

Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 11 (1951)

Artikel: Contraintes dans les pièces prismatiques soumises à des forces appliquées sur leurs bases, au voisinage de ces bases
Autor: Guyon, Y.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-11432>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Contraintes dans les pièces prismatiques soumises à des forces appliquées sur leurs bases, au voisinage de ces bases

Spannungen in den Enden prismatischer Körper, die an ihren Grundflächen belastet werden

Stresses at the ends of prismatic bodies which are loaded on their side surfaces

Y. GUYON, Paris

Nous étudions ci-après l'état élastique d'un prisme au voisinage d'une base soumise à des forces réparties d'une façon quelconque.

Cette étude résume — et d'autre part complète sur certains points — un mémoire non publié déposé à la Bibliothèque de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.

Nous l'avons divisée en deux parties:

Dans une première partie, nous avons étudié le prisme indéfini dans une direction, telle que $0y$ par exemple, et soumis à des charges, sur ses bases, dont la répartition est indépendante de la coordonnée y . C'est un problème d'élasticité plane.

Dans une deuxième partie, nous étudions le prisme à base rectangulaire de dimensions finies.

L'étude du prisme indéfini se trouve, tout au moins, en puissance dans des mémoires de divers auteurs, notamment dans la Théorie de l'Elasticité de TIMOSHENKO, et l'état élastique du prisme y est recherché à l'aide de développements en séries de Fourier. Mais si on s'arrête au premier stade, on n'obtient pas la solution du problème, parce qu'il s'introduit des réactions parasites sur certaines faces. On ne peut aboutir que par un procédé de réitération.

Nous avons employé d'abord une méthode approchée, consistant à annuler les réactions parasites par des forces égales et de sens contraire, dont nous avons recherché les effets par les méthodes usuelles de la Résistance des Matériaux. Il est intéressant de constater que certaines des formules que nous avons trouvées à l'aide de cette méthode approchée sont identiquement les mêmes que celles qu'avait obtenues M. HONDERMARCQ (*Etude des contraintes et des déformations élastiques planes basée sur les propriétés des lignes isostatiques*

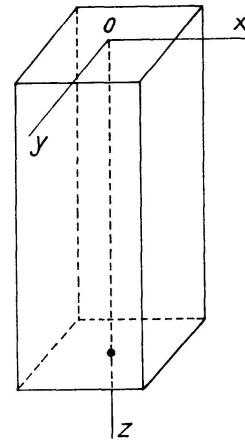


Fig. 1

— *Annales des Travaux Publics de Belgique, Juin, Août et Octobre 1943*) par une voie différente.

Nous avons ensuite employé une méthode plus exacte, à l'aide de réitérations successives. Les résultats que nous obtenons concordent exactement avec l'étude expérimentale de M. TESÁŘ pour un cas de charge particulière (Association Internationale des Ponts et Charpentes. Mémoires, 1932).

Pour le prisme à dimensions finies, nous nous sommes limités ici à un seul cas de charge, celui de forces normales paires, c'est-à-dire symétriques par rapport aux deux axes de symétrie de la base chargée. Et nous n'avons pu qu'aborder le calcul numérique, à cause du travail matériel considérable qui serait nécessaire pour l'établissement de tableaux complets.

I^e Partie. Cas du prisme à section rectangulaire indéfini dans une direction

Nous entendons par là que l'un des côtés $2b$ (parallèle à $0y$) de la section droite est infini et que d'autre part la loi de charge appliquée sur les bases $2a$ est indépendante de y , c'est-à-dire que cette loi de charge est la même pour toute section transversale perpendiculaire à $0y$.

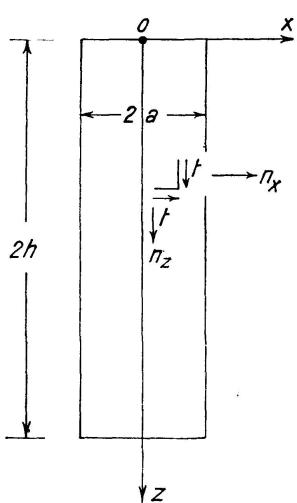


Fig. 2

Rien ne distingue une telle section transversale d'une autre, les contraintes sont fonctions uniquement de x et de z et on a affaire à un problème d'élasticité plane.

On verra ultérieurement (II^e Partie) que, même si la dimension $2b$ est finie, mais si les charges s'exerçant sur les bases sont indépendantes de y , c'est-à-dire si la loi de charge est la même pour toute section transversale perpendiculaire à $0y$ (ou, en d'autres termes, si les charges sont réparties uniformément sur des parallèles à $0y$), la solution obtenue pour le prisme indéfini reste approximativement valable.

La solution de ce problème est donc, si on peut la trouver, applicable à un nombre important de questions; parmi lesquelles celle des bielles d'articulation de ponts, celle des efforts aux abords dans les dalles précontraintes par des forces s'exerçant sur ces abords, lorsqu'on peut assimiler ces forces à des forces uniformément réparties sur des bandes parallèles au plan moyen de la dalle; celle également des poteaux soumis à des forces sur leurs bases, etc.

Considérons une section transversale quelconque (fig. 2) et rapportons-la aux deux axes $0x$ $0z$ passant par le centre de la base supérieure¹⁾ les sens positifs des axes étant ceux indiqués sur la figure.

L'état élastique du prisme est défini quand on connaît les contraintes n_x n_z t sur deux facettes normales à $0x$ et $0z$; la figure 2 indique les sens positifs

¹⁾ Pour simplifier le langage nous considérons que l'axe du prisme est vertical.

choisis: n_x et n_z sont positifs quand ces contraintes sont des tractions; t est positif lorsque sur une facette horizontale appartenant à la partie supérieure du prisme (qui contient l'origine 0) cette contrainte est dirigée dans le sens positif de $0x$.

Les forces appliquées sur les bases peuvent être normales ou obliques à ces bases. Autrement dit, dans le cas le plus général, elles admettent des composantes normales et tangentialles. Les conventions de signes pour ces charges sont les mêmes que pour les contraintes: pour les charges normales, les charges positives sont des tractions; pour les charges tangentialles, elles sont positives quand elles sont dirigées dans le sens des x négatifs sur la base supérieure, ce qui est bien la même convention que pour t , puisque la base supérieure laisse le prisme au-dessous d'elle; (sur la base inférieure, les charges tangentialles seront positives lorsqu'elles seront dirigées dans le sens des x positifs).

Contraintes et charges appliquées sont définies par leur densité superficielle. Mais si nous considérons une tranche de prisme d'épaisseur unité — c'est-à-dire comprise entre deux plans verticaux parallèles à $x0z$ et distants de l'unité — les contraintes et charges appliquées deviennent des forces par unité de longueur.

Les charges appliquées, normales ou tangentialles, suivent des lois de répartition quelconques sur les bases. Nous appellerons $\bar{\omega}(x)$ la loi de répartition des forces normales et $\theta(x)$ la loi de répartition des forces tangentialles.

