Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 11 (1951)

Artikel: Flambage des anneaux circulaires dans un milieu élastique
Autor: Hahn, L.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-11433

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Flambage des anneaux circulaires dans un milieu élastique

Knickung kreisförmiger Ringe in elastischer Umgebung

Buckling of circular rings in elastic surroundings

L. Hahn, Ingénieur Civil, Paris

L'exposé qui suit comprend 5 chapitres. Le premier indique les équations différentielles donnant la flèche de l'anneau circulaire dans le cas général. La solution de ces équations comporte des fonctions hyperboliques ou trigonométriques suivant la valeur du rapport:

$$\rho^2 = \frac{4\left[1 + \frac{r^3}{EI}(p + kr)\right]}{\left(2 + \frac{pr^3}{EI}\right)^2}$$

où r est le rayon de l'anneau, I son moment d'inertie, E le module de Young, p la pression que subit l'anneau et k la constante du milieu élastique.

Le deuxième chapitre examine le premier cas correspondant à ρ^2 plus grand que un et où la flèche de l'anneau est donnée par des fonctions hyperboliques.

Le troisième chapitre examine le deuxième cas correspondant à ρ^2 plus petit qu'un et où la flèche de l'anneau est donnée par des fonctions trigonométriques.

Le quatrième chapitre expose la solution approximative.

Le cinquième chapitre donne des applications numériques.

I. Equations générales

Considérons un anneau circulaire (C), fig. 1, soumis à une pression constante p et supposons qu'il s'ovalise sous l'action de cette charge. Supposons en outre que le milieu où est plongé l'anneau peut opposer des réactions centripètes seulement, autrement dit s'opposant à un allongement du rayon. L'anneau déformé (Γ) subira donc dans la région BC des pressions p et dans la région CD des pressions p plus les réactions du milieu élastique.

Nous designons par w le raccourcissement du rayon, supposé positif de A à C et négatif de C à D.

Les réactions de l'anneau déformé (Γ) en A sont les suivantes:

1. Une réaction verticale S égale à $S_0 - S_1$, où S_0 est égal à pr et S_1 équilibre les réactions du milieu élastique kw, k étant la constante du milieu.
2. Un moment M_0.

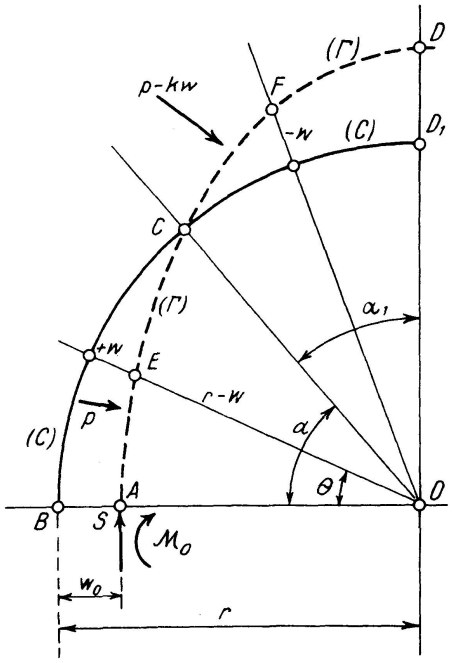

Fig. 1

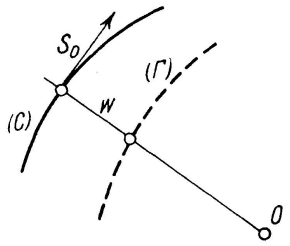

Fig. 2

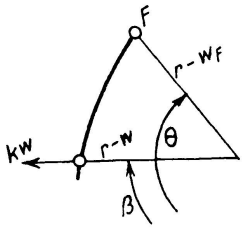

Fig. 3

Dans une section E, située entre A et C, nous avons:

$$M_E = M_0 + M_p + M_{S0} + M_{S1}. \tag{1}$$

L'ensemble des pressions p et la réaction S_0 transportée en B donne une courbe de pression confondue avec le cercle (C), voir fig. 2, donc:

$$Mp + M_{S0} = S_0 w - S_0 w_0 = S_0 (w - w_0) = pr (w - w_0), \tag{2}$$

$$M_{S1} = -S_1 [(r - w_0) - (r - w) \cos\theta] = -S_1 [r (1 - \cos\theta) + w \cos\theta - w_0], \tag{3}$$

Par raison de symétrie il n'y a pas d'effort tranchant en D, donc:

$$+S_1 = \int_C^D k w \sin\theta ds, \quad ds = (r - w) d\theta,$$

$$+S_1 = k \int_C^D w (r - w) \sin\theta d\theta.$$

En négligeant w^2 par rapport à w, nous pouvons écrire:

$$S_1 = kr \int_\alpha^{90°} w \sin\theta d\theta = kr J, \tag{4}$$

avec la notation:

$$J = \int_\alpha^{90°} w \sin\theta d\theta, \tag{5}$$

M_{S1} devient, en négligeant à nouveau w et w_0, car S_1 le contient:

$$M_{S1} = -kr^2 J (1 - \cos\theta). \tag{6}$$

Nous avons finalement:

$$M_E = M_0 + pr(w - w_0) - kr^2 J (1 - \cos\theta). \tag{7}$$

Pour la zone CD nous devons ajouter les moments dus aux charges kw, soit (voir fig. 3):

$$M_w = \int_C^F k w (r - w_F) \sin(\theta - \beta)\, ds, \quad ds = (r - w)\, d\beta,$$

et en négligeant les w^2 et w^3:

$$M_w = kr^2 \int_\alpha^\theta w \sin(\theta - \beta)\, d\beta. \tag{8}$$

On a donc dans la zone CD:

$$M_F = M_E + M_w, \tag{9}$$

w est relié à M par la relation classique:

$$w'' + w + \frac{Mr^2}{EI} = 0,$$

ou:

$$w'' + w + n^2 M = 0, \tag{10}$$

avec la notation:

$$n^2 = \frac{r^2}{EI}. \tag{11}$$

Dans la zone BC, la relation (10), compte tenu de (7), peut s'écrire:

$$w'' + (1 + n^2 pr) w + n^2 [M_0 - pr w_0 - kr^2 J (1 - \cos\theta)] = 0, \tag{12}$$

ou encore avec les notations:

$$M_1 = M_0 - pr w_0, \quad (13) \qquad \therefore\ n^2 (M_1 - kr^2 J) = \mathrm{A}, \tag{14}$$

$$1 + n^2 pr^2 = u_1^2, \tag{15}$$

$$w'' + u_1^2 w + A + n^2 kr^2 J \cos\theta = 0. \tag{16}$$

D'où:

$$w = B_1 \cos u_1 \theta + B_2 \sin u_1 \theta + w_1, \tag{17}$$

où B_1 et B_2 sont des constantes arbitraires, et:

$$w_1 = -A_1 - J_1 \cos\theta, \quad J_1 = \frac{kr}{p} J, \quad A_1 = \frac{A}{u_1^2}. \tag{18}$$

Les conditions aux limites conduisent aux relations suivantes: Pour $\theta = 0$, $w = w_0$, (17) donne:

$$w_0 = B_1 - A_1 - J_1. \tag{19}$$

Pour $\theta = 0$, $w' = 0$, donc $B_2 = 0$.

Pour $\theta = \alpha$, w s'annulle:

$$B_1 \cos u_1 \alpha - A_1 - J_1 \cos\alpha = 0. \tag{20}$$

Avant de poser les autres conditions aux limites, nous examinons la zone CD.

