^{(2)} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} \\
\gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^{(1)} + \gamma_{xy}^{(2)} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}
\end{aligned} \tag{9}$$

---

[7]) V. A. Galli. Complementi analitici utili per la trattazione effettiva dei problemi di stabilità dell'equilibrio elastico. Rend. Mat. della R. Università di Roma. Vol. 43. 1942. — V. G. Krall. Moltiplicatore critico λ_{cr} d'una distribuzione di carico su una volta autoportante. Rend. Acc. Naz. dei Lincei. Dicembre 1946.

Dans le cas qui nous occupe, nous avons:

$$
\begin{aligned}
\epsilon_x^{(1)} &= \epsilon_y^{(1)} = \epsilon_z^{(2)} = \gamma_{xy}^{(1)} = \gamma_{xz}^{(2)} = \gamma_{yz}^{(2)} = 0 \\
\epsilon_x^{(2)} &= \frac{\pi^2}{8\,l^2}(w_0+\beta_0 y)^2 \sin^2 \frac{\pi x}{2\,l} \\
\epsilon_y &= \frac{1}{2}\beta_0{}^2 \cos^2 \frac{\pi x}{2\,l} \\
\gamma_{xy}^{(2)} &= -\frac{\pi}{2\,l}\beta_0 (w_0+\beta_0 y) \sin \frac{\pi x}{2\,l} \cos \frac{\pi x}{2\,l} \\
\gamma_{xz}^{(1)} &= -\frac{\pi}{2\,l}(w_0+\beta_0 y) \sin \frac{\pi x}{2\,l} \\
\gamma_{yz}^{(1)} &= \beta_0 \cos \frac{\pi x}{2\,l}
\end{aligned}
\tag{9'}
$$

De ces composantes, les seules que nous utiliserons dans l'expression du travail L_2 sont: $\epsilon_x^{(2)}$ et $\gamma_{xy}^{(2)}$. Nous avons maintenant tous les éléments nécessaires pour commencer notre étude. A ces fins, il est opportun d'étudier au préalable une feuille quelconque prise isolément et soumise successivement à l'action de la charge extérieure et à celle des efforts tangentiels sur les bords.

III. Poutre simplement appuyées et symétriquement chargée[8])

Choisissons pour les déplacements u, v, w, les expressions suivantes:

$$u = 0\,; \quad v = 0\,; \quad (w = w_0+\beta_0 y) \cos \frac{\pi x}{2\,l} \tag{10}$$

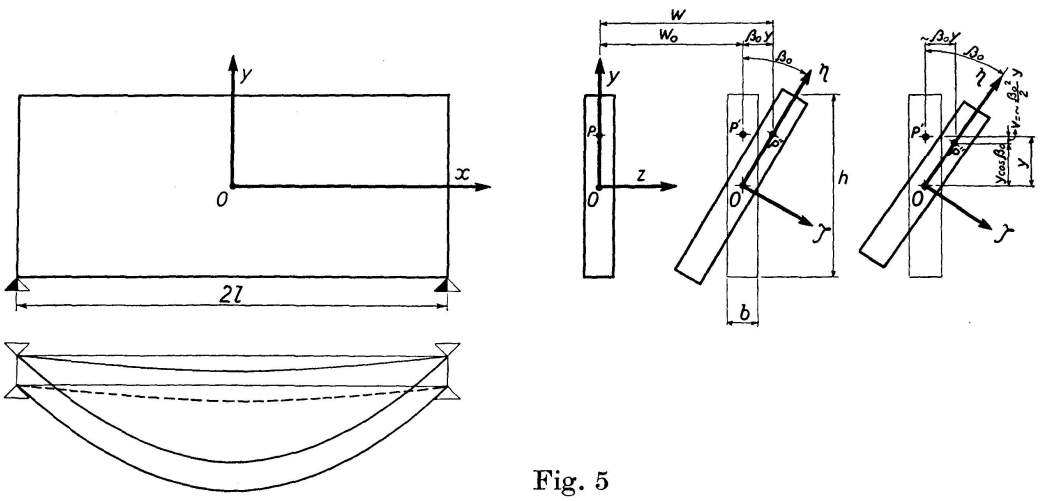


Fig. 5

[8]) Si la distribution des charges transversales est quelconque il convient de prendre d'autres termes dans le développement en séries de w.

En effet, $v \neq 0$ parce que l'on a $v = \beta_0^2 y$ (comme l'on peut le remarquer facilement sur la figure 5). La quantité v est une infinitésimale d'ordre supérieur par rapport à w. Il est donc permis de considérer $P = P_1$.

