

Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

Band: 12 (1952)

Artikel: Die durchlaufenden, prismatischen Faltwerke

Autor: Gruber, Ernst

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-12320>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 15.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Die durchlaufenden, prismatischen Faltwerke

Les systèmes continus de parois portantes prismatiques

Continuous cylindrical beams of prismatic cross-section

Dr. Ing. habil ERNST GRUBER, Oberregierungsbaurat z. Wv.,
Eldingen/Celle, Deutschland

A. Einleitung

Im Stahlbeton- und Stahlbau finden Schalenkonstruktionen in steigendem Maße Verwendung. Während nun die stetig gekrümmten Schalen in ihrer Theorie schon weitgehend erforscht sind, wurden über die sogenannten Faltwerke — das sind Schalen bzw. Membranen, welche aus ebenflächigen Teilen zusammengesetzt sind — bisher nur Untersuchungen über die Balken- und Kragsysteme angestellt¹⁾. In der Folge sollen nun die sogenannten „Durchlaufenden Faltwerke“, die ein- oder mehrfach zwischengestützt sind, behandelt werden. Um den Zusammenhang mit den bisherigen Entwicklungen des Verfassers herzustellen, werden vorerst die „gelenkigen Systeme“, welche längs der Kanten n nur scharnierartig zusammenhängen, kurz behandelt.

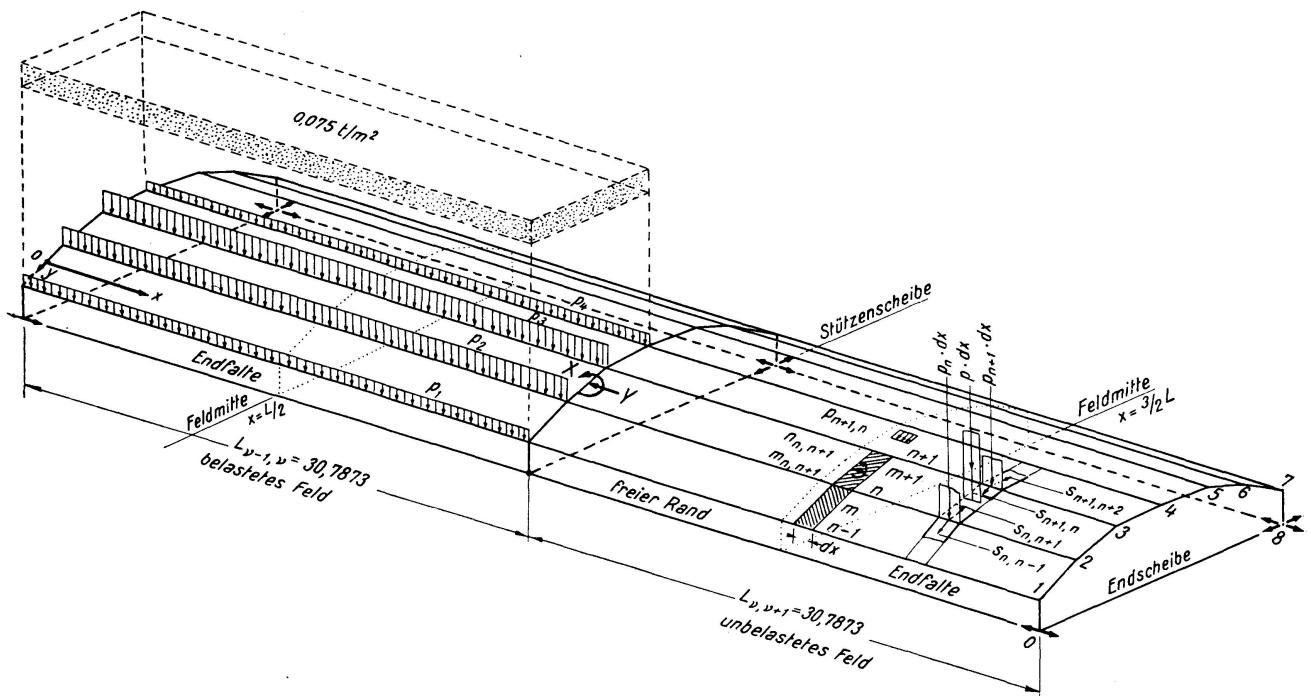
B. Gelenkwerke

Im allgemeinen wird das Tragwerk von Linienlasten p ergriffen werden, die zwischen den Kanten n und $n+1$ liegen. Diese p ersetzt man zunächst durch zwei gleichwertige, in n und $n+1$ wirkende Knotenlasten p_n und p_{n+1} ,

¹⁾ GRUBER E.:

1. „Berechnung prismatischer Scheibenwerke.“ Int. Ver. f. Brückenbau- und Hochbau, Abh. I. Seite 225 (1932).
2. „Die Berechnung pyramidenartiger Scheibenwerke und ihre Anwendung auf Kaminkübler.“ Int. Ver. f. Brückenbau- und Hochbau, Abh. II. Seite 206 (1934).
3. „Die Berechnung äußerlich statisch unbestimmter prismatischer Scheibenwerke.“ Int. Ver. f. Brückenbau und Hochbau, Abh. III. Seite 134 (1935).
4. „Hohlträger als Faltwerke.“ Int. Ver. f. Brückenbau und Hochbau, Abh. VII. Seite 139 (1943/44).
5. „Die Querverteilung der Lasten bei Brücken mit 2 Hauptträgern.“ Bauingenieur 1942. Seite 323.
6. „Die exakte Membranentheorie der Faltwerke.“ Int. Ver. f. Brückenbau und Hochbau, Abh. XI.
7. „Gekrümmte Faltwerke.“ Bautechnik-Archiv Ernst & Sohn, Berlin, Heft Nr. 7.

welche man, solange in einer Kante n nur zwei Falten zusammenstoßen, auf statisch bestimmtem Wege in die Komponenten $s_{n,n+1}$ und $s_{n,n-1}$ zerlegen kann (Fig. 1)²⁾. Die Reihenfolge der Indices gibt hierbei die Kraftrichtung an. Für jede Falte $n, n+1$ erhält man zwei Kraftwirkungen $s_{n,n+1}$ und $s_{n+1,n}$, die sich zur Transversallast $p_{n+1,n} = s_{n+1,n} - s_{n,n+1}$ zusammensetzen. Neben diesen werden im allgemeinen noch in den Achsen der Falten $n, n+1$ wirkende stetig verteilte Achsiallasten $n_{n,n+1}$ und stetig verteilte Momentenlasten $m_{n,n+1}$ vorhanden sein.



Kanten n die bezogenen Dehnungen der anliegenden Ränder zweier benachbarter Falten punktweise übereinstimmen. Das heißt

$$\frac{1}{E_{n-1, n}} \left(\frac{M_{n-1, n}}{J_{n-1, n}} h_{m, n} + \frac{N_{n-1, n}}{F_{n-1, n}} \right) = \frac{1}{E_{n, n+1}} \left(- \frac{M_{n, n+1}}{J_{n, n+1}} h_{m+1, n} + \frac{N_{n, n+1}}{F_{n, n+1}} \right). \quad (4)$$

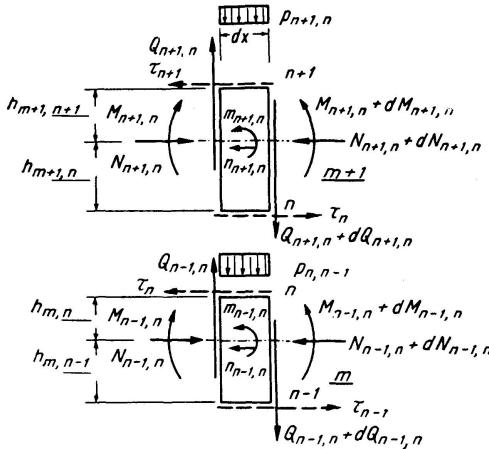


Fig. 2

Differentiert man dies bei konstanten J und F einmal nach x , setzt Gl. (2) und (3) sowie Gl. (2') und (3') ein, so folgen die Beziehungen

$$\begin{aligned} \tau_{n-1} \left(\frac{h_{m, n} \cdot h_{m, n-1}}{J_{n-1, n}} - \frac{1}{F_{n-1, n}} \right) + \tau_n \left(\frac{h_{m, n}^2}{J_{n-1, n}} + \frac{h_{m+1, n}^2}{J_{n, n+1}} + \frac{1}{F_{n-1, n}} + \frac{1}{F_{n, n+1}} \right) \\ + \tau_{n+1} \left(\frac{h_{m+1, n} \cdot h_{m+1, n+1}}{J_{n, n+1}} - \frac{1}{F_{n, n+1}} \right) = - \frac{n_{n-1, n}}{F_{n-1, n}} + \frac{n_{n, n+1}}{F_{n, n+1}} \\ - (-Q_{n-1, n} + m_{n-1, n}) \frac{h_{m, n}}{J_{n-1, n}} - (-Q_{n, n+1} + m_{n, n+1}) \frac{h_{m+1, n}}{J_{n, n+1}}, \end{aligned} \quad (5)$$

die man aber nur unmittelbar anwenden kann, wenn man die $Q_{n, n+1}$ für einzelne Punkte ad hoc so angeben kann, daß sich daraus die Integrationskonstanten der Gl. (1) und (1') ergeben. Ist dies nicht möglich, so muß man Gl. (5) nochmals nach x differentieren und es folgt mit Benutzung von Gl. (1) und (1') für jede Kante n eine Bedingung

$$\begin{aligned} \tau'_{n-1} \left(\frac{h_{m, n} \cdot h_{m, n-1}}{J_{n-1, n}} - \frac{1}{F_{n-1, n}} \right) + \tau'_n \left(\frac{h_{m, n}^2}{J_{n-1, n}} + \frac{h_{m+1, n}^2}{J_{n, n+1}} + \frac{1}{F_{n-1, n}} + \frac{1}{F_{n, n+1}} \right) \\ + \tau'_{n+1} \left(\frac{h_{m+1, n} \cdot h_{m+1, n+1}}{J_{n, n+1}} - \frac{1}{F_{n, n+1}} \right) = - \frac{n'_{n-1, n}}{F_{n-1, n}} + \frac{n'_{n, n+1}}{F_{n, n+1}} \\ - (p_{n-1, n} + m'_{n-1, n}) \frac{h_{m, n}}{J_{n-1, n}} - (p_{n, n+1} + m'_{n, n+1}) \frac{h_{m+1, n}}{J_{n, n+1}}. \end{aligned} \quad (5')$$

Bei der Bildung dieses Systems sind jeweils die Randbedingungen zu berücksichtigen. So ist z. B. für einen freien Rand $\tau_0 \equiv 0$ (Fig. 1), für symmetrische

Tragwerke werden bei symmetrischer Belastung die in der Symmetrieebene liegenden $\tau \equiv 0$ und bei antimetrischer Belastung die zur Symmetrieebene symmetrisch liegenden τ einander gleich usw., so daß wir ebenso viele Gl. (5) bzw. (5') aufstellen können, als unbekannte Funktionen $\tau_n(x)$ vorhanden sind. Da bei der Herleitung dieser Beziehungen über die Art der Belastung und der Lagerung des Tragwerkes keinerlei einschränkende Voraussetzungen getroffen werden mußten, gilt (5) bzw. (5') ganz allgemein für jedes prismatische, gelenkige Faltwerk.

C. Das gelenkige Balkenfaltwerk

a) Allgemeine Betrachtung

Löst man die Gl. (5') nach den τ_n' algebraisch auf und integriert die Ergebnisse, so ergibt sich

$$\tau_n = \int \tau_n' dx + C_n = \bar{\tau}_n + C_n. \quad (6)$$

Können hingegen die Gl. (5) benutzt werden, so folgen die obigen τ_n unmittelbar.

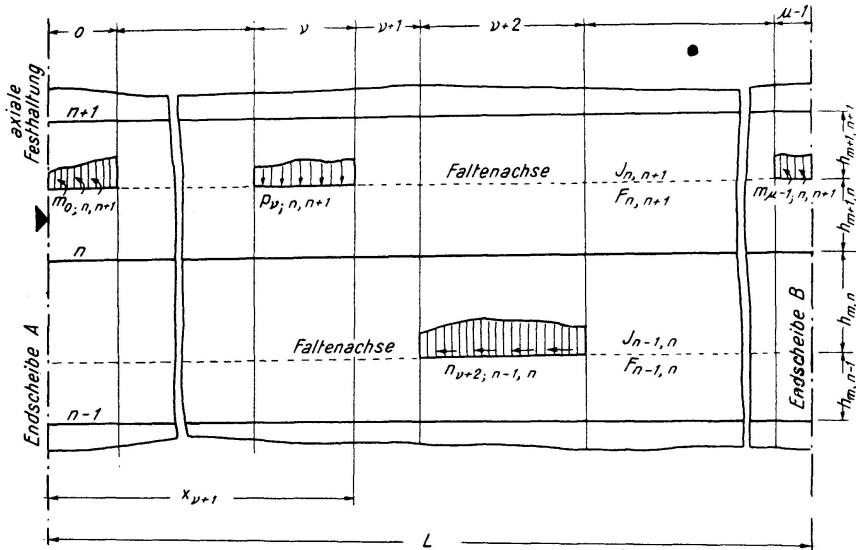


Fig. 3

Die in Gl. (6) vorhandenen Integrationskonstanten C_n ergeben sich aus der Belastungsart des Balkenfaltwerkes, bei welchem die einzelnen Falten nur in zwei Lagerscheiben A und B gestützt sind. Die letzteren sollen so beschaffen sein, daß sie nur in ihren Achsebenen liegende Stützkräfte aufnehmen können.