Les dérivées de M_w, relation (8), par rapport à θ, sont:

$$M'_w = kr^2 \int_\alpha^\theta w \cos(\theta-\beta)\, d\beta\,, \tag{21}$$

$$M''_w = kr^2 [w - \int_\alpha^\theta w \sin(\theta-\beta)\, d\beta] = kr^2 w - M_w\,, \tag{22}$$

D'où compte tenu des relations (7), (9), (10):

$$M'' = pr\,w'' - kr^2 J \cos\theta + k\,w\,r^2 - M_w\,, \tag{23}$$

$$M'' + M = M_0 + pr\,w'' + pr\,(w - w_0) - kr^2 J + k\,w\,r^2 = -\frac{1}{n^2}(w^{IV} + 2\,w'' + w)\,, \tag{24}$$

ou encore avec les notations:

$$2 + n^2 pr = 2\,m^2 = 1 + u_1^2, \quad \frac{pr^3}{EI} = u_1^2 - 1\,, \tag{25}$$

$$1 + n^2 pr + n^2 kr^2 = u_1^2 + n^2 kr^2 = s^2\,, \tag{26}$$

$$w^{IV} + 2\,m^2 w'' + s^2 w + A = 0\,, \tag{27}$$

où A est donné par les relations (13) et (14).

II. Premier cas $\rho^2 > 1$. Fonctions exponentielles

Nous allons faire une hypothèse sur les constantes s et m:

$$\rho^2 = \frac{s^2}{m^4} > 1\,. \tag{28}$$

Le cas correspondant à $\rho^2 > 1$ sera examiné ultérieurement. Disons de suite que la relation (28) donne une solution comportant des exponentielles, tandis que l'autre cas donne une solution comportant des fonctions trigonométriques.

La solution de (27) est:

$$w = C_1 \operatorname{ch} u\,\theta \cos v\,\theta + C_2 \operatorname{ch} u\,\theta \sin v\,\theta + C_3 \operatorname{sh} u\,\theta \cos v\,\theta + C_4 \operatorname{sh} u\,\theta \sin v\,\theta - \frac{A}{s^2} = 0\,, \tag{29}$$

où u et v sont liés aux autres constantes par les relations:

$$v^2 - u^2 = m^2, \quad v^2 + u^2 = m^2 \rho, \quad 2\,u\,v = m^2 \sqrt{\rho^2 - 1} = m^2 c\,. \tag{30}$$

Afin de pouvoir utiliser plus facilement les conditions aux limites, nous allons déplacer l'origine de l'angle θ de A en D. Les poussées p, S_0 et M_0 donnent en D_1, fig. 4, un effort normal $p\,r$ et un moment M_1 égal à $M_0 - p\,r\,w_0$. Les réactions $k\,w$ donnent une traction N_{wD} et un moment M_{wD}:

$$N_{wD} = kr \int_0^{\alpha_1} w \sin\theta_1\, d\theta_1\,,$$

$$M_{wD} = -S_1 r + kr^2 \int_0^{\alpha_1} w \sin\theta_1\, d\theta_1 = -kr^2 J + kr^2 \int_0^{\alpha_1} w \sin\theta_1\, d\theta_1\,,$$

Le moment des charges kw situées entre D et F par rapport au point F est donné par:

$$M_w = +kr^2 \int_0^{\theta_1} w \sin(\theta_1 - \beta_1)\, d\beta_1 .$$

En partant de D, le moment dû à toutes les charges par rapport au point F est donné par:

$$M_F = M_1 + pr\,w + M_{wD} - N_{wD}\, r\,(1 - \cos\theta_1) + M\,w ,$$

en négligeant les w^2 par rapport à w. En développant, compte tenu des valeurs de M_{wD}, N_{wD} et M_w, et en simplifiant:

$$M_F = M_1 + pr\,w - kr^2 J\,(1 - \sin\theta_1) - kr^2 \int_{\theta_1}^{\alpha_1} w \sin(\theta_1 - \beta_1)\, d\beta_1 .$$

Cette expression est identique à la relation (9), sauf le signe de l'intégrale, dû au changement de variable $\beta + \beta_1 = 90°$. En appelant cette intégrale M_{w1}, nous avons:

$$M''_{w_1} = kr^2 w - M\,w_1 .$$

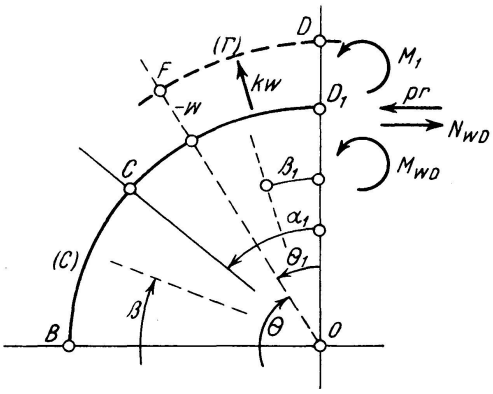

Fig. 4

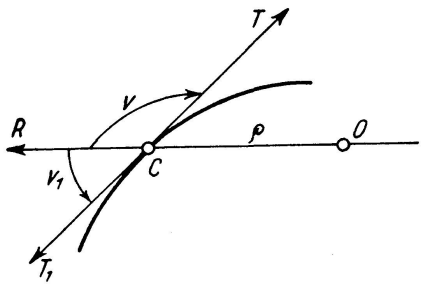

Fig. 5

En répétant les opérations (23) et (24), on obtient d'une manière identique la relation (27), et par conséquent la relation (29), sous réserve de remplacer θ_1 par θ. Nous pouvons aborder maintenant plus facilement les conditions aux limites.

En D, pour $\theta_1 = 0$, $w' = 0$:

$$C_2 v + C_3 u = 0. \tag{31}$$

Compte tenu de la relation facile à établir:

$$M' = Q\,r + p\,r\,w',$$

et l'effort tranchant Q étant nul en D et w' également, M' sera nul aussi. En dérivant une fois la relation (10), on trouve immédiatement que w''' est nul également en D, donc:

$$C_2 (c\,u - v) - C_3 (c\,v + u) = 0. \tag{32}$$

En éliminant C_3 entre (31) et (32):

$$\frac{c}{u}(u^2 + v^2)\, C_2 = 2\,\rho\, v\, C_2 = 0 ,$$

donc
$$C_2 = 0, \quad C_3 = 0, \tag{33}$$
car, $v = m\sqrt{\frac{\rho+1}{2}}$ et $u = m\sqrt{\frac{\rho-1}{2}}$ ne sont pas nuls, car $\rho < 1$. (29) devient donc une fonction paire comme il fallait s'y attendre par raison de symétrie:
$$w = C_1 \operatorname{ch} u\,\theta_1 \cos v\,\theta_1 + C_4 \operatorname{sh} u\,\theta_1 \sin v\,\theta_1 - \frac{A}{s^2}. \tag{34}$$
Une autre condition aux limites, $w = 0$ pour $\theta_1 = \alpha_1$:
$$C_1 \operatorname{ch} u\,\alpha_1 \cos v\,\alpha_1 + C_4 \operatorname{sh} u\,\alpha_1 \sin v\,\alpha_1 = \frac{A}{s^2}. \tag{35}$$
Les autres conditions aux limites sont données par le raccord des deux branches de l'anneau ovalisé en C (fig. 5).

Pour la courbe BC: $\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho_\theta'}$, sens positif CT.

,, ,, ,, DC: $\operatorname{tg} V_1 = \frac{\rho_1}{\rho_{1\theta}'}$, ,, ,, CT_1.

$$V + V_1 = \pi, \quad \operatorname{tg} V = -\operatorname{tg} V_1, \quad \rho_c = \rho_{1c}, \quad \rho = r + w,$$
donc:
$$\rho' = -\rho_1', \quad \text{soit} \quad w' + w_1' = 0, \tag{36}$$
w_1 se rapporte à la courbe DC.