En effet le déplacement v pourrait donner lieu à une composante de déformation ϵ_y qui est déjà une infinitésimale du deuxième ordre et qui intervient pour modifier L_2 lorsqu'il y a une contrainte σ_y. Dans le cas qui nous occupe, on a toujours $\sigma_y = 0$. On a ainsi évidemment par rapport aux composantes choisies du déplacement.

$$\Phi = B \int_0^l \frac{d^2 \overline{w}_0}{dx^2} dx + C \int_0^l \frac{d^2 \bar{\beta}_0}{dx^2} dx = \frac{B \pi^4}{32 l^3} w_0^2 + \frac{C \pi^2}{8 l} \beta_0^2$$

où B est la rigidité flexionale EI_y rélative à l'axe 0_y et C la rigidité torsionale qui, pour une section rectangulaire allongée, vaut $0{,}333\, C b^3 h$,

$$L_2' = 0 \qquad L_2 = \int_V \sigma_x \epsilon_x^{(2)} dV + \int_V \tau_{xy} \gamma_{xy}^{(2)} dV \tag{11}$$

ou

$$\sigma_x = -\frac{M y}{I} \qquad \tau_{xy} = \frac{T S}{I b} = -\frac{T}{2} \frac{h^2}{4} - y^2 \quad \text{(section rectangulaire)}$$

$$\epsilon_x^{(2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{d \overline{w}_0}{d x} + y \frac{d \bar{\beta}_0}{dx} \right)^2$$

$$\gamma_{xy}^{(2)} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} = \bar{\beta}_0 \left(\frac{d \overline{w}_0}{dx} + y \frac{d \bar{\beta}_0}{dx} \right)$$

On a alors:

$$L_2 = -2 \int_0^l M \frac{d \bar{\beta}_0}{dx} \frac{d \overline{w}_0}{dx} dx - 2 \int_0^l T \bar{\beta}_0 \frac{d \overline{w}_0}{dx} dx =$$

$$= -2 \int_0^l \frac{d \overline{w}_0}{dx} \frac{d}{dx} (M \bar{\beta}_0) =$$

$$= -2 \left| M \bar{\beta}_0 \frac{d \overline{w}_0}{dx} \right|_0^l + 2 \int_0^l M \bar{\beta}_0 \frac{d^2 w_0}{dx^2} dx$$

$$= 2 \int_0^l M \bar{\beta}_0 \frac{d^2 \overline{w}_0}{dx^2} dx$$

e terme fini étant évidemment nul. On pourrait aussi obtenir plus simplement les résultats ci-dessus en précisant que, par effet de la courbure $\frac{1}{r} = \frac{d^2 \overline{w}_0}{dx^2}$, on a une rotation relative $\frac{dx}{r}$ entre deux sections distantes de dx qui fait travailler la composante du moment fléchissant dans les nouveaux plans de la poutre après la déformation, c'est-à-dire autour de l'axe des z.

Nous aurions pu aussi choisir:

$$u = 0 \qquad v = -\int_0^x \frac{M}{T} \bar{\beta}_0 \frac{d^2 \overline{w}_0}{dx^2} dx \qquad w = \overline{w}_0(x) + \bar{\beta}_0(x) y \tag{10'}$$

v est alors une infinitésimale d'ordre supérieur; on a ainsi une composante du deuxième ordre de ϵ_x et le travail L_2 est fourni par:

$$L_2 = \int_V \frac{\sigma_x}{2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] dV + \int_V \tau_{xy} \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right] dV =$$

$$= 2\int_0^l M \frac{d\bar{\beta}_0}{dx}\frac{d\overline{w}_0}{dx} dx + 2\int_0^l T \frac{\partial v}{\partial x} dx + 2\int_0^l T \bar{\beta}_0 \frac{d\overline{w}_0}{dx} dx \tag{11'}$$

Cette expression s'annule pour le choix fait pour v. Il ne reste plus que le travail de deuxième ordre des charges extérieures pour la composante correspondante v du déplacement.