Im allgemeinen werden die Lasten nur abteilungsweise stetig sein, wie es in Fig. 3, in der das Faltwerk in eine Ebene geklappt zur Darstellung gebracht ist, ersichtlich ist. Legt man durch jede Unstetigkeitsstelle der Belastung eine

zu den Auflagerscheiben A und B parallele Ebene, so wird das Faltwerk in μ Sektionen zerlegt. Schreibt man für jede von diesen ein System (5') an, so ergibt sich für jede Sektion ein Lösungssatz

$$\tau_{n,\nu} = \sum_{\rho=0}^{\rho=m} a_{n,\rho} \int (p_{\rho,\rho+1;\nu} + m'_{\rho,\rho+1;\nu}) dx + \sum_{\rho=0}^{\rho=m} b_{n,\rho} \cdot n_{\rho,\rho+1;\nu} + C_{n,\nu} = \bar{\tau}_{n,\nu} + C_{n,\nu}. \quad (7)$$

Stellt man in jeder Falte für die beiden, jeweils einer Sektionsgrenze $\nu, \nu+1$ unmittelbar anliegenden Faltenelemente die Gleichgewichtsbedingung (1) bzw. (1') auf, so ergibt sich, daß beim Überschreiten von $\nu, \nu+1$ die Querkräfte keine endlichen Sprünge machen, wenn zunächst unendlich konzentrierte Lastwirkungen, wie z. B. Einzellasten, nicht vorhanden sind. Es gilt daher

$$Q_{n,n+1;\nu}^{(x_{\nu+1})} = Q_{n,n+1;\nu+1}^{(x_{\nu+1})}. \quad (8)$$

Bildet man also für zwei benachbarte Sektionen die Gl. (5), löst diese nach $\tau_{n,\nu}$ und $\tau_{n,\nu+1}$ auf, setzt $x = x_{\nu+1}$ und bildet $\tau_{n;\nu+1} - \tau_{n;\nu} = \Delta \tau_{n;\nu,\nu+1}$, so folgt wegen Gl. (8)

$$\Delta \tau_{n;\nu,\nu+1} = \sum_{\rho=0}^{\rho=m} a_{n,\rho} \cdot \Delta m_{\rho,\rho+1;\nu,\nu+1} + \sum_{\rho=0}^{\rho=m} b_{n,\rho} \cdot \Delta n_{\rho,\rho+1;\nu,\nu+1}, \quad (9)$$

wobei die Δ die Sprünge bedeuten, welche die τ_n , $m_{\rho,\rho+1}$ und $n_{\rho,\rho+1}$ beim Übergang über die Sektionsgrenze $\nu, \nu+1$ erleiden. An dieser gilt unter Benutzung von Gl. (7)

$$\bar{\tau}_{n;\nu}^{(x_{\nu+1})} + C_{n,\nu} + \Delta \tau_{n;\nu,\nu+1} = \bar{\tau}_{n;\nu+1}^{(x_{\nu+1})} + C_{n,\nu+1} \quad (10)$$

oder

$$C_{n,\nu} - C_{n,\nu+1} = \bar{\tau}_{n;\nu+1}^{(x_{\nu+1})} - \bar{\tau}_{n;\nu}^{(x_{\nu+1})} - \Delta \tau_{n;\nu,\nu+1} = \Delta_{n;\nu,\nu+1}. \quad (11)$$

Solche Gleichungen gibt es $\mu-1$ je Falte. Addiert man hiervon die ersten ν Stück, so ergibt sich

$$C_{n,\nu} = - \sum_{\nu=0}^{\nu=\nu} \Delta_{n;\nu,\nu+1} + C_{n,o}, \quad (12)$$

womit für jede Kante n alle $C_{n,\nu}$ durch $C_{n,o}$ ausgedrückt sind. Aus Gl. (7) und (12) folgt also

$$\tau_{n;\nu} = \bar{\tau}_{n;\nu} - \sum_0^{\nu} \Delta_{n;\nu,\nu+1} + C_{n,o}. \quad (13)$$

Da die Auflagerscheiben nur normal zu den Faltenachsen gerichtete Reaktionen übernehmen können, lautet für die Falte $n, n+1$ die Gleichgewichtsbedingungen gegen achsparallele Verschiebung

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1} \int_{\nu}^{\nu+1} (-\tau_{n;\nu} + \tau_{n+1;\nu} + n_{\rho,\rho+1;\nu}) dx = 0, \quad (14)$$

was mit Gl. (13) in

$$L(C_{n+1,o} - C_{n,o}) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\mu-1} [(x_{\nu+1} - x_{\nu}) \sum_0^{\nu} (\Delta_{n+1;\nu,\nu+1} - \Delta_{n;\nu,\nu+1}) + \int_{\nu}^{\nu+1} (\bar{\tau}_{n;\nu} - \bar{\tau}_{n+1;\nu} - n_{\rho,\rho+1;\nu}) dx] \quad (15)$$

übergeht, woraus man unter Berücksichtigung der zu den Gl. (5) bzw. (5') gehörigen Randbedingungen die Konstanten $C_{n,o}$ durch einfache algebraische Additionen bestimmen kann.

Da im allgemeinen die Summe der Achsialkräfte aller Falten nicht Null sein wird, muß das Faltwerk gegen achsparallele Verschiebung gesichert werden. Bei unserem Balkenfaltwerk genügt es, wenn bei *einer* Falte *eine* achsparallele Lagerung vorgesehen wird (Fig. 3). Man beginnt dann mit der Auflösung der Gl. (15) an einem der kraftfreien Ränder, oder bei symmetrischen Verhältnissen an der Symmetrieebene und arbeitet sich bis zu Kante n der waagrecht gestützten Falte $n, n+1$ vor. Sodann beginnt man vom zweiten kraftfreien Rand und geht bis zur Kante $n+1$. Stellt man dann auch für die Falte $n, n+1$ die Gleichgewichtsbedingung gegen achsparallele Verschiebung her, so erhalten wir daraus die seitliche Stützkraft des Balkenwerkes.

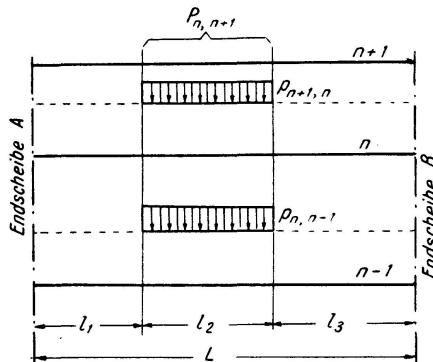


Fig. 4

b) *Transversale Einzellasten*

Wie rasch dieses Verfahren zum Ziele führt, soll an dem Belastungsfall der Fig. 4 gezeigt werden. Teilt man das Tragwerk in 3 Sektionen, so werden nach Gl. (9) alle $\Delta \tau_{n; \nu, \nu+1} = 0$. Da für die erste und dritte Sektion $p \equiv 0$ wird, folgt unmittelbar

$$\tau'_{n,1} = 0; \quad \tau'_{n,2} = \sum_{\rho=0}^{\rho=m} a_{n,\rho} \cdot p_{\rho,\rho+1}; \quad \tau'_{n,3} = 0 \quad (16)$$

oder

$$\tau_{n,1} = C_{n,o}; \quad \tau_{n,2} = x \cdot \sum_{\rho=0}^{\rho=m} a_{n,\rho} \cdot p_{\rho,\rho+1} + C_{n,2}; \quad \tau_{n,3} = C_{n,3}.$$

Mit Hilfe der Gl. (11) und (12) oder durch Gleichsetzen der τ_n an den Sektionsgrenzen $\nu, \nu + 1$ folgt aus Gl. (16)

$$\begin{aligned}\tau_{n,1} &= C_{n,o} \\ \tau_{n,2} &= \sum_{\rho=0}^{\rho=m} a_{n,\rho} \cdot p_{\rho,\rho+1} \cdot (x - l_1) + C_{n,o} \\ \tau_{n,3} &= l_2 \sum_{\rho=0}^{\rho=m} a_{n,\rho} \cdot p_{\rho,\rho+1} + C_{n,o}.\end{aligned}\quad (17)$$

Setzt man dies in Gl. (14) ein, so ergibt sich

$$C_{n,o} - C_{n+1,o} = - \frac{1}{L} \left(\frac{l_2}{2} + l_3 \right) \sum_{\rho=0}^{\rho=m} (a_{n,\rho} - a_{n+1,\rho}) \underbrace{l_2 \cdot p_{\rho,\rho+1}}_{P_{\rho,\rho+1}}. \quad (18)$$

Sind die Kanten 0 und m kraftfrei, so muß $\tau_0 = \tau_m \equiv 0$ oder nach Gl. (17) $C_{0,o} = C_{m,o} = 0$ sein. Da außerdem für $n=0$ und $n=m$ die $a_{n,\rho}$ nicht bestehen, lautet die diesen Randbedingungen angepaßte Lösung von Gl. (18)

$$\begin{aligned}C_{n,o} &= \frac{1}{L} \left(\frac{l_2}{2} + l_3 \right) \sum_{\rho=1}^{\rho=m-1} -a_{n,\rho} \cdot P_{\rho,\rho+1} \\ n &= 1, 2, 3, \dots, m-1.\end{aligned}\quad (19)$$

Schrumpft l_2 auf Null zusammen, so gelangen wir zu Einzellasten $P_{n,n+1}$. Gl. (19) geht dann über in

$$C_{n,o} = \frac{l_3}{L} \sum_{\rho=0}^{\rho=m-1} -a_{n,\rho} \cdot P_{\rho,\rho+1}. \quad (20)$$

Aus Gl. (19) bzw. (20) ergeben sich mit Gl. (17) die Schubflüsse $\tau_{n,\nu}$.

c) Einzelmomente als Lasten

Aus diesen Ergebnissen folgen leicht die Lösungen für Kräftepaare $M_{\rho,\rho+1}$ an Stelle der $P_{\rho,\rho+1}$ (Fig. 5a). Es ergibt sich nach Gl. (20) für den Abschnitt $\overline{1A}$

$$\begin{aligned}\tau_n &= \frac{l_2}{L} \sum_{\rho=1}^{\rho=m-1} -a_{n,\rho} \cdot P_{\rho,\rho+1} - \frac{\lambda_3}{L} \sum_{\rho=1}^{\rho=m-1} -a_{n,\rho} \cdot P_{\rho,\rho+1} \\ &= \frac{1}{L} \sum_{\rho=1}^{\rho=m-1} \underbrace{\frac{(l_3 - \lambda_3) \cdot P_{\rho,\rho+1}}{M_{\rho,\rho+1}}}_{a} \cdot -a_{n,\rho},\end{aligned}\quad (21a)$$

für den Abschnitt $\overline{12}$

$$\begin{aligned}\tau_n &= - \frac{l_1}{L} \sum_{\rho=1}^{\rho=m-1} -a_{n,\rho} \cdot P_{\rho,\rho+1} - \frac{\lambda_3}{L} \sum_{\rho=1}^{\rho=m-1} -a_{n,\rho} \cdot P_{\rho,\rho+1} \\ &= - \sum_{\rho=1}^{\rho=m-1} -a_{n,\rho} \frac{M_{\rho,\rho+1}}{a} + \frac{1}{L} \sum_{\rho=1}^{\rho=m-1} -a_{n,\rho} \cdot M_{\rho,\rho+1}\end{aligned}\quad (21b)$$

und für den Abschnitt $\overline{2B}$

$$\begin{aligned}\tau_n &= -\frac{l_1}{L} \sum_{\rho=1}^{\rho=m-1} -a_{n,\rho} \cdot P_{\rho,\rho+1} + \frac{\lambda_1}{L} \sum_{\rho=1}^{\rho=m-1} -a_{n,\rho} \cdot P_{\rho,\rho+1} \\ &= \frac{1}{L} \sum_{\rho=1}^{\rho=m-1} -a_{n,\rho} \cdot M_{\rho,\rho+1}.\end{aligned}\quad (21c)$$

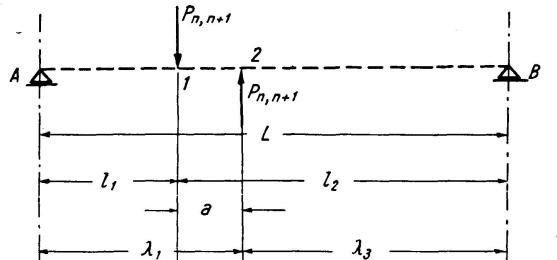


Fig. 5 a

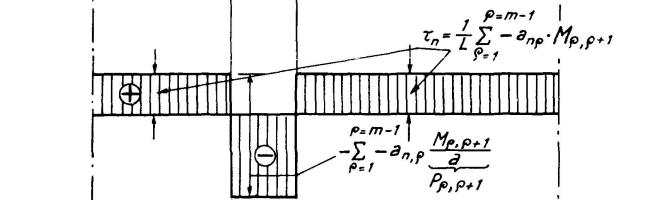


Fig. 5 b, Schubflüsse

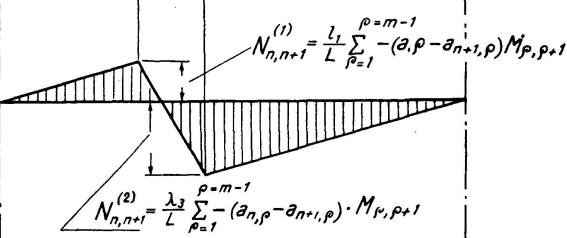


Fig. 5 c. Normalkräfte

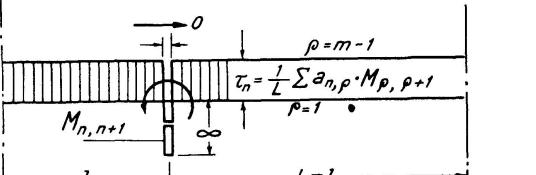


Fig. 5 d. Schubflüsse

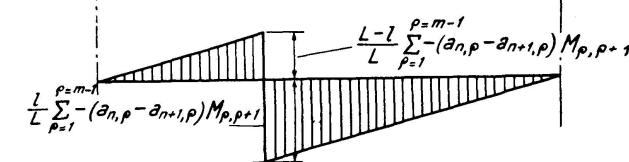


Fig. 5 e. Normalkräfte

Der Verlauf der τ_n ist in Fig. 5 b dargestellt. An den Orten der $P_{\rho,\rho+1}$ erleiden die τ_n den endlichen Sprung

$$-\sum_{\rho=1}^{\rho=m-1} -a_{n,\rho} \cdot P_{\rho,\rho+1}.$$

Von Wichtigkeit ist auch der dazugehörige Verlauf der Normalkräfte einer Falte, der wieder in Fig. 5 c veranschaulicht ist. Es wird für den Punkt 1

$$N_{n,n+1}^{(1)} = (\tau_n - \tau_{n,1}) l_1 = \frac{l_1}{L} \sum_1^{m-1} - (a_{n,\rho} - a_{n+1,\rho}) M_{\rho,\rho+1} \quad (22a)$$

und für den Punkt 2

$$N_{n,n+1}^{(2)} = -(\tau_n - \tau_{n+1}) \lambda_3 = \frac{\lambda_3}{L} \sum_1^{m-1} - (a_{n,\rho} - a_{n+1,\rho}) M_{\rho,\rho+1}. \quad (22b)$$

Zwischen 1 und 2 verläuft $N_{n,n+1}$ geradlinig.

Konvergiert $a \rightarrow 0$ und $P_{\rho,\rho+1} \rightarrow \infty$, so daß der Grenzwert $a \cdot P_{\rho,\rho+1} = M_{\rho,\rho+1}$ besteht, so stellen die gefundenen τ_n die Schubflüsse für den Fall dar, daß in allen Falten in $x = l_1$ je ein konzentriertes Moment $M_{\rho,\rho+1}$ angreift. Der Verlauf der Schub- bzw. Normalkräfte entartet im Sinne der Fig. 5d bzw. 5e. Innerhalb der Kräftepaare werden die Schubflüsse in jeder Falte ∞ -groß, während die $N_{\rho,\rho+1}$ auch dort endlich bleiben.

Wir haben bei dieser Betrachtung die $M_{\rho,\rho+1}$ als Grenzfall eines Kräftepaars $a \cdot P_{\rho,\rho+1}$ zweier Transversallasten aufgefaßt. Es ist leicht zu zeigen, daß man zu den gleichen Ergebnissen kommt, wenn man von einer längs der Strecke a stetig verteilten Momentenlast $m_{\rho,\rho+1}$ ausgeht. Für eine solche gilt zunächst $M_{\rho,\rho+1} = a \cdot m_{\rho,\rho+1}$. Nach Gl. (9) tritt bei 1. ein endlicher Sprung von $\Delta \tau_n = \sum_1^{m-1} + a_{n,\rho} \cdot m_{\rho,\rho+1}$ und bei 2 ein solcher von $-\Delta \tau_n$ auf. Macht man von der Bedingung (14) Gebrauch, so folgt bei $\tau_0 = \tau_m \equiv 0$

$$\tau_n (l_1 + \lambda_3) + \left[\sum_1^{m-1} + a_{n,\rho} \cdot m_{\rho,\rho+1} + \tau_n \right] a = 0,$$

woraus wieder

$$\tau_n = \frac{1}{L} \sum_{\rho=1}^{\rho=m-1} - a_{n,\rho} \cdot M_{\rho,\rho+1} \quad (21c)$$

wird.