Compte tenu de la relation (10) et comme w est nul pour les deux courbes à leur point de jonction, on aura:
$$w'' = w_1''. \tag{37}$$
Les efforts tranchants des deux branches sont égaux et de sens contraire en C, donc:
$$\left.\begin{array}{ll} \text{branche } BC\text{:} & Qr = M' - prw' \\ \text{branche } CD\text{:} & Q_1 r = M_1' - prw_1' \end{array}\right\} Q = -Q_1$$
en additionnant et compte tenu de (36):
$$M' + M_1' = 0.$$
En derivant la relation (10) pour chacune des deux branches et en ajoutant on obtient finalement:
$$w''' + w''' = 0. \tag{38}$$
En somme les derivées de rang pair sont égales et du même signe et celles de rang impair sont égales mais de signe contraire. En développant ces 3 conditions aux limites au raccord des 2 branches, nous obtenons en definitive: la relation (36) donne:
$$-B_1 u_1 \sin u_1 \alpha + J_1 \sin \alpha + (C_1 u + C_4 v) \operatorname{sh} u\,\alpha_1 \cos v\,\alpha_1 + (C_4 u - C_1 v) \operatorname{ch} u\,\alpha_1 \sin v\,\alpha = 0, \tag{39}$$
la relation (37) donne:

$$-u_1^2 B_1 \cos u_1 \alpha + J_1 \cos \alpha$$
$$= m^2 [(c C_4 - C_1) \operatorname{ch} u \alpha_1 \cos v \alpha_1 - (c C_1 + C_4) \operatorname{sh} u \alpha_1 \sin v \alpha_1] \quad (40)$$

enfin la relation (38), donne:

$$u_1^3 B_1 \sin u_1 \alpha - J_1 \sin \alpha + m^2 [(u c - v) C_4 - (u + v c) C_1] \operatorname{sh} u \alpha_1 \cos v \alpha_1$$
$$+ m^2 [(v - u c) C_1 - (u + v c) C_4] \operatorname{ch} u \alpha_1 \sin v \alpha_1 = 0. \quad (41)$$

Nous pouvons établir une nouvelle relation, en écrivant que:

$$J = \int_0^{\alpha_1} w \cos \theta_1 \, d\theta_1 = \int_0^{\alpha_1} \left[C_1 \operatorname{ch} u \theta_1 \cos v \theta_1 + C_4 \operatorname{sh} u \theta_1 \sin v \theta_1 - \frac{A}{s^2} \right] \cos \theta_1 \, d\theta_1 .$$

Un calcul un peu long mais élémentaire donne:

$$J = C_1 I_1 + C_4 I_2 - \frac{A}{s^2} \sin \alpha_1 , \quad (42)$$

où:

$$2 (U^4 - 4 v^2) I_1 = (U^2 - 2 v) [u \operatorname{sh} u \alpha_1 \cos (v+1) \alpha_1 + (v+1) \operatorname{ch} u \alpha_1 \sin (v+1) \alpha_1]$$
$$+ (U^2 + 2 v) [u \operatorname{sh} u \alpha_1 \cos (v-1) \alpha_1 + (v-1) \operatorname{ch} u \alpha_1 \sin (v-1) \alpha_1],$$
$$2 (U^4 - 4 v^2) I_2 = (U^2 - 2 v) [u \operatorname{ch} u \alpha_1 \sin (v+1) \alpha_1 - (v+1) \operatorname{sh} u \alpha_1 \cos (v+1) \alpha_1]$$
$$+ (U^2 + 2 v) [u \operatorname{ch} u \alpha_1 \sin (v-1) \alpha_1 - (v-1) \operatorname{sh} u \alpha_1 \cos (v-1) \alpha_1],$$

où $$U^2 = u^2 + v^2 + 1.$$

Nous avons 3 constantes arbitraires à éliminer savoir B_1, C_1 et C_4, 2 efforts à déterminer M_1, J, et enfin l'angle α et le raccourcissement w_0 du rayon $0A$. Nous disposons de 7 relations, savoir 19, 20, 35, 39, 40, 41 et 42. Nous éliminons les 3 constantes arbitraires et les deux efforts M_1 et J et nous obtenons 2 relations. En écrivant que w_0 soit différent de zéro, nous trouvons la valeur de u_1 et de l'angle α. *La valeur de u_1 nous donne, voir relation* (15), *la pression critique qui peut faire flamber l'anneau.*

B_1 est éliminé immédiatement entre les relations (19) et (20):

$$A_1 (1 - \cos u_1 \alpha) + J_1 (\cos \alpha - \cos u_1 \alpha) = w_0 \cos u_1 \alpha . \quad (43)$$

Nous éliminons C_4 successivement entre la relation (35) d'une part et les relations (39), (40), (41) et (42) d'autre part. En remplaçant en même temps B_1 dans les relations (39), (40), (41), par la valeur tirée de la relation (19), nous obtenons 3 relations de la forme:

$$C_1 = f_i (u, v, \alpha_1) \left[(w_0 + A_1 + J_1) \varphi_i (u_1, \alpha) + J_1 \psi_i (\alpha) + \frac{A}{s^2} \theta_i (u, v, \alpha_1) \right]$$
$$i = 1, 2, 3.$$

et une quatrième:

$$C_1 = f_4 (u, v, \alpha_1) \left[J + \frac{A}{s^2} \theta_4 (u, v, \alpha_1) \right].$$

Les fonctions $\varphi_i (u_1, \alpha)$ et $\psi_1 (\alpha)$ sont très simples, par contre les fonctions $f_i (u, v, \alpha_1)$ et $\theta_i (u, v, \alpha_1)$ sont un peu plus compliquées. En éliminant C_1 entre ces quatre relations, nous en obtenons 3 nouvelles relations:

$$kr\left[\left(\frac{n^2 r}{u_1^2}-\frac{1}{p}\right)L_i-\frac{N_i}{p}+\frac{n^2 r}{s^2}P_i\right]J=L_i w_0+n^2\left(\frac{L_i}{u_1^2}+\frac{P_i}{s^2}\right)M_1,$$

auxquelles nous joignons la relation (43) qui peut être mise sous la même forme, donc $i = 1, 2, 3, 4$.

Les coefficients L_i, N_i, P_i sont des fonctions assez simples de u_1, α, u, v, α_1.

Nous pouvons encore écrire ces quatre relations sous la forme:

$$k\,r\,(a\,L_i+b\,N_i+c\,P_i)\,J=w_0\,L_i+(d\,L_i+e\,P_i)\,M_1,\quad i=1,2,3,4.$$

ou encore:

$$\frac{w_0\,L_i+d\,(L_i+e\,P_i)\,M_1}{a\,L_i+b\,N_i+c\,P_i}=t,$$

t étant la valeur commune des quatre rapports. Considérons les 2 déterminants:

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} L_1 & N_1 & P_1\\ L_2 & N_2 & P_2\\ L_3 & N_3 & P_3\end{vmatrix},\qquad \Delta_4=\begin{vmatrix} L_1 & N_1 & P_1\\ L_2 & N_2 & P_2\\ L_4 & N_4 & P_4\end{vmatrix},$$

et appelons δ_3, δ_4 les déterminants mineurs, par exemple:

$$\delta_3 N_2=L_1 P_3-P_1 L_3,\quad \delta_4 L_2=P_1 N_4-N_1 P_4.$$

En égalant les rapports deux à deux, nous obtenons les trois relations suivantes:

$$[b\,(\delta_3 P_3)-c\,(\delta_3 N_3)]\,w_0=[e\,(b\cdot\delta_3 L_3-a\cdot\delta_3 N_3)+d\,(c\cdot\delta_3 N_3-b\cdot\delta_3 P_3)]\,M_1$$
$$[b\,(\delta_3 P_2)\ldots$$
$$[b\,(\delta_4 P_2)\ldots$$

La deuxième relation se déduit de la première en permutant les indices de L, W, P, soit remplacer l'indice 3 par 2. La troisième relation se deduit de la deuxième en remplaçant l'indice 3 des déterminants mineurs $\delta_3 P_2$ etc. par l'indice 4, autrement dit mettre $\delta_4 P_2$ etc. Enfin en éliminant w_0 et M_1, nous obtenons les 2 relations fondamentales:

$$[E_1]:\ b\,(\delta_3 P_2\cdot\delta_3 L_3-\delta_3 P_3\cdot\delta_3 L_2)-a\,(\delta_3 P_2\cdot\delta_3 N_3-\delta_3 P_3\cdot\delta_3 N_2)$$
$$+c\,(\delta_3 N_3\cdot\delta_3 L_2-\delta_3 N_2\cdot\delta_3 L_3)=0,$$
$$[E_2]:\ b\,(\delta_4 P_2\cdot\delta_3 L_3-\delta_3 P_3\cdot\delta_4 L_2)-a\,(\delta_4 P_2\cdot\delta_3 N_3-\delta_3 P_3\cdot\delta_4 N_2)$$
$$+c\,(\delta_3 N_3\cdot\delta_4 L_2-\delta_4 N_2\cdot\delta_3 L_3)=0.$$