Nous supposerons en principe, bien que ce ne soit pas indispensable, que les lois de charge sont les mêmes sur les deux bases, c'est-à-dire que $\bar{\omega}(0) \equiv \bar{\omega}(2h)$ et que $\theta(0) \equiv \theta(2h)$, $2h$ étant la hauteur du prisme. Cette hypothèse simplifie les calculs mais ne restreint pratiquement pas la généralité de la solution, pourvu que le prisme soit suffisamment long (c'est-à-dire $2h$ supérieur à 2 fois $1/2$ à 3 fois $2a$) parce que l'état élastique du prisme aux abords est une perturbation locale par rapport à l'état élastique de Saint-Venant, et que cette perturbation disparaît à une profondeur de l'ordre de $2a$; on peut donc considérer que, pour des prismes suffisamment longs, l'état élastique au voisinage d'une base est indépendant des charges appliquées sur l'autre base.

L'équilibre du prisme est assuré pour les charges normales, puisque les forces agissant sur les bases sont, dans l'hypothèse faite de l'identité des charges sur les deux bases, en équilibre. Il peut ne pas être assuré pour les charges tangentialles; dans ce cas on devra supposer qu'il existe sur les faces latérales du prisme des réactions assurant l'équilibre, et que ces réactions sont suffisamment éloignées des bases pour que l'état élastique du prisme au voisinage de ces bases ne soit pas modifié.

La largeur du prisme suivant $0x$ sera désignée par $2a$.

Les forces $\bar{\omega}$ et θ peuvent être décomposées en fonctions paires et en fonctions impaires de x .

Les fonctions paires peuvent être développées en séries de Fourier ne comportant que des cosinus:

$$\bar{\omega} (\text{ou } \theta) = A_0 + \sum A_m \cos m \pi \frac{x}{a}$$

les fonctions impaires en séries de Fourier ne comportant que des sinus

$$\bar{\omega} (\text{ou } \theta) = \sum A'_m \sin m \pi \frac{x}{a}$$

On peut trouver, sous forme également de séries de Fourier, un système de contraintes n_x n_z t satisfaisant aux équations de l'élasticité et prenant terme à terme sur les bases $z=0$ et $z=2h$ les valeurs $\bar{\omega}$ ou θ , mais ne satisfaisant pas aux autres conditions aux limites (n_x et t nuls simultanément sur les faces verticales $x = \pm a$). Cette façon de traiter le problème n'est pas nouvelle et on en trouvera des exemples dans la Théorie de l'Elasticité de TIMOSHENKO. Mais le système de contraintes trouvées n'est pas la solution du problème, du fait que les conditions aux limites ne sont pas satisfaites: c'est la solution d'un problème différent, dans lequel les faces verticales seraient soumises à des réactions, égales précisément aux valeurs que prennent n_x et t sur ces faces.

Ceci deviendra plus clair par la suite, mais on conçoit que le système de contraintes ainsi trouvé ne présenterait que peu d'intérêt en ce qui concerne les contraintes les plus dangereuses, qui sont les contraintes n_x , car, du fait que les réactions parasites qui s'introduisent n'existent pas, la répartition réelle des contraintes est profondément différente de celle de ce premier système.

Mais on peut, par un procédé de réitération, superposer à ce premier système d'autres systèmes de contraintes jusqu'à ce qu'on aboutisse à un système qui satisfasse, lui, tout au moins approximativement, à toutes les conditions aux limites. Or nous montrerons que l'on arrive à ce dernier système *au bout d'un nombre limité de réitérations* grâce à des lois de récurrence. La solution complète du problème s'obtiendra alors pour chaque contrainte n_x n_z ou t par la sommation des résultats partiels trouvés dans les différents systèmes de contrainte successifs.

Nous allons indiquer d'abord une solution approchée qui ne demande qu'une réitération, nous indiquerons ensuite comment, avec plusieurs réitérations, on peut arriver, dans le cas de charges normales paires, à une solution pratiquement exacte. La solution approchée fournit d'ailleurs déjà des indications très utiles; la comparaison avec la solution exacte montre que les lois de variation des contraintes ont tout à fait la même forme que dans cette solution exacte, et que les valeurs obtenues sont approchées par excès.

I. Solution approchée

Nous allons d'abord faire le calcul des contraintes sous forme de séries; nous montrerons ensuite que ces séries peuvent être exprimées en termes finis. L'analyse par les séries n'est donc qu'un intermédiaire dont on n'aura

pas à se servir pour les calculs numériques: on n'aura à se servir que des fonctions finies et il est possible, comme nous le montrerons, de faire une fois pour toutes les calculs, ce qui ramène l'étude des contraintes à l'emploi de tableaux tout à fait analogues aux tableaux d'influence couramment utilisés.

1. Calcul des contraintes par des séries

A. Cas de forces normales paires

La fonction de charge peut être représentée par la série de Fourier

$$\bar{\omega} = A_0 + \sum A_m \cos \frac{m \pi x}{a}$$

Posons $\frac{\pi x}{a} = \alpha$, ce qui revient à prendre $\frac{a}{\pi}$ comme unité de longueur

Avec cette notation:

$$\bar{\omega} = A_0 + \sum A_m \cos m \alpha$$

avec
$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \bar{\omega}(\alpha) d\alpha$$

$$A_m = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \bar{\omega}(\alpha) \cos m \alpha d\alpha$$

(A_0 n'est autre que la contrainte moyenne p engendrée par la résultante des efforts $\bar{\omega}$, et par conséquent la contrainte uniforme qui règne sur toute section horizontale à une distance suffisante de la base).

On peut trouver, sous forme de série de Fourier, un système de contraintes (système I) $n_x n_z t$, satisfaisant terme à terme aux équations de l'élasticité et aux conditions aux limites sur les bases $z=0$ et $z=2h$. En effet, n_x n_z et t sont les dérivées partielles du deuxième ordre

$$\left(n_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad n_z = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad t = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \right)$$

d'une fonction d'Airy φ qui doit vérifier l'équation aux dérivées partielles:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} = 0 \quad (1)$$

Prenons une fonction partielle d'ordre m , φ_m , de la forme:

$$\varphi_m = Z \cdot \cos m \alpha$$

Z étant une fonction de z seulement. On a alors pour le terme d'ordre m du système I que nous étudions

$$\text{I} \quad \left\{ \begin{array}{l} n_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = Z'' \cos m\alpha \\ n_z = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{m^2 \pi^2}{a^2} \cdot Z \cos m\alpha \\ t = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{m \cdot \pi}{a} \cdot Z' \sin m\alpha \end{array} \right.$$

