

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen  
**Band:** 12 (1952)  
  
**Artikel:** Das 2-dimensionale Problem bei periodisch veränderlicher Temperatureinwirkung  
**Autor:** Lardy, Pierre  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-12321>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# **Das 2-dimensionale Problem bei periodisch veränderlicher Temperatureinwirkung**

(Temperaturverteilung und Temperaturspannungen)

*Le problème bi-dimensionnel sous l'effet de températures périodiquement variables*

(Répartition de la température et contraintes thermiques)

*The two-dimensional problem in the case of periodically altering temperature effects*

(Temperature distribution and thermal stresses)

Prof. Dr. PIERRE LARDY, Eidg. Techn. Hochschule, Zürich,  
Generalsekretär für Eisenbetonbau der IVBH

## **1. Einführung**

Die vorliegende Arbeit behandelt das Problem der Temperaturverteilung sowie der Temperaturspannungen für 2-dimensionale Elemente, wenn die Außentemperaturen periodisch veränderlich sind.

Die mathematischen Schwierigkeiten sind bedeutend größer als beim linearen Problem<sup>1)</sup>, da die Differentialgleichungen hier partiell sind und die Einhaltung der Randbedingungen besondere Anforderungen stellen. Trotzdem gelingt es, die Integralfunktionen in wichtigen Anwendungsfällen auf eine für die numerische Auswertung geeignete Form zu bringen.

Als Grundlage der Berechnungen dient die Fourier'sche Theorie der Wärmeleitung, unter der Voraussetzung, daß keine Wärmequellen vorhanden sind und daß die gegebenen Außentemperaturen periodisch veränderlich sind. In der Folge wird nur eine einzige Temperaturfrequenz  $\omega$  betrachtet, was in den meisten praktischen Fällen genügen dürfte. Andernfalls gelingt die Berücksichtigung verwickelterer Fälle durch Überlagerung der Lösungen mit mehreren verschiedenen Frequenzen.

In der praktischen Anwendung handelt es sich um Scheiben, die längs ihrer Oberflächen thermisch isoliert sind und bei denen die oszillierenden Außentemperaturen an den Rändern angreifen oder, in vermehrtem Maße, um prismatische oder zylindrische, unbeschränkt lange Pfeiler, an deren Mantelflächen

---

<sup>1)</sup> Vgl. Prof. Dr. M. RITTER: I.V.B.H., 7. Band der „Abhandlungen“, 1943/44.

die Außentemperaturen angreifen. Solche Probleme sind beim Staumauerbau sowie beim Behälterbau aktuell (Pfeilerstaumauern als Scheibenproblem, Temperaturprobleme bei großen Pfeilern, bei Behältern, usw.).

Im folgenden werden die theoretischen Grundlagen der Temperaturverteilung und der Temperaturspannungen aufgestellt und als Anwendungen die rechteckige Scheibe sowie die Halbebene behandelt. Die Arbeit schließt mit einigen Hinweisen auf andere, wichtige Beispiele der praktischen Anwendungen.

## 2. Allgemeine Theorie der Temperaturverteilung

### a) Grundgleichung

Die Fourier'sche Grund-Differentialgleichung der Wärmeleitung lautet:

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = A \cdot \Delta T} \quad (\text{I})$$

Darin bedeuten:

$T$ : die Temperatur,

$t$ : die Zeit,

$A$ : die Temperaturleitzahl, wobei:

$$A_3 = \frac{\lambda}{c \cdot \gamma} \text{ mit:}$$

$\lambda$ : Wärmeleitzahl,

$c$ : spezifische Wärme,

$\gamma$ : Raumgewicht.

$\Delta$ : der Laplace'sche Operator, z. B. in kartesischen Koordinaten:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

### b) Allgemeines Integral

Die gegebenen, periodisch veränderlichen Außentemperaturen  $T_R$  haben nach Voraussetzung die Frequenz  $\omega$ , sind also darstellbar als Funktionen von:

$$\cos \omega t \text{ oder } \sin \omega t.$$

Daher muß das allgemeinste Integral der Grundgleichung (I) folgende Form besitzen:

$$\boxed{T = \cos \omega t \cdot F + \sin \omega t \cdot G} \quad (\text{II})$$

Darin sind  $F$  und  $G$  Funktionen der beiden unabhängigen, dem betreffenden 2-dimensionalen Problem angepaßten Koordinaten. Die Form (II) entspricht sowohl der Grundgleichung (I) wie auch den gegebenen Außentemperaturen, die für das Problem der Temperaturverteilung die Randbedingungen darstellen.

Der Ansatz (II) werde in die Gleichung (I) eingesetzt. Es folgt:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\omega \cdot \sin \omega t \cdot F + \omega \cdot \cos \omega t \cdot G$$

$$\Delta T = \cos \omega t \cdot \Delta F + \sin \omega t \cdot \Delta G$$

und daher

$$-\omega \cdot \sin \omega t \cdot F + \omega \cdot \cos \omega t \cdot G = A (\cos \omega t \cdot \Delta F + \sin \omega t \cdot \Delta G)$$

oder

$$\cos \omega t (-\omega \cdot G + A \cdot \Delta F) + \sin \omega t (\omega \cdot F + A \cdot \Delta G) \equiv 0.$$

Diese Identität erfordert das Verschwinden der beiden Klammern und führt, mit der Abkürzung:

$$\frac{\omega}{A} = 2\kappa^2$$

zu den beiden Gleichungen

$$\begin{cases} \Delta F = 2\kappa^2 \cdot G \\ \Delta G = -2\kappa^2 \cdot F \end{cases} \quad (1)$$

aus denen die Abhängigkeit der beiden Funktionen  $F$  und  $G$  voneinander ersichtlich ist.

Wird der Laplace'sche Operator auf beide Gl. (1) ausgeführt, so folgen nach einfacher Elimination 2 getrennte Bestimmungsgleichungen für  $F$  und  $G$ :

$$\begin{cases} \Delta \Delta F + 4\kappa^4 \cdot F = 0 \\ \Delta \Delta G + 4\kappa^4 \cdot G = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Dank der Gl. (1) genügt die Integration einer einzigen der Gl. (2).

Damit bedeutet der Integrations-Ansatz (II) als allgemeines Integral der Grundgleichung (I) die grundsätzliche Lösung des Problems.