Nous indiquons ci-dessous les expressions des coefficients a, b, c et des fonctions L_i, N_i, P_i.

$$a=\frac{n^2 r}{u_1^2}-\frac{1}{p},\quad b=-\frac{1}{p},\quad c=\frac{n^2 r}{s^2},$$

$$L_1=\frac{-2\,u_1\sin u_1\alpha}{v\,\mathrm{sh}\,2\,u\,\alpha_1+u\sin 2\,v\,\alpha_1}-\frac{u_1^2\cos u_1\alpha}{u\,v\,(\mathrm{ch}\,2\,u\,\alpha_1+\cos 2\,v\,\alpha_1)}$$

$$N_1=\frac{2\sin\alpha}{v\,\mathrm{sh}\,2\,u\,\alpha_1+u\sin 2\,v\,\alpha_1}+\frac{\cos\alpha}{u\,v\,(\mathrm{ch}\,2\,u\,\alpha_1+\cos 2\,v\,\alpha_1)}$$

$$P_1 = \frac{2\,(v \operatorname{cotg} v\,\alpha_1 + u \coth u\,\alpha_1)}{n_{11}} - \frac{2\,(c \coth u\,\alpha_1 \operatorname{cotg} v\,\alpha_1 - 1)\,u\,v}{c \cdot n_{12}}$$

n_{11} et n_{12} sont les dénominateurs des deux termes de L_1.

$$L_2 = -L_{12} + \frac{2\,u_1{}^3 \sin u_1\,\alpha}{m^2\,[(v - u\,c)\operatorname{sh} 2\,u\,\alpha_1 + (u + v\,c)\sin 2\,v\,\alpha_1]}$$

$$N_2 = -N_{12} - \frac{2 \sin \alpha}{n_{22}}$$

$$P_2 = -P_{12} + \frac{2\,[(uc - v)\operatorname{cotg} v\,\alpha_1 - (u + v\,c)\coth u\,\alpha_1]}{n_{22}} \cdot m^2$$

où L_{12}, N_{12} et P_{12} sont les deuxièmes termes de L_1, N_1 et P_1 et n_{22} le dénominateur du deuxième terme de L_2.

$L_3 = -L_{11}$,

$$N_3 = N_{11} - \frac{p}{kr\,(I_1 \operatorname{sh} u\,\alpha_1 \sin v\,\alpha_1 - I_2 \operatorname{ch} u\,\alpha_1 \cos v\,\alpha_1)},$$

$$P_3 = P_{11} - kr \cdot \frac{(\sin \alpha_1 - I_2 / \operatorname{sh} u\,\alpha_1 \sin v\,\alpha_1)}{n_{32}},$$

où L_{11}, N_{11}. P_{11} sont les premiers termes de L_1, N_1, P_1 et n_{32} le dénominateur du deuxième terme de N_3.

$$L_4 = \cos u_1\,\alpha, \quad N_4 = -\cos \alpha, \quad P_4 = -\frac{s^2}{2\,q^2}.$$

Le mode de résolution des relations E_1 et E_2 sera exposé en détail dans le cas $\rho^2 < 1$.

Deuxième cas $\rho^2 < 1$. Fonctions trigonométriques

Dans ce cas la solution de l'équation (27) est:

$$w = C_1 \cos u\,\theta_1 + C_2 \sin u\,\theta_1 + C_3 \cos v\,\theta_1 + C_4 \sin v\,\theta_1 - \frac{A}{s^2},$$

où:
$$v^2 + u^2 = 2\,m^2, \quad u\,v = m^2 \rho, \quad v^2 - u^2 = 2\,m^2 \sqrt{1 - \rho^2}. \tag{44}$$

Comme dans le premier cas, les conditions aux limites donnent:

$$\theta_1 = 0 \quad \begin{cases} w' = 0, & u\;C_2 + v\;C_4 = 0, \\ w''' = 0, & u^3\,C_2 + v^3\,C_4 = 0, \end{cases}$$

d'où: $C_2\,u\,(v^2 - u^2) = 0$, or $v^2 - u^2 \neq 0$, et $u^2 = m^2\,[1 - \sqrt{1 - \rho^2}] \neq 0$, car $\rho < 1$, donc C_2 et C_4 sont nuls. On retrouve à nouveau une solution comprenant uniquement des fonctions paires:

$$w = C_1 \cos u\,\theta_1 + C_3 \cos v\,\theta_1 - \frac{A}{s^2}, \tag{45}$$

$w = 0$ pour $\theta_1 = \alpha_1$:

$$C_1 \cos u\,\alpha_1 + C_2 \cos v\,\alpha_1 = \frac{A}{s^2}, \tag{46}$$

$w' + w_1' = 0$, pour $\theta_1 = \alpha_1$ (voir relation (39)):

$$-u_1 B_1 \sin u_1 \alpha + J_1 \sin \alpha - u C_1 \sin u \alpha_1 - v C_3 \sin v \alpha_1 = 0, \tag{47}$$

$w'' = w_1''$, pour $\theta_1 = \alpha_1$ (voir relation (40)):

$$-u_1^2 B_1 \cos u_1 \alpha + J_1 \cos \alpha = -u^2 C_1 \cos u \alpha_1 - v^2 C_3 \cos v \alpha_1, \tag{48}$$

$w''' + w'''_1 = 0$, pour $\theta_1 = \alpha_1$ (voir relation (41)):

$$u_1^3 B_1 \sin u_1 \alpha - J_1 \sin \alpha + u^3 C_1 \sin u \alpha_1 + v^3 C_3 \sin v \alpha_1 = 0, \tag{49}$$

La relation (42) prend dans le deuxième cas la forme:

$$J = C_1 I_1 + C_3 I_2 - \frac{A}{s^2} \sin \alpha_1, \tag{50}$$

où:

$$I_1 = \frac{u \sin u \alpha_1 \cos \alpha_1 - \sin \alpha_1 \cos u \alpha_1}{u^2 - 1},$$

$$I_2 = \frac{v \sin v \alpha_1 \cos \alpha_1 - \sin \alpha_1 \cos v \alpha_1}{v^2 - 1}.$$

Les éliminations successives se font exactement comme dans le premier cas. On remplace la valeur de C_3 en fonction de C_1, suivant la relation (46) et B_1 en fonction de A_1, relation (19), dans les relations (47), (48), (49) et (50). Nous obtenons quatre relations analogues aux relations du premier cas où C_1 figure seul dans le premier membre. En éliminant C_1 entre ces quatre relations, nous obtenons 3 nouvelles relations de la forme:

$$L_i (w_0 + A_1 + J_1) + N_i J_1 + P_i \frac{A}{s^2} = 0, \tag{51}$$

où les coefficients L_i, N_i, P_i ont les valeurs suivantes:

$$L_1 = \frac{u_1 \sin u_1 \alpha}{v \cos u \alpha_1 \operatorname{tg} v \alpha_1 - u \sin u \alpha_1} + \frac{u_1^2 \cos u_1 \alpha}{(v^2 - u^2) \cos u \alpha_1}, \tag{52}$$

$$N_1 = \frac{-\sin \alpha}{n_{11}} - \frac{\cos \alpha}{n_{12}}, \tag{53}$$

$$P_1 = \frac{v \operatorname{tg} v \alpha_1}{n_{11}} - \frac{v^2}{n_{12}}, \tag{54}$$

où n_{11}, n_{12} sont les dénominateurs des 2 termes de L_1.