Pour que φ_m satisfasse à l'équation (1) il faut que:

$$\frac{d^4 Z}{dz^4} - \frac{2m^2 \pi^2}{a^2} Z'' + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} Z = 0$$

dont la solution est, $A B C D$ étant quatre constantes à déterminer,

$$Z = \left(A + B \frac{m \pi z}{a} \right) \operatorname{ch} \frac{m \pi z}{a} + \left(C + D \frac{m \pi z}{a} \right) \operatorname{sh} \frac{m \pi z}{a}$$

$$\text{d'où } Z' = \frac{m \pi}{a} \left[A \operatorname{sh} \frac{m \pi z}{a} + B \left(\operatorname{ch} \frac{m \pi z}{a} + \frac{m \pi z}{a} \operatorname{sh} \frac{m \pi z}{a} \right) \right. \\ \left. + C \operatorname{ch} \frac{m \pi z}{a} + D \left(\operatorname{sh} \frac{m \pi z}{a} + \frac{m \pi z}{a} \operatorname{ch} \frac{m \pi z}{a} \right) \right]$$

En écrivant que pour $z=0$ et $z=2h$, $n_z = \bar{\omega}$ et $t=0$,

on trouve, en posant $m \pi \frac{2h}{a} = \rho$

$$A = -A_m \frac{a^2}{m^2 \pi^2} \quad B = -A_m \frac{a^2}{m^2 \pi^2} \frac{\operatorname{ch} \rho - 1}{\operatorname{sh} \rho + \rho}$$

$$C = A_m \frac{a^2}{m^2 \pi^2} \frac{\operatorname{ch} \rho - 1}{\operatorname{sh} \rho + \rho} \quad D = A_m \frac{a^2}{m^2 \pi^2} \frac{\operatorname{sh} \rho}{\operatorname{sh} \rho + 1}$$

En pratique, pour les prismes suffisamment longs que nous étudions ici, $2h$ est supérieur à $4a$, donc ρ supérieur à 4π . On peut confondre $\operatorname{sh} \rho$ et $\operatorname{ch} \rho$ et négliger 1 ou ρ devant $\operatorname{ch} \rho$ et $\operatorname{sh} \rho$. On a donc pratiquement:

$$A = B = -C = -D = -A_m \frac{a^2}{m^2 \pi^2}$$

et par conséquent²⁾

$$Z = -A_m \frac{a^2}{m^2 \pi^2} \left(\frac{m \pi z}{a} + 1 \right) e^{-\frac{m \pi z}{a}}$$

On en déduit les valeurs suivantes des contraintes du système I, en posant $\zeta = \frac{\pi z}{a}$, ce qui revient à prendre, aussi bien pour z que pour x , $\frac{a}{\pi}$ comme unité,

²⁾ La fonction Z est celle qui correspond au voisinage de la base $z=0$. Celle qui correspond au voisinage de la base $z=2h$ est de la même forme, à condition de prendre l'origine sur cette face.

$$\text{I} \quad \begin{cases} n_x = -\sum A_m (m \zeta - 1) e^{-m\zeta} \cos m\alpha \\ n_z = A_0 + \sum A_m (m \zeta + 1) e^{-m\zeta} \cos m\alpha \\ t = \sum A_m m \zeta e^{-m\zeta} \sin m\alpha \end{cases}$$

Ce système de contraintes satisfait aux conditions aux limites pour $z=0$. Sur les faces verticales libres ($x = \pm a$) il vérifie la condition $t=0$; mais il ne vérifie pas sur ces faces la condition $n_x=0$.

Ce n'est donc pas la solution du problème, mais celle d'un problème où les faces verticales seraient soumises à des réactions

$$R_1 = \sum (-1)^{m+1} A_m (m \zeta - 1) e^{-m\zeta}$$

(égales aux valeurs prises par n_x sur ces faces). Considérons alors, en chaque point z sur les faces verticales, des forces $-R_1$ égales et de sens contraire aux réactions parasites précédentes. Nous supposerons, et c'est en cela que consiste l'approximation³⁾ dans cette solution, que les contraintes sous ces forces $-R_1$ peuvent être déterminées par les règles habituelles de la Résistance des Matériaux. Les forces $-R_1$ se faisant équilibre deux à deux sur une même horizontale z , le prisme est soumis à des tractions (ou compressions) $n_x = -R_1$ et les contraintes n_z et t sont nulles. En ajoutant ce système de contraintes

$$\text{II} \quad \begin{cases} n_x = -\sum (-1)^{m+1} A_m (m \zeta - 1) e^{-m\zeta} \\ n_z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

au système I, on obtient les contraintes totales de la solution approchée soit:

$$(A) \quad \boxed{\begin{aligned} n_x &= -\sum A_m (m \zeta - 1) e^{-m\zeta} [\cos m\alpha + (-1)^{m+1}] \\ n_z &= A_0 + \sum A_m (m \zeta + 1) e^{-m\zeta} \cos m\alpha \\ t &= \sum A_m m \zeta e^{-m\zeta} \sin m\alpha \end{aligned}}$$

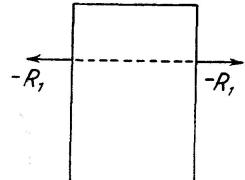


Fig. 3

³⁾ Il peut sembler illogique d'admettre pour le problème II les hypothèses simplificatrices de la Résistance des Matériaux, car quand on cherche, comme nous le ferons plus loin (2^o) une solution par réitérations, ce problème II se présente analytiquement sous la même forme que le problème I. En réalité ce n'est qu'en apparence que les problèmes I et II sont de même nature. Dans le problème I les charges sont discontinues sur les bases et la Résistance des Matériaux ne pouvait évidemment nous être d'aucun secours puisque c'est l'objet même du problème d'étudier ce que ne nous fournit pas cette Résistance des Matériaux. Dans le problème II, il s'agit d'un prisme long par rapport à sa dimension transversale, et soumis sur ses faces à des forces continues. La fig. 4 donne à titre d'exemple la loi des forces $-R_1$ dans le cas où l'on étudie le cas où la base $z=0$ est soumise à une charge concentrée appliquée en son milieu.

L'adoption des règles simplificatrices entraîne évidemment des erreurs, mais ces erreurs ne sont pas plus importantes que celles que l'on fait dans les cas courants d'application de la Résistance des Matériaux. La comparaison avec la théorie exacte permettra d'ailleurs de les évaluer.

La fonction de charge étant connue, on connaît les coefficients A_m , et les contraintes sont données en chaque point (xz) ou $(\alpha \xi)$ par des séries en général rapidement convergentes dès que ζ atteint des valeurs notables, par suite de la présence du multiplicateur $e^{-m\zeta}$ sous le signe Σ .

B. Cas de forces normales impaires

Elles peuvent être développées en série de sinus

$$\bar{\omega} = \Sigma A'_m \sin \cdot m \alpha$$

avec

$$A'_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \bar{\omega}(\alpha) \sin \cdot m \alpha d\alpha$$

Elles sont équivalentes à un couple.