Par exemple pour une charge concentrée au milieu on a, en choisissant les expressions (10):

$$L_2 = \int_V \sigma_x \epsilon_x^{(2)} dV + \int_V \tau_{xy} \gamma_{xy}^{(2)} dV = -F\bar{\beta}_0 \overline{w}_0 \frac{\pi^2 - 4}{16} - \frac{F\bar{\beta}_0 \overline{w}_0}{2} = -F\bar{\beta}_0 \overline{w}_0 \frac{\pi^2 + 4}{16} \tag{12}$$

Tandis que si nous choisissons les expressions (10') on a, en considérant la poutre comme encastrée au milieu et soumise dans l'extrémité libre à l'action de la réaction $\frac{F}{2}$ [9])

$$v = \int_0^l \frac{F}{2} \frac{(l-x)\bar{\beta}_0}{F/2} \frac{d^2 \overline{w}_0}{dx^2} dx = \int_0^l (l-x)\bar{\beta}_0 \frac{d^2 \overline{w}_0}{dx^2} dx$$

laquelle donne pour toute la poutre

$$L'_2 = 2F \int_0^l \bar{\beta}_0 \frac{d^2 \overline{w}_0}{dx^2} (l-x) dx \text{ [10])} = F\beta_0 w_0 \frac{\pi^2 + 4}{16} \tag{12'}$$

$$L_2 = 0.$$

---

[9]) Le déplacement du milieu par rapport aux appuis d'extrémité est égal au déplacement des extrémités par rapport au milieu considéré comme fixe.

[10]) On pourrait arriver aux mêmes résultats en raisonnant de la façon suivante: on considère en plan la poutre cantilever ci-dessus qui a une longueur 1. En considérant la déformation élastique d'un élément dx d'une distance x de l'encastrement qui tourne de $d\varphi = \frac{d^2 \overline{w}_0}{dx^2} dx$ on a l'extrémité libre qui se déplace de $(l-x)\, d^2 \overline{w}_0/dx^2$ dont la composante verticale est $\bar{\beta}_0 (l-x)\, d^2 \overline{w}_0/dx^2$. Pour avoir la déformation de l'extrémité en tenant compte de l'élasticité de toute la poutre cantilever, il faudra évidemment intégrer sur toute sa longueur et on a $\int_0^l (l-x)\, \bar{\beta}_0 \frac{d^2 \overline{w}_0}{dx^2} dx$ (fig. 6).

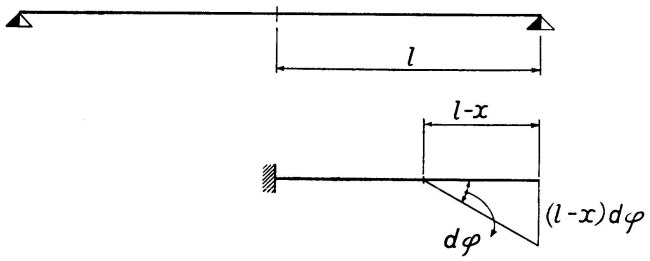


Fig. 6

Si la charge était uniformément répartie on aurait avec les expressions (10)

$$L_2 = \int_v \sigma_x \epsilon_x^{(2)} dV + \int_v \tau_{xy} \gamma_{xy}^{(2)} dV = -p\beta_0 w_0 l \frac{\pi^2 - 3}{12} - p\beta_0 w_0 \frac{l}{2} = -p\beta_0 w_0 \frac{\pi^2 + 3}{12} \tag{13}$$

$$L_2' = 0$$

et avec les expressions (10′)

$$L_2' = \int_0^l p\, d\xi\, v(\xi) - p\, l\, v(l) = p\beta_0 w_0 \frac{\pi^2 + 3}{12} \tag{13'}$$

$$L_2 = 0$$

dans lesquelles $v(\xi)$ et $v(l)$ représentent les déplacements auxquels on doit affecter respectivement la charge élémentaire $p\,d\xi$ et la réaction $p\,l$. Il est intéressant de remarquer que l'on peut tenir compte de la position effective de la charge en rappelant ce que nous avons dit à la page 132. On a effectivement pour une charge appliquée à une distance y_0 du milieu, un travail qui est donné par:

$$\frac{F\beta_0^2 y_0}{2} \qquad \text{si la charge est concentré.}$$

$$\int_0^l p\, dx \frac{\beta_0^2 y_0}{2} \qquad \text{si la charge est répartie.}^{11})$$

Il est intéressant de remarquer que, selon que la charge est appliquée au-dessus ou au-dessous de la poutre ($y_0 > 0$ ou $y_0 < 0$) le travail du deuxième ordre dû aux forces extérieures pour les composantes du déplacement augmente ou diminue en donnant comme conséquence une charge critique plus petite ou plus grande que celle qui correspond à la position barycentrique de la charge (6). En général, les écarts sont si petits qu'on peut les négliger. On a ainsi, en résumé, pour une charge concentrée:

$$\delta_2 E = \frac{B\pi^4}{32 l^3} w_0^2 + \frac{C\pi^2}{8l} \beta_0^2 - F\beta_0 w_0 \frac{\pi^2 + 4}{16} \tag{14}$$