### c) Randbedingungen

Die Funktionen  $F$  und  $G$  müssen am Rande den gegebenen Außentemperaturen entsprechen. Wenn beispielsweise die Randtemperatur  $T_R$  gegeben ist als:

$$T_R = T_0 \cdot \sin \omega t,$$

wo  $T_0$  längs dem Rande i. A. variieren kann, so müssen dort die Bedingungen für  $F$  und  $G$  lauten (Index „0“ bedeutet Rand):

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \\ G_0 &= T_0. \end{aligned}$$

Erst die Erfüllung dieser Randbedingungen sondert aus dem allgemeinen Integral die Lösung des betreffenden Problems aus.



## d) Amplituden

Meistens interessiert in einem bestimmten Punkt der größte Wert der Temperatur, die Amplitude  $T_{max}$ , im Zeitpunkte  $t_1$ . Die Bedingung für  $T_{max}$  lautet:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

woraus sehr einfach folgt:

$$\operatorname{tg} \omega t_1 = \frac{G}{F} \quad (3)$$

sowie

$$T_{max} = \sqrt{F^2 + G^2} \quad (4)$$

Das allgemeine Integral kann damit auch auf folgende Form gebracht werden, wo die Phasenverschiebung  $t_1$  und die Amplitude  $T_{max}$  in Evidenz gesetzt sind:

oder:

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{F^2 + G^2} \cdot \cos \left( \omega t - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{G}{F} \right) \\ T &= T_{max} \cdot \cos \omega (t - t_1) \end{aligned} \quad (\text{II}')$$

Für numerische Auswertungen bietet  $T_{max}$  den Vorzug großer Einfachheit im Vergleich zu  $F$  oder  $G$  und ergibt ein sehr eindrückliches Kriterium für die Beurteilung der Temperaturverteilung.

### 3. Temperaturspannungen und Formänderungen

#### a) Grundgleichung zur Spannungsberechnung

Zur besseren Übersicht seien die folgenden Überlegungen im rechtwinkligen, kartesischen Koordinatensystem dargestellt. Die Hauptergebnisse sind ihrerseits jedoch vom Koordinatensystem unabhängig, wie dies aus der Form der Grundgleichung ersichtlich sein wird. Es seien bezeichnet mit:

$$\begin{aligned} u &= \text{Verschiebung parallel } x\text{-Achse,} \\ v &= \text{Verschiebung parallel } y\text{-Achse,} \\ \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \text{Dehnung parallel } x\text{-Achse,} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \text{Dehnung parallel } y\text{-Achse,} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \text{Winkeländerung,} \\ \sigma_x &= \text{Normalspannung parallel } x\text{-Achse,} \\ \sigma_y &= \text{Normalspannung parallel } y\text{-Achse,} \\ \tau_{xy} &= \text{Schubspannung,} \end{aligned}$$

$$\nu = \frac{1}{m} = \text{Querdehnungszahl,}$$

$$E = \text{Elastizitätsmodul.}$$

Jedes rechtwinklige Element  $dx \cdot dy$  erfährt durch die Temperatureinwirkung  $T$  eine Dehnung  $\epsilon_T$  nach beiden Richtungen  $x$  und  $y$ . Wird mit  $\theta$  der Wärmeausdehnungskoeffizient bezeichnet, so ist:

$$\epsilon_T = \theta \cdot T \quad (5)$$

Dies führt zu folgender Verallgemeinerung der Spannungs-Dehnungs-Gleichungen der 2-dimensionalen Elastizitätstheorie für Temperatureinwirkungen:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y) + \epsilon_T \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x) + \epsilon_T \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Wird mit  $\Phi$  die Airy'sche Spannungsfunktion bezeichnet, so ist:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \cdot \partial y}$$

und deren Einführung in die Verträglichkeitsbedingung:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \cdot \partial y}$$

führt zur verallgemeinerten Grundgleichung für  $\Phi$ :

$$\Delta \Delta \Phi + E \cdot \Delta \epsilon_T = 0 \quad (III)$$

Für  $\theta = \text{konstant}$  wird:

$$\Delta \Delta \Phi + E \theta \cdot \Delta T = 0 \quad (III')$$

Die Airy'sche, biharmonische Gleichung ist bei Temperatureinwirkungen nicht mehr homogen. Sie ist vom Koordinatensystem unabhängig.

Wird in Gl. (III')  $T$  durch den allgemeinen Ansatz (II) ersetzt, so folgt, mit Hilfe der Gl. (1):

$$\Delta \Delta \Phi + 2\kappa^2 \cdot E \theta (\cos \omega t \cdot G - \sin \omega t \cdot F) = 0 \quad (IV)$$

(Grundgleichung der Temperaturspannungen).

b) *Partikuläres Integral und allgemeine Lösung*

Die Lösung der Gl. (IV) ist ebenfalls eine periodische Zeitfunktion und kann hier als Summe eines partikulären Integrals  $\Phi_0$  und des allgemeinen Integrals  $\Phi_1$  der homogenen Gleichung gefunden werden; die allgemeine Lösung  $\Phi$  lautet daher:

$$\underline{\Phi = \Phi_0 + \Phi_1}$$

$\Phi_0$ :  $\Phi_0$  wird wie folgt angesetzt:

$$\Phi_0 = \cos \omega t \cdot P + \sin \omega t \cdot Q \quad (7)$$

wo:  $P$  und  $Q$  Funktionen der beiden unabhängigen Variablen sind.

Gl. (7) in Gl. (IV) eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned} \Delta \Delta P &= -2\kappa^2 \cdot E \theta \cdot G \\ \Delta \Delta Q &= 2\kappa^2 \cdot E \theta \cdot F \end{aligned} \quad (8)$$

Ein Vergleich der Gleichungen (8) und (2) führt sofort zur Bestimmung von  $P$  und  $Q$ :

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{E \theta}{2\kappa^2} \cdot G \\ Q &= -\frac{E \theta}{2\kappa^2} \cdot F \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

woraus das partikuläre Integral folgt zu:

$$\Phi_0 = \frac{E \theta}{2\kappa^2} (\cos \omega t \cdot G - \sin \omega t \cdot F)$$

$\Phi_1$ : Für  $\Phi_1$  gilt:  $\Delta \Delta \Phi_1 = 0$ ;  $\Phi_1$  ist in  $t$  periodisch, mit biharmonischen Koeffizienten  $U$  und  $V$  als Funktionen der beiden unabhängigen Variablen:

$$\underline{\Phi_1 = \cos \omega t \cdot U + \sin \omega t \cdot V} \quad (11)$$

mit:

$$\underline{\Delta \Delta U = 0}, \quad \underline{\Delta \Delta V = 0} \quad (12)$$