$$L_2 = -L_{12} + \frac{u_1^3 \sin u_1 \alpha}{u^3 \sin u \alpha_1 - v^3 \cos u \alpha_1 \operatorname{tg} v \alpha_1}, \tag{55}$$

$$N_2 = -N_{12} - \frac{\sin \alpha}{n_{22}}, \tag{56}$$

$$P_2 = -P_{12} + \frac{v^3 \operatorname{tg} v \alpha_1}{n_{22}}, \tag{57}$$

où L_{12}, N_{12}, P_{12}, sont les deuxièmes termes de L_1, N_1, P_1 et n_{22} le dénominateur du deuxième terme de L_2.

$$L_3 = L_{11}, \tag{58}$$

$$N_3 = N_{11} - \frac{p \cos v\,\alpha_1}{kr\,n_{32}}, \tag{59}$$

$$P_3 = P_{11} - \frac{I_2 - \sin\alpha_1 \cos v\,\alpha_1}{I_1 \cos v\,\alpha_1 - I_2 \cos u\,\alpha_1}, \tag{60}$$

où L_{11}, N_{11}, P_{11} sont les premiers termes de L_1, N_1, P_1 et n_{32} le dénominateur du deuxième terme de P_3. La relation (43) peut être mise également sous la forme (51), avec les notations suivantes:

$$L_4 = \cos u_1 \alpha \ (61), \quad N_4 = -\cos\alpha \ (62), \quad P_4 = -\frac{s^2}{u_1^2}, \tag{63}$$

Compte tenu des relations (14), (15), (18), les quatre relations (51) peuvent se mettre sous la forme:

$$L_i w_0 + b_i M_1 = a_i J_1, \tag{64}$$

où:

$$b_i = \frac{n^2}{u_1^2} L_i + \frac{n^2}{s^2} P_i, \quad a_i = -\frac{L_i}{u_1^2} - N_i + \frac{(u_1^2 - 1)}{s^2} P_i. \tag{65}$$

$$i = 1, 2, 3, 4.$$

Il reste à éliminer w_0 et M_1 entre les quatre relations (64), et on obtient finalement les deux relations fondamentales:

$$E_1 = l_{13} L_1 + l_{23} L_2 + l_{33} L_3 = 0,$$
$$E_2 = l_{14} L_1 + l_{24} L_2 + l_{44} L_4 = 0,$$

où $l_i 3$ et $l_i 4$ sont les déterminants mineurs des 2 déterminants:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_4 = \begin{vmatrix} L_1 & L_2 & L_4 \\ a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \end{vmatrix}$$

Les deux équations E_1 et E_2 peuvent être simplifiés notablement. En développant les deux équations, et en y remplaçant les coefficients a_i, b_i par les valeurs des relations (65), on trouve:

$$\boxed{E_1 = \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ N_1 & N_2 & N_3 \\ L_1 & L_2 & L_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad E_2 = \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_4 \\ N_1 & N_2 & N_4 \\ L_1 & L_2 & L_4 \end{vmatrix} = 0} \tag{66}$$

La résolution de ces deux équations peut se faire de la manière suivante. On se donne à priori une valeur de u_1, dont la signification est donnée par la relation (15), et qui définit la pression critique. On construit la famille des courbes:

$$E_1 = f_1(\alpha_1, s) = 0, \quad E_2 = f_2(\alpha_1, s) = 0, \tag{67}$$

où s définit les caractéristiques du milieu élastique, voir relation (26). On obtient ainsi un double réseau de courbes à deux paramètres s et α_1 (fig. 6).

Les valeurs des paramètres s et α_1, lues par interpolation, au droit de l'origine, annulent les deux relations (67). Nous obtenons ainsi une série de couples de valeurs s et u_1. C'est à dire si on connaît k on peut déterminer u_1, le problème est donc résolu. Pour construire les courbes E_1, E_2, u_1 étant connu, on choisit une valeur α_1 et on fait varier s. Une valeur de s étant arrêtée, les relations (30) donnent u et v immédiatement. On peut donc calculer toutes les fonctions L_i, N_i, P_i, suivant les relations (52) à (60), et par conséquent E_1 et E_2. Tous ces calculs sont extrêmement longs. Nous indiquons dans le chapitre suivant comment on peut les abréger un peu.

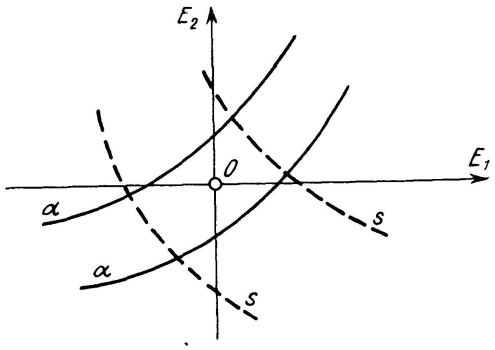

Fig. 6

IV. Solution approximative

Nous admettons à priori pour w l'expression suivante:

$$w = -w_1 \sin\beta(\theta-\alpha), \quad \beta = \frac{\pi}{2\alpha_1}, \tag{1}$$

w s'annulle en C et prend la valeur $-w_1$ en D_1 (fig. 1). Nous pouvons calculer immédiatement J, relation (5):

$$J = -\frac{w_1 \beta \sin\alpha}{\beta^2-1}. \tag{2}$$

Nous allons résoudre l'équation différentielle (10) dans chaque zone.

Zone C D

Nous rappelons l'expression du moment; en partant de A (fig. 1):

$$M_F = M_1 + p r w - k r^2 J(1-\cos\theta) + k r^2 \int_\alpha^\theta w \sin(\theta-\varphi)\, d\varphi,$$

ou encore:

$$M_F = (M_1 - k r^2 J) + p r w + k r^2 F(\theta), \tag{3}$$

$$F(\theta) = J\cos\theta + \mathfrak{M}_w, \quad \mathfrak{M}_w = \int_\alpha^\theta w \sin(\theta-\varphi)\, d\varphi. \tag{4}$$

En connaissant la fonction w, le calcul de $\mathfrak{M}_w$ est immédiat. Nous obtenons (fig. 7):

$$\mathfrak{M}_w = -\frac{w_1}{\beta^2-1}[\beta\sin(\theta-\alpha) - \sin\beta(\theta-\alpha)]. \tag{5}$$

L'équation différentielle (10) prend donc la forme:

$$w'' + u_1^2 w + A + n^2 k r^2 F(\theta) = 0. \tag{6}$$

Solution:

$$\left.\begin{aligned} w &= C_1 \cos u_1 \theta + C_2 \sin u_1 \theta + \overline{w} - A_1, \\ \overline{w} &= -J_1 \cos \theta + \gamma w_1 \left[\frac{\beta}{p} \sin(\theta - \alpha) + c \sin \beta (\theta - \alpha)\right], \\ \gamma &= \frac{kr}{\beta^2 - 1}, \quad c = \frac{n^2 r}{\beta^2 - u_1^2}, \quad A_1 = \frac{A}{u_1^2}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Conditions aux limites:

$$\text{pour } \theta = \alpha, \ w = 0, \ C_1 \cos u_1 \alpha + C_2 \sin u_1 \alpha = J_1 \cos \alpha + A_1. \tag{8}$$

Nous admettons une nouvelle hypothèse, on suppose que le moment de flexion est nul en C. w étant nul en ce point, w'' le sera également, suivant la relation (10), on aura donc:

$$-u_1^2 (C_1 \cos u_1 \alpha + C_2 \cos u_2 \alpha) + J_1 \cos \alpha = 0,$$

ou encore si on remplace les termes sous paranthèse par la valeur équivalente fournie par la relation (8):

$$\left.\begin{aligned} & J_1 \cos \alpha = u_1^2 (J_1 \cos \alpha + A_1) \\ \text{ou} \quad & J_1 (1 - u_1^2) \cos \alpha = u_1^2 A_1 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

pour $\theta = 90^0$, $w' = 0$, donc:

$$-u_1 C_1 \sin \frac{\pi u_1}{2} + u_1 C_2 \cos \frac{\pi u_1}{2} = 0, \quad C_2 = C_1 \operatorname{tg} \frac{\pi u_1}{2}, \tag{10}$$

pour $\theta = 90^0$, $w = -w_1$, soit compte tenu de la relation (9):

$$C_1 \cos \frac{\pi u_1}{2} + C_2 \sin \frac{\pi u_1}{2} + \gamma w_1 \left(c + \frac{\beta}{p} \cos \alpha\right) - \frac{(1 - u_1^2)}{u_1^2} J_1 \cos \alpha = -w_1. \tag{11}$$

Zone B C

Les relations (17), (18), (19) et (20) sont évidemment valables.