Le moment de ce couple est égal à

$$M = 2 \int_0^a \bar{\omega} x dx = 2 \Sigma \left[A'_m \int_0^{\pi} \sin \cdot m \alpha \cdot \frac{a}{\pi} \alpha \cdot \frac{a}{\pi} d\alpha \right] = 2 \frac{a^2}{\pi} \Sigma (-1)^{m+1} \frac{A'_m}{m}.$$

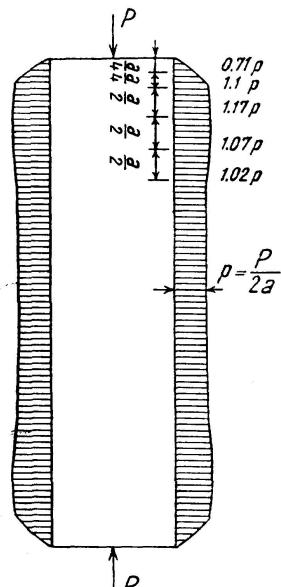


Fig. 4

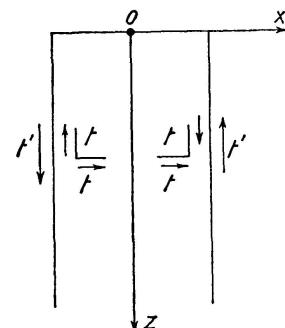


Fig. 5

On trouve par la même méthode que précédemment, pour le système I:

$$I \left\{ \begin{array}{l} n_x = -\Sigma A'_m (m \zeta - 1) e^{-m\zeta} \sin m \alpha \\ n_z = \Sigma A'_m (m \zeta + 1) e^{-m\zeta} \sin m \alpha \\ t = -\Sigma A'_m m \zeta e^{-m\zeta} \cos m \alpha \end{array} \right.$$

Les conditions aux limites sont satisfaites sur la face $z=0$, mais non sur les faces verticales $x = \pm a$ car pour $\alpha = \pm \pi$ on a:

$$t = \Sigma (-1)^{m+1} A'_m m \zeta e^{-m\zeta}$$

Les contraintes résiduelles sont de même signe sur les deux faces mais on voit (fig. 5) qu'avec la convention de signes adoptée pour t , il faut introduire sur les faces des réactions tangentielles t' égales et de sens contraire sur la face $x = +a$ et la face $x = -a$. Les valeurs de t' sur la face $x = a$ sont égales et de sens contraire aux contraintes résiduelles t soit

$$t' = -\Sigma (-1)^{m+1} A'_m m \zeta e^{-m\zeta}$$

Le moment produit par ces forces à un niveau quelconque est égal à :

$$\begin{aligned} M_z &= -2a \Sigma \int_0^\zeta (-1)^{m+1} A'_m m \zeta e^{-m\zeta} \frac{a}{\pi} d\zeta \\ &= \frac{2a^2}{\pi} \Sigma (-1)^{m+1} \frac{A'_m}{m} [1 - (m\zeta + 1)e^{-m\zeta}] \\ &= \Sigma M_m [1 - (m\zeta + 1)e^{-m\zeta}] \end{aligned}$$

en appelant M_m le terme d'ordre m du développement de M , couple auquel sont équivalentes les forces impaires considérées (voir en effet ci-dessus l'expression de ce développement de M).

Pour ζ infini (et pratiquement pour ζ suffisamment grand) M_z tend vers M . On peut donc considérer que le système I est le système de contraintes que l'on aurait sous l'effet des forces impaires appliquées sur la base $z = 0$, l'équilibre étant obtenu par des réactions tangentielles $\pm t$ appliquées sur les faces $x = \pm a$, ces réactions t ayant pour résultante le couple $-M$; puis que l'on applique, pour faire disparaître les réactions t qui n'existent pas, des forces $t' = -t$, ayant par conséquent pour résultante le couple $+M$. On a donc substitué aux forces initiales un système de forces (t') qui donne le même moment. En déterminant les contraintes créées par les forces t' et en les ajoutant aux contraintes du système I, on obtiendra l'état de contrainte total.

Dans le système II ainsi envisagé sous les forces t' , nous admettrons que les contraintes peuvent s'obtenir par les règles habituelles de la Résistance des Matériaux.

On a donc pour ce système II et pour le terme d'ordre m

$$n_{z_{II}} = M_m [1 - (m\zeta + 1)e^{-m\zeta}]_x \frac{3}{2} \frac{x}{a^3} = \frac{3}{\pi^2} \alpha (-1)^{m+1} \frac{A'_m}{m} [1 - (m\zeta + 1)e^{-m\zeta}]$$

t s'obtiendra ensuite par la relation :

$$\frac{\partial n_z}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial x} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial n_z}{\partial \zeta} + \frac{\partial t}{\partial \alpha} = 0$$

or

$$\frac{\partial n_z}{\partial \zeta} = \frac{3}{\pi^2} \alpha (-1)^{m+1} \frac{A'_m}{m} m^2 \zeta e^{-m\zeta}$$

d'où
$$t_{II} = -\frac{3}{2\pi^2} \alpha^2 (-1)^{m+1} A'_m m \zeta e^{-m\zeta} + f(\zeta)$$

La fonction $f(\zeta)$ peut se déterminer facilement car il faut que $t_I + t_{II}$ soit identiquement nul pour $\alpha = \pm \pi$, ce qui donne

$$-\frac{3}{2\pi^2} \pi^2 (-1)^{m+1} A'_m m \zeta e^{-m\zeta} + (-1)^{m+1} A'_m m \zeta e^{-m\zeta} + f(\zeta) = 0$$

d'où
$$f(\zeta) = \frac{1}{2} (-1)^{m+1} A'_m m \zeta e^{-m\zeta}$$

d'où
$$t_{II} = \frac{\pi^2 - 3\alpha^2}{2\pi^2} (-1)^{m+1} A'_m m \zeta e^{-m\zeta}$$

n_x s'obtiendra ensuite par la relation:

$$\frac{\partial t}{\partial \zeta} + \frac{\partial n_x}{\partial \alpha} = 0 \quad (t \text{ étant } t_{II} \text{ écrit plus haut}).$$

Or
$$\frac{\partial t}{\partial \zeta} = \frac{\pi^2 - 3\alpha^2}{2\pi^2} (-1)^{m+1} A'_m m (1 - m\zeta) e^{-m\zeta}$$

d'où
$$n_{x_{II}} = -\frac{\alpha(\pi^2 - \alpha^2)}{2\pi^2} (-1)^{m+1} A'_m m (1 - m\zeta) e^{-m\zeta} + g(\zeta)$$

La fonction $g(\zeta)$ est identiquement nulle car il faut que $n_x = 0$ pour $\alpha = \pm \pi$.