Die Konstante der τ_n innerhalb der Abschnitte $\overline{12}$, $\overline{A1}$ und $\overline{2B}$ würde auch aus den Gl. (5') folgen, da in diesen die $m'_{\rho,\rho+1} = 0$ werden.

d) Achsiallasten

Greifen in den Falten zwischen den beiden Punkten 1 und 2 stetig verteilte Achsialkräfte $n_{\rho,\rho+1}$ an, so folgt zunächst wegen $n'_{\rho,\rho+1} = 0$ aus den Gl. (5'), daß die Schubflüsse in den Abschnitten $\overline{A1}$, $\overline{12}$ und $\overline{2B}$ wieder konstant sein müssen. Bei 1 tritt nach Gl. (9) ein endlicher Sprung $\Delta \tau_n = \sum_{\rho=1}^{\rho=m-1} b_{n,\rho} \cdot n_{\rho,\rho+1}$ und bei 2 ein solcher von $-\Delta \tau_n$ auf. Bildet man wieder die Gleichgewichtsbedingungen (14) für die ersten n Falten, so erhalten wir mit $\tau_0 = \tau_m \equiv 0$

$$\tau_n (l_1 + \lambda_3) + \left[\sum_{\rho=1}^{\rho=m-1} b_{n,\rho} \cdot n_{\rho,\rho+1} + \tau_n \right] a + \sum_{\rho=1}^{\rho=n} a \cdot n_{\rho-1,\rho} = 0$$

und daraus

$$\tau_n = \frac{1}{L} \sum_{\rho=1}^{\rho=m-1} -b_{n,\rho} \cdot \underbrace{a \cdot n_{\rho,\rho+1}}_{W_{\rho,\rho+1}} - \frac{1}{L} \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \underbrace{a \cdot n_{\rho-1,\rho}}_{W_{\rho-1,\rho}}. \quad (23)$$

Dabei ist wieder vorausgesetzt, daß nur eine Falte achsial gestützt ist. Man arbeitet sich dann wieder von den beiden kraftfreien Rändern zu der achsial gestützten Falte vor und stellt für sie die Gl. (14) auf, woraus die seitliche Auflagerkraft des Balkenwerkes folgt. Liegt die Stützung dieser einen Falte nicht in deren Achse, so ist das Exzentrizitätsmoment nach Punkt c) dieses Abschnittes weiter zu verfolgen.

Diese Belastungsart hat Bedeutung, wenn Faltwerke für die Ableitung achsialer Windkräfte herangezogen werden müssen.

D. Das steifknotige Balkenwerk

Die bisher besprochenen Gelenkwerke werden bei stählernen Fachwerkfaltwerken ohne Querscheiben in hohem Maße verwirklicht. Bei Bauwerken aus Stahlbeton sind, dem monolitischen Charakter dieses Baustoffes entsprechend, die einzelnen Falten miteinander starr verbunden, so daß wir uns auch mit den sogenannten steifknotigen Systemen beschäftigen müssen. Für

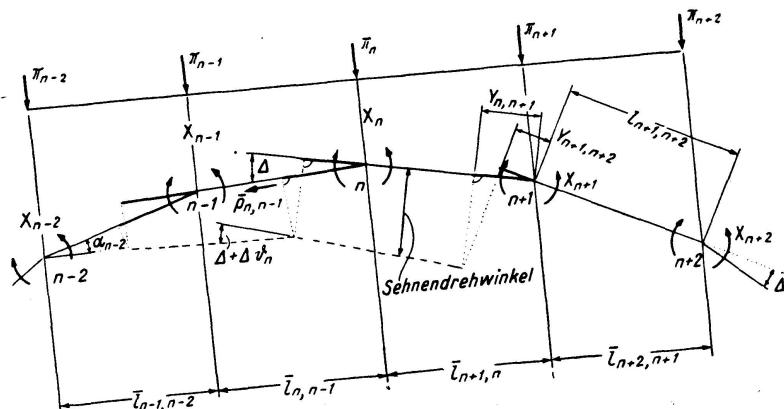


Fig. 6

diese wählen wir jeweils das zugehörige Gelenkwerk als Grundsystem und bringen an diesem, neben den gegebenen Lasten, die als Unbekannte gewählten Knotenmomente X_n ebenfalls als äußere Kräfte an. Diese X_n ersetzen wir durch die, in den Kanten n angreifenden, zueinander parallelen Linienlasten

$$\pi_n = \frac{X_{n-1}}{\bar{l}_{n-1,n}} - \left(\frac{X_n}{\bar{l}_{n-1,n}} + \frac{X_n}{\bar{l}_n} \right) + \frac{X_{n+1}}{\bar{l}_{n,n+1}}, \quad (24)$$

aus welchen sich nach den Darlegungen des Abschnittes B z. B. für Faltwerke

mit regulären Polygonen als Querschnitt die dazugehörigen Faltwerkslasten des steifknotigen Systems zu

$$l \bar{p}_{n,n-1} \sin \Delta = -X_{n-2} + (X_{n-1} - X_n) \frac{1}{1 + 2 \cos \Delta} + X_{n+1} + p_{n,n-1} \quad (25)$$

ergeben. Hierin bedeutet l die Länge der Polygonseiten und Δ deren gegenseitigen Neigungswinkel (Fig. 6).

Setzt man diese Werte in die rechten Seiten der Gl. (5') ein und löst diese auf, so ergeben sich die Ableitungen $\bar{\tau}_n'$ der längs der Kanten n wirkenden Schubflüsse $\bar{\tau}_n$ des steifknotigen Systems als lineare Funktionen der X_n . Aus den Durchbiegungen $y_{n,n+1}$ der einzelnen Falten $n, n+1$ ergeben sich nun in bekannterweise die Differenzen $\Delta \vartheta_n$ der beiden, dem Knoten n benachbarten Sehnendrehwinkel als lineare 4-gliederige Formen, deren 4. Ableitungen bei einem 6-seitigen regulären Polygon mit daran beiderseits lotrecht angehängten Endfalten die Gestalt (Fig. 9c)

$$\begin{aligned} l \cdot \Delta \vartheta_2^{\text{IV}} \cdot \sin \Delta &= y_{01}^{\text{IV}} \frac{\sin \Delta}{\cos \alpha_1} - y_{12}^{\text{IV}} (1 + \cos \Delta + \sin \Delta \cdot \tan \alpha_1) + y_{23}^{\text{IV}} (1 + 2 \cos \Delta) - y_{34}^{\text{IV}} \\ l \cdot \Delta \vartheta_3^{\text{IV}} \cdot \sin \Delta &= y_{12}^{\text{IV}} - (1 + 2 \cos \Delta) (y_{23}^{\text{IV}} - y_{34}^{\text{IV}}) - y_{45}^{\text{IV}} \\ l \cdot \Delta \vartheta_7^{\text{IV}} \cdot \sin \Delta &= y_{45}^{\text{IV}} - y_{56}^{\text{IV}} (1 + 2 \cos \Delta) + y_{67}^{\text{IV}} (1 + \cos \Delta + \sin \Delta \cdot \tan \alpha_7) - y_{78}^{\text{IV}} \frac{\sin \Delta}{\cos \alpha_7} \end{aligned} \quad (26)$$

annehmen. Damit können wir unter Verwendung der üblichen Bezeichnungen für die Faltwerksquerschnitte die 4. Ableitungen der bekannten Dreimomentengleichungen bilden. Es wird

$$\begin{aligned} \frac{l_{n-1,n}}{6 \bar{J}_{n-1,n} E} X_{n-1}^{\text{IV}} + \frac{2}{6 E} \left(\frac{l_{n-1,n}}{\bar{J}_{n-1,n}} + \frac{l_{n,n+1}}{\bar{J}_{n,n+1}} \right) X_n^{\text{IV}} \\ + \frac{l_{n,n+1}}{6 \bar{J}_{n,n+1} E} X_{n+1}^{\text{IV}} + \Delta \vartheta_n^{\text{IV}} + N_{n,n-1}^{\text{IV}} + N_{n,n+1}^{\text{IV}} = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

wobei die $l_{n-1,n}$, $l_{n,n+1}$ die Sehnenlängen bedeuten und die $\bar{J}_{n,n+1}$ die Größen $d_{n,n+1}^3/12$ annehmen, wenn die $d_{n,n+1}$ die Dicken der einzelnen Falten $n, n+1$ darstellen. Die Durchbiegungen $y_{n,n+1}$, deren 4. Ableitungen noch in den $\Delta \vartheta_n^{\text{IV}}$ der Gl. (27) enthalten sind, genügen den Bedingungen

$$E J_{n,n+1} y_{n,n+1}'' = -M_{n,n+1}, \quad (28)$$

woraus sich nach 2 maliger Differentiation und mit den Gl. (3)

$$E J_{n,n+1} y_{n,n+1}^{\text{IV}} = \bar{\tau}_n' \cdot h_{m+1,n} + \bar{\tau}_{n-1}' \cdot h_{m+1,n+1} - \bar{p}_{n,n+1} \quad (29)$$

ergibt. Setzen wir hierin die Gl. (25) und die daraus im obigen Sinne errechneten $\bar{\tau}_n'$ ein, so ergeben sich die $y_{n,n+1}^{\text{IV}}$ in der Form

³⁾ α_1 und α_7 siehe Fig. 9b.

$$y_{n,n+1}^{\text{IV}} = \sum_{\rho=1}^{\rho=m} r_{n,n+1;\rho} \cdot X_{\rho} + R_{n,n+1} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (29')$$

Setzt man nun diese in die Gl. (26), so folgt

$$\Delta \vartheta_n^{\text{IV}} = \sum_{\rho=1}^{\rho=m} d_{n,\rho} \cdot X_n + P_n^{\text{IV}}, \quad (26')$$

wobei die Absolutglieder P_n^{IV} nur von den gegebenen Lasten herrühren. Gl. (26') in (27) eingesetzt, ergeben nun die Bestimmungsgleichungen für die X_n zu

$$\begin{aligned} \frac{l_{n-1,n}}{6 \bar{J}_{n-1,n} E} X_{n-1}^{\text{IV}} + \frac{2}{6 E} \left(\frac{l_{n-1,n}}{\bar{J}_{n-1,n}} + \frac{l_{n,n+1}}{\bar{J}_{n,n+1}} \right) X_n^{\text{IV}} + \frac{l_{n,n+1}}{6 \bar{J}_{n,n+1} E} X_{n+1}^{\text{IV}} \\ + \sum_{\rho=1}^{\rho=m} d_{n,\rho} \cdot X_n + P_n^{\text{IV}} + N_{n,n-1}^{\text{IV}} + N_{n,n+1}^{\text{IV}} = 0, \end{aligned} \quad (30)$$

in welchen die N von den zwischenknotlichen Wirkungen der äußeren Lasten herrühren.

Das System wird am einfachsten mittelst Fourier'schen Reihen gelöst⁴⁾.

E. Die durchlaufenden Systeme

a) Gelenkwerke

Schneidet man ein solches Tragwerk über den Auflagerscheiben durch, so entstehen Balkenfaltwerke, an deren Auflagerenden l und r je Falte die Stützenmomente $X_{\rho,\rho+1}^{(l)}$ und $X_{\rho,\rho+1}^{(r)}$, die Achsialkräfte $Y_{\rho,\rho+1}^{(l)}$ und $Y_{\rho,\rho+1}^{(r)}$, sowie die Querkräfte $Z_{\rho,\rho+1}^{(l)}$ und $Z_{\rho,\rho+1}^{(r)}$ frei werden. Selbstverständlich müssen bei dieser Zerlegung diese Balkenfaltwerke an ihren Auflagern durch die Lagerscheiben ausgesteift bleiben. Die Querkräfte werden also dort unmittelbar aufgenommen und interessieren uns zunächst noch nicht. Die X bzw. Y sind dann positiv, wenn sie am Rande n der Falte $n, n+1$ Zug bzw. in letzterer nur Druck erzeugen (Fig. 7).

Denkt man sich zunächst die $X_{\rho,\rho+1}^{(r)}$ und $Y_{\rho,\rho+1}^{(r)}$ vorerst auf einen kurzen Bereich a gleichmäßig verteilt und lässt man nur diese letzteren am rechten Ende r der Balkentonne l, r angreifen, so ergeben sich nach Gl. (21c) und (23) die Schubflüsse außerhalb des Bereiches a zu

$$\tau_n = \frac{1}{L_{l,r}} \sum_1^{m-1} -a_{n,\rho} \cdot X_{\rho,\rho+1}^{(a)} + \frac{1}{L_{l,r}} \sum_1^{m-1} -b_{n,\rho} Y_{\rho,\rho+1}^{(r)} - \frac{1}{L_{l,r}} \sum_1^n Y_{\rho-1,\rho}^{(r)} \quad (31)$$

und innerhalb von a zu

⁴⁾ Einzelheiten siehe Fußnote 1 Pkt. 1, 3, 4, 5, 6.

$$\begin{aligned} \tau_{n,a} = & \frac{1}{L_{l,r}} \sum_1^{m-1} -a_{n,\rho} \cdot X_{\rho,\rho+1}^{(r)} + \frac{1}{a} \sum_1^{m-1} a_{n,\rho} \cdot X_{\rho,\rho+1}^{(r)} + \frac{1}{L_{l,r}} \sum_1^{m-1} -b_{n,\rho} \cdot Y_{\rho,\rho+1}^{(r)} \\ & - \frac{1}{L_{l,r}} \sum_1^n Y_{\rho-1,\rho}^{(r)} + \frac{1}{a} \sum_1^{m-1} b_{n,\rho} \cdot X_{\rho,\rho-1}^{(r)}. \end{aligned} \quad (32)$$

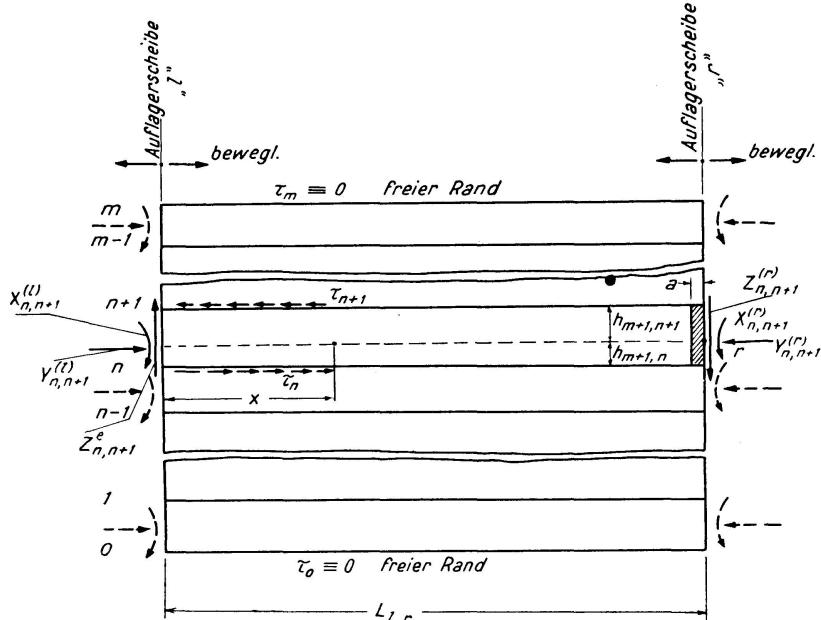


Fig. 7

Macht man zunächst das logische Postulat, daß der Übergang von τ_n nach $\tau_{n,a}$ stetig erfolgen soll, das heißt, es wird

$$\tau_n = \tau_{n,a}, \quad (33)$$

so ergibt die Gleichsetzung der rechten Seiten von Gl. (31) und Gl. (32)

$$\sum_1^{m-1} a_{n,\rho} \cdot X_{\rho,\rho+1}^{(r)} + \sum_1^{m-1} b_{n,\rho} \cdot Y_{\rho,\rho+1}^{(r)} = 0 \cdot a = 0, \quad (34)$$

woraus mit Gl. (31)

$$\tau_n = - \frac{1}{L_{l,r}} \sum_1^{m-1} Y_{\rho, \rho+1}^{(r)} \quad (35)$$

folgt. Das durch die Gl. (32) anfangs bedingte Unendlichwerden der τ_n innerhalb des nun unendlich kleinen Bereiches a ist nun durch die Annahme (33) verhindert. Diese wird sich noch im Laufe der weiteren Entwicklung exakt bestätigen.