Des relations (20) et (9) ci-dessus, on obtient:

$$B_1 \cos u_1 \alpha = \frac{J_1 \cos \alpha}{u_1^2}. \tag{12}$$

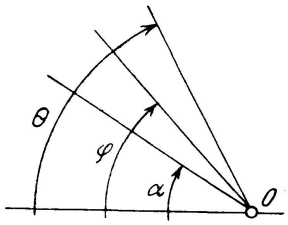

Fig. 7

En égalant les w' des deux branches à leur point de rencontre et en remarquant qu'ils ont les mêmes signes, car les w des deux branches sont rapportés à la même origine 0, nous obtenons:

$$C_2 \cos u_1 \alpha - C_1 \sin u_1 \alpha + \gamma \frac{w_1 \beta}{u_1} \left(c + \frac{1}{p}\right) + \frac{J_1 \cos \alpha \operatorname{tg} u_1 \alpha}{u_1^2} = 0. \tag{13}$$

Il est facile de vérifier que pour la branche $A\,C$, w'' est également nul en C, donc les deux branches se raccordent aussi bien que dans le calcul exact. La relation (17) donne dans ce point:

$$w'' = -u_1^2 B_1 \cos u_1 \alpha + J_1 \cos \alpha,$$

qui est nul comme le montre la relation (12).

Les deux branches passent donc par le même point C et ont la première et la deuxième dérivées égales au droit de ce point. Nous éliminons C_2 et les relations (8), (13) et (11) deviennent:

$$(8): \qquad C_1 = -\frac{w_1}{u_1^2} \frac{\cos 0{,}5\,\pi\, u_1}{\cos u_1 \alpha_1} \cdot \frac{\beta}{2p} \gamma \sin 2\alpha \tag{14}$$

$$(13): \qquad C_1 = \frac{w_1 \beta \gamma}{u_1} \frac{\cos 0{,}5\,\pi\, u_1}{\sin u_1 \alpha_1} \left(\frac{\sin 2\alpha \operatorname{tg} u_1 \alpha}{2 p u_1} - c - \frac{1}{p} \right), \tag{15}$$

$$(11): \qquad C_1 = -w_1 \cos \frac{\pi u_1}{2} \left\{ 1 + \gamma c + \gamma \frac{\beta}{p} \cos \alpha \left[1 + \frac{(1-u_1^2)}{u_1^2} \sin \alpha \right] \right\} \tag{16}$$

Enfin en éliminant C_1 entre ces trois relations on obtient les deux relations fondamentales de (8) et (13):

$$\boxed{\frac{\sin 2\alpha \sin 0{,}5\,\pi\, u_1}{2 u_1 \cos u_1 \alpha \cos u_1 \alpha_1} = \frac{\beta^2 - 1}{\beta^2 - u_1^2},} \tag{A}$$

de (14) et (16):

$$\boxed{\frac{\sin 2\alpha}{2 u_1^2} \left(\frac{1}{\cos u_1 \alpha_1} - 1 \right) - (1 - \sin \alpha) \cos \alpha = \frac{(u_1^2 - 1)}{\beta} \left(\frac{1}{\beta^2 - u_1^2} + \frac{\beta^2 - 1}{a} \right),} \tag{B}$$

où:

$$\boxed{a = n^2 k r^2 = \frac{k r^4}{EI} = s^2 - u_1^2.} \tag{17}$$

La résolution des équations [A] et [B] est facile. On détermine les racines α de [A] pour chaque valeur de u_1. On remplace les couples de valeurs u_1, α, ainsi trouvés, dans la relation [B] et on trouve les valeurs correspondantes de a. Le problème est donc résolu, car pour un k donné, on connaît u_1, donc $1 + n^2 p r$, c'est à dire la pression critique p.

Il est très aisé de résoudre l'équation [A], il suffit pour cela de tracer la courbe et on voit de suite les racines. Ces courbes ont l'allure indiquée par la fig. 8, correspondant à $u_1 = 5$. On constate en traçant ces courbes que le nombre de racines de chaque courbe [A] croît avec u_1 et que pour u_1 pair et > 2 il n'y a pas de racines. Remarquons qu'une racine apparaît immédiatement:

$$\beta = u_1 = \frac{90^\circ}{\alpha_1}, \quad \alpha_1 = \frac{90^\circ}{u_1}.$$

Nous donnons ci-dessous un tableau indiquant pour quelques valeurs de u_1, les valeurs correspondantes de a, ce qui constitue d'ailleurs le but de cette étude. A la fin du tableau nous indiquons les valeurs de ρ^2, c'est-à-dire:

$$\rho^2 = \frac{4\,(a + u_1{}^2)}{(1 + u_1{}^2)^2}\,.$$

L'examen de ce tableau montre que u_1 croît avec a, donc avec k, autrement dit la pression critique croît si la résistance élastique croît. D'autre part le domaine $\rho^2 > 1$, premier cas, dont la solution exacte comportait des fonctions

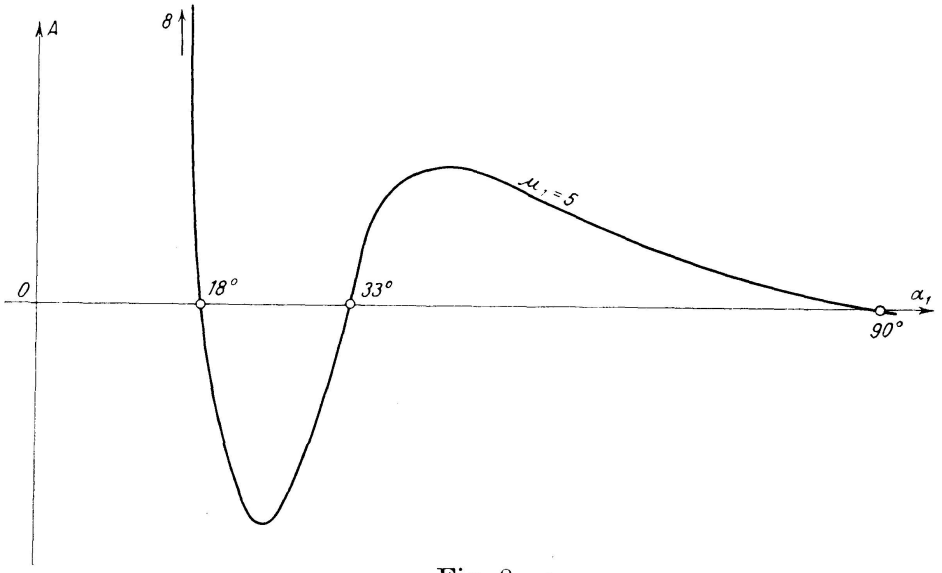

Fig. 8

exponentielles, très difficiles à manier, est très limité. Cela correspond à des résistances très faibles du milieu élastique. Une autre remarque est à faire concernant le mode de flexion de l'anneau. Le tableau montre que α_1 croît quand u_1 diminue, autrement dit la flexion diminue avec u_1, donc avec p, et tend vers une limite, soit 45°, comme on verra plus loin. Cette limite correspond à une résistance nulle du milieu élastique. Autrement dit si la résistance du milieu élastique augmente, la charge critique augmente également et l'anneau