---

11) Selon que la charge est sur la face supérieur ou inférieur on a:

$$\pm F\beta_0^2 \frac{h}{4} \quad \text{et} \quad \pm \int_0^l p\, \beta_0^2 \frac{h}{4} dx$$

Des conditions de minimum:

$$\frac{\partial \delta_2 E}{\partial w_0} = 0\,; \qquad \frac{\partial \delta_2 E}{\partial \beta_0} = 0$$

on tire le déterminant:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{B\pi^4}{16\,l^3} & -F\dfrac{4+\pi^2}{16} \\ -F\dfrac{4+\pi^2}{16} & \dfrac{C\pi^2}{4\,l} \end{vmatrix} = 0$$

lequel annulé fournit la valeur critique de F:

$$F_{cr.} = \frac{2\pi^3}{\pi^2+4}\,\frac{\sqrt{BC}}{l^2}\,^{12)} \tag{15}$$

avec un écart de 1,55 % par rapport à la valeur exacte.
Pour la charge répartie, on a:

$$\epsilon = \frac{B\pi^4}{32\,l^3}w_0^2 + \frac{C\pi^2}{8\,l}p_0^2 - p\,l\,\beta_0 w_0 \frac{\pi^2+3}{12}\,^{13)} \tag{16}$$

et

$$p_{cr.} = \frac{3\pi^3}{2(\pi^2+3)}\,\frac{\sqrt{BC}}{l^3} \tag{17}$$

avec un écart de 1,51 % par rapport à la valeur exacte[14]).

---

[12]) V. S. Timoshenko, Theory of elastic stability. Mc. Graw Hill Book Company, New York 1936.

[13]) Si l'on considère la poutre comme une dalle chargée sur la face supérieure on trouve pour la fonction d'Airy l'expression suivante:

$$F = \frac{p}{h}\left(\frac{1}{10} - \frac{l^2}{h^2}\right)y^3 - \frac{p}{5h^3}y^5 - \frac{p}{4}x^2 - \frac{3}{4}\frac{p}{h}x^2y + \frac{p}{h^3}x^2y^3$$

et pour les contraintes:

$$\sigma_x = \frac{6p}{h}\left(\frac{1}{10} - \frac{l^2}{h^2}\right)y - \frac{4p}{h^3}y^3 + \frac{6p}{h^3}x^2y$$

$$\sigma_y = -\frac{p}{2} - \frac{3}{2}\frac{p}{h}y + \frac{2p}{h^3}y^3$$

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2}\frac{p}{h}x - \frac{6p}{h^3}x^2y$$

L'expression de la variation seconde de l'énergie potentielle totale est fournie par:

$$\delta_2 E = \frac{B\pi^4}{32\,l^3}w_0^2 + \frac{\rho\pi^2}{8\,l}\beta_0^2 - \frac{\pi^2+3}{12}pl\beta_0 w_0 - \frac{phl}{4}\beta_0^2$$

laquelle est la même qu'on trouverait pour la poutre si l'on tient compte du travail dû à la position barycentrique de la charge.

[14]) V. A. Pflüger. Stabilitätsprobleme in Elastostatik. J. Springer. Berlin 1950. — V. K. de Vries. Strength of beams as determined by lateral buckling. — American Society of Civil Engineers. September 1946.

IV. Poutre supportant une distribution de charges tangentielles variables linéairement

Soit:
$$T_{i-1} = \alpha_{i-1} x; \quad T_i = \alpha_i x \tag{18}$$
les charges appliquées. On peut choisir encore pour les déplacements les expressions suivantes:
$$u = 0 \quad v = 0 \quad w = \overline{w}_0(x) + \bar{\beta}_0(x)\, y$$
avec les mêmes annotations déjà faites à la page 128 et 129. L'énergie potentielle élastique garde son expression:
$$\Phi = \frac{B\pi^4}{32\, l^3} w_0^2 + \frac{C\pi^2}{8\, l} p_0^2$$
tandis que pour le travail du deuxième ordre, on a:
$$L_2' = 0 \qquad L_2 = \int_V \sigma_x \epsilon_x^{(2)}\, dV$$
dans laquelle
$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M y}{I} = \frac{\alpha_{i-1} - \alpha_i}{A} \frac{l^2 - x^2}{2} + \frac{h_i}{2} (\alpha_{i-1} + \alpha_i) \frac{l^2 - x^2}{2} \frac{y}{I}$$
Après avoir effectué les intégrations et les simplifications des expressions on obtient:
$$L_2 = \frac{\pi^2 - 3}{24}\, l\, [(\alpha_{i-1} - \alpha_i)(w_0^2 + \beta_0^2 \rho^2) + (\alpha_{i-1} + \alpha_i)\, h\, \beta_0 w_0]$$
en appelant ρ le rayon d'inertie maximum.
Si l'on avait choisi pour les composantes du déplacement, les expressions suivantes:
$$u = -\frac{1}{2} \int_0^x \left[\frac{\partial w}{\partial x}(x, 0)\right]^2 dx \qquad v = 0 \qquad w = (w_0 + \beta_0 y) \cos \frac{\pi x}{2 l} \tag{19}$$
on aurait obtenu[15]):
$$L_2 = \frac{\pi^2 - 3}{24}\, l\, [(\alpha_{i-1} - \alpha_i)\, \beta_0^2 \rho^2 + (\alpha_{i-1} + \alpha_i)\, h\, \beta_0 w_0]$$
$$L_2' = -\frac{\pi^2 - 3}{24}\, l\, (\alpha_{i-1} - \alpha_i)\, w_0^2$$
et on retrouve pour $L_2 - L_2'$ la même expression que précédemment pour L_2.