Löst man weiters die Falte $n, n+1$ aus dem Tragwerksverband und stellt um den rechten Achspunkt r die Momentengleichung auf, so ergeben sich die linksseitigen Querkräfte der Balkenfaltwerke zu

$$Z_{n,n+1}^{(l)} = \frac{h_{m+1,n+1}}{L_{l,r}} \int_0^{L_{l,r}} \tau_{n+1} dx + \frac{h_{m+1,n}}{L_{l,r}} \int_0^{L_{l,r}} \tau_n dx + \frac{X_{n,n+1}^{(r)}}{L_{l,r}}, \quad (36)$$

mit welcher, da sich infolge der Konstanz der Schubflüsse die Glieder mit τ_n und τ_{n+1} heben, das Biegemoment der Falte $n, n+1$ im Punkte x den Wert

$$M_{n,n+1}^{(x)} = h_{m+1,n+1} \frac{x}{L_{l,r}} \int_0^{L_{l,r}} \tau_{n+1} dx + h_{m+1,n} \frac{x}{L_{l,r}} \int_0^{L_{l,r}} \tau_n dx + \frac{x}{L_{l,r}} X_{n,n+1}^{(r)} - h_{m+1,n+1} \int_0^x \tau_{n+1} dx - h_{m+1,n} \int_0^x \tau_n dx = \frac{x}{L_{l,r}} X_{n,n+1}^{(r)} \quad (37)$$

annimmt. Für die am linken Ende angreifenden Momente $X_{\rho,\rho+1}^{(l)}$ und Achsialkräfte $Y_{\rho,\rho+1}^{(l)}$ erhalten wir analoge Werte.

Diese Ergebnisse sagen nun aus, daß die von *allen* Momenten $X_{\rho,\rho+1}^{(l)}, X_{\rho,\rho+1}^{(r)}$ und *allen* Achsialkräften $Y_{\rho,\rho+1}^{(l)}, Y_{\rho,\rho+1}^{(r)}$ herrührenden Biegemomente $M_{n,n+1}$ der Falte $n, n+1$ und somit auch deren Endverdrehungswinkel $\vartheta_{n,n+1}^{(l)}$ und $\vartheta_{n,n+1}^{(r)}$ nur von den unmittelbar an $n, n+1$ angreifenden Kraftwirkungen $X_{n,n+1}^{(l)}, X_{n,n+1}^{(r)}$ und $Y_{n,n+1}^{(l)}, Y_{n,n+1}^{(r)}$ abhängen. Man kann somit für jede der Falten $\rho, \rho+1$ gesondert einen Clapeyron'schen Gleichungssatz

$$X_{\rho,\rho+1}^{(\nu-t)} \frac{L_{\nu-1,\nu}}{J_{\rho,\rho+1}^{(\nu-1,\nu)}} + 2 X_{\rho,\rho+1}^{(\nu)} \left(\frac{L_{\nu-1,\nu}}{J_{\rho,\rho+1}^{(\nu-1,\nu)}} + \frac{L_{\nu,\nu+1}}{J_{\rho,\rho+1}^{(\nu,\nu+1)}} \right) + X_{\rho,\rho+1}^{(\nu+1)} \frac{L_{\nu,\nu+1}}{J_{\rho,\rho+1}^{(\nu,\nu+1)}} + 6 \vartheta_{\rho,\rho+1}^{(\nu-1,\nu)} + 6 \vartheta_{\rho,\rho+1}^{(\nu,\nu+1)} = 0 \quad (\rho = 1, 2, \dots, m) \quad (38)$$

aufstellen, in welchen die $\vartheta_{\rho,\rho+1}$ die Endverdrehungswinkel an der Stützenscheibe ν der Falten $\rho, \rho+1$, der nach Abschnitt C behandelten Balkenfaltwerke $\nu-1, \nu$ und $\nu, \nu+1$, bedeuten. Sie ergeben sich für das Feld $\nu-1, \nu$ aus

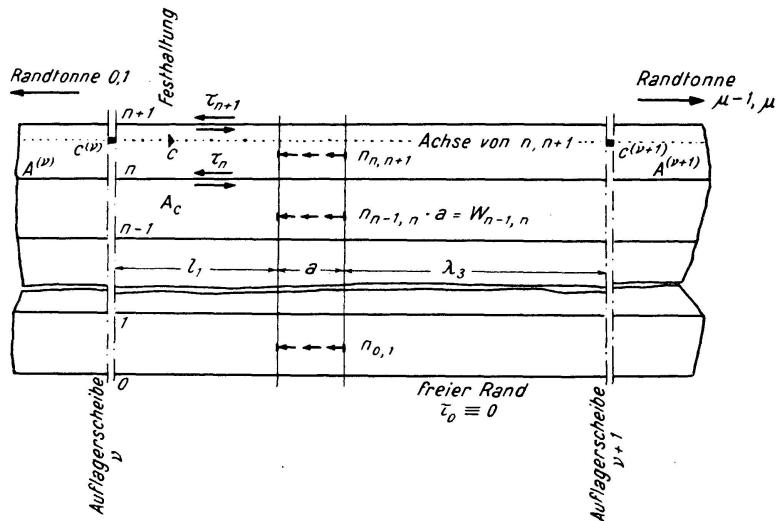
$$6 \vartheta_{\rho,\rho+1}^{(\nu-1)} = \frac{1}{J_{\rho,\rho+1}^{(\nu-1,\nu)} \cdot L_{\nu-1,\nu}} \int_1^2 [p_{\rho,\rho+1} \cdot x (2 L_{\nu-1,\nu}^2 - 3 x L_{\nu-1,\nu} + x^2) + \mu_{\rho,\rho+1} (2 L_{\nu-1,\nu}^2 - 6 x L_{\nu-1,\nu} + 3 x^2)] dx \quad (39a)$$

$$6 \vartheta_{\rho,\rho+1}^{(\nu)} = \frac{1}{J_{\rho,\rho+1}^{(\nu-1,\nu)} \cdot L_{\nu-1,\nu}} \int_1^2 [p_{\rho,\rho+1} \cdot x (L_{\nu-1,\nu}^2 - x^2) - \mu_{\rho,\rho+1} (L_{\nu-1,\nu}^2 - 3 x^2)] dx, \quad (39b)$$

wobei $\mu_{\rho,\rho+1} = m_{\rho,\rho+1} + \tau_{\rho+1} \cdot h_{m+1,\rho+1} + \tau_{\rho} \cdot h_{m,\rho}$ bedeutet.

Sind Achsiallasten $n_{n,n+1}$ vorhanden, so ist zunächst das durchlaufende System durch Festhaltung eines Punktes c gegen Verschiebung in achsialer Richtung zu sichern. Wir zerschneiden das durchlaufende Tragwerk wieder über den Stützen, verbinden aber die so entstandenen Balkenwerke über jedem Auflager in je einem Punkte $c^{(\nu)}$ so, daß von einem Feld auf das andere nur achsiale Kräfte $A^{(\nu)}$ übertragen werden können. Zweckmäßig legt man alle Punkte $c^{(\nu)}$ in die Achse ein und derselben Falte $n, n+1$ des Durchlauftragwerkes (Fig. 8). Man beginnt nun mit der Auflösung der einzelnen Balkenwerke bei den beiden Randfeldern und schreitet gegen die im Punkte c gestützte

Mitteltonne vor, die man schließlich auch so wie die anderen berechnet. Dabei ist zu beachten, daß sich die, in den $c^{(v)}$ entstehenden Verbindungskräfte $A^{(v)}$ der weiter außen liegenden Balkenwerke durch die Gelenkpunkte $c^{(v)}$ nach den jeweils benachbarten Feldern gegen die Mitte hin bis zu der in c gelagerten Mitteltonne fortpflanzen, wo sie mit den äußeren Achsiallasten der letzteren den gesamten Auflagerdruck A_c ergeben.



Dies in Gl. (5'') eingesetzt, muß also letztere identisch befriedigen. Hierbei werden wegen (34) die linken Seiten gleich Null, so daß die Beziehungen

$$-\frac{Y_{\rho-1, \rho}^{(r)}}{F_{\rho-1, \rho}} + \frac{Y_{\rho, \rho+1}^{(r)}}{F_{\rho, \rho+1}} = + X_{\rho-1, \rho}^{(r)} \frac{h_{m, \rho}}{J_{\rho-1, \rho}} + X_{\rho, \rho+1}^{(r)} \frac{h_{m+1, \rho+1}}{J_{\rho, \rho+1}} \quad (41)$$

folgen, welche mit Gl. (40) zusammen für die Bestimmung der $Y_{\rho, \rho+1}^{(r)}$ genügen. Für die Auflösung dieses Systems drückt man mittelst der zweigliederigen Gleichungen (41) eine der Unbekannten, z. B. $Y_{n, n+1}$, durch die übrigen aus und setzt diese Ergebnisse in Gl. (40) ein, wodurch sich dann auch $Y_{n, n+1}$ ergibt.

Man sieht ohne weiteres, daß die Gl. (41) auch für die Stützen des Durchlaufsystems die Tatsache bestätigen, daß die aus $X_{n-1, n}$ und $Y_{n-1, n}$ ermittelte Randspannung des Randes n der Falte $n-1, n$ gleich ist der aus $X_{n, n+1}$ und $Y_{n, n+1}$ errechneten Randspannung des Randes n der Falte $n, n+1$. Die Bedingungen (38), die vorhandenen Auflagerscheiben und der nun auch dort vorhandene kantenweise Zusammenhang der einzelnen Falten geben die Gewähr, daß nach der Verformung die Ränder, der durch $X_{\rho, \rho+1}^{(l)}$, $X_{\rho, \rho+1}^{(r)}$, $Y_{\rho, \rho+1}^{(l)}$, $Y_{\rho, \rho+1}^{(r)}$ und den äußeren Lasten $p_{\rho, \rho+1}$, $m_{\rho, \rho+1}$ und $n_{\rho, \rho+1}$ ergriffenen Balkensysteme, zueinander parallel verlaufende Poligonzüge sein müssen, so daß durch achsiale Verschiebungen alle Schnittränder zur Deckung gebracht werden können. Es sind also alle Verträglichkeitsbedingungen erfüllt. Man ersieht nun auch, daß alle Auflagerscheiben, bis auf eine, achsparallel verschieblich gelagert sein müssen (Fig. 1).

Damit ist auch, wie vorausgesagt, die Annahme (33) nachträglich bestätigt.

Nach Bestimmung der $Y_{\rho, \rho+1}$ folgen aus Gl. (35) die von den Hilfsangriffen $Y_{\rho, \rho+1}$ und $X_{\rho, \rho+1}$ herrührenden Schubflüsse, welche mit denen der Balkensysteme zu überlagern sind.

Es ist nötig, noch daran zu erinnern, daß die durch die Gl. (38) bedingten Vereinfachungen bei der Berechnung der durchlaufenden, *zweiteiligen* Faltwerke nur dann eintreten, wenn man, wie wir es getan haben, den Einfluß der Querkräfte auf die Verformung vernachlässigt. Würde man nämlich bei der Bestimmung der Beiwerte der $X_{\rho, \rho+1}$ in Gl. (38) die durch Gl. (36) dargestellten Auflagerdrücke $Z_{m, n+1}$, die den $Q_{n, n+1}$ gleich sind, berücksichtigen, so würden wegen der Gl. (35) in der Gl. (38) neben den drei $X_{\rho, \rho+1}$ einer Falte die $Y_{\rho, \rho+1}^{(v-1)}$, $Y_{\rho, \rho+1}^{(v)}$, $Y_{\rho, \rho+1}^{(v+1)}$ aller Falten vorkommen. Drückt man darin mittelst der Gl. (40) und (41) die $Y_{\rho, \rho+1}$ durch die $X_{\rho, \rho+1}$ aus, so ergeben sich Beziehungen, in denen nur mehr die Stützenmomente $X_{\rho, \rho+1}$ allein vorkommen. Trotzdem in jeder dieser Gleichungen die Beiwerte gewisser Unbekannten gegenüber den anderen Unbekannten dominieren, konvergieren die dadurch ermöglichten Iterationsverfahren nicht sehr rasch, was mit einer erheblichen Rechenarbeit verbunden ist, die sich nicht lohnt, da bei *zweiteiligen* Faltwerken der Einfluß der Querkräfte auf die Verformungen *immer* vernachlässigt werden kann.

Wir nehmen nun im besonderen an, daß zwischen den Trägheitsmomenten $J_{\rho, \rho+1}^{(\nu, \nu+1)}$ bzw. Randfaserabständen $h_{m, n}^{(\nu, \nu+1)}$ der einzelnen Felder $\nu, \nu+1$ die Beziehungen

$$J_{\rho, \rho+1}^{(\nu+\mu, \nu+\mu+1)} = \alpha_\mu \cdot J_{\rho, \rho+1}^{(\nu, \nu+1)} \quad (42a)$$

$$h_{m, n}^{(\nu+\mu, \nu+\mu+1)} = \beta_\mu \cdot h_{m, n}^{(\nu, \nu+1)} \quad (42b)$$

bestehen. Außerdem soll vorerst nur ein Feld, und zwar so belastet sein, daß die Belastungen der einzelnen Falten $\rho, \rho+1$ des Feldes $\nu, \nu+1$ zueinander affin sind. Das heißt, es gilt, symbolisch geschrieben

$$P_{\rho+\mu, \rho+\mu+1} = \gamma_\mu \cdot P_{\rho, \rho+1} \quad (\mu = 1, 2, 3, \dots). \quad (43)$$

Wir nennen dann das Faltwerk gleichartig gestaltet und gleichartig belastet. Dann wird auch in den Gl. (38)

$$\vartheta_{\rho+\mu, \rho+\mu+1}^{(\nu-1, \nu)} = \gamma_\mu \cdot \vartheta_{\rho, \rho+1}^{(\nu-1, \nu)} \quad (44a)$$

$$\vartheta_{\rho+\mu, \rho+\mu+1}^{(\nu, \nu+1)} = \gamma_\mu \cdot \vartheta_{\rho, \rho+1}^{(\nu, \nu+1)}. \quad (44b)$$

Es folgt daraus einerseits, daß für jede Stütze

$$X_{\rho+\mu, \rho+\mu+1}^{(\nu)} = \gamma_\mu \cdot X_{\rho, \rho+1}^{(\nu)} \quad (45)$$

werden muß, und daß andererseits wegen der Gl. (42a) innerhalb jeder durchlaufenden Falte die Beziehungen

$$X_{\rho, \rho+1}^{(\nu+\mu)} = \vartheta_\mu \cdot X_{\rho, \rho+1}^{(\nu)} \quad (46a)$$

bestehen müssen. Daraus ergeben sich für die Biegerandspannungen σ_M die Bedingungen

$$\sigma_{\rho, \rho+1; M}^{(\nu+\mu)} = \vartheta_\mu \frac{\beta_\mu}{\alpha_\mu} \sigma_{\rho, \rho+1; M}^{(\nu)}, \quad (46b)$$

aus welchen sich nach den Gl. (41) für die Längsspannungen σ_N in den Achsen der einzelnen Falten die analogen Gleichungen

$$\sigma_{\rho, \rho+1; N}^{(\nu+\mu)} = \vartheta_\mu \frac{\beta_\mu}{\alpha_\mu} \sigma_{\rho, \rho+1; N}^{(\nu)} \quad (46c)$$

ergeben. Wir können also folgenden Satz aussprechen:

„Ist ein durchlaufendes, gelenkiges, prismatisches Faltwerk gleichartig gestaltet und belastet, so sind die Längsspannungsdiagramme durch die Faktoren $\vartheta_\mu \frac{\beta_\mu}{\alpha_\mu}$ miteinander affin verbunden. ϑ_μ folgt dem Momentenverlauf irgend einer durchlaufenden Falte.“.