Das allgemeine Integral lautet:

$$\Phi = \cos \omega t \left( \frac{E \theta}{2\kappa^2} \cdot G + U \right) + \sin \omega t \left( -\frac{E \theta}{2\kappa^2} \cdot F + V \right) \quad (V)$$

Auch diese Lösung hat allgemeine Bedeutung, da sie vom Koordinatensystem unabhängig ist.

c) *Randbedingungen*

Diese drücken den Spannungs- oder den Verschiebungszustand am Rande aus. Eine besondere Schwierigkeit bei der numerischen Auswertung besteht darin, daß  $\Phi_0$  und  $\Phi_1$  aus verschiedenartigen Funktionen bestehen, die sich als Lösungen verschiedener partieller Differential-Gleichungen ergeben. Auf Grund von Reihenentwicklungen oder mit der Ritz'schen Methode können diese Schwierigkeiten überwunden werden.

Bei freien Rändern können die Bedingungen

$$\begin{aligned} \sigma_n &= 0 & \tau_{nt} &= 0 \\ \text{einfacher durch} & & \Phi &= 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \end{aligned}$$

ersetzt werden ( $n$ : Koordinate der Randnormalen).

Der Verschiebungszustand wird durch  $u$  und  $v$  ausgedrückt.

#### d) Spannungs-Amplituden

Analog den Temperatur-Amplituden folgt aus der Formel (V) für die Spannungs-Amplituden:

$$\sigma_{x_{max}} = \sqrt{\left[ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{E\theta}{2\kappa^2} \cdot G + U \right) \right]^2 + \left[ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( -\frac{E\theta}{2\kappa^2} \cdot F + V \right) \right]^2}$$

und analog für  $\sigma_{y_{max}}$  und  $\tau_{xy_{max}}$ .

#### e) Verschiebungen.

Vorausgesetzt sei ein rechtwinkliges, kartesisches Koordinatensystem  $x, y$ . Die Verschiebungen  $u$  und  $v$  werden durch Integration der Ausdrücke für  $\epsilon_x$  und  $\epsilon_y$  erhalten, die zu diesem Zwecke auf folgende Form gebracht werden:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} \left[ \Delta \Phi - (1+\nu) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right] + \epsilon_T \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} \left[ \Delta \Phi - (1+\nu) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right] + \epsilon_T \end{aligned}$$

wo:  $\epsilon_T = \theta \cdot T$  ist.

Die Integration ergibt:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{E} \int \Delta \Phi \cdot dx - \frac{(1+\nu)}{E} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \theta \int T \cdot dx + \xi(y) \\ v &= \frac{1}{E} \int \Delta \Phi \cdot dy - \frac{(1+\nu)}{E} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \theta \int T \cdot dy + \eta(x) \end{aligned} \quad (13)$$

Darin sind die Integrationsfunktionen  $\xi(y)$  und  $\eta(x)$  durch die 3. der Gl. (6) miteinander verbunden:

$$\begin{aligned} &\int \frac{\partial}{\partial y} (\Delta \Phi) \cdot dx + \int \frac{\partial}{\partial x} (\Delta \Phi) \cdot dy + \\ &+ E \left[ \theta \left( \int \frac{\partial T}{\partial y} \cdot dx + \int \frac{\partial T}{\partial x} \cdot dy \right) + \frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx} \right] = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

#### 4. Anwendungen und Beispiele

##### a) Wahl des Koordinatensystems

Wie bei zahlreichen Problemen der Elastizitätstheorie bedeutet es auch hier einen Vorzug, das Koordinatensystem der Form des Randes anzupassen.

##### *Rechteckscheiben*

Rechtwinklige, kartesische Koordinaten  $x, y$ . Der Operator von Laplace wird:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

##### *Schiefe Scheiben*

Schiefwinklige, kartesische Koordinaten  $u, v$  (im Winkel  $\zeta$ ) mit dem Laplace'schen Operator:

$$\Delta = \frac{1}{\sin^2 \zeta} \left( \frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2 \cos \zeta \cdot \frac{\partial^2}{\partial u \cdot \partial v} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right).$$

##### *Kreis- und Kreisringscheiben*

Polarkoordinaten  $r$  und  $\varphi$  mit dem Operator:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Bei Polarsymmetrie wird:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}.$$

usw.

##### b) Integrationsmethoden

Die zu integrierenden Grundgleichungen haben die Form

$$\Delta \Delta F + 4\kappa^4 \cdot F = 0. \quad (1. \text{ Gl. } 2)$$

Eine sehr allgemeine, wenn auch nicht erschöpfende Integrationsmethode besteht im Ansatz

$$F = F_1 \cdot F_2$$

wo  $F_1$  und  $F_2$  je nur von einer der beiden unabhängigen Variablen abhängen. Durch geeignete Wahl von  $F_1$  entsteht für  $F_2$  eine totale Differentialgleichung.

Dieser Ansatz ist auf verschiedenartige Weise möglich. Die Summe solcher Einzelintegrale ist wieder ein Integral von entsprechend größerer Tragweite.

Es sind jedoch noch ganz andere Integrationsansätze obiger Differentialgleichung möglich. Beispielsweise kann gesetzt werden:

$$F = F_1 \cdot F_2 + F_3 \cdot F_4$$

wo  $F_1$  und  $F_3$  von der einen,  $F_2$  und  $F_4$  von der andern unabhängigen Variablen abhängen. Auch hier führt eine geeignete Wahl von  $F_1$  und  $F_3$  zu 2 totalen, simultanen Differentialgleichungen für  $F_2$  und  $F_4$ .

Dieser Ansatz beherrscht einen sehr weiten Integrationsbereich der vorliegenden Differentialgleichung.

*NB.:* Die Differentialgleichungen der Form (2) finden sich bei ganz anderen Problemen wieder, beispielsweise bei der Theorie der Platten auf nachgiebiger Unterlage, unter der Annahme, daß die Einsenkungen proportional den Bodenpressungen sind (Theorie der Bettungsziffer).

Die beim Temperaturproblem gewonnenen Integrale können daher sinngemäß auf diese oder andere „abgebildete“ Probleme übertragen werden.