On a ainsi pour $\delta_2 E$ l'expression:
$$\delta_2 E = \frac{B\pi^4}{32\, l^3} w_0^2 + \frac{C\pi^2}{8\, l} \beta_0^2 + \frac{\pi^2 - 3}{24}\, l\, [(\alpha_{i-1} \alpha_i)(w_0^2 + \beta_0^2 \rho^2) + (\alpha_{i-1} + \alpha_i)\, h\, \beta_0 w_0] \tag{20}$$

---

[15]) On a en effet: $L_2^1 = 2 \int_0^l (T_{i-1} - T_i)\, u(x)\, dx$, dans laquelle:
$$u(x) = \frac{\pi}{16\, l} w_0^2 \left[\sin \frac{\pi x}{l} - \frac{\pi x}{l}\right].$$

de laquelle, étant donné les expressions de α_{i-1} et α_i fonctions d'un même paramètre, on peut tirer la valeur critique de ce paramètre ou la valeur critique de α_{i-1} en connaissant la valeur de α_i ou inversement.

Examinons maintenant quelques cas particuliers ci-après:

1⁰ $\alpha_i = 0$.

On a alors l'équation du deuxième degré qui fournit la valeur critique de α_{i-1}:

$$\alpha_{i-1}^2 \left[\left(\frac{\pi^2-3}{12}\right)^2 l^2 - h^2\right] - \alpha_{i-1} \frac{\pi^2-3}{12}\, l \left(\frac{B\pi^4}{16\, l^3}\rho^2 + \frac{C\pi^2}{4\, l}\right) + \frac{BC\pi^6}{64\, l^4} = 0$$

2⁰ $\alpha_{i-1} = \alpha_i$.

La valeur critique est fournie par:

$$\alpha_{i-1} = \frac{3}{2}\frac{\pi^3}{\pi^2-3}\frac{\sqrt{BC}}{l^3 h}$$

3⁰ $\alpha_{i-1} = -\alpha_i$.

La valeur critique se déduit de l'équation du deuxième degré suivant:

$$\alpha_{i-1}^2 \left(\frac{\pi^2-3}{6}\right) l^2 - \alpha_{i-1} \frac{\pi^2-3}{6}\, l \left(\frac{B\pi^4}{16\, l^3}\rho^2 + \frac{C\pi^2}{4\, l}\right) + \frac{BC\pi^6}{64\, l^6} = 0$$

V.

En conséquence, on a pour une feuille quelconque de la voûte polygonale l'expression ci-après de la variation seconde de l'énergie potentielle:

$$\delta_2 E = \frac{B_i \pi^4}{32\, l^3} w_0^{(i)2} + \frac{C\pi^2}{8\, l} \beta_0^{(i)2} - S_i \beta_0^{(i)} w_0^{(i)}\, l \frac{\pi^2+3}{12} + \\ + \frac{\pi^2-3}{24}\, l\, [(\alpha_{i-1}-\alpha_i)(w_0^{(i)2} + \beta_0^{(i)2}\rho^2) + (\alpha_{i-1}+\alpha_i)\, h_i \beta_0^{(i)} w_0^{(i)}]$$

Et pour toute la voûte:

$$\delta_2 E = \sum_{i=1}^{n} \left\{ w_0^{(i)2} \left[\frac{B_i \pi^4}{32\, l^3} - \frac{\pi^2-3}{24}\, l\, (\alpha_{i-1}-\alpha_i)\right] + \beta_0^{(i)2} \left[\frac{C_i \pi^2}{8\, l}\rho_i^2 - \frac{\pi^2-3}{24}\, l\, (\alpha_{i-1}-\alpha_i)\right] \right. \\ \left. - \beta_0^{(i)} w_0^{(i)} \left[S_i \frac{\pi^2+3}{12}\, l + \frac{\pi^2-3}{24}\, l\, (\alpha_i + \alpha_{i+1})\, h_i\right]\right\}$$

dans laquelle les $2n$ paramètres $w_0^{(i)}$ et $\beta_0^{(i)}$ ne sont pas indépendants entièrement, mais liés par les conditions de compatibilité (8) ou (8′) déjà étudiées à la page 130.