Sind mehrere Felder belastet, so sind die Ergebnisse zu superponieren.

b) Steifknotige Systeme

Bei diesen zerschneiden wir wieder das System über den Stützen, so wie wir es bei den gelenkigen Faltwerken getan haben, so daß wir nun lauter steifknotige Balkenwerke vor uns haben. In diesen erzeugen die auf diese Weise freiwerdenden Stützenmomente $X_{\rho, \rho+1}^{(\nu)}$ und die von diesen nach Gl. (41) abhängigen Normalkräfte $Y_{\rho, \rho+1}^{(\nu)}$ wieder Knotenmomente $\bar{X}_n^{(\nu, \nu+1)}$, mit denen wir uns zuerst beschäftigen müssen. Denken wir uns im Feld $\nu, \nu+1$ vorläufig nur die $X_{\rho, \rho+1}^{(\nu+1)}$ und $Y_{\rho, \rho+1}^{(\nu+1)}$ an den Gelenktonnen als äußere Kräfte wirkend, so betragen nach Punkt a) dieses Abschnittes die Biegemomente der Falte $\rho, \rho+1$

$$M_{\rho, \rho+1} = \frac{x}{L_{\nu, \nu+1}} X_{\rho, \rho+1}^{(\nu+1)},$$

woraus sich die Durchbiegungen des gelenkigen Balkenwerkes zu

$$y_{\rho, \rho+1; \nu+1} = \frac{X_{\rho, \rho+1}^{(\nu+1)}}{6 E J_{\rho, \rho+1}^{(\nu+1)} \cdot L_{\nu, \nu+1}} x (L_{\nu, \nu+1}^2 - x^2) \quad (47)$$

ergeben. Entwickeln wir dies in Fourier'sche Reihen und differentieren wir diese 4 mal nach x , so erhalten wir für das Gelenkwerk

$$y_{\rho, \rho+1; \nu+1}^{\text{IV}} = - \frac{2 X_{\rho, \rho+1}^{(\nu+1)}}{E J_{\rho, \rho+1}^{(\nu+1)} \cdot L_{\nu, \nu+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \pi}{L_{\nu, \nu+1}} (-1)^k \sin \frac{k \pi}{L_{\nu, \nu+1}} x. \quad (48)$$

Setzt man dies in die Gl. (26) ein, so ergeben sich wieder sin-Reihen \bar{P}_n^{IV} , deren Koeffizienten lineare, homogene Funktionen der konstanten Stützenmomente $X_{\rho, \rho+1}^{(\nu+1)}$ sind. Da bei diesem Kraftangriff zwischenknotliche Belastungen nicht auftreten, und die obigen \bar{P}_n^{IV} den von den, als äußere Lasten gedachten, $X_{\rho, \rho+1}^{(\nu+1)}$ herrührenden Anteil der $\Delta \vartheta^{\text{IV}}$ darstellen, erhalten wir die zu den \bar{X}_n gehörigen Bestimmungsgleichungen (30') aus den Gl. (30), indem wir darin $P_n^{\text{IV}} = \bar{P}_n^{\text{IV}}$ machen und alle N gleich Null setzen. Für die Auflösung der (30') ist wichtig zu bemerken, daß die homogenen Teile von (30') und (30) identisch sind, so daß man für (30') die Lösungsmatrixen von (30) benutzen kann.

Für die am anderen Ende ν des Balkensystems $\nu, \nu+1$ angreifenden Stützenmomente $X_{\rho, \rho+1}^{(\nu)}$ gelten analoge Beziehungen.

Wir denken uns nun jede der steifknotigen Balkensysteme $\nu, \nu+1$ mit seinen gegebenen Lasten $P_{\rho, \rho+1}^{(\nu, \nu+1)}$, mit den Stützenmomenten $X_{\rho, \rho+1}^{(\nu)}$, $X_{\rho, \rho+1}^{(\nu+1)}$ und den Normalkräften $Y_{\rho, \rho+1}^{(\nu)}$, $Y_{\rho, \rho+1}^{(\nu+1)}$ belastet und bestimmen nach Abschnitt D die von den $P_{\rho, \rho+1}^{(\nu, \nu+1)}$ herrührenden Knotenmomente $X_n^{(\nu, \nu+1)}$ und außerdem nach den soeben durchgedachten Überlegungen die zu den $X_{\rho, \rho+1}^{(\nu)}$ gehörigen Knotenmomente $\bar{X}_n^{(\nu, \nu+1)}$. Nun belasten wir das durchlaufende Gelenkwerk mit allen $P_{\rho, \rho+1}$, X_n und \bar{X}_n und bestimmen die dazugehörigen Stützenmomente. Die von den $P_{\rho, \rho+1}$ und X_n stammenden ergeben sich nach Punkt a) dieses Abschnittes. Da die letzteren als sin-Reihen vorliegen, stellen die Gli-

der der sin-Reihen der X_n eine gleichartige Belastung dar. Die aus den $P_{\rho, \rho+1}$ und X_n folgenden Stützenmomente mögen $\Delta_1 X_{\rho, \rho+1}^{(\nu)}$ heißen. Die \bar{X}_n liegen wieder als sin-Reihen vor, deren Beiwerte lineare, homogene Funktionen aller als äußere Kräfte angreifenden Stützenmomente $X_{\rho, \rho+1}^{(\nu)}$ sind. Setzen wir diese \bar{X}_n in die Gl. (29') ein, so ergeben sich die $\bar{y}_{n, n+1; \nu, \nu+1}^{\text{IV}}$, wobei $\bar{y}_{n, n+1; \nu, \nu+1}$ die Durchbiegung der Falte $n, n+1$ des steifknotigen Feldes $\nu, \nu+1$ bedeutet. Daraus kann man bei Berücksichtigung der Randbedingungen $y''_{n, n+1; \nu, \nu+1} = 0$; $y_{n, n+1; \nu, \nu+1} = 0$ für $x = 0$ und $x = L_{\nu, \nu+1}$ die Enddrehwinkel $y'_{n, n+1; \nu, \nu+1}$ durch 4-fache Integration und darauf folgende Differentiation bestimmen. Führt man diese Operationen im einzelnen durch, so ergibt sich bei Berücksichtigung derselben Vorzeichenregeln wie in den Gl. (38)

$$\vartheta_{\rho, \rho+1}^{(\nu-1, \nu)} + \vartheta_{\rho, \rho+1}^{(\nu, \nu+1)} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \sum_{\rho=1}^{\rho=m} \left\{ \epsilon_{\rho, \rho+1; k} \left(\frac{L_{\nu-1, \nu}}{k \pi} \right)^2 X_{\rho, \rho+1}^{(\nu-1)} + \left[\epsilon_{\rho, \rho+1; k} \left(\frac{L_{\nu-1, \nu}}{k \pi} \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \omega_{\rho, \rho+1; k} \left(\frac{L_{\nu, \nu+1}}{k \pi} \right)^2 \right] X_{\rho, \rho+1}^{(\nu)} + \omega_{\rho, \rho+1; k} \left(\frac{L_{\nu, \nu+1}}{k \pi} \right)^2 X_{\rho, \rho+1}^{(\nu+1)} \right\}, \quad (49)$$

so daß nach (38) die zu den \bar{X}_n gehörigen Stützenmomente sich zu

$$\Delta_2 X_{\rho, \rho+1}^{(\nu)} = \Phi_{\rho, \rho+1}^{(\nu)} \cdot X_{\rho, \rho+1}^{(\nu)} \quad (50)$$

ergeben. Dabei handelt es sich um eine symbolische Schreibweise, bei welcher Φ eine lineare homogene Funktion bedeutet. Die vollständigen Stützenmomente betragen nun

$$X_{\rho, \rho+1}^{(\nu)} = \Delta_1 X_{\rho, \rho+1}^{(\nu)} + \Delta_2 X_{\rho, \rho+1}^{(\nu)}. \quad (51)$$

Da hierin der erste Teil der rechten Seite nur von den $P_{\rho, \rho+1}$ abhängt, handelt es sich bei (51) um ebenso viele lineare, nicht homogene Gleichungen wie unbekannte $X_{\rho, \rho+1}^{(\nu)}$ vorhanden sind. Man könnte letztere daraus bestimmen. Leider sind in jeder Gleichung alle $X_{\rho, \rho+1}^{(\nu)}$ enthalten. Da aber in jeder Gleichung in erster Linie die Beiwerte der $X_{\rho, \rho+1}^{(\nu)}$ und in zweiter Linie diejenigen der $X_{\rho, \rho+1}^{(\nu)}$ unmittelbar benachbarten Momente $X_{\rho-1, \rho}^{(\nu)}$, $X_{\rho+1, \rho+2}^{(\nu)}$, $X_{\rho, \rho+1}^{(\nu-1)}$, $X_{\rho, \rho+1}^{(\nu+1)}$ gegenüber den anderen Beiwerten dominieren, läßt sich immer das folgende Iterationsverfahren anwenden. Man bestimmt zuerst die von den $P_{\rho, \rho+1}$ und den X_n stammenden Stützenmomente $\Delta_1 X_{\rho, \rho+1}^{(\nu)}$, kurz mit Δ_1 benannt. Diese erzeugen Knotenmomente \bar{X}_n , welche wieder Stützenmomente zur Folge haben, die man durch Einsetzen von Δ_1 in die Rekursionsformel (50) zu $\Phi \cdot \Delta_1$ erhält, so daß die verbesserten Stützenmomente $\Delta_1 + \Phi \cdot \Delta_1$ lauten. Wendet man nun denselben Gedankengang auf diese verbesserten Momente an, so heißt dies, daß wir diese wieder in Gl. (50) einzusetzen haben. Es ergibt sich $\Phi(\Delta_1 + \Phi \cdot \Delta_1) = \Phi \cdot \Delta_1 + \Phi \cdot (\Phi \cdot \Delta_1)$, woraus das nochmals verbesserte Moment $\Delta_1 + \Phi \cdot \Delta_1 + \Phi \cdot (\Phi \cdot \Delta_1)$ folgt. Dies setzen wir solange fort, bis die Gliederfolge $\Phi \cdot (\Phi \cdot \Delta_1)$; $\Phi \cdot [\Phi \cdot (\Phi \cdot \Delta_1)]$ auf Null ausklingt.

F. Mehrteilige Faltwerke

Das sind solche, bei welchen in einer Kante mehr als zwei Falten zusammenstoßen. Die zu Beginn des Abschnittes B dargestellte Kräftezerlegung ist dann statisch unbestimmt.

Der Umstand, daß in jeder der Gl. (38) nur immer die drei Stützenmomente derjenigen Falte vorkommen, für welche sie aufgestellt wurde, beruht auf der Tatsache, daß sich in den Gl. (32) die Glieder, in welchen die τ_n bzw. τ_{n+1} vorkommen, aufheben. Das heißt, es muß immer

$$x \frac{h_{m+1, n}}{L_{l, r}} \int_0^{L_{l, r}} \tau_n dx = h_{m+1, n} \int_0^x \tau_n dx \quad (52)$$

sein. Differenziert man dies nach x , so ergibt sich

$$\frac{1}{L_{l, r}} \int_0^{L_{l, r}} \tau_n \cdot dx = \tau_n = \text{konstant}, \quad (53)$$

so daß die Vereinfachungen nur dann auftreten, wenn für die Hilfsangriffe $X_{\rho, \rho+1}$ und $Y_{\rho, \rho+1}$ die Schubflüsse in den einzelnen Kanten konstant werden. Aus den Abhandlungen 3. und 4. des Verfassers (siehe Fußnote 1) geht hervor, daß bei mehrteiligen Faltwerken äußere Lasten, die in einer mehrteiligen Kante angreifen, in den anschließenden Falten nur dann zueinander affine Faltenbelastungen ergeben, wenn man den Einfluß der Querkräfte der achsnormalen Dehnungen und der Poisson'schen Querdehnungszahl vernachlässigt. Da nun für die an den Balkensystemen angreifenden Lastwirkungen $X_{\rho, \rho+1}$ und $Y_{\rho, \rho+1}$ zwischen den Auflagerscheiben die Lasten in den mehrteiligen Kanten und somit auch die Faltenbelastungen $p_{n, n+1}$, $m_{n, n+1}$ und $n_{n, n+1}$ der anschließenden Falten Null werden, ergeben sich aus den, den Gl. (5') analogen, viergliedrigen Bestimmungsgleichungen bei mehrteiligen Faltwerken die $\tau' = 0$ ⁵⁾, das heißt, die Schubflüsse sind konstant.

Fassen wir alle bisherigen Ergebnisse zusammen, so können wir den folgenden Satz aussprechen:

Bei durchlaufenden zweiteiligen Faltwerken kann jede Falte einzeln als Durchlaufträger, der mit den gegebenen äußeren Lasten und den faltwerksmäßig ermittelten Schubflüssen der Balkenwerke belastet ist, berechnet werden. Bei durchlaufenden, mehrteiligen Faltwerken hingegen gilt dies nur solange, wie man den Einfluß der Querkräfte, der achsnormalen Dehnungen und der Poisson'schen Querdehnungszahl auf die Verformungen unterdrücken kann.

⁵⁾ Siehe Abhandlung 3, Fußnote 1.

G. Anwendung

Wir wollen nun eine 2-feldrige steifknotige Tonne für halbseitige Schneelast eines Feldes berechnen. In den Fig. 1 und 9b ist das Tragwerk mit seinen Maß-, Steifigkeits- und Belastungsverhältnissen dargestellt. Nach Abschnitt B ergeben sich aus der Schneelastung die Linienlasten p , daraus folgen aus

$$s_{n,n-1} = p_n \cdot \frac{\cos \alpha_n}{\sin \Delta}; \quad s_{n,n+1} = p_n \frac{\cos \alpha_{n-1}}{\sin \Delta}$$

und deren Differenzen die Transversallasten der Falten zu

$$\begin{aligned} p_{10} &= +0,0758; \quad p_{21} = +7,6489 \\ p_{32} &= +1,4390; \quad p_{43} = -3,8186; \quad p_{54} = -4,3187 \text{ t/m.} \end{aligned}$$

Die Gl. (5') für die Balkentonne lauten

$$\begin{aligned} 30,725 \tau_1' + 8,697 \tau_2' &= -13,333 p_{10} - 11,342 p_{21} \\ 8,697 \tau_1' + 42,236 \tau_2' + 12,422 \tau_3' &= -11,342 p_{21} - 16,203 p_{32} \\ \tau_2' + 4 \tau_3' + \tau_4' &= -1,304 p_{32} - 1,304 p_{43} \\ \tau_3' + 4 \tau_4' + \tau_5' &= -1,304 p_{43} - 1,304 p_{54} \\ \tau_4' + 4 \tau_5' + \tau_6' &= -1,304 p_{54} \\ 12,422 \tau_5' + 42,236 \tau_6' + 8,696 \tau_7' &= 0 \\ 8,696 \tau_6' + 30,725 \tau_7' &= 0 \end{aligned} \quad (54)$$

Wir befassen uns zunächst mit der steifknotigen Balkentonne und erhalten die Gl. (25) in der Form

$$\begin{aligned} \bar{p}_{10} &= 0,4948 X_2 & +0,0758 \\ \bar{p}_{21} &= -4,5914 X_2 + 2,1994 X_3 & +7,6489 \\ \bar{p}_{32} &= +6,5121 X_2 - 6,5121 X_3 + 2,1994 X_4 & +1,4390 \\ \bar{p}_{43} &= -2,1994 X_2 + 6,51074 X_3 - 6,51074 X_4 + 2,1994 X_5 - 3,8186 & (55) \\ \bar{p}_{54} &= -2,1994 X_3 + 6,51074 X_4 - 6,51074 X_5 + 2,1994 X_6 - 4,3187 \\ \bar{p}_{65} &= -2,1994 X_4 + 6,51074 X_5 - 6,5121 X_6 \\ \bar{p}_{67} &= -2,1994 X_5 + 4,5914 X_6 \\ \bar{p}_{87} &= -0,4948 X_6. \end{aligned}$$