u_1		3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	31
α_1	1	50° 30′	33° –	24° 30′	19° 20′	16° –	13° 37′	11° 49′	10° 29′	9° 24′	8° 31′	5° 47′
	2					27° –	22° –	18° 40′	16° 22′	14° 32′	13° 6′	8° 47′
	3					29° 3′	25° 30′	22° 40′	20° 12′	18° 15′	16° 37′	11° 26′
	4											14° 55′
	5											16° 50′
a	1	26	387	518	1350	2920	5580	9850	16 100	24 800	36 900	174 000
	2					1290	2580	4720	7 750	13 900	18 250	87 500
	3					1158	2085	3450	5 640	7 900	12 700	56 500
	4											33 700
	5											27 500
p_2		>1	>1	<1	<1	<1	<1	<1	<1	<1	<1	<1

fléchit davantage. Examinons le cas limite, quand la résistance élastique tend vers zéro, c'est à dire quand a tend vers 0. L'équation [B] peut s'écrire encore sous la forme:

$$(\beta^2 - u_1^2)\,\beta\, a\,[\tfrac{1}{2}(1-\cos u_1\alpha_1)\sin 2\alpha - u_1^2(1-\sin\alpha)\cos\alpha\cos u_1\alpha_1] \\ = (u_1^2-1)\,u_1^2\,[a+(\beta^2-1)(\beta^2-u_1^2)]\cos u_1\alpha_1,$$

qui tend pour $a \to 0$ vers:

$$u_1^2(u_1^2-1)(\beta^2-1)(\beta^2-u_1^2)\cos u_1\alpha_1 = 0. \qquad [B_0]$$

L'équation [A] peut s'écrire sous la forme:

$$(\beta^2-u_1^2)\sin 2\alpha\sin 0{,}5\,\pi\, u_1 = 2\,u_1^2(\beta^2-1)\cos u_1\alpha\cos u_1\alpha_1. \qquad [A_0]$$

En consultant le tableau ci-dessus, on voit que $u_1 < 3$. En excluant la valeur $u_1 = 1$, qui donnerait p nul, il nous reste $u_1 = 2$. Le premier membre de $[A_0]$ s'annulle, car $0{,}5\,\pi\, u_1$ vaut π. En excluant de même la valeur $\beta = 1$, valeur inadmissible, car alors α_1 serait égal à 90°, il n'y aurait donc pas de flambage. Il faut donc:

$$\cos u_1\alpha = \cos 2\alpha = 0, \text{ donc } \alpha = \alpha_1 = 45°.$$

Dans ce cas $[B_0]$ s'annulle également. Or la valeur $u_1 = 2$, correspond bien au cas de flambage classique d'un anneau circulaire, en effet, voir relation (15):

$$1 + n^2 pr = 1 + \frac{pr^3}{EI} = u_1^2 = 4, \quad \frac{pr^3}{EI} = 3.$$

Une dernière remarque. En général u_1 atteint rapidement des valeurs considérables. Pour $u_1 = 3$, nous avons:

$$\frac{pr^3}{EI} = 8,$$

presque trois fois la pression critique d'un anneau libre. *Donc le flambage d'un anneau dans un milieu élastique a lieu difficilement.*

Il nous reste à donner quelques applications numériques et à estimer l'écart entre le calcul exact et le calcul approximatif, ce qui fera l'objet du chapitre suivant.

V. Applications numériques

1er exemple. Anneau en béton de 60 m de diamètre, de 30 cm d'épaisseur, complètement enterré dans le sol et constituant blindage. On se demande si cet anneau ne risque pas de s'ovaliser et de flamber même sous l'action des poussées dues aux terres et à l'eau.

Nous allons estimer la valeur du coefficient fondamental „a". Admettons un coefficient k_1 égal à 3 kg/cm³, c'est-à-dire que le sol s'enfoncerait de 1 cm pour une pression k de 3 kg/cm². C'est en somme un sol assez mou. Considérons un anneau de 1 cm de hauteur.

$$I = 1 \cdot \frac{\overline{30}^3}{12} = 2{,}25 \cdot 10^3\,\mathrm{cm}^4, \quad E = 10^5\,\mathrm{kg/cm}^2 \text{ (béton)}$$

$$r = 3000\,\mathrm{cm}, \quad a = \frac{3 \cdot \overline{3}^4 \cdot 10^{12}}{2{,}25 \cdot 10^3 \cdot 10^5} = 108 \cdot 10^4.$$

En consultant le tableau précédent on voit que u_1 dépasse 31 ce qui est une valeur considérable. Posons le problème inversement. Supposons que l'anneau est enterré à une hauteur de 10 m et supporte une pression de 13000 kg/m², due à un sol immergé.

Nous avons donc:

$$p = 1{,}3\,\mathrm{kg/cm}^2, \quad \frac{pr^3}{EI} = \frac{1{,}3 \cdot \overline{3}^3 \cdot 10^9}{10^5 \cdot 2{,}25 \cdot 10^3} = 156 = u_1^2 - 1,$$

$u_1 = 13$ environ.

Suivant le tableau ci-dessus le a correspondant est égal à 2085, soit:

$$k = \frac{3 \cdot 2085}{108 \cdot 10^{-4}} = \frac{0{,}58}{100}\,\mathrm{kg/cm}^2.$$

En réalité à 10 m de profondeur k doit être beaucoup plus grand, l'anneau ne peut donc pas flamber.

2ème exemple. Anneau en béton de 1,65 × 1,65 m de section et de 140 m de diamètre. Cet anneau est contreventé comme une roue de bicyclette par des rayons en acier, 4 ∅ 16 m/m tous les 3,50 m. La longueur d'un rayon r_1 est d'environ 60 m.

Si le rayon de l'anneau s'allonge de 1 cm, alors un groupe de fils oppose une résistance de:

$$F = \frac{w}{r_1} E_a \omega = \frac{1}{6000} \cdot 21000 \cdot 800 = 2800\,\mathrm{kg}$$

pour 3,50 m de longueur, soit:

$$k = \frac{2800}{350} = 8\,\mathrm{kg/cm}^2.$$

Moment d'inertie de l'anneau:

$$I = \frac{\overline{165}^4}{12} = 62 \cdot 10^6\,\mathrm{cm}^4, \quad E_b = 10^5\,\mathrm{kg/cm}^2,$$

$$a = \frac{kr^4}{E_b I} = \frac{8 \cdot \overline{7000}^4}{10^5 \cdot 62 \cdot 10^6} = 3100.$$

D'après le tableau, u_1 est environ 13, donc:

$$\frac{pr^3}{E_b I} = u_1^2 - 1 = 168,$$

soit 56 fois la charge critique d'un anneau libre. Effort de compression critique de l'anneau:

$$N = pr = \frac{168\, E_b I}{r^2}.$$

Contrainte critique du béton:

$$n_{cr} = \frac{168\, E_b\, \rho^2}{r^2} = \frac{168\, E_b}{\lambda^2},$$

où λ est l'élancement compté par rapport au rayon et ρ le rayon de giration de la section de l'anneau.

$$\rho^2 = \frac{h^2}{12}, \quad h = 165 \text{ cm}, \quad r = 70 \text{ m},$$

$$\lambda^2 = \frac{12 r^2}{h^2} = \frac{12 \cdot \overline{70}^2}{\overline{1{,}65}^2} = 21\,500,$$

$$n_{cr} = \frac{168 \cdot 10^5}{21\,500} = \mathbf{780\ kg/cm^2}.$$

3. Comparaison des formules exactes avec les formules approximatives. Considérons le couple de valeurs:

$$u_1 = 9, \quad a = 1350, \quad \alpha_1 = 19^\circ\, 20'$$

extraites du tableau ci-dessus. Ce sont des valeurs numériques établies avec les formules approximatives.

ρ^2 étant inférieur à 1, w est donné par des fonctions trigonomètriques, deuxième cas.