En utilisant maintenant l'équation (1′) c'est-à-dire les conditions d'extrême qui sont au nombre de $n+2$[16]) on arrive à un système algébrique linéaire

[16]) En effet, les paramètres indépendants se réduisent à $2n-(n-2) = n+2$. Si la voûte est symétrique, on a encore une réduction des paramètres indépendants.

homogène de $n+2$ équations à $n+2$ inconnues. La condition de compatibilité de ce système d'équations nous permet de parvenir à une équation de $(n+2)^{\text{ème}}$ degré dans la charge extérieure. La racine la plus petite donne la valeur cherchée.

VI.

Passons maintenant à une application concrète. Considérons une voûte à cinq feuilles symétriques et symétriquement chargée. On prendra, en consideration l'instabilité due au poids propre (uniformément le long de la directrice) et due aux charges concentrées le long des arêtes. De toute façon, la distribution des charges extérieures est toujours supposée uniforme le long de la génératrice. On considérera encore deux formes possibles d'instabilité: la forme symétrique et la forme anti-symétrique. Dans notre cas, il suffit d'écrire les conditions de compatibilité seulement pour les deux premiers couples de feuilles:

$$\frac{\left(w_1+\frac{\beta_1 h_1}{2}\right)-\left(w_2-\frac{\beta_2 h_2}{2}\right)\cos\gamma_1}{\sin\gamma_1}=\frac{\left(w_2+\frac{\beta_2 h_2}{2}\right)\cos\gamma_2-\left(w_3-\frac{\beta_3 h_3}{2}\right)}{\sin\gamma_2}$$

$$\frac{\left(w_2+\frac{\beta_2 h_2}{2}\right)-\left(w_3-\frac{\beta_3 h_3}{2}\right)\cos\gamma_2}{\sin\gamma_2}=\frac{\left(w_3+\frac{\beta_3 h_3}{2}\right)\cos\gamma_3-\left(w_4-\frac{\beta_4 h_4}{2}\right)}{\sin\gamma_3}$$

dans lesquelles:

$$\gamma_2=\gamma_3=\frac{\pi}{2}-\gamma_1;\quad \cos\gamma_2=\cos\gamma_3=\sin\gamma_1;\quad \sin\gamma_2=\sin\gamma_3=\cos\gamma_1$$

Pour la forme symétrique, étant donné

$$\beta_3=0\qquad w_4=w_2\qquad \beta_4=-\beta_2$$

on tire facilement les deux relations:

$$w_1=-\frac{\beta_1 h_1}{2}-\beta_2 h_2\cos\gamma_1$$

$$w_3=\frac{w_2+\frac{\beta_2 h_2}{2}}{\sin\gamma_1}$$

Pour la forme antisymétrique, étant donné

$$w_3=0\qquad w_4=-w_2\qquad \beta_4=\beta_2$$

on a:

$$w_2=w_1\cos\gamma_1+\frac{\beta_1 h_1}{2}\cos\gamma_1+\frac{\beta_2 h_2}{2}\cos 2\gamma_1-\frac{\beta_3 h_3}{2}\sin\gamma_1$$

Considérons une voûte qui a les caractéristiques élastiques et géométriques suivantes:

$$h_2 = 2\,h_1\,;\quad h_3 = 2\,h_2\,;\quad 1 = 10\,h_1$$
$$B_2 = C_2 = 2\,B_1\,;\quad B_3 = 3\,B_1\,;\quad C_2 = 4\,B_1\,;\quad C_3 = 6\,B_1$$ [17])

Les relations de compatibilité (8′) fournissent dans notre cas: pour la déformation symétrique:

$$w_1 = -0{,}5\,\beta_1\,h - 1{,}2498\,\beta_2\,h$$
$$w_3 = \quad 1{,}2809\,w_2 + 1{,}2809\,\beta_2\,h$$