Setzt man diese \bar{p} in die Gl. (54) ein, löst diese auf und substituiert die so gefundenen $\bar{\tau}_n'$ in die Gl. (29), so folgen diese als

$$\begin{aligned} y_{91}^{\text{IV}} &= +33,1947 X_2 - 19,3070 X_3 + 5,4651 X_4 - 1,4535 X_5 + 0,3644 X_6 - 27,6832 \\ y_{12}^{\text{IV}} &= -38,5413 X_2 + 30,7604 X_3 - 11,7753 X_4 + 3,1319 X_5 - 0,7851 X_6 + 23,5285 \\ y_{23}^{\text{IV}} &= +49,3361 X_2 - 57,6363 X_3 + 36,1708 X_4 - 13,7493 X_5 + 3,4449 X_6 - 5,2898 \\ y_{34}^{\text{IV}} &= -34,9168 X_2 + 62,2380 X_3 - 63,0890 X_4 + 38,2082 X_5 - 13,4635 X_6 - 4,5763 \\ y_{45}^{\text{IV}} &= +13,4635 X_2 - 38,2082 X_3 + 63,0904 X_4 - 62,2380 X_5 + 34,9155 X_6 - 9,9263 & (56) \\ y_{56}^{\text{IV}} &= -3,4448 X_2 + 13,7398 X_3 - 36,1694 X_4 + 57,6349 X_5 - 49,3361 X_6 + 10,3232 \\ y_{67}^{\text{IV}} &= +0,7852 X_2 - 3,1317 X_3 + 11,7753 X_4 - 30,7587 X_5 + 38,5414 X_6 - 2,3530 \\ y_{78}^{\text{IV}} &= -0,3643 X_2 + 1,4535 X_3 - 5,4649 X_4 + 19,3072 X_5 - 33,1952 X_6 + 1,0921 \end{aligned}$$

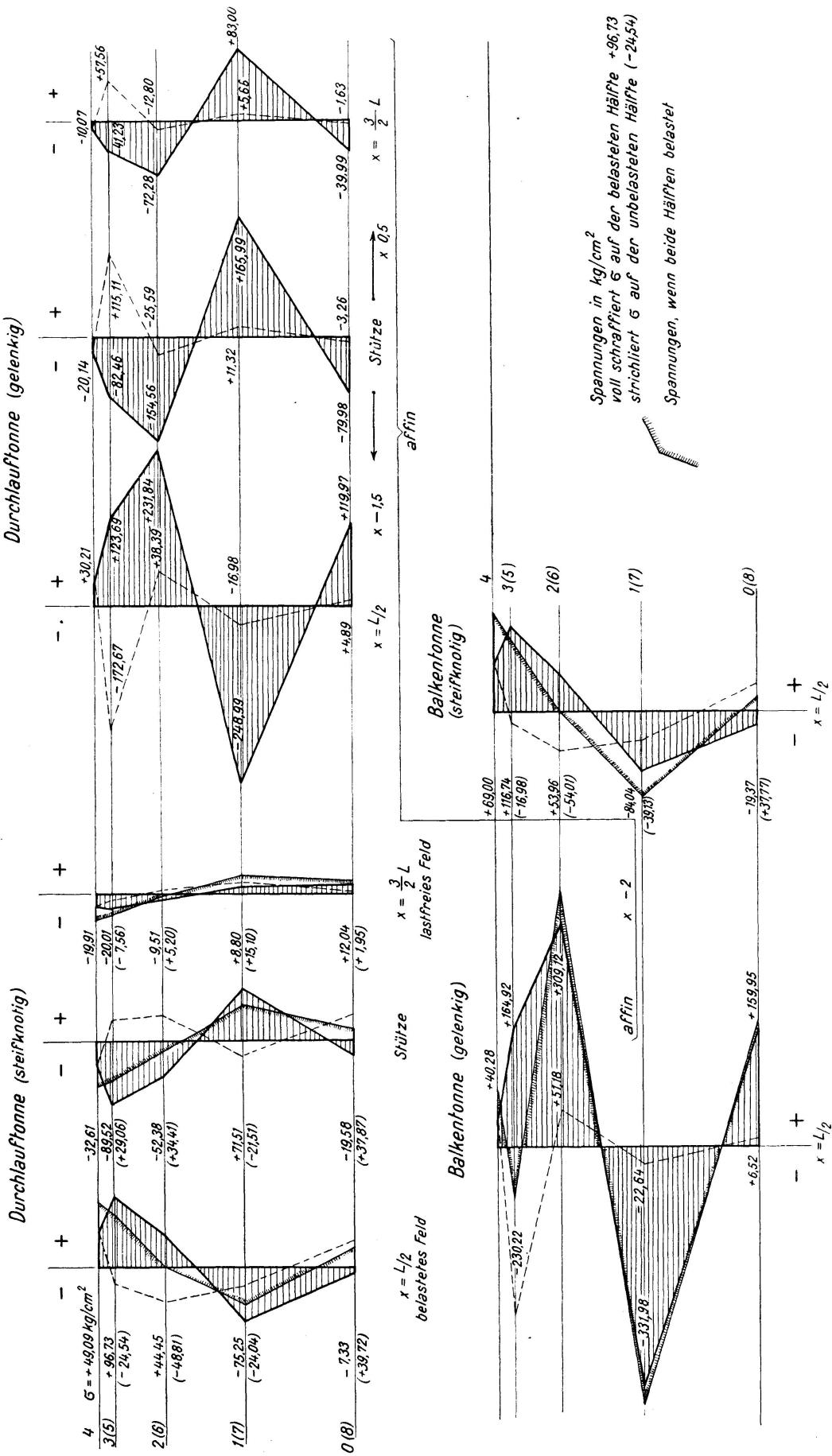


Fig. 9a, Längsspannungen in den Faltwerkquerschnitten

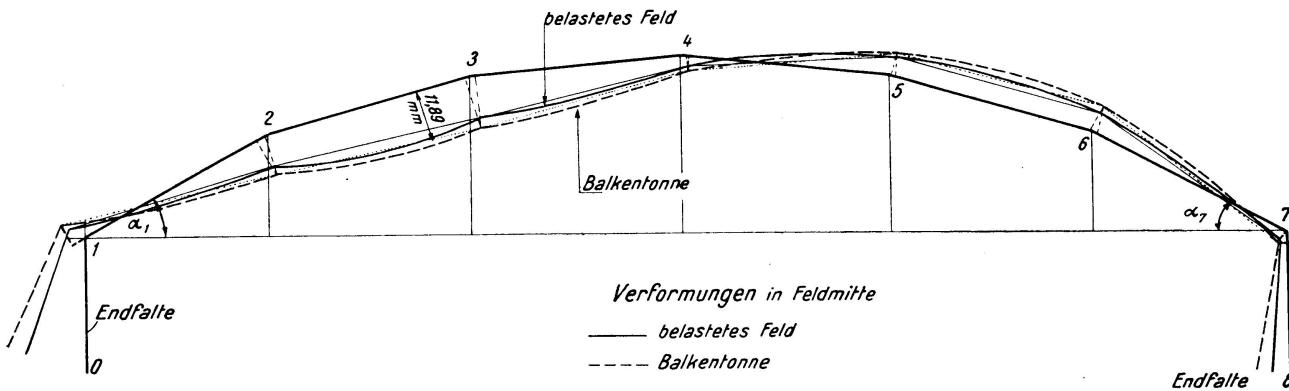


Fig. 9b

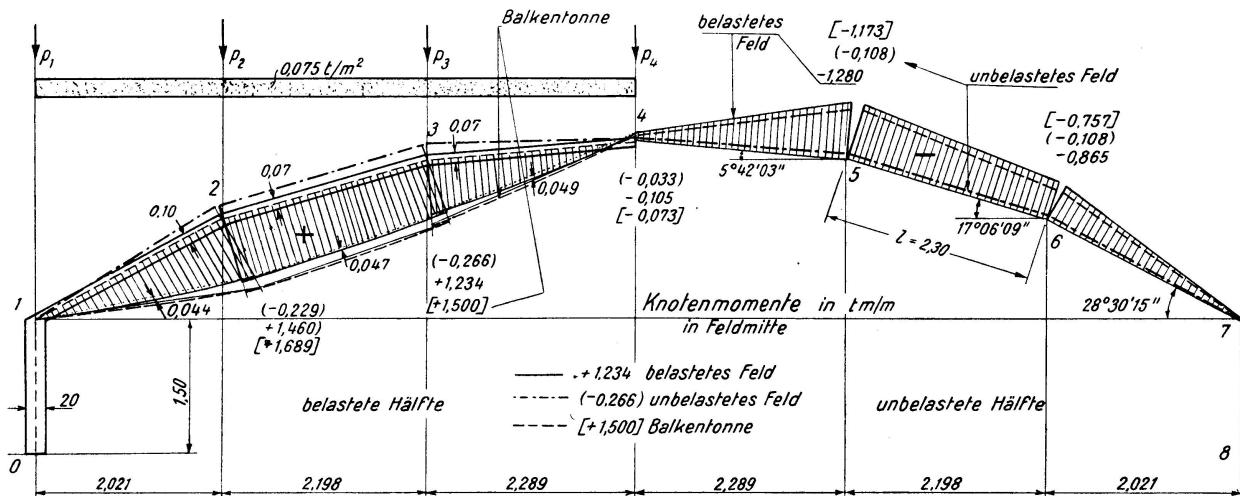


Fig. 9c

Die Gl. (26) lauten bei Berücksichtigung der bekannten Randbedingungen und mit $\alpha_1 = \alpha_7 = 28^0 30' 15''$

$$\begin{aligned}
 l \cdot \Delta \vartheta_2^{IV} &= 1,13794 y_{01}^{IV} - 10,5604 y_{12}^{IV} + 14,9761 y_{23}^{IV} - 5,0586 y_{34}^{IV} \\
 l \cdot \Delta \vartheta_3^{IV} &= 5,0586 y_{12}^{IV} - 14,9761 y_{23}^{IV} + 14,9761 y_{34}^{IV} - 5,0586 y_{45}^{IV} \\
 l \cdot \Delta \vartheta_4^{IV} &= 5,0586 y_{23}^{IV} - 14,9761 y_{34}^{IV} + 14,9761 y_{45}^{IV} - 5,0586 y_{56}^{IV} \\
 l \cdot \Delta \vartheta_5^{IV} &= 5,0586 y_{34}^{IV} - 14,9761 y_{45}^{IV} + 14,9761 y_{56}^{IV} - 5,0586 y_{67}^{IV} \\
 l \cdot \Delta \vartheta_6^{IV} &= 5,0586 y_{45}^{IV} - 14,9761 y_{56}^{IV} + 10,5604 y_{67}^{IV} - 1,1379 y_{78}^{IV}
 \end{aligned} \tag{57}$$

Setzt man hierin die Gl. (56) ein, so erhalten wir mit $\bar{J}_{12} = \frac{1}{12} 0,10^3 \cdot 1,00 = 0,0083 \text{ m}^4$ und $\bar{J}_{23} = \frac{1}{12} \cdot 0,07^3 \cdot 1,00 = 0,00583 \text{ m}^4$ die Gl. (30) zu

$$\begin{aligned}
 &591,421 X_2 - 662,975 X_3 + 431,072 X_4 - 188,607 X_5 + 55,848 X_6 \\
 &+ 2,30 [15661,88 X_2^{IV} + 5830,94 X_3^{IV}] - 146,104 + N_{21}^{IV} + N_{23}^{IV} = 0 \\
 &- 662,975 X_2 + 932,223 X_3 - 810,997 X_4 + 482,027 X_5 - 188,607 X_6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2,30 [5830,94 X_2^{\text{IV}} + 4 \cdot 5830,94 X_3^{\text{IV}} + 5830,94 X_4^{\text{IV}}] + 78,226 + N_{32}^{\text{IV}} + N_{34}^{\text{IV}} = 0 \\
& + 431,072 X_2 - 810,997 X_3 + 980,703 X_4 - 810,997 X_5 + 431,072 X_6 \\
& + 2,30 [5830,94 X_3^{\text{IV}} + 4 \cdot 5830,94 X_4^{\text{IV}} + 5830,94 X_5^{\text{IV}}] - 69,174 + N_{43}^{\text{IV}} = 0 \\
& - 188,607 X_2 + 482,027 X_3 - 810,997 X_4 + 932,223 X_5 - 662,975 X_6 + \\
& + 2,30 [5830,94 X_4^{\text{IV}} + 4 \cdot 5830,94 X_5^{\text{IV}} + 5830,94 X_6^{\text{IV}}] + 126,961 = 0 \\
& + 55,848 X_2 - 188,607 X_3 + 431,072 X_4 - 662,975 X_5 + 591,421 X_6 + \\
& + 2,30 [5830,94 X_5^{\text{IV}} + 15661,88 X_6^{\text{IV}}] - 100,396 = 0
\end{aligned} \tag{58}$$

Die Belastungsglieder $\frac{p l^3 \cos^2 \alpha}{24 \bar{J}}$ lauten im besonderen $N_{21} = 76,598 \cdot 2,30$; $N_{32} = 528,333 \cdot 2,30$; $N_{34} = 572,652 \cdot 2,30$. Die Auflösung von (58) erfolgt mittelst Fourier'scher Reihen $X_n = \sum_1^k A_{n,k} \cdot \sin \frac{k \pi}{L} x$.

Entwickelt man die Absolutglieder ebenfalls in sin-Reihen $\sum_1^k a_{n,k} \cdot \sin \frac{k \pi}{L} x$ und setzt die Reihen für die X_n ein, so ergeben sich für jeden Index k lineare Gleichungen für die $A_{n,k}$. Die Lösungen wurden für $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ durchgeführt.