*c) Anwendung auf die Rechteckscheibe  
(bzw. Pfeiler mit rechteckiger Basis)*

Die Seiten haben die Längen  $2a$  und  $2b$ . Das Koordinatensystem  $x, y$  hat seinen Ursprung im Scheibenmittelpunkt.

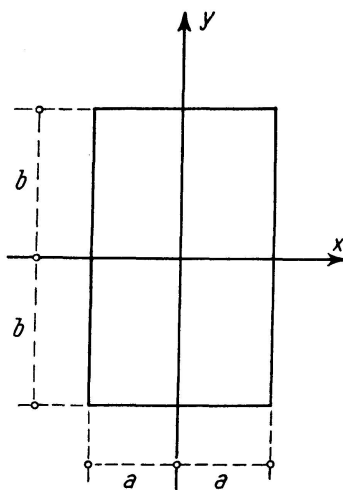


Fig. 1

*Integration*

Die Gl. (2) sind:

$$\Delta\Delta F + 4\kappa^4 \cdot F = 0$$

$$\Delta\Delta G + 4\kappa^4 \cdot G = 0$$

Der Ansatz lautet:

$$F = \cos \alpha x \cdot f_1(y)$$

$$G = \cos \alpha x \cdot g_1(y)$$

wo  $\alpha$  vorläufig unbestimmt ist.

Nach Einsetzen von  $F$  folgt eine totale Differentialgleichung für  $f_1(y)$ :

$$\frac{d^4 f_1}{dy^4} - 2\alpha^2 \cdot \frac{d^2 f_1}{dy^2} + (\alpha^4 + 4\kappa^4) \cdot f_1 = 0$$

$f_1$  wird seinerseits angesetzt als:  $f_1 = e^{r \cdot y}$  woraus für  $r$  folgende charakteristische Gleichung entsteht:

$$r^4 - 2\alpha^2 r^2 + \alpha^4 + 4\kappa^4 = 0$$

Mit  $r$  sind die komplex-konjugierten wie die negativen Größen ebenfalls Wurzeln, d. h. es bestehen folgende 4 Wurzeln:

$$r_{1,\dots,4} = \pm \lambda \pm i \cdot \mu,$$

deren Komponenten  $\lambda$  und  $\mu$  ausgerechnet, geschrieben werden können:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{R^2 + \alpha^2}$$

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{R^2 - \alpha^2}$$

mit der Abkürzung:

$$R^2 = \sqrt{\alpha^4 + 4\kappa^4}.$$

Zwischen  $\lambda$  und  $\mu$  bestehen folgende Beziehungen, wie man leicht einsieht:

$$\lambda^2 - \mu^2 = \alpha^2, \quad \lambda^2 + \mu^2 = R^2, \quad \lambda \cdot \mu = \pm \kappa^2.$$

Die Lösung besitzt für jeden Wert  $r_1$  bis  $r_4$  einen unabhängigen Anteil, der mit einer Integrationskonstanten multipliziert ist:

$$f_1(y) = C_1 \cdot e^{r_1 y} + C_2 \cdot e^{r_2 y} + C_3 \cdot e^{r_3 y} + C_4 \cdot e^{r_4 y}.$$

Analog wird  $g_1(y)$  bestimmt. Wegen der Gl. (1) unterscheidet sich  $g_1(y)$  von  $f_1(y)$  nur durch die Reihenfolge und gegebenenfalls das Vorzeichen der Integrationskonstanten.

Nach Umwandlung in reelle Funktionen entsteht folgende Tabelle, wo  $f_1(y)$  und  $g_1(y)$  aus dem Produkt der  $C_i$  mit den entsprechenden Funktionen des Spaltenkopfes entstehen und die Summe über diese Produkte gebildet wird.

	$\text{Ch}\lambda y \cdot \cos \mu y$	$\text{Ch}\lambda y \cdot \sin \mu y$	$\text{Sh}\lambda y \cdot \cos \mu y$	$\text{Sh}\lambda y \cdot \sin \mu y$
$f_1$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
$g_1$	$C_4$	$-C_3$	$C_2$	$-C_1$

Beim Übergang von  $f_1$  zu  $g_1$  permutieren sich paarweise die Konstanten der geraden, bzw. der ungeraden Funktionen in  $y$ .

Wird im Ansatz  $\cos \alpha x$  mit  $\sin \alpha x$  vertauscht, so entsteht ein neues Funktionenpaar  $f_2(y)$  und  $g_2(y)$ , das sich vom Vorhergehenden nur durch neue Integrationskonstanten  $D_1$  bis  $D_4$  unterscheidet.

Werden ferner  $x$  und  $y$  vertauscht, so entstehen Funktionenpaare in  $x$  mit entsprechenden Integrationskonstanten:

$$\begin{aligned} \text{Für } \cos \beta y: & \varphi_1(x), \psi_1(x), (L_1, \dots, L_4) \\ \text{für } \sin \beta y: & \varphi_2(x), \psi_2(x), (M_1, \dots, M_4) \end{aligned}$$

(die  $\varphi_i$  gehören zu  $F$ , die  $\psi_i$  zu  $G$ ).

Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung werden mit:

$$\pm \rho \pm i \cdot \eta$$

bezeichnet.

Endlich können die trigonometrischen durch die entsprechenden hyperbolischen Funktionen ersetzt werden, wobei in den Wurzeln  $\lambda$  und  $\mu$  vertauscht sind:

$$r'_{1,\dots,4} = \pm \mu \pm i \cdot \lambda$$

Damit entsteht als Summe eine Integrallösung mit 32 Integrationskonstanten, d.h. für die praktischen Anwendungen bereits ein bemerkenswert großer Vorrat an Funktionen, die entsprechend weite Anpassungsmöglichkeiten an die praktischen Anwendungen erlauben.

Die Argumente  $\alpha$  und  $\beta$  werden in den Anwendungsfällen mit den Abmessungen  $2a$  und  $2b$  der Rechteckscheibe in Beziehung gesetzt.

*d) Sonderfall einer Rechteckscheibe als Beispiel*

Der Berechnungsgang sowie seine charakteristischen Merkmale können am übersichtlichsten an einem einfachen Beispiel aufgezeigt werden, das als Grundlage für allgemeine Fälle dient.