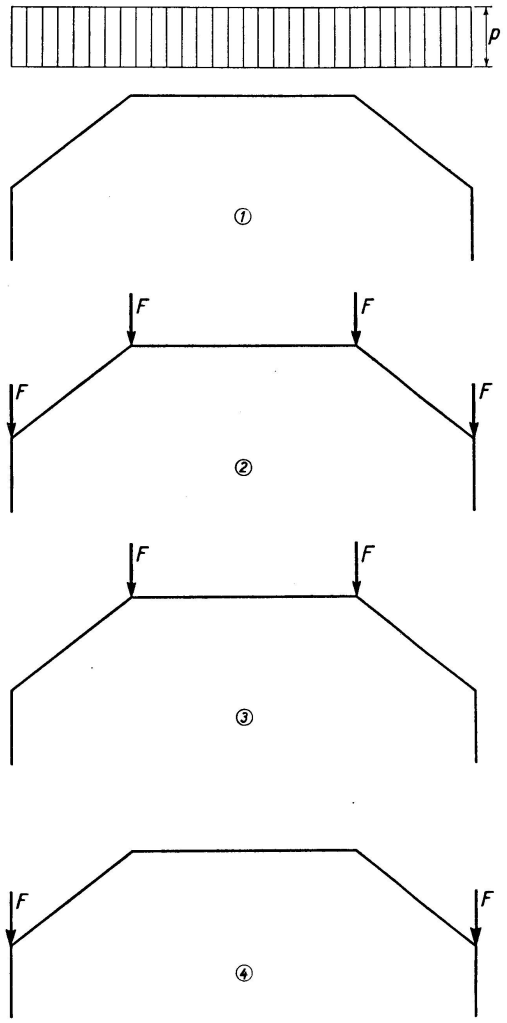


Fig. 7

[17]) Dans la pratique on a pour chaque feuille une section rectangulaire de béton ($m \sim 0$) beaucoup plus haute que large ($b \leqslant h$) ce qui nous permet de supposer:

$$C = G\,\frac{b^3 h}{3}\left(1 - 0{,}630\,\frac{b}{h}\right) \sim \frac{E}{2}\,\frac{b^3 h}{3} = 2B\,.$$

et pour la forme anti-symétrique:

$$w_2 = 0{,}62489\, w_1 + 0{,}31245\, \beta_1 h - 0{,}21902\, \beta_2 h - 1{,}7106\, \beta_3 h^{18)}.$$

Dans la figure 7 sont indiquées les diverses conditions de charge que nous avons examinées et au-dessous de cette figure nous dressons un tableau dans lequel nous consignons les valeurs des charges axiales dans chaque feuille, les valeurs des coefficients α_{i-1} et α_i obtenues au moyen de l'équation des trois efforts tranchants et les valeurs correspondantes de la charge critique respectivement pour la déformation symétrique et anti-symétrique[19]).

Dans ce tableau sont consignées les valeurs correspondantes aux plus petites racines[20]).

	S_1	S_2	α_1	α_2	Val. crit. sym.	Val. crit. anti-sym.
(1)	$0{,}6634\, ph$	$4{,}5391\, ph$	$1{,}4642\, p$	$2{,}0040\, p$	$19{,}81 \frac{B}{l^1}$	$117{,}5 \frac{B}{l^1}$
(2)	F	$1{,}6002\, F$	$1{,}3333 \frac{F}{h}$	$0{,}4000 \frac{F}{h}$	$2{,}69 \frac{B}{l^3}$	$17{,}55 \frac{B}{l^3}$
(3)	O	$1{,}6002\, F$	$0{,}2667 \frac{F}{h}$	$0{,}8000 \frac{F}{h}$	$5{,}14 \frac{B}{l^3}$	$21{,}8 \frac{B}{l^3}$
(4)	F	O	$1{,}0667 \frac{F}{h}$	$0{,}4000 \frac{F}{h}$	$5{,}44 \frac{B}{l^3}$	$10 \frac{B}{l^3}$

On remarque que les charges critiques correspondant à la déformation anti-symétrique sont toutes plus grandes que celles correspondant à la déformation symétrique, comme l'on pourrait prévoir étant donné que le travail dû aux charges extérieures est plus petit dans ce dernier cas. Il est encore intéressant de remarquer que, en correspondance avec la forme symétrique, la charge critique est plus grande pour la troisième condition de charge que pour la quatrième et inversement pour la forme anti-symétrique. Aussi cela peut

---

[18]) Il est facile de justifier que pour la forme anti-symétrique on a une seule relation utile (l'autre $w_3 = 0$ que l'on tire est intuitive et est déjà donnée dans l'hypothèse de départ). En effet, la symétrie annule ou rend connue en général une caractéristique de l'effort et deux caractéristiques de déformation tandis que l'anti-symétrie permet de connaître deux caractéristiques de l'effort mais seulement une caractéristique de déformation.