Wir geben nur die Werte für $k = 1$ zu

$$\begin{aligned}
A_{11} &= -0,0198261 \cdot a_{11} - 0,0255963 \cdot a_{21} - 0,0162385 \cdot a_{31} - 0,00444810 \cdot a_{41} \\
&\quad + 0,0005668 \cdot a_{51} \\
A_{21} &= -0,0255961 \cdot a_{11} - 0,040964 \cdot a_{21} - 0,0343043 \cdot a_{31} - 0,0168390 \cdot a_{41} \\
&\quad - 0,00444795 \cdot a_{51} \\
A_{31} &= -0,0162385 \cdot a_{11} - 0,0343056 \cdot a_{21} - 0,0431234 \cdot a_{31} - 0,0343056 \cdot a_{41} \\
&\quad - 0,0162386 \cdot a_{51} \\
A_{41} &= -0,0044810 \cdot a_{11} - 0,0168390 \cdot a_{21} - 0,0343043 \cdot a_{31} - 0,0409640 \cdot a_{41} \\
&\quad - 0,0255960 \cdot a_{51} \\
A_{51} &= +0,0005668 \cdot a_{11} - 0,00444810 \cdot a_{21} - 0,0162385 \cdot a_{31} - 0,0255963 \cdot a_{41} \\
&\quad - 0,0198261 \cdot a_{51}
\end{aligned} \tag{59a}$$

und, um einen Begriff für die Stärke der Konvergenz zu erhalten, auch diejenige für $k = 6$ zu

$$\begin{aligned}
100 \cdot A_{61} &= -0,0183304 \cdot a_{61} + 0,00260646 \cdot a_{62} + 0,000668030 \cdot a_{63} - \\
&\quad - 0,000694105 \cdot a_{64} + 0,000367100 \cdot a_{65} \\
100 \cdot A_{62} &= +0,00260644 \cdot a_{61} - 0,0124119 \cdot a_{62} + 0,00138040 \cdot a_{63} - \\
&\quad - 0,00068955 \cdot a_{64} - 0,000694130 \cdot a_{65} \\
100 \cdot A_{63} &= +0,00066850 \cdot a_{61} + 0,00138005 \cdot a_{62} - 0,0121546 \cdot a_{63} + \\
&\quad + 0,00138095 \cdot a_{64} + 0,0006733 \cdot a_{65} \\
100 \cdot A_{64} &= -0,00069413 \cdot a_{61} + 0,000689550 \cdot a_{62} + 0,00138035 \cdot a_{63} - \\
&\quad - 0,0124119 \cdot a_{64} + 0,00260644 \cdot a_{65} \\
100 \cdot A_{65} &= +0,00036710 \cdot a_{61} - 0,000694105 \cdot a_{62} + 0,000668030 \cdot a_{63} + \\
&\quad + 0,00260647 \cdot a_{64} - 0,0183304 \cdot a_{65}
\end{aligned} \tag{59e}$$

bekannt. Die Beiwerthe der rechtsfallenden Diagonale sinken also auf $1/100$ bis $1/400$. Die sin-Reihen für die Absolutglieder lauten

$$\begin{aligned}
 & -185,233 \sin \frac{\pi}{L} x - 56,822 \sin \frac{3\pi}{L} x - 13,197 \sin \frac{5\pi}{L} x \\
 & + 99,950 \sin \frac{\pi}{L} x + 42,638 \sin \frac{3\pi}{L} x + 63,197 \sin \frac{5\pi}{L} x \\
 & - 87,893 \sin \frac{\pi}{L} x - 24,450 \sin \frac{3\pi}{L} x + 5,112 \sin \frac{5\pi}{L} x \\
 & + 161,652 \sin \frac{\pi}{L} x + 53,884 \sin \frac{3\pi}{L} x + 32,330 \sin \frac{5\pi}{L} x \\
 & - 127,828 \sin \frac{\pi}{L} x - 42,609 \sin \frac{3\pi}{L} x - 25,566 \sin \frac{5\pi}{L} x
 \end{aligned} \tag{60}$$

Dies in (59a, c, e) eingesetzt, ergibt die Knotenmomente der steifknotigen Balkentonne zu

$$\begin{aligned}
 X_2 &= +1,7498 \sin \frac{\pi}{L} x + 0,0657 \frac{3\pi}{L} x + 0,0052 \sin \frac{5\pi}{L} x \\
 X_3 &= +1,5085 \sin \frac{\pi}{L} x - 0,0005 \frac{3\pi}{L} x - 0,0132 \sin \frac{5\pi}{L} x \\
 X_4 &= -0,1005 \sin \frac{\pi}{L} x - 0,0298 \frac{3\pi}{L} x - 0,0020 \sin \frac{5\pi}{L} x \\
 X_5 &= -1,1941 \sin \frac{\pi}{L} x - 0,0272 \frac{3\pi}{L} x - 0,0059 \sin \frac{5\pi}{L} x \\
 X_6 &= -0,7257 \sin \frac{\pi}{L} x + 0,0397 \frac{3\pi}{L} x - 0,0083 \sin \frac{5\pi}{L} x
 \end{aligned} \tag{61}$$

Nun wenden wir uns der steifknotigen Durchlauftonne zu. Entwickeln wir die 4. Ableitungen der durch die Stützenmomente $X_{\rho, \rho+1}$ an der Balkengelenktonne verursachten Biegelinien nach Gl. (48) in sin-Reihen, setzen diese in Gl. (57) ein, so erhalten wir die Absolutglieder \bar{P}^{IV} der Gl. (30') in Form von sin-Reihen, deren Koeffizienten lineare, homogene Funktionen der $X_{\rho, \rho+1}$ sind. Wertet man mit diesen die Matrixen (59a, b, c, d, e, f) aus, so ergeben sich die sin-Reihen der durch die $X_{\rho, \rho+1}$ verursachten Knotenpunktssmomente \bar{X}_n . Setzt man diese in die Gl. (56) unter Weglassung deren Absolutglieder ein, so ergeben sich die 4. Ableitungen der durch die $X_{\rho, \rho+1}$ und $Y_{\rho, \rho+1}$ verursachten Durchbiegungen \bar{y} der steifknotigen Balkentonne. Bestimmt man mit diesen nach Gl. (49) die Belastungsglieder der Gl. (38) und löst diese nach den $X_{\rho, \rho+1}$ auf, so folgen die zu den \bar{X}_n gehörigen Stützenmomente $\Delta_2 X_{\rho, \rho+1}$ der Gl. (50). Dabei ist nicht zu vergessen, daß die \bar{X}_n in *beiden* Feldern der Durchlauftonne wirken. Es wird also

$$\begin{array}{cccccccc}
 X_{01} & X_{12} & X_{23} & X_{34} & X_{45} & X_{56} & X_{67} & X_{78} \\
 \Delta_2 X_{01} = & +0,0823 - 0,254 & +0,207 & +0,186 & +0,0391 - 0,0586 - 0,0380 + 0,0134 & & & \\
 \Delta_2 X_{12} = & -0,0972 + 0,393 & -0,520 & -0,138 & +0,0493 + 0,0745 + 0,0161 - 0,0159 & & & \\
 \Delta_2 X_{23} = & +0,0182 - 0,167 & +0,483 & -0,256 & -0,0538 + 0,0344 + 0,0218 - 0,0086 & & & \\
 \Delta_2 X_{34} = & +0,190 & -0,0231 - 0,242 & +0,516 & -0,240 & -0,0477 + 0,0245 + 0,0060 & & \\
 \Delta_2 X_{45} = & +0,0060 + 0,0245 - 0,0477 - 0,240 & +0,516 & -0,242 & -0,0231 + 0,0190 & & & (62) \\
 \Delta_2 X_{56} = & -0,0086 + 0,0218 + 0,0344 - 0,0538 - 0,256 & +0,483 & -0,167 & +0,0182 & & & \\
 \Delta_2 X_{67} = & -0,0159 + 0,0161 + 0,0745 + 0,0493 - 0,138 & -0,520 & +0,393 & -0,0972 & & & \\
 \Delta_2 X_{78} = & +0,0134 - 0,0380 - 0,0586 + 0,0391 + 0,186 & +0,207 & -0,254 & +0,0823 & & &
 \end{array}$$

Um nun diesen Gleichungssatz durch Iteration auswerten zu können, müssen wir die gelenkige Durchlauftonne mit der halbseitigen Schneelast und den dazugehörigen Knotenmomenten X_n der steifknotigen Balkentonne belasten und hierfür die Stützenmomente $\Delta_1 X_{\rho, \rho+1}$ nach Abschnitt E_a ermitteln. Zu diesem Behufe setzen wir die Gl. (61) in die Gl. (56) ein und entwickeln die Absolutglieder der letzteren in sin-Reihen. Integrieren wir dann unter Berücksichtigung der Randbedingungen $y'' = 0$; $y = 0$ für $x = 0$, $x = L$ und differentieren einmal nach x , so ergeben sich die Enddrehwinkel $\vartheta_{\rho, \rho+1}$ der Gl. (38) und daraus die gesuchten Stützenmomente zu

$$\begin{array}{ll}
 \Delta_1 X_{01} = -1,686 + 2,011 = +0,325; & \Delta_1 X_{45} = -0,614 + 0,910 = +0,296 \\
 \Delta_1 X_{12} = +2,344 - 3,081 = -0,737; & \Delta_1 X_{56} = +1,050 - 0,946 = +0,104 \\
 \Delta_1 X_{23} = -0,694 + 0,485 = -0,209; & \Delta_1 X_{67} = -0,437 + 0,308 = -0,129 \\
 \Delta_1 X_{34} = -0,226 + 0,419 = +0,193; & \Delta_1 X_{78} = +0,173 - 0,079 = +0,094
 \end{array} \quad (63)$$

Da nur ein Feld der Tonne mit Schnee belastet ist, dürfen auch die X_n nur im selben Feld angebracht werden. Diese $\Delta_1 X_{\rho, \rho+1}$ der Gl. (63) sind nun in der Rekursionsformel (62) an Stelle der $X_{\rho, \rho+1}$ zu setzen. Die so erhaltenen Ergebnisse setzt man in Gl. (62) wieder an Stelle der $X_{\rho, \rho+1}$, und dies solange, bis die Reste praktisch verschwinden. In unserem Falle lauten nach 18 Schritten diese der Reihe nach

$$+0,000071; -0,00015; +0,00010; -0,00011; +0,00008; 0; 0.$$

Summiert man alle Teilwerte, so erhalten wir genügend genau die Stützenmomente der steifknotigen Durchlauftonne der Reihe nach zu

$$+0,745; -1,191; -0,250; +0,383; +0,415; +0,036; -0,451; +0,412. \quad (64)$$

Setzt man zur Kontrolle diese Ergebnisse wieder in die Gl. (62) und fügt die Werte (63) hinzu, so müssen sich wieder die Momente (64) ergeben. Aus diesen Stützmomenten folgen nach Gl. (41) die dazugehörigen Achsialkräfte und somit die Längsspannungen σ . Setzt man die Stützenmomente (64) in die Zwischengleichungen, in welchen die \bar{X}_n als lineare, homogene Funktion der Stützenmomente $X_{\rho, \rho+1}$ dargestellt sind, so folgen die \bar{X}_n zu

$$\begin{aligned}
\bar{X}_2 &= -0,2609 \sin \frac{\pi}{L} x + 0,1088 \sin \frac{2\pi}{L} x - 0,0446 \sin \frac{3\pi}{L} x \\
&\quad + 0,0224 \sin \frac{4\pi}{L} x - 0,0126 \sin \frac{5\pi}{L} x + 0,0077 \sin \frac{6\pi}{L} x \\
X_3 &= -0,2925 \sin \frac{\pi}{L} x + 0,1016 \sin \frac{2\pi}{L} x - 0,0322 \sin \frac{3\pi}{L} x \\
&\quad + 0,0127 \sin \frac{4\pi}{L} x - 0,0060 \sin \frac{5\pi}{L} x + 0,0039 \sin \frac{6\pi}{L} x \\
X_4 &= -0,0428 \sin \frac{\pi}{L} x - 0,00619 \sin \frac{2\pi}{L} x + 0,0057 \sin \frac{3\pi}{L} x \quad (65) \\
&\quad - 0,0043 \sin \frac{4\pi}{L} x + 0,0159 \sin \frac{5\pi}{L} x - 0,0016 \sin \frac{6\pi}{L} x \\
X_5 &= -0,0857 \sin \frac{\pi}{L} x - 0,0864 \sin \frac{2\pi}{L} x + 0,0260 \sin \frac{3\pi}{L} x \\
&\quad - 0,0095 \sin \frac{4\pi}{L} x + 0,0041 \sin \frac{5\pi}{L} x - 0,0024 \sin \frac{6\pi}{L} x \\
X_6 &= -0,0913 \sin \frac{\pi}{L} x - 0,0739 \sin \frac{2\pi}{L} x + 0,0228 \sin \frac{3\pi}{L} x \\
&\quad - 0,0109 \sin \frac{4\pi}{L} x + 0,0064 \sin \frac{5\pi}{L} x - 0,0041 \sin \frac{6\pi}{L} x
\end{aligned}$$

Diese stellen gleichzeitig die Knotenmomente im unbelasteten Feld der Durchlauftonne dar. Addiert man Gl. (61) und (65), so erhalten wir die Knotenmomente des belasteten Feldes. In Fig. 9b sind alle X_n dargestellt. Belastet man die linke gelenkige Balkentonne mit dem Schnee, den X_n , den \bar{X}_n und den Wirkungen $X_{\rho, \rho+1}$, $X_{\rho, \rho+1}$ an den Stützen, so ergeben sich aus den dazugehörigen $y_{\rho, \rho+1}^{\text{IV}}$ die Biegemomente $M_{\rho, \rho+1}$ der einzelnen Falten. Daraus folgen nach Gl. (41) die Normalkräfte $N_{\rho, \rho+1}$, so daß die Längsspannungen σ daraus folgen. Für die beiden Feldmitten sind diese für die gelenkige und steifknotige Durchlauftonne sowie für die steifknotige Balkentonne in Fig. 9a dargestellt. Da es sich um ein gleichartig gestaltetes und belastetes Faltwerk handelt, sind für die gelenkige Tonne diese Diagramme zueinander affin. Bei der steifknotigen Tonne trifft dies nicht mehr zu, da wohl die einzelnen Glieder der Gl. (61) und (65), aber nicht die vollständigen Funktionen der X_n und \bar{X}_n gleichartige Belastungen darstellen. Aus den y^{IV} folgen auch leicht die Durchbiegungen y selbst, aus welchen man in bekannter Weise die gesamten Verformungen bestimmen kann (siehe Fig. 9c.). Setzt man die X_n bzw. \bar{X}_n in die Gl. (55) und die so gewonnenen \bar{p} in die Gl. (54), so erhalten wir die Schubflüsse der Balkentonnen und daraus mittelst der Gl. (35) diejenigen der durchlaufenden Tonnen.

Infolge der Symmetrieverhältnisse ergeben sich durch Spiegelung und Gegenspiegelung die Werte für Vollbelastung eines oder beider Felder sowie für gleich- oder wechselständige halbseitige Belastung beider Felder.

H. Zusammenfassung

Das Studium der Fig. 9a, b, c ergibt:

I. Gelenkwerke

- a) Die Längsspannungen weisen bei alternierenden Vorzeichenwechsel scharfe Spitzen auf.
- b) Die lastfreie Hälfte trägt nur wenig mit.
- c) Bei Belastung beider Hälften eines Feldes verschlimmern sich die Übelstände a).
- d) Große Durchbiegungen bis 18 cm. Die dadurch bedingten Wirkungen 2. Ordnung gefährden wahrscheinlich schon den Bestand des Tragwerkes. Aussteifende Zwischenscheiben sind unbedingt erforderlich.
- e) Die Durchlaufwirkung beseitigt diese Übelstände nicht grundsätzlich, sondern mildert sie nur quantitativ.
- f) Das unbelastete Feld wird noch erheblich beansprucht. 3 : 2 : 1.
- g) Die σ -Diagramme sind zueinander affin.

II. Steifknotige Systeme

Die Nachteile a) und b) verschwinden.

- c) Bei diesem Lastfall wird die Verteilung der σ ober- und unterhalb der waagrechten 1—7 fast vollständig linear, wodurch der innere, innige Zusammenhalt des Tragwerkes erwiesen ist.
- d) Kleine Durchbiegungen bis 1,1 cm. Zwischenscheiben nicht nötig.
- e) Die Durchlaufwirkung verbessert alle Belange.
- f) Das unbelastete Feld trägt nur wenig mit 1 : 1 : 0,25. Ähnlich wie bei durchlaufenden, rings gelagerten Platten bleibt die Wirkung im wesentlichen auf das belastete Feld beschränkt.
- g) Die σ -Diagramme sind fast affin.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die Steifknotigkeit und die Durchlaufwirkung das Tragverhalten der Faltwerke außerordentlich verbessern. Bedenkt man, daß diese beiden konstruktiven Maßnahmen im Stahlbetonbau keinerlei Mehrkosten verursachen, ja sogar die absichtliche Ausschaltung dieser statischen Wirkungen meistens zusätzliche Kosten verursachen, so kommt den gewonnenen Ergebnissen eine große Bedeutung zu.

Die hier behandelten Tragwerke haben einen hohen Grad von statischer Unbestimmtheit. Diese weist 3 Stufen auf.

- a) Die eigentliche Faltwerkswirkung, erfaßt durch die Gl. (5), (5').
- b) Die Steifknotigkeit, erfaßt durch die Gl. (30), (30').
- c) Die Durchlaufwirkung, erfaßt durch Gl. (38) und (50).

Diese Stufen werden nacheinander aufgelöst. Und zwar

1. bei der gelenkigen Durchlauftonne durch aufeinander folgende Anwendung der Gl. (5) und (38),
2. bei den steifknotigen Balkentonnen durch aufeinander folgende Benutzung der Gl. (5) und (30), und schließlich
3. bei den steifknotigen, durchlaufenden Systemen durch aufeinander folgende Auswertung von Gl. (5), Gl. (30) bzw. (30') und nachheriger Verknüpfung von b) und c) durch Gl. (50).