Finalement le système II s'écrit

$$\text{II} \left\{ \begin{array}{l} n_x = -\frac{\alpha(\pi^2 - \alpha^2)}{2\pi^2} \sum (-1)^{m+1} A'_m m (1 - m\zeta) e^{-m\zeta} \\ n_z = \frac{3\alpha}{\pi^2} \sum (-1)^{m+1} \frac{A'_m}{m} [1 - (m\zeta + 1) e^{-m\zeta}] \\ t = \frac{\pi^2 - 3\alpha^2}{2\pi^2} \sum (-1)^{m+1} A'_m m \zeta e^{-m\zeta} \end{array} \right.$$

Par addition du système I et du système II on obtient les contraintes de la solution approchée

$$\begin{aligned} n_x &= -\sum A'_m (m\zeta - 1) \left[\sin m\alpha - \frac{\alpha(\pi^2 - \alpha^2)}{2\pi^2} m (-1)^{m+1} \right] \\ (B) \quad n_z &= \frac{3}{2} M \frac{x}{a^3} + \sum A'_m (m\zeta + 1) e^{-m\zeta} \left[\sin m\alpha - \frac{3\alpha}{\pi^2} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \right] \\ t &= -\sum A'_m m \zeta e^{-m\zeta} \left[\cos m\alpha + (-1)^{m+1} \frac{3\alpha^2 - \pi^2}{2\pi^2} \right] \end{aligned}$$

n_z est composé de deux termes; le premier est la contrainte calculée par la Résistance des Matériaux; le deuxième (série à termes exponentiels) a des valeurs importantes pour les petites valeurs de ζ . Pour $\zeta = 0$, on vérifie immédiatement, d'après la manière même dont l'expression de n_z dans le système II a été calculée, que $n_z = \sum A'_m \sin m\alpha$. Lorsque ζ augmente, le deuxième terme diminue très rapidement.

C. Cas de forces tangentielles paires

Elles sont développables en série de cosinus

$$\theta = B_0 + \sum B_m \cos m \alpha$$

$$\left[B_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \theta d\alpha \quad B_m = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \theta \cos m \alpha d\alpha \right]$$

On peut écrire d'ailleurs $B_0 = \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{a} \int_0^a \theta dx = \frac{T}{2a}$, en désignant par T la résultante des efforts tangentiels sur la base.

Le prisme n'est pas en équilibre sous l'action des forces θ appliquées aux bases $z=0$ et $z=2h$. Pour assurer l'équilibre, il faut faire intervenir des réactions sur les faces latérales, réactions qu'on supposera s'exercer suffisamment loin des bases pour ne pas troubler l'état élastique au voisinage de celles-ci.

On trouve, par la même méthode qu'en (A), pour le système I:

$$\text{I} \quad \begin{cases} n_x = -\sum B_m (m \zeta - 2) e^{-m\zeta} \sin m \alpha \\ n_z = \sum B_m m \zeta e^{-m\zeta} \sin m \alpha \\ t = B_0 + \sum B_m (1 - m \zeta) e^{-m\zeta} \cos m \alpha \end{cases}$$

Les conditions aux limites sont satisfaites pour $\zeta=0$ ($n_z=0$, $t=\theta$) mais non sur les faces verticales, car pour $x=\pm a$ il reste les contraintes parasites

$$t = B_0 - \sum (-1)^{m+1} B_m (1 - m \zeta) e^{-m\zeta}$$

Pour faire disparaître ces contraintes parasites, il faut faire agir sur les faces des forces tangentielles

$$t' = -B_0 + \sum (-1)^{m+1} B_m (1 - m \zeta) e^{-m\zeta}$$

Le sens de ces réactions complémentaires, sur la face $x=+a$, est indiqué sur la figure 6 dans l'hypothèse où les coefficients $B_0 B_1 B_2 \dots$ sont positifs; sur la face $x=-a$, les forces sont de sens opposé comme on l'a expliqué au paragraphe (B).

Au niveau d'une horizontale ζ le moment produit par ces réactions complémentaires est égal à $-2az \int t' dz$, soit, puisque $dz = \frac{a}{\pi} d\zeta$

$$\begin{aligned} M_z &= B_0 \cdot 2az - \frac{2a^2}{\pi} \int_0^\zeta \sum B_m (1 - m \zeta) e^{-m\zeta} (-1)^{m+1} d\zeta \\ &= Tz - \frac{2a^2}{\pi} \sum (-1)^{m+1} B_m \zeta e^{-m\zeta} \end{aligned}$$

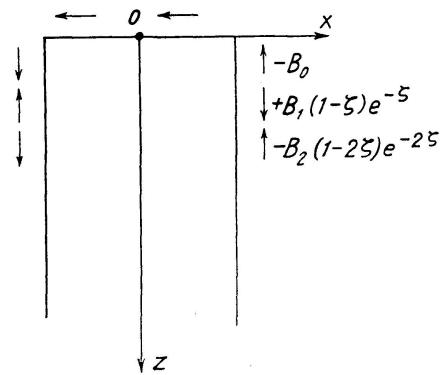


Fig. 6

Quand ζ augmente, le moment M_z tend vers T_z , moment produit par la résultante T des efforts tangentiels appliqués à la base étudiée.

Système II. On admet les hypothèses de la Résistance des Matériaux.

$$\text{On a d'abord } n_z = \left[Tz - \frac{2a^2}{\pi} \sum (-1)^{m+1} B_m \zeta e^{-m\zeta} \right] \frac{3}{2} \frac{x}{a^3}$$

On en tire t par la relation $\frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{\partial n_z}{\partial \zeta}$ puis, t étant calculé, on a n_x par la relation $\frac{\partial n_x}{\partial \alpha} = -\frac{\partial t}{\partial \zeta}$.

Les calculs sont tout à fait de même nature que ceux qui ont été faits en (B) et nous ne les développerons pas. On trouve finalement pour le système II les expressions suivantes des contraintes:

$$\text{II } \begin{cases} n_x = \frac{\alpha(\pi^2 - \alpha^2)}{2\pi^2} \sum (-1)^{m+1} B_m m(m\zeta - 2) e^{-m\zeta} \\ n_z = Tz - \frac{2a^2}{\pi} \sum (-1)^{m+1} B_m \zeta e^{-m\zeta} \\ t = \frac{\pi^2 - 3\alpha^2}{2\pi^2} \left[\frac{T}{2a} - \sum (-1)^{m+1} B_m (1 - m\zeta) e^{-m\zeta} \right] \end{cases}$$

On obtient les contraintes de la solution approchée par addition des systèmes I et II, ce qui donne

$$(C) \quad \begin{aligned} n_x &= -\sum B_m (m\zeta - 2) e^{-m\zeta} \left[\sin m\alpha - \frac{\alpha(\pi^2 - \alpha^2)}{2\pi^2} (-1)^{m+1} m \right] \\ n_z &= \frac{3}{2} \frac{Txz}{a^3} + \sum B_m m\zeta e^{-m\zeta} \left[\sin m\alpha - \frac{3\alpha}{\pi^2} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \right] \\ t &= \frac{3}{2} \frac{T}{2a} \frac{a^2 - x^2}{a^2} + \sum B_m (1 - m\zeta) e^{-m\zeta} \left[\cos m\alpha - (-1)^{m+1} \frac{\pi^2 - 3\alpha^2}{2\pi^2} \right] \end{aligned}$$

Les premiers termes de n_z et t sont ceux que l'on calculerait par la Résistance des Matériaux. Il s'y ajoute des termes exponentiels qui sont importants pour les faibles valeurs de z et tendent vers zéro quand z augmente. Pour $z=0$ ces termes exponentiels donnent, par addition avec les termes correspondant aux hypothèses de la Résistance des Matériaux, les contraintes dues aux efforts appliqués sur la base même. On le vérifierait facilement, et cela résulte d'ailleurs de la façon même dont le système II a été calculé.