[19]) Pour ce qui concerne la charge répartie, les forces sont reportées aux nœuds en déterminant les réactions d'une poutre continue à trois travées obtenues en aplatissant les feuilles 2 et 4 et en les supposant appuyées aux extrémités.

[20]) L'équation déterminatrice de la charge critique que l'on tire de l'annulation du déterminant est du 3ème ou 4ème degré selon que la forme d'équilibre instable est symétrique ou anti-symétrique.

être justifié en considérant le plus petit ou le plus grand travail developpé par les charges extérieures. On remarque que le théorème de DUNKERLY[21]) est satisfait. En effet, on a: pour la forme symétrique

$$\frac{1}{2{,}69} < \frac{1}{5{,}14} + \frac{1}{5{,}44}$$

pour la forme anti-symétrique.

$$\frac{1}{17{,}55} < \frac{1}{21{,}88} + \frac{1}{10}$$

Par exemple pour une voûte polygonale qui a les caractéristiques suivantes:

$$b = 0{,}10 \text{ m}; \quad h = 1{,}00 \text{ m}; \quad l = 10 \text{ m}; \quad B = 167 \text{ tm}^2$$

on tire pour la condition de charge (2):

$$F^{(a)} = 0{,}86 \text{ t/m} \qquad F^{(a)} = 3{,}64 \text{ t/m}$$

Ces valeurs sont certainement plus petites que celles réelles conformément à ce que nous avons dit au début du travail.

Résumé

L'auteur étudie l'instabilité de l'équilibre élastique dans les voûtes polygonales, en se servant des considérations énergétiques, en conformité du Théorème de DIRICHLET.

Il détermine avant tout les contraintes de chaque feuille en appliquant la méthode habituelle de la membrane, il établit ensuite un choix de déplacements qui respectent les conditions aux tympans d'extrémité, écrit l'expression de la variation seconde $\delta_2 E$ de l'énergie potentielle totale de chaque feuille, puis tenant compte de la compatibilité des feuilles entre elles, il écrit l'expression de $\delta_2 E$ pour toute la voûte.

Avec les conditions de minimum, il arrive à une équation de $n+2$ degrés (n étant le nombre de feuilles de la voûte) en p_c dont la racine la plus petite fournit la valeur critique cherchée pour la charge.

Il expose une application concrète pour une voûte de cinq feuilles pour laquelle il détermine la charge critique correspondant à des formes symétriques et anti-symétriques d'instabilité.

[21]) Les valeurs réciproques des charges critiques d'un système dont les forces extérieures sont la somme de celles des systèmes partiels est toujours plus petit (ou au maximum égal) que la somme des valeurs réciproques des charges critiques des valeurs correspondantes des systèmes partiels.

Zusammenfassung

Anhand von Energiebetrachtungen nach dem Satz von Dirichlet führt der Verfasser Stabilitätsberechnungen für das elastische Gleichgewicht von Faltwerken durch.

Er bestimmt vorerst die Spannungen in den einzelnen Seitenebenen mit Hilfe der Membrantheorie, wählt dann einen Zustand von Verrückungen, der die Randbedingungen in den Endfeldern erfüllt, schreibt den Ausdruck der zweiten Variation $\delta_2 E$ der potentiellen Energie jedes Feldes an und geht schließlich unter Berücksichtigung des Zusammenhanges der einzelnen Seitenebenen zum Ausdruck $\delta_2 E$ für das ganze Faltwerk über.

Die Minimumbedingung führt auf eine Gleichung $n+2$ten Grades in p_c (wobei n die Anzahl der Seitenebenen ist), deren kleinste Lösung die gesuchte kritische Belastung liefert.

Für ein fünfseitiges Faltwerk wird ein Zahlenbeispiel durchgerechnet zur Bestimmung der kritischen Lasten, die einer symmetrischen und einer antimetrischen Form des Unstabilwerdens zugehören.

Summary

The author studies the instability of elastic equilibrium of polygonal arches, making use of energy considerations, based on Dirichlet's Theorem.

He first of all determines the constraints of each face by applying the usual membrane method, he then establishes a choice of displacements compatible with the conditions at the spandrel ends, writes down the expression of the second increment $\delta_2 E$ of the total potential energy in each face, then taking account of the mutual compatability of the faces he writes down the expression of $\delta_2 E$ for the whole arch.

With minimising conditions he obtains an equation of degree $n+2$ (where n is the number of faces in each arch) in p_c of which the least root provides the critical value required for the load.

He demonstrates a particular application for an arch of five faces for which he determines the critical load corresponding to symmetrical and antisymmetrical forms of instability.