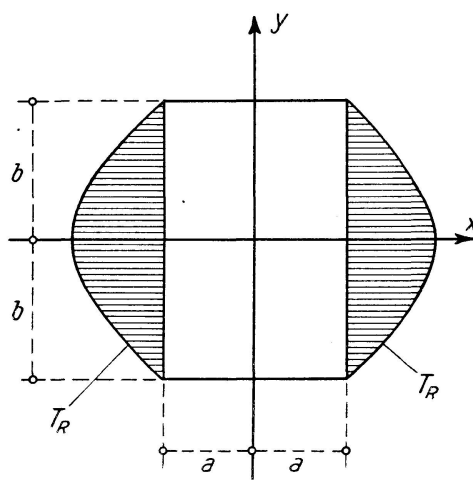


Fig. 2

Die Randtemperatur  $T_R$  sei symmetrisch in  $x = +a$  und  $x = -a$  als einfache cos-Welle in  $y$  angenommen:

$$\frac{T_R = T_0 \cdot \cos \beta y \cdot \sin \omega t}{(T_R \equiv 0 \text{ für } t=0)}$$

Für  $y = \pm b$  sei  $T_R \equiv 0$ .

Das Argument  $\beta$  ist daher:

$$\underline{\beta = \frac{\pi}{2b}}$$



Im Ansatz (II) sind hier  $F$  und  $G$  gerade Funktionen von  $x$  und  $y$ :

$$\begin{aligned} F &= \cos \beta y [C_1 \cdot \operatorname{Ch} \rho x \cdot \cos \eta x + C_2 \cdot \operatorname{Sh} \rho x \cdot \sin \eta x] \\ G &= \cos \beta y [C_2 \cdot \operatorname{Ch} \rho x \cdot \cos \eta x - C_1 \cdot \operatorname{Sh} \rho x \cdot \sin \eta x] \end{aligned}$$

Darin ist:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{R^2 + \beta^2} \\ \eta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{R^2 - \beta^2} \end{aligned}$$

mit:  $R^2 = \sqrt{\beta^4 + 4\kappa^4}.$

Die Randbedingungen sind:

$$\begin{aligned} \text{Für } x = \pm a: \quad & F(\pm a, y) = 0 \\ & G(\pm a, y) = T_0 \cdot \cos \beta y \\ \text{Für } y = \pm b: \quad & F(x, \pm b) \equiv 0 \\ & G(x, \pm b) \equiv 0 \end{aligned}$$

Diese beiden letzten Bedingungen sind wegen der Wahl von  $\beta$  automatisch erfüllt.

Es folgt nach kurzen Berechnungen:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{2 T_0 \cdot \operatorname{Sh} \rho a \cdot \cos \eta a}{\operatorname{Ch} 2 \rho a + \cos 2 \eta a} \\ C_2 &= - \frac{2 T_0 \cdot \operatorname{Ch} \rho a \cdot \sin \eta a}{\operatorname{Ch} 2 \rho a + \cos 2 \eta a} \end{aligned}$$

Nach Einsetzen dieser Werte und einigen Umformungen können die Funktionen  $F$  und  $G$  und damit die Lösung  $T$  auf eine für die praktische Auswertung einfache Form gebracht werden.

Analog kann der antimetrische Fall, wo am Rande  $x = -a$  die Randtemperatur  $-T_R = -T_0 \cdot \cos \beta y \cdot \sin \omega t$  herrscht, berechnet werden.  $F$  und  $G$  sind hier ungerade Funktionen von  $x$ .

Beide Fälle können auf geeignete Weise kombiniert werden.

*Ergebnisse*

$$\underline{T = \cos \omega t \cdot F + \sin \omega t \cdot G} \quad (\text{II})$$

*Symmetrischer Fall* ( $T = T_R$  für  $x = \pm a$ ):

$$\begin{aligned} F &= - \frac{T_0 \cdot \cos \beta y}{\operatorname{Ch} 2 \rho a + \cos 2 \eta a} [\operatorname{Sh} \rho (a+x) \cdot \sin \eta (a-x) + \operatorname{Sh} \rho (a-x) \cdot \sin \eta (a+x)] \\ G &= \frac{T_0 \cdot \cos \beta y}{\operatorname{Ch} 2 \rho a + \cos 2 \eta a} [\operatorname{Ch} \rho (a+x) \cdot \cos \eta (a-x) + \operatorname{Ch} \rho (a-x) \cdot \cos \eta (a+x)] \end{aligned}$$

*Antimetrischer Fall* ( $T = \pm T_R$  für  $x = \pm a$ ):

$$F = -\frac{T_0 \cdot \cos \beta y}{\operatorname{Ch} 2 \rho a + \cos 2 \eta a} [\operatorname{Sh} \rho (a+x) \cdot \sin \eta (a-x) - \operatorname{Sh} \rho (a-x) \cdot \sin \eta (a+x)]$$

$$G = \frac{T_0 \cdot \cos \beta y}{\operatorname{Ch} 2 \rho a + \cos 2 \eta a} [\operatorname{Ch} \rho (a+x) \cdot \cos \eta (a-x) - \operatorname{Ch} \rho (a-x) \cdot \cos \eta (a+x)]$$

Die Funktionen in Klammern lassen die Randbedingungen deutlich hervortreten und sind für die numerische Berechnung besonders geeignet.

*Amplituden* (siehe 2., d)).

$$T_{\max} = \sqrt{F^2 + G^2}.$$

*Symmetrischer Fall:*

$$T_{\max} = T_0 \cdot \cos \beta y \cdot \sqrt{\frac{\operatorname{Ch} 2 \rho x + \cos 2 \eta x}{\operatorname{Ch} 2 \rho a + \cos 2 \eta a}}$$

Für  $x = y = 0$  folgt:  $T_{\max}(0, 0) = \frac{T_0 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{\operatorname{Ch} 2 \rho a + \cos 2 \eta a}}$

Für  $x = \frac{a}{2}, y = 0$  folgt:  $T_{\max}\left(\frac{a}{2}, 0\right) = T_0 \cdot \sqrt{\frac{\operatorname{Ch} \rho a + \cos \eta a}{\operatorname{Ch} 2 \rho a + \cos 2 \eta a}}$

*Antimetrischer Fall:*

$$T_{\max} = \frac{T_0 \cdot \cos \beta y}{\operatorname{Ch} 2 \rho a + \cos 2 \eta a} \sqrt{(\operatorname{Ch} 2 \rho a - \cos 2 \eta a)(\operatorname{Ch} 2 \rho x - \cos 2 \eta x)}$$

Für  $x = y = 0$  folgt:  $T_{\max}(0, 0) = 0$  (Antimetrie-Achse!)