D. Cas de forces tangentielles impaires

Elles peuvent être développées en une série de sinus

$$\theta = \sum B'_m \sin m\alpha$$

Ces forces se font équilibre sur chaque base. Il n'y a donc besoin d'aucune réaction complémentaire sur les faces latérales du prisme pour assurer la stabilité d'ensemble.

On trouve, par la même méthode qu'en (A), pour le système I

$$\text{I} \left\{ \begin{array}{l} n_x = \Sigma B'_m (m \zeta - 2) e^{-m\zeta} \cos m\alpha \\ n_z = -\Sigma B'_m m \zeta e^{-m\zeta} \cos m\alpha \\ t = \Sigma B'_m (1 - m \zeta) e^{-m\zeta} \sin m\alpha \end{array} \right.$$

Les conditions aux limites sont satisfaites pour $z=0$ ($n_z=0$ $t=\theta$); elles ne le sont pas sur les faces verticales, car pour $\alpha = \pm \pi$ on a bien $t=0$, mais n_x n'est pas nul; il reste les contraintes résiduelles

$$n_x = -\Sigma B'_m (m \zeta - 2) e^{-m\zeta} (-1)^{m+1}$$

Il faut, pour faire disparaître ces contraintes parasites, introduire des réactions qui leur soient égales et opposées, soit:

$$R_1 = +\Sigma (-1)^{m+1} B'_m (m \zeta - 2) e^{-m\zeta}$$

Comme dans le paragraphe A, le système II s'écrit alors:

$$\text{II} \left\{ \begin{array}{l} n_x = \Sigma (-1)^{m+1} B'_m (m \zeta - 2) e^{-m\zeta} \\ n_z = 0 \\ t = 0 \end{array} \right.$$

On obtient les contraintes totales de la solution approchée par addition des systèmes I et II ce qui donne:

$$\boxed{\begin{aligned} n_x &= \Sigma B'_m (m \zeta - 2) e^{-m\zeta} [\cos m\alpha + (-1)^{m+1}] \\ n_z &= -\Sigma B'_m m \zeta e^{-m\zeta} \cos m\alpha \\ t &= \Sigma B'_m (1 - m \zeta) e^{-m\zeta} \sin m\alpha \end{aligned}} \quad \text{(D)}$$

2. Expressions des contraintes en termes finis

Il est possible de transformer les expressions précédentes en termes finis pour certaines lois de charges. Nous examinerons le cas où les forces appliquées se réduisent à une force unique, normale ou tangentielle, appliquée à l'abscisse $x=u$. Nous poserons $\varphi = \pi \frac{u}{a}$.

Le calcul des contraintes sous l'action d'une force unique résoud d'ailleurs le problème le plus général.

1. *Effet d'une force unique normale à l'abscisse $x=u$ (ou $\alpha=\varphi$).* Nous la supposerons dirigée vers l'intérieur du prisme, donc négative d'après la convention de signes adoptée et la désignerons par $-P$.

Son effet peut s'obtenir par la superposition de l'effet de deux forces symétriques $-\frac{P}{2}$ et de deux forces antisymétriques $\pm \frac{P}{2}$ aux abscisses $\pm u$ (fig. 7).

Les forces symétriques peuvent être représentées par la série

$$A_0 + \sum A_m \cos m\alpha$$

et les forces antisymétriques par la série

$$\sum A'_m \sin m\alpha$$

avec $A_0 = -\frac{P}{2a}$ $A_m = -\frac{P}{a} \cos m\varphi$ $A'_m = -\frac{P}{a} \sin m\varphi$

Nous appellerons p la valeur absolue moyenne, $\frac{P}{2a}$, de la compression. Les systèmes (A) et (B) écrits plus haut deviennent:

$$\begin{aligned} \text{A} \quad & \left\{ \begin{array}{l} n_x = 2p \sum (m\zeta - 1) e^{-m\zeta} \cos m\varphi [\cos m\alpha + (-1)^{m+1}] \\ n_z = -p - 2p \sum (m\zeta + 1) e^{-m\zeta} \cos m\alpha \cos m\varphi \\ t = -2p \sum m\zeta e^{-m\zeta} \sin m\alpha \cos m\varphi \end{array} \right. \\ \text{B} \quad & \left\{ \begin{array}{l} n_x = 2p \sum (m\zeta - 1) e^{-m\zeta} \sin m\varphi \left[\sin m\alpha - \frac{\alpha(\pi^2 - \alpha^2)}{2\pi^2} m (-1)^{m+1} \right] \\ n_z = \frac{3}{2} M \frac{x}{a^3} - 2p \sum (m\zeta + 1) e^{-m\zeta} \left[\sin m\alpha - \frac{3\alpha}{\pi^2} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \right] \sin m\varphi \\ t = 2p \sum m\zeta e^{-m\zeta} \left[\cos m\alpha + \frac{3\alpha^2 - \pi^2}{2\pi^2} (-1)^{m+1} \right] \sin m\varphi \end{array} \right. \end{aligned}$$

Par addition on obtient l'effet de la force unique.

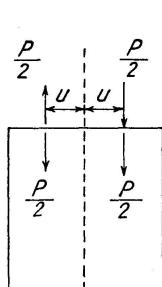


Fig. 7

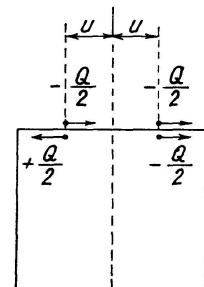


Fig. 8

En posant $\alpha - \varphi = \beta$ (abscisse comptée à partir de la force) et en tenant compte de ce que:

$$M = -Pu = -p \cdot 2au$$

et que $(-1)^{m+1} \cos m\varphi = -\cos m(\pi - \varphi)$ et $(-1)^{m+1} \sin m\varphi = \sin m(\pi - \varphi)$ on obtient les contraintes suivantes sous la force P :

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} n_x = 2p \sum (m\zeta - 1) e^{-m\zeta} \left[\cos m\beta - \cos m(\pi - \varphi) - \frac{\alpha(\pi^2 - \alpha^2)}{2\pi^2} m \sin m(\pi - \varphi) \right] \\ n_z = -p \left(1 + \frac{3ux}{a^2} \right) - 2p \sum (m\zeta + 1) e^{-m\zeta} \left[\cos m\beta - \frac{3\alpha}{\pi^2} \frac{\sin m(\pi - \varphi)}{m} \right] \\ t = -2p \sum m\zeta e^{-m\zeta} \left[\sin m\beta - \frac{3\alpha^2 - \pi^2}{2\pi^2} \sin m(\pi - \varphi) \right] \end{array} \right.$$

2. *Effet d'une force tangentielle unique s'exerçant à l'abcisse $x=u$.* Nous la supposerons dirigée dans le sens des x positifs, donc négative d'après la convention de signe, et nous la désignerons par $-Q$. L'effet peut s'en obtenir par la superposition de l'effet de deux forces $-\frac{Q}{2}$ appliquées aux abcisses $\pm u$ et de deux forces symétriques $\pm \frac{Q}{2}$ appliquées aux mêmes abcisses (fig. 8).