Dans le sens de la figure 6 et à l'aide des relations (66), nous pouvons tracer le réseau (E_1, E_2, s, α_1). Voici quelques valeurs que nous avons trouvées, en remplaçant s par a et en nous rappelant que ces 2 coefficients sont liés par la relation (17):

$$a = s^2 - u_1{}^2 = s^2 - 81.$$

Tableau des valeurs voisines de l'origine

α	a	$10^3\, E_1$	$10^2\, E_2$
19°	1397,4 1397,5	−1,9 +3,1	−1,7 +1,33
18°	1569,61 1569,69	−3,6 +2,9	−1,99 +1,66
17° 57′	1579,37 1579,43	−5,3 +1,5	−2,6 +0,8
17° 56′	1582,65 1582,71	−5,0 +2,7	−2,2 +1,5

La figure 9 indique les courbes correspondantes, qui ont été remplacées par des droites, car les valeurs de a sont très rapprochées. Afin de faire ressortir

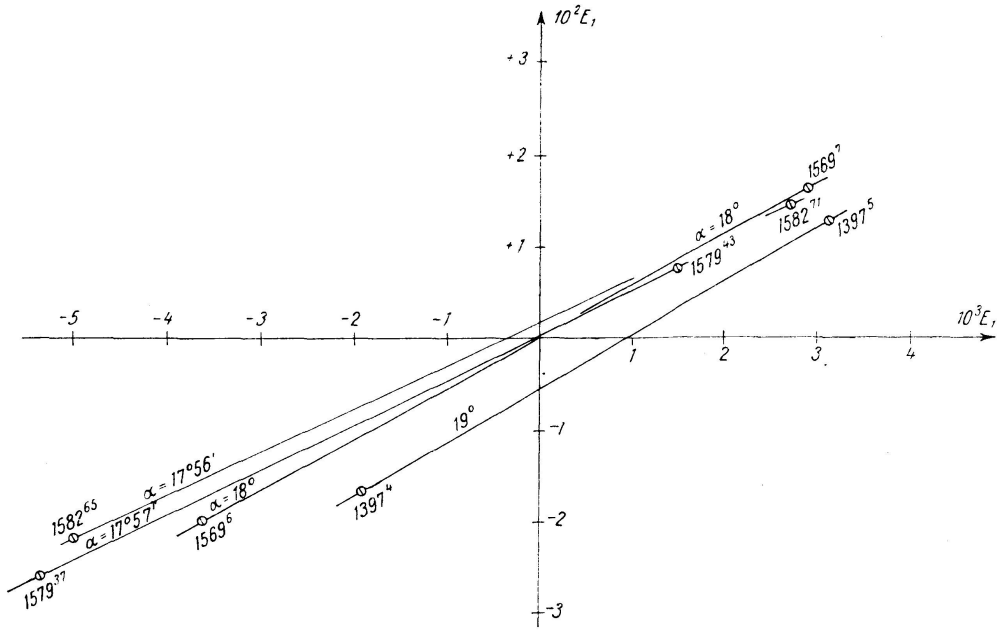

Fig. 9

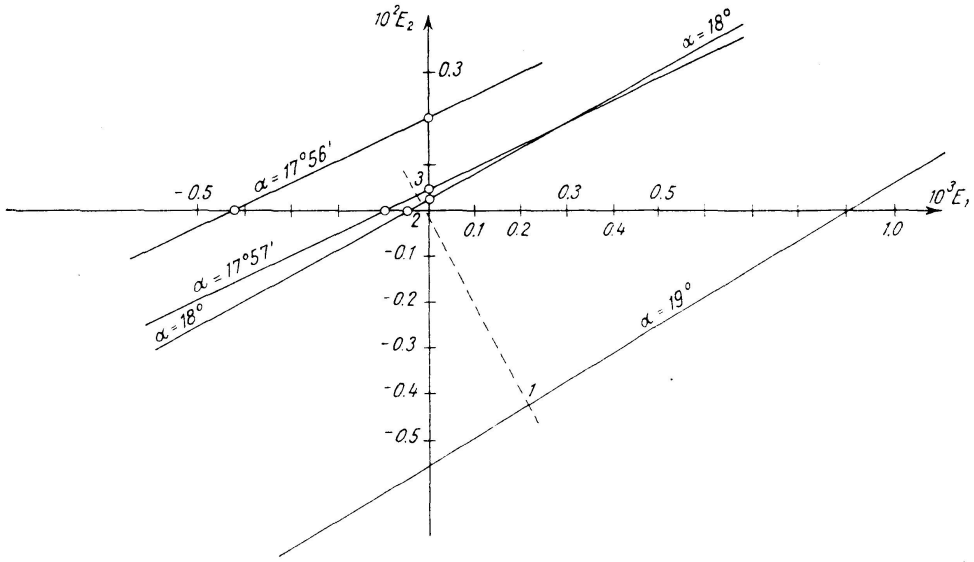

Fig. 10

plus clairement la région voisine de l'origine, nous avons augmenté l'échelle et la figure 10 nous permet de trouver les racines par interpolation entre les points 1 et 2:

point 1: $a \sim 1397{,}45$, $\alpha = 19°$
point 2: $a \sim 1569{,}65$, $\alpha = 18°$
Racines: $a \sim 1562$, $\alpha = 18° 3'$
L'erreur est de l'ordre de 16%.

Nous indiquons à toutes fins utiles l'allure des courbes (E_1, E_2, α, a). Ces courbes ont trois points à l'infini, à savoir:

$$u = v = 6{,}4, \qquad a = 1600, \qquad u\alpha = 90°, \qquad a = 0,$$

d'où une branche située dans la zone $+E_1$, $+E_2$, ayant deux asymptotes, dont une parallèle à l'axe E_1 et correspondant à a nul et l'autre à $u\alpha$ égal à 90°. Cette branche étant située nettement en dehors de l'origine ne présente aucun intérêt. L'autre branche a également deux asymptotes, dont une correspondant à a égal à 1600 et l'autre à $u\alpha$ égal à 90°. Ces branches encerclent en général l'origine, mais elles se détachent rapidement à partir de α égal à 17° environ.

Résumé

Le but de cette étude est le calcul de la charge critique de compression d'un anneau circulaire soumis à une pression constante et plongé dans un milieu élastique. Nous avons résolu le problème du point de vue théorique. Mais les calculs numériques étant très difficiles, nous avons indiqué également une solution approximative qui permet de calculer très facilement la charge critique. Un tableau de ces charges applicables à presque tous les cas pratiques évite tout calcul et l'application en est immédiate. 2 exemples numériques montrent la façon dont on doit utiliser ce tableau. Un troisième exemple numérique montre que l'erreur commise en employant la solution approximative au lieu du calcul exact est faible.

Zusammenfassung

Die vorliegende Untersuchung bezweckt die Berechnung der kritischen Drucklast eines kreisförmigen Ringes unter konstantem Druck und in elastischer Umgebung. Der Verfasser hat die Aufgabe theoretisch gelöst. Da die numerische Berechnung sehr schwierig ist, hat er auch eine Näherungslösung angegeben, die eine einfache Bestimmung der kritischen Last erlaubt.

Eine Zusammenstellung der kritischen Lasten, die sich auf fast alle praktisch vorkommenden Fälle direkt anwenden läßt, macht jede Berechnung überflüssig. Zwei numerische Beispiele zeigen die Anwendung dieser Zusammenstellung, während an Hand eines dritten Beispiels bewiesen wird, daß der Fehler der Näherungslösung gegenüber dem genauen Resultat klein ist.

Summary

The aim of this study is to calculate the critical load of compression of a circular ring, subjected to a constant pressure and placed in elastic surroundings. The author has solved the problem theoretically, but the numerical calculations being very difficult, an approximate solution has also been indicated. This solution allows the critical load to be calculated easily. A table of these loads, applicable to almost all practical cases, enables calculations to be avoided, and the application is direct. Two numerical examples show how these tables are to be used; a third example shows that the error arising through using the approximate solution instead of exact computation is small.