Für  $x = \frac{a}{2}, y = 0$  folgt:  $T_{\max}\left(\frac{a}{2}, 0\right) = T_0 \cdot \frac{\sqrt{(\operatorname{Ch} 2 \rho a - \cos 2 \eta a)(\operatorname{Ch} \rho a - \cos \eta a)}}{\operatorname{Ch} 2 \rho a + \cos 2 \eta a}$

*Temperaturspannungen*

Ein Hinweis auf die Lösung für den symmetrischen Fall soll genügen. Das partikuläre Integral der Airy'schen Spannungsfunktion lautet (Gl. 10):

$$\Phi_0 = \frac{E \theta}{2 \kappa^2} (\cos \omega t \cdot G - \sin \omega t \cdot F)$$

und erzeugt an den Rändern  $x = \pm a$  Normalspannungen  $\sigma_{x_0}$  und Schubspannungen  $\tau_{xy_0}$ , an den Rändern  $y = \pm b$  nur Schubspannungen  $\tau_{xy_0}$ , während die Normalspannungen  $\sigma_{y_0}$  dort verschwinden.

Es wird daher ein Integral  $\Phi_1$  der homogenen Gleichung hinzugefügt, so daß

$$\Delta \Delta \Phi_1 = 0$$

und:

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1$$

die Randbedingungen erfüllt unter der Voraussetzung, daß die Rechteckscheibe an den Rändern spannungslos ist. Es ist somit:

$$\begin{aligned} \text{Für } x = \pm a: \quad & \sigma_{x_0} + \sigma_{x_1} = 0 \\ & \tau_{xy_0} + \tau_{xy_1} = 0 \\ \text{Für } y = \pm b: \quad & \sigma_{y_1} = 0 \\ & \tau_{xy_0} + \tau_{xy_1} = 0. \end{aligned}$$

$\Phi_1$  wird angesetzt in der Form (Gl. 11):

$$\Phi_1 = \cos \omega t [\cos \alpha x (U_1 \operatorname{Ch} \alpha y + U_2 y \operatorname{Sh} \alpha y) + \cos \beta y (U_3 \operatorname{Ch} \beta x + U_4 x \operatorname{Sh} \beta x)] \\ + \sin \omega t [\cos \alpha x (V_1 \operatorname{Ch} \alpha y + V_2 y \operatorname{Sh} \alpha y) + \cos \beta y (V_3 \operatorname{Ch} \beta x + V_4 x \operatorname{Sh} \beta x)]$$

$$\begin{aligned} \text{wo} \quad & \cos \alpha a = 0, \quad \cos \beta b = 0 \\ \text{und} \quad & U_1, \dots, U_4; \quad V_1, \dots, V_4 \end{aligned}$$

Integrationskonstanten sind. Somit entsteht das allgemeine Randwertproblem der Rechteckscheibe. Die Randbedingungen für die Normalspannungen  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$  an den Rändern  $x = \pm a$  bzw.  $y = \pm b$  können streng erfüllt werden und führen zu folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} U_3 \cdot \operatorname{Ch} \beta a + U_4 \cdot a \cdot \operatorname{Sh} \beta a &= - \frac{E \theta T_0}{2 \kappa^2} \\ V_3 \cdot \operatorname{Ch} \beta a + V_4 \cdot a \cdot \operatorname{Sh} \beta a &= 0 \\ U_1 \cdot \operatorname{Ch} \alpha b + U_2 \cdot b \cdot \operatorname{Sh} \alpha b &= 0 \\ V_1 \cdot \operatorname{Ch} \alpha b + V_2 \cdot b \cdot \operatorname{Sh} \alpha b &= 0. \end{aligned}$$

Die Randbedingungen für die Schubspannungen sind weniger einfach und erfordern entweder Reihenentwicklungen oder die Anwendung der Minimalbedingung nach Ritz. In vielen Fällen dürfte auch die Bedingung genügen, daß der Mittelwert der Schubspannungen über den halben Rand verschwindet. Solche Gleichgewichtssysteme von Randschubspannungen (Gleichgewicht über den *halben* Rand) klingen schnell ab.

Damit ist im vorliegenden Fall das Problem der Temperaturspannungen grundsätzlich gelöst.

Die gegenüber der bloßen Bestimmung der Temperaturverteilung erhöhte Schwierigkeit des Problems der Temperaturspannungen ist, wie schon angedeutet, die Folge der Verkoppelung von zwei verschiedenen partiellen Differentialgleichungen und die damit verbundene Notwendigkeit, zwischen zwei verschiedenen Funktionengruppen eine Brücke zu schlagen. Jedoch ist der numerische Arbeitsaufwand, bei geeigneter Wahl der Berechnungsmethoden, bedeutend geringer, als dies auf den ersten Blick scheint.

#### e) Hinweis auf den allgemeinen Fall der Rechteckscheibe

Der vorgängig behandelte Sonderfall bildet die Grundlage zum allgemeinen Fall der Rechteckscheibe, bei der die gegebenen Randtemperaturen  $T_R$  beliebige Funktionen längs der Ränder darstellen.

Der geeignete Lösungsweg ist durch die Entwicklung der Randtemperaturen  $T_R$  in Fourier'sche Reihen vorgezeichnet (der obige Sonderfall enthielt nur eine „Welle“ der Fourier'schen Entwicklung). Man gelangt damit zur Überlagerung von Lösungen, wie sie in Abschnitt d) für den symmetrischen und antisymmetrischen Fall gegeben waren.

### Beispiel

Für  $x = \pm a$  und  $y = \pm b$  sei:

$$T_R = T_0 \cdot \sin \omega t \quad (T_0 = \text{konstant}).$$

Die Temperaturverteilung ist in  $x$  und  $y$  symmetrisch (Koordinatensystem wie früher).