Les développements sont:

pour les deux forces $-\frac{Q}{2}$ de même sens: $B_0 + \sum B_m \cos m\alpha$

pour les deux forces $\pm \frac{Q}{2}$ $\sum B'_m \sin m\alpha$

avec $B_0 = -\frac{Q}{2a}$ $B_m = -\frac{Q}{a} \cos m\varphi$ $B'_m = -\frac{Q}{a} \sin m\varphi$

Nous appellerons q la valeur absolue, $\frac{Q}{2a}$, de la contrainte moyenne de cisaillement.

En remplaçant dans les systèmes (C) et (D), écrits plus haut, B_0 , B_m et B'_m par leurs valeurs ci-dessus et en ajoutant les deux systèmes, on obtient, tous calculs faits, les contraintes suivantes sous l'effet de la force tangentielle Q appliquée à l'abcisse u ; (on pose toujours

$$\varphi = \pi \frac{u}{a} \text{ et } \beta = \alpha - \varphi \quad \left. \right)$$

$$(Q) \quad \left\{ \begin{array}{l} n_x = 2q \sum (m\zeta - 2) e^{-m\zeta} \left[\sin m\beta - \sin m(\pi - \varphi) + \frac{\alpha(\pi^2 - \alpha^2)}{2\pi^2} m \cos m(\pi - \varphi) \right] \\ n_z = -2q \frac{3xz}{2a^2} - 2q \sum m\zeta e^{-m\zeta} \left[\sin m\beta + \frac{3\alpha}{\pi^2} \frac{\cos m(\pi - \varphi)}{m} \right] \\ t = -q \frac{3}{2} \frac{a^2 - x^2}{a^2} - 2q \sum (1 - m\zeta) e^{-m\zeta} \left[\cos m\beta + \frac{\pi^2 - 3\alpha^2}{2\pi^2} \cos m(\pi - \varphi) \right] \end{array} \right.$$

Les séries qui entrent dans les expressions des contraintes des systèmes (P) et (Q) peuvent être sommées.

Posons en effet, γ étant un paramètre variable

$$R = \sum m^2 e^{-m\zeta} \cos m\gamma; \quad S = \sum m e^{-m\zeta} \cos m\gamma; \quad T = \sum e^{-m\zeta} \cos m\gamma; \\ U = \sum \frac{e^{-m\zeta} \cos m\gamma}{m}$$

$$R' = \Sigma m^2 e^{-m\zeta} \sin m\gamma; \quad S' = \Sigma m e^{-m\zeta} \sin m\gamma; \quad T' = \Sigma e^{-m\zeta} \sin m\gamma; \quad U' = \Sigma \frac{e^{-m\zeta} \sin m\gamma}{m}$$

Formons les séries:

$$R'' = R + iR'; \quad S'' = S + iS'; \quad T'' = T + iT'; \quad U'' = U + iU'$$

et posons $e^{-(\zeta-i\gamma)} = r$

on a alors:

$$R'' = \Sigma m^2 r^m; \quad S'' = \Sigma m r^m; \quad T'' = \Sigma r^m; \quad U'' = \Sigma \frac{r^m}{m}$$

On voit que l'on a $T'' = r \frac{dU''}{dr}$; $S'' = r \frac{dT''}{dr}$; $R'' = r \frac{dS''}{dr}$, ce qui permet de calculer les quatre séries lorsqu'on en a calculé une.

$$\text{Or} \quad T'' = r + r^2 + r^3 + \dots = r(1 + r + r^2 + \dots) = \frac{r}{1-r}$$

D'où les valeurs des séries

$$R'' = r \frac{1+r}{(1-r)^3}; \quad S'' = \frac{r}{(1-r)^2}; \quad T'' = \frac{r}{1-r}; \quad U'' = -L(1-r)$$

En séparant ensuite les parties réelles et les parties imaginaires on trouve, tous calculs faits, les valeurs suivantes des séries

$$R = \operatorname{sh} \zeta \frac{\cos \gamma \operatorname{ch} \zeta - (1 + \sin^2 \gamma)}{2(\operatorname{ch} \zeta - \cos \gamma)^3}$$

$$R' = \sin \gamma \frac{\operatorname{sh}^2 \zeta - 3(\cos \gamma \operatorname{ch} \zeta - 1)}{2(\operatorname{ch} \zeta - \cos \gamma)^3}$$

$$S = \frac{\cos \gamma \operatorname{ch} \zeta - 1}{2(\operatorname{ch} \zeta - \cos \gamma)^2}$$

$$S' = \frac{\sin \gamma \operatorname{sh} \zeta}{2(\operatorname{ch} \zeta - \cos \gamma)^2}$$

$$T = \frac{\operatorname{sh} \zeta}{2(\operatorname{ch} \zeta - \cos \gamma)} - \frac{1}{2}$$

$$T' = \frac{\sin \gamma}{2(\operatorname{ch} \zeta - \cos \gamma)}$$

$$U = -L \sqrt{1 - 2e^{-\zeta} \cos \gamma + e^{-2\zeta}}$$

$$U' = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sin \gamma}{e^{\zeta} - \cos \gamma}$$

En introduisant ces fonctions, on obtient les expressions suivantes⁴⁾ des contraintes en termes finis:

⁴⁾ R, R' etc. ...sont des fonctions de γ et ζ . Nous les désignerons par $R(\gamma), R'(\gamma)$ etc...; il est bien entendu que ce sont les fonctions de ζ correspondant à la valeur γ de l'argument trigonométrique.

1. Sous une force normale P à l'abcisse u ($\varphi = \pi \frac{u}{a}$) et en posant

$$p = \frac{P}{2a} \quad \beta = \alpha - \varphi$$

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} n_x = 2p \left\{ \zeta S(\beta) - T(\beta) - [\zeta S(\pi - \varphi) - T(\pi - \varphi)] \right. \\ \quad \left. - \frac{\alpha(\pi^2 - \alpha^2)}{2\pi^2} [\zeta R'(\pi - \varphi) - S'(\pi - \varphi)] \right\} \\ n_z = -p \left(1 + \frac{3\alpha\varphi}{\pi^2} \right) - 2p [\zeta S(\beta) + T(\beta)] + 6p \frac{\alpha}{\pi^2} [\zeta T'(\pi - \varphi) + U'(\pi - \varphi)] \\ t = -2p\zeta \left[S'(\beta) - \frac{3\alpha^2 - \pi^2}{2\pi^2} S'(\pi - \varphi) \right] \end{array} \right.$$