Eine weitere Aufspaltung einer exakten Gesamtlösung ist nicht mehr möglich. Dies ist auch gut so, denn ist die Behandlung eines unbestimmten Tragwerkes einer stufenweisen Aufgliederung gar zu leicht zugänglich, so hat das System meist nur einen geringen Grad von innerem Zusammenhang und von Flächenwirkung, was wir ja bei unseren Faltwerken nicht wünschen.

J. Stützenbewegungen

a) Voruntersuchungen

Man kann eine solche genügend genau als kleine Drehung ϑ um eine Momentenachse 0 darstellen, solange sie die übliche Größenordnung von Verformungen nicht überschreiten.

Wir zerlegen das durchlaufende System wieder in einzelne Balkenfaltwerke und hängen diese in achsialer Richtung nach Fig. 8 in je einem Punkte C zusammen. Jede Lagerscheibe ist durch 3 in ihrer Ebene liegende, lineare Festhaltungen gelagert, die in Richtung der Faltwerksachse verschieblich sind. Die Stützungsscheiben sollen wieder so geartet sein, daß sie normal zu ihren Achsebenen gerichtete Kräfte nicht aufnehmen können.

Zunächst müssen wir die inneren Kräfte erfassen, die in den Balkenfaltwerken entstehen, wenn sich die Stützscheiben zueinander achsnormal verschieben. Die Anschauung ergibt, daß dadurch in den achsialen Verbindungsstellen c keine Kräfte entstehen, so daß man die einzelnen Balkenwerke auch getrennt voneinander behandeln kann. Die Auflagerreaktionen dieser Balkensysteme können nach dem bisher gesagten nur aus ebenen, in den Lagerscheiben wirkenden Kräftesystemen bestehen. Da nur die Wirkungen der Stützenbewegungen allein untersucht werden sollen, das heißt, daß zwischen den Lagerscheiben keine äußeren Lasten angreifen, ergibt die Momentengleichung um irgend eine in den Lagerscheiben liegende Achse, daß die Auflagerreaktionen nur zwei Torsionsmomente M_T sein können.

b) Gelenkige Balkensysteme

Da nun achsiale Lasten $n_{\nu-1,\nu}$ nicht vorhanden sein können, verschwinden nach den bisherigen Darlegungen die rechten Seiten der Gl. (5'), und es wir

$$\tau_n' = 0 \text{ und } \tau_n = \text{konstant.} \quad (66)$$

α) Offene Querschnitte

Bildet man für einen solchen die Gl. (14), so ergibt sich bei Berücksichtigung der beiden freien Ränder $\tau_o = \tau_m \equiv 0$, daß alle $\tau_n \equiv 0$ werden, was nach dem bisher gesagten ein Verschwinden aller inneren Kräfte zur Folge hat. Die Kanten erfahren keine Längsdehnungen.

β) Geschlossene Querschnitte

Auch bei diesen folgen aus den Gl. (5') wieder die Gl. (66). Bezeichnet man $T_n = \tau_n \cdot L$, so ergeben die Gl. (14)

$$T_1 = T_2 = \dots = T. \quad (67)$$

Die Momentengleichung einer Falte $n-1, n$ liefert

$$Q_{n-1,n} = \frac{h_{m,n} + h_{m,n+1}}{L} T = \frac{h_{n-1,n}}{L} T. \quad (68)$$

Beachtet man, daß die Achsiallasten $n_{\nu-1,\nu} = 0$ sind, so folgt durch Einsetzen von (67) und (68) in Gl. (5), daß diese dadurch identisch befriedigt werden.

Stellt man für irgend eine achsparallele Gerade die Momentengleichung für eine Lagerscheibe auf, so erhalten wir mit Gl. (68) das Torsionsmoment zu

$$M_T = \sum_{\nu} Q_{\nu-1,\nu} \cdot r_{\nu-1,\nu} = \frac{T}{L} \sum_{\nu} h_{\nu-1,\nu} \cdot r_{\nu-1,\nu} = \frac{T}{L} \cdot 2F, \quad (69)$$

wenn F den Flächeninhalt des Querschnittes darstellt. Setzen wir den in der Lagerscheibe wirkend gedachten Hilfsangriff ($M_1 = 1$) an, so folgt der Verdrehungswinkel ϑ zu

$$\vartheta = \sum_{\nu} \int_0^L \frac{Q_{\nu-1,\nu} \cdot \mathfrak{Q}_{\nu-1,\nu}}{G \cdot F_{\nu-1,\nu}} dx, \quad (70)$$

wobei die $\mathfrak{Q}_{\nu-1,\nu}$ die zu ($M_T = 1$) gehörigen Querkräfte darstellen. Mit (68) und (69) geht dies in

$$\vartheta = \frac{M_T}{4F^2G} \sum_{\nu} \int_0^L \frac{h_{\nu-1,\nu}}{d_{\nu-1,\nu}} dx = \frac{M_T L}{4F^2G} \sum_{\nu} \frac{h_{\nu-1,\nu}}{d_{\nu-1,\nu}} \quad (71)$$

über, wenn $d_{\nu-1,\nu}$ die Faltendicken bedeuten. Daraus folgt mit (69) die für alle Kanten gleiche Schubkraft T zu

$$T = \frac{2 F G}{\sum_{\nu} \frac{h_{\nu-1, \nu}}{d_{\nu-1, \nu}}} \cdot \vartheta \quad (72)$$

Bei dieser Torsion bleibt nur die Drillungsachse in Ruhe. Fällt diese mit der Momentenachse nicht zusammen, so erfährt die Auflagerscheibe noch zusätzlich eine Translation $\vartheta \cdot a$. Nach den unter Punkt a) dieses Abschnittes dargelegten Auflagerbedingungen kann das Balkenwerk diese letzte Bewegung als starres Gebilde mitmachen, ohne daß hierbei neue Zwänge auftreten, so daß durch Gl. (72) die inneren Kräfte ganz erfaßt sind.

c) Steifknotige Balkensysteme

Bringen wir im Knotenpunkt n des gelenkigen Balkenwerkes ein konzentriertes Knotenmoment ($X_n = 1$) an, so entstehen in der Falte $n-1, n$ die Querkräfte

$$\mathfrak{Q}_{n-1, n}^{(l)} = \frac{l_2}{L} k_{n-1, n}; \quad \mathfrak{Q}_{n-1, n}^{(r)} = - \frac{l_1}{L} k_{n-1, n} \quad (73)$$

und außerdem $\mathfrak{M}_{n-1, n}$, $\mathfrak{N}_{n-1, n}$. Die Winkeländerung $\Delta \vartheta_n^{(n)}$ ergibt sich, wenn $M_{n-1, n}$; $N_{n-1, n}$; $Q_{n-1, n}$ die durch relative Stützenbewegung verursachten inneren Kräfte bedeuten, zu

$$\Delta \vartheta_n^{(n)} = \sum_{\nu} \int \left(\frac{M_{\nu-1, \nu} \cdot \mathfrak{M}_{\nu-1, \nu}}{E J_{\nu-1, \nu}} + \frac{N_{\nu-1, \nu} \cdot \mathfrak{N}_{\nu-1, \nu}}{E F_{\nu-1, \nu}} + \frac{Q_{\nu-1, \nu} \cdot \mathfrak{Q}_{\nu-1, \nu}}{G F_{\nu-1, \nu}} \right) dx. \quad (74)$$

Da $M_{\nu-1, \nu}$ und $N_{\nu-1, \nu}$ Null werden, verschwinden zunächst die beiden ersten Glieder. Beachtet man, daß die $Q_{\nu-1, \nu}$ je Falte konstant sind, so ergibt sich mit (73) auch das dritte Glied zu Null, so daß Winkeländerungen $\Delta \vartheta_n$ und somit auch Knotenmomente X_n nicht auftreten. Wir können daher zusammenfassend sagen:

„Verschieben sich bei einem nach Fig. 3 gelagerten, steifknotigen oder gelenkigen Balkenfaltwerk die Lagerscheiben achsnormal zueinander, so entstehen nur bei Tragwerken mit geschlossenen Querschnitten Torionsspannungen nach Gl. (72). In allen übrigen Fällen bleiben bei diesen Verformungen die Tragwerke spannungslos.“

Die Auflagerverschiebungen in Richtung der Faltenebene ergeben sich nach der Kinematik zu

$$y_{\nu-1, \nu}^{(\mu)} = \vartheta \cdot \eta_{\nu-1, \nu}, \quad (75)$$

wenn die $\eta_{\nu-1, \nu}$ die lotrechten Abstände der Falten vom Momentanpol 0 bedeuten. Sind 3 von ihnen bekannt, so kann die Momentenachse und der dazugehörige Drehwinkel bestimmt werden, oder anders ausgedrückt: Durch 3 von ihnen können die anderen linear homogen ausgedrückt werden. Also

$$y_{\mu-1, \mu} = a \cdot y_{n-1, n} + b \cdot y_{n, n+1} + c \cdot y_{n+1, n+1}. \quad (76)$$

d) Durchlaufende Systeme

Mit diesen Ergebnissen können wir nun leicht die Einflüsse der Stützenbewegungen auf diese Tragwerke ermitteln.

α) Gelenkwerke

Da in den durch Zerschneidung gewonnenen Balkenwerken auch die Stützenbewegungen keine oder nur konstante Schubflüsse entstehen, bleibt die Gültigkeit der Gl. (37) bestehen. Durch die Verschiebungen $y_{\nu-1, \nu}^{(\mu)}$ entstehen aber an den Lagerscheiben gegenseitige Verdrehungen der Faltenenden von der Größe

$$\frac{y_{\nu-1, \nu}^{(\mu-1)}}{L_{\mu-1, \mu}} - \frac{y_{\nu-1, \nu}^{(\mu)}}{L_{\mu-1, \mu}} - \frac{y_{\nu-1, \nu}^{(\mu)}}{L_{\mu, \mu+1}} + \frac{y_{\nu-1, \nu}^{(\mu+1)}}{L_{\mu, \mu+1}}. \quad (77)$$

Dabei können die y entweder nach (75) oder nach (76) angegeben werden. Fügt man die (77) zur rechten Seite der Gl. (38) hinzu und löst diese auf, so erhalten wir die Einflüsse der Stützenbewegungen auf die Stützenmomente $\Delta_{Stü} X_{\nu-1, \nu}$. Der weitere Gang der Rechnung ist der gleiche wie bei Abschnitt E_a . Handelt es sich um geschlossene Querschnitte, so sind zu den übrigen Schubflüssen die der Gl. (72) hinzuzufügen.

β) Steifknotige Tragwerke

Führt man die in Abschnitt E_b geschilderten Überlegungen im Geiste nochmals durch, und bedenkt, daß durch die Stützenbewegungen in den steifknotigen Balkenwerken keine Knotenmomente entstehen, so erkennt man, daß zunächst die übliche Iteration, jedoch mit den vorherigen $\Delta_{Stü} X_{\nu-1, \nu}^{(\mu)}$ des gelenkigen Durchlaufsystems als Eingangswerte durchzuführen ist. Fügt man das Summenergebnis zu den $\Delta_{Stü} X_{\nu-1, \nu}^{(\mu)}$ hinzu, so erhalten wir die durch die Stützenbewegung verursachten Stützenmomente des steifknotigen Durchlaufwerkes. Der weitere Verlauf der Rechnung bleibt ungeändert. Handelt es sich um geschlossene Querschnitte, so sind zu den übrigen Schubflüssen die Werte (72) hinzuzufügen.

Zusammenfassung

Steift man prismatische Faltwerke durch Querscheiben aus und lagert diese fest auf, so erhält man „Durchlaufende Faltwerke“, welche hier erstmalig genau untersucht werden. Hierfür wird zunächst der Sachverhalt an den gelenkigen Balkenfaltwerken geklärt, wenn an diesen konzentrierte Einzel-

lasten und Momente angreifen. Mit diesen Ergebnissen wird dann für gelenkige Durchlaufwerke bewiesen, daß man bei diesen immer dann, wenn die von den Querkräften herrührenden Verformungen vernachlässigt werden können, die verschiedenen Falten einzeln als gewöhnliche Durchlaufträger behandeln kann. Nach einer Betrachtung über steifknotige Balkenfaltwerke wird die Theorie der steifknotigen durchlaufenden Faltwerke erörtert. Der dabei auftretende hohe Grad der statischen Unbestimmtheit wird bewältigt, indem man die drei Ursachen der letzteren, nämlich die eigentliche Faltwerkswirkung, die Steifknotigkeit und endlich die Durchlaufwirkung entsprechend ihrer kettenartigen Zusammenhänge nacheinander auflöst. Während bei den gelenkigen Tragwerken die bekannten Mängel durch die Durchlaufwirkung nur quantitativ, aber nicht qualitativ gemildert werden, tritt durch letztere bei den steifknotigen Systemen in jeder Hinsicht eine wesentliche Verbesserung des gesamten Tragverhaltens ein. Im letzten Abschnitt wird der Einfluß der Stützenbewegungen sowohl für offene als auch für geschlossene, gelenkige und steifknotige Tragwerke untersucht.

Résumé

Si l'on renforce des poutres-cloisons prismatiques à l'aide de parois transversales et si on les fait porter sur des appuis fixes, on réalise des „systèmes continus de parois portantes“, qui sont étudiés ici avec précision pour la première fois. L'auteur expose tout d'abord le comportement spécial de ces systèmes sur les poutres en parois portantes articulées, auxquelles on applique des charges concentrées et des moments. En tablant sur ces résultats, l'auteur montre que dans le cas des ouvrages continus articulés et lorsque les déformations provoquées par les efforts transversaux peuvent être négligées, on peut toujours traiter les différentes „cloisons“ individuellement comme des poutres continues ordinaires.

Après avoir examiné les systèmes de poutres-cloisons à nœuds rigides, l'auteur expose la théorie des parois portantes continues à nœuds rigides. Le haut degré d'indétermination statique qui se manifeste ici peut être surmonté par analyse séparée de ses trois causes: effet particulier de paroi portante, rigidité des nœuds et enfin effet de continuité. Tandis que dans les systèmes porteurs articulés, on ne peut remédier que quantitativement, mais non pas qualitativement aux défauts connus en faisant intervenir l'effet de continuité, dans les systèmes à nœuds rigides, cet effet permet de réaliser à tous égards une notable amélioration du comportement général.

Dans un dernier chapitre, l'auteur étudie l'influence des mouvements des appuis, tant dans les systèmes porteurs ouverts, que dans les systèmes fermés, articulés et rigides.

Summary

If cylindrical beams of prismatic cross-section are stiffened by transverse slabs and these beams are fixed at the ends, "continuous cylindrical beams of prismatic cross-section" are obtained which are here accurately examined for the first time. For this purpose, what happens in the case of hinged cylindrical beams is first explained, when these are subjected to concentrated single loads and moments. With these results it is then shown for such hinged continuous structures that with these, if the deformations originating from the transverse forces can be neglected, the different plates may be treated separately as ordinary continuous girders. After a consideration of rigidly jointed cylindrical structures, the theory of rigidly jointed continuous cylindrical structures is discussed. The high degree of static indetermination then occurring is got over by solving the three causes of the latter one after the other, namely the actual structural action, the joint stiffness, and finally the continuous effect corresponding to the chainlike connections. Whilst in the case of jointed supporting structures the well-known defects are diminished by the continuous action only quantitatively and not qualitatively, in the case of the rigidly jointed system the latter cause a considerable improvement in the whole supporting behaviour in every respect. In the last section of the paper, the influence of movements in the supports is considered for various kinds of supporting structures, open and closed, hinged and rigidly jointed.