$T_0$  wird in Fourier'sche Reihen entwickelt:

Rand  $y = \pm b$ :                      Periode =  $4a$ ,     $\alpha_m = \frac{m \cdot \pi}{2a}$

$$T_0(x) = \frac{4 T_0}{\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin m \pi/2}{m} \cdot \cos \alpha_m x$$

Rand  $x = \pm a$ :                      Periode =  $4b$ ,     $\beta_n = \frac{n \pi}{2b}$

$$T_0(y) = \frac{4 T_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin n \pi/2}{n} \cdot \cos \beta_n y$$

Die Lösung wird hier ohne Ableitung angegeben:

$$T = \cos \omega t \left[ - \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} A_m \cdot \cos \alpha_m x \cdot S_m(y) - \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_n \cdot \cos \beta_n y \cdot S_n(x) \right] \\ + \sin \omega t \left[ \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} A_m \cdot \cos \alpha_m x \cdot C_m(y) + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_n \cdot \cos \beta_n y \cdot C_n(x) \right]$$

Darin bedeuten:

$$A_m = \frac{2 T_0}{\pi} \cdot \frac{\sin m \pi/2}{m} \cdot \frac{1}{\text{Sh}^2 \lambda_m b + \cos^2 \mu_m b}$$

$$B_n = \frac{2 T_0}{\pi} \cdot \frac{\sin n \pi/2}{n} \cdot \frac{1}{\text{Sh}^2 \rho_n a + \cos^2 \eta_n a}$$

$$S_m(y) = \text{Sh} \lambda_m (b+y) \cdot \sin \mu_m (b-y) + \text{Sh} \lambda_m (b-y) \cdot \sin \mu_m (b+y)$$

$$S_n(x) = \text{Sh} \rho_n (a+x) \cdot \sin \eta_n (a-x) + \text{Sh} \rho_n (a-x) \cdot \sin \eta_n (a+x)$$

$$C_m(y) = \text{Ch} \lambda_m (b+y) \cdot \cos \mu_m (b-y) + \text{Ch} \lambda_m (b-y) \cdot \cos \mu_m (b+y)$$

$$C_n(x) = \text{Ch} \rho_n (a+x) \cdot \cos \eta_n (a-x) + \text{Ch} \rho_n (a-x) \cdot \cos \eta_n (a+x)$$

$\lambda_m, \mu_m$ : Wurzeln der charakteristischen Gleichung mit  $\alpha_m$ .

$\rho_n, \eta_n$ : Wurzeln der charakteristischen Gleichung mit  $\beta_n$ .

Die Konvergenz obiger Reihenentwicklungen ist bemerkenswert rasch.

Für die numerische Auswertung ist das Verhalten der Wurzeln  $\lambda_m, \mu_m$  bzw.  $\rho_n, \eta_n$  für große Werte  $m$  und  $n$  wichtig:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_m \rightarrow \alpha_m \\ \mu_m \rightarrow 0 \end{array} \right\} \text{ für } m \rightarrow \infty, \quad \left. \begin{array}{l} \rho_n \rightarrow \beta_n \\ \eta_n \rightarrow 0 \end{array} \right\} \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Daraus folgt für die Funktionen  $S_m(y)$ , usw.:

$$S_m(y) \rightarrow 0$$

$$C_m(y) \rightarrow 2 \operatorname{Ch} \alpha_m b \cdot \operatorname{Ch} \alpha_m y \cong \frac{1}{2} \cdot e^{\alpha_m(b+y)}$$

$$S_n(x) \rightarrow 0$$

$$C_n(x) \rightarrow 2 \operatorname{Ch} \beta_n a \cdot \operatorname{Ch} \beta_n x \cong \frac{1}{2} \cdot e^{\beta_n(a+x)}$$

Für große Werte  $m$  und  $n$  hat die Lösung folgende einfache Gestalt:

$$T \cong \frac{4 T_0}{\pi} \cdot \sin \omega t \left[ \sum_{m: \text{gross}} \frac{\sin m \pi / 2 \cdot \cos \alpha_m x \cdot e^{\alpha_m y}}{m \cdot e^{\alpha_m b}} + \sum_{n: \text{gross}} \frac{\sin n \pi / 2 \cdot \cos \beta_n y \cdot e^{\beta_n x}}{n \cdot e^{\beta_n a}} \right].$$

$T$  wird somit eine Bipotentialfunktion!

Es empfiehlt sich, allgemeine Fälle aus symmetrischen und antimetrischen Grundfällen zu kombinieren.

### Temperaturspannungen

Der Ansatz für  $\Phi_1$  ist eine Überlagerung des entsprechenden Ansatzes im Abschnitt d). Die Erfüllung der Randbedingungen kann beliebig genau durchgeführt werden.

### Sonderfall

Es sei  $b \gg a$ , d.h. es liege der Fall einer in  $y$ -Richtung sehr langgestreckten Rechteckscheibe vor, so daß  $\beta_n \cong 0$  gesetzt werden kann. Es folgt:

$$\rho_n \cong \eta_n \cong \kappa, \quad \cos \beta_n y \cong 1, \quad \sin \beta_n y \cong 0, \quad A_m \cong 0.$$

Die Lösung für  $T$  ist hier nur noch eine Funktion von  $x$  und mit dem in der Einleitung erwähnten „linearen Problem“ identisch.

### f) Die Halbebene; Beispiel

Die Randtemperatur  $T_R$  sei, für  $y > 0$ :

$$T_R = T_0 \cdot e^{-\alpha y} \cdot \sin \omega t$$

( $\alpha > 0$ , beliebig)

Für  $y < 0$  sei  $T_R$  symmetrisch.

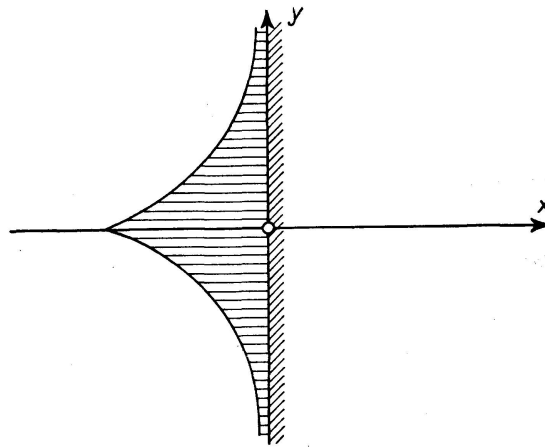


Fig. 3

Allgemeine Lösung:  $T = \cos \omega t \cdot F + \sin \omega t \cdot G$ .  $F$  und  $G$  werden angesetzt als:

$$F = e^{-\alpha y} \cdot f(x)$$

$$G = e^{-\alpha y} \cdot g(x)$$

Analog früher folgt aus einer charakteristischen Gleichung für  $s$ , wenn  $f$  und  $g$  als  $e^{sx}$  eingeführt werden:

$$s_{1, \dots, 4} = \pm \nu \pm i \cdot \zeta$$

mit folgenden Eigenschaften:

$$\nu^2 - \zeta^2 = -\alpha^2$$

$$\nu \cdot \zeta = \pm \kappa^2$$

Da für  $x \rightarrow \infty$  die Lösung  $T \rightarrow 0$  strebt, sind nur die Lösungen mit negativem  $\nu$  möglich.

$F$  und  $G$  können leicht auf eine reelle Form gebracht werden und es folgt:

$$F = e^{-\alpha y} \cdot e^{-\nu x} [C_1 \cdot \cos \zeta x + C_2 \cdot \sin \zeta x]$$

$$G = e^{-\alpha y} \cdot e^{-\nu x} [-C_2 \cdot \cos \zeta x + C_1 \cdot \sin \zeta x]$$

Randbedingungen für  $x=0$ :

$$T = T_R = T_0 \cdot e^{-\alpha y} \cdot \sin \omega t$$

d. h.

$$F(0, y) \equiv 0$$

$$G(0, y) \equiv T_0 \cdot e^{-\alpha y}$$

Daraus folgt:

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = -T_0$$

und die Lösung lautet:

$$\begin{aligned} T &= T_0 \cdot e^{-\alpha y} \cdot e^{-\nu x} [-\cos \omega t \cdot \sin \zeta x + \sin \omega t \cdot \cos \zeta x] \\ &= T_0 \cdot e^{-\alpha y} \cdot e^{-\nu x} \cdot \sin (\omega t - \zeta x) \end{aligned}$$

$T$  hat demnach die Form von „gedämpften Schwingungen“.

*Amplitude*

Es folgt sofort:

$$\underline{T_{max} = T_0 \cdot e^{-\alpha y} \cdot e^{-\nu x}}$$

für  $t=t_1$  aus:  $\operatorname{tg} \omega t_1 = -\cotg \zeta x$ .

*Temperaturspannungen*

Neben  $\Phi_0$  aus  $F$  und  $G$  muß hier, wie früher, noch eine Funktion  $\Phi_1$  bestimmt werden. Diese gewinnen wir sehr einfach aus dem sogenannten „strahligen“, für die Halbebene charakteristischen Spannungszustand durch Überlagerung (Integration) der bekannten Spannungszustände infolge einer Rand-Normalkraft und Randscherkraft.

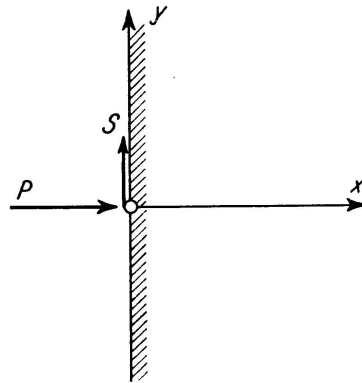


Fig. 4

Für  $P$  in 0 ist, in den Koordinaten  $x$  und  $y$ :

$$\Phi_P = \frac{P}{\pi} \cdot y \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

Für  $S$  in 0 ist:

$$\Phi_S = \frac{P}{\pi} \cdot x \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

Durch Integration der  $\Phi_P$  und  $\Phi_S$  über  $y$  von 0 bis  $\infty$  und mit 2 multipliziert, können die infolge  $\Phi_0$  entstandenen Randspannungen restlos eliminiert und durch Überlagerung der wahre Spannungszustand ermittelt werden.

*g) Weitere Anwendungen*

Auf weitere Anwendungen der behandelten Theorie sei kurz hingewiesen:

*Behälter mit Kreisringquerschnitt*

Innen oder außen oszillierende Randtemperatur. Die Lösung in Polarkoordinaten führt auf Bessel'sche Funktionen, die tabuliert sind.

### *Halbebene mit Kreisloch*

Hier ist die Anwendung der Bipolarkoordinaten von Vorteil.

### *Keilförmige Scheibe*

Hier können polar- oder schiefwinklige kartesische Koordinaten benutzt werden.

### *Halbstreifen mit totaler Einspannung an der Schmalseite (Mauerproblem)*

Die Randbedingungen lauten, daß an der Schmalseite die Verschiebungen  $u$  und  $v$  verschwinden.

### *Parallelogrammförmige Scheibe*

Die Lösung ist in schiefwinkligen kartesischen Koordinaten darstellbar.

In allen Fällen führt eine Betrachtung über die Art der Konvergenz der Lösungen zu wesentlichen Vereinfachungsmöglichkeiten bei der numerischen Auswertung.

## **Zusammenfassung**

In dieser Arbeit werden die theoretischen Grundlagen der Temperaturverteilung sowie der Temperaturspannungen für 2-dimensionale Elemente (Scheiben, Pfeiler) entwickelt, falls die Außentemperaturen periodisch veränderlich sind.

Einige Anwendungen und Beispiele vermitteln ein Bild über die Integrationsmöglichkeiten der Grundgleichungen im Zusammenhang mit den Randbedingungen und enthalten einige Hinweise für praktisch wichtige Fälle.

Diese Theorie findet Anwendung bei Staumauer- sowie bei Behälterproblemen, wo die Temperatureinwirkung eine maßgebende Rolle spielt, sowie bei „abgebildeten“ Problemen anderer Art mit denselben Grundgleichungen.

## **Résumé**

Ce mémoire établit les bases théoriques de la répartition de la température et des contraintes thermiques dans les éléments bidimensionnels (parois minces, piliers indéfinis) dans le cas de températures extérieures périodiquement variables.

Quelques applications et exemples donnent un aperçu sur les méthodes d'intégration des équations fondamentales en rapport avec les conditions aux limites et contiennent des indications pour quelques cas importants de la pratique.



La théorie développée sert avant tout à résoudre les problèmes thermiques des barrages et des récipients, quand l'effet de la température joue un rôle prépondérant; elle peut être également appliquée à tous les problèmes „similaires“ qui, bien que de nature différente, conduisent au même type d'équations fondamentales.

### Summary

In this contribution, the theoretical principles of temperature distribution and also of thermal stresses for two-dimensional elements (slabs, pillars) are developed, in cases where the outside temperatures are periodically altering.

Some applications and examples illustrate the integration possibilities of the fundamental equations in connection with the edge conditions, and furnish some hints for practically important cases.

This theory finds application in problems regarding dams and containers, where the temperature effect plays an important part, as also in „similar“ problems of another kind with the same fundamental equations.