2. Sous une force tangentielle Q à l'abcisse u ,

et en posant $q = \frac{Q}{2a}$, la force Q étant dirigée dans le sens des x positifs,

$$(Q) \quad \left\{ \begin{array}{l} n_x = 2q \left\{ \zeta S'(\beta) - 2T'(\beta) - [\zeta S'(\pi - \varphi) - 2T'(\pi - \varphi)] \right. \\ \quad \left. + \frac{\alpha(\pi^2 - \alpha^2)}{2\pi^2} [\zeta R(\pi - \varphi) - 2S(\pi - \varphi)] \right\} \\ n_z = -2q\zeta \left\{ \frac{3\alpha}{\pi^2} \left[\frac{1}{2} + T(\pi - \varphi) \right] + S'(\beta) \right\} \\ t = -q \frac{3}{2} \frac{\pi^2 - \alpha^2}{\pi^2} + 2q \left\{ \zeta S(\beta) - T(\beta) - \frac{3\alpha^2 - \pi^2}{2\pi^2} [\zeta S(\pi - \varphi) - T(\pi - \varphi)] \right\} \end{array} \right.$$

Ces formules ont une apparence compliquée, mais si on a calculé des tables des valeurs des fonctions $R S T U R' S' T' U'$, leur emploi n'est pas plus difficile que celui de fonctions habituelles, trigonométriques ou hyperboliques. D'ailleurs les fonctions $R S T$ etc. n'entrent que par certaines combinaisons (telles que $\zeta S - T$ etc.) dont on peut calculer également des tables. D'autre part il suffit de calculer les fonctions pour des arguments γ compris entre 0 et π , à cause de la périodicité et des parités des fonctions. Pour les fonctions $R S T U$, qui sont paires, $R(-\gamma) = R(\gamma)$ etc. pour les fonctions $R' S' T' U'$, $R'(-\gamma) = -R'(\gamma)$ et pour toutes les fonctions la période est $2\pi [R(\gamma + 2\pi) = R(\gamma)$ etc.].

Nous avons dressé des tables sommaires des fonctions pour les valeurs de $\gamma = 0 \frac{\pi}{4} \frac{\pi}{2} \frac{3\pi}{4} \pi$ et pour les valeurs de $\zeta = 0 \frac{\pi}{6} \frac{\pi}{3} \frac{\pi}{2} \frac{2\pi}{3} \frac{3\pi}{2} 2\pi$.

On en déduit les valeurs des contraintes sous une force P ou une force Q pour $p = 1$ et $q = 1$, en tous les points d'intersection des verticales et horizontales formant le quadrillage de la figure 9, pour des positions de forces appliquées sur la base en un point quelconque de la division de $\frac{a}{4}$ en $\frac{a}{4}$.

Pour ne pas allonger cet exposé, nous n'avons pas reproduit le tableau des valeurs des fonctions $R S T U R' S' T' U'$. Nous nous sommes contentés de donner les tableaux des valeurs des contraintes, qui sont celles inscrites dans les tableaux II à VII que l'on trouvera plus loin, et dont le mode d'emploi sera précisé.

Nous allons toutefois montrer que dans certains cas importants les formules se simplifient et sont facilement utilisables.

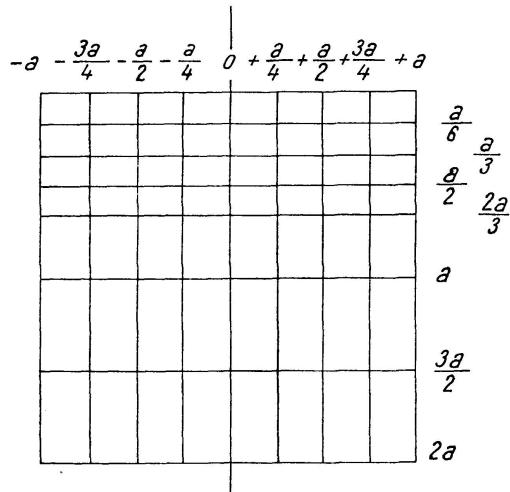
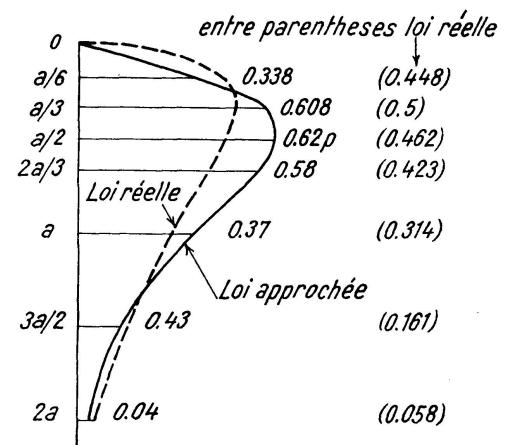


Fig. 9

Fig. 10. Contrainte n_x pour une charge concentrée sur l'axe

Exemples

a) Contraintes sur l'axe $x=0$, engendrées par une force normale P appliquée au centre de la base ($\varphi=0$). On a alors $\alpha=\beta=0$, $\pi-\varphi=\pi$.

Les formules P donnent

$$\left\{ \begin{array}{l} n_x = 2p\{\zeta[S(0)-S(\pi)]-[T(0)-T(\pi)]\} \\ n_z = -p\{1+2[\zeta S(0)+T(0)]\} \\ t = 0 \end{array} \right.$$

et d'après les expressions de S et T

$$S(0) = \frac{1}{2(\operatorname{ch} \zeta - 1)}; \quad S(\pi) = -\frac{1}{2(\operatorname{ch} \zeta + 1)}; \quad S(0) - S(\pi) = \frac{\operatorname{ch} \zeta}{\operatorname{sh}^2 \zeta}$$

$$T(0) = \frac{\operatorname{sh} \zeta}{2(\operatorname{ch} \zeta - 1)} - \frac{1}{2}; \quad T(\pi) = \frac{\operatorname{sh} \zeta}{2(\operatorname{ch} \zeta + 1)} - \frac{1}{2}; \quad T(0) - T(\pi) = \frac{1}{\operatorname{sh} \zeta}$$

d'où

$$n_x = 2p \frac{\zeta \operatorname{ch} \zeta - \operatorname{sh} \zeta}{\operatorname{sh}^2 \zeta}$$

$$n_z = -p \frac{\zeta + \operatorname{sh} \zeta}{\operatorname{ch} \zeta - 1}$$

La variation, déduite de cette théorie approchée, de la contrainte n_x (contrainte d'éclatement) en fonction de z est représentée par la figure 10. On a tracé sur cette même figure, en pointillé, la loi réelle de n_x telle qu'elle résulte de la théorie exacte dont on parlera ci-après. La contrainte maximum dans la théorie approchée est 0,62 p; le calcul exact donne 0,5 p. Le résultat de la théorie approchée est donc erroné de 24% par excès, et la zone des tensions est un peu trop basse. On voit cependant que la théorie approchée donne déjà des indications utiles.

b) *Contraintes n_x sur l'axe, engendrée par une force étalée sur une largeur $2u'$, symétriquement par rapport au milieu. On pose $\varphi' = \pi \frac{u'}{a}$.*

Pour une charge $\bar{\omega} dx$ à l'abcisse φ , on a pour valeur de la compression moyenne dp produite par cette charge, $dp = \frac{\bar{\omega} dx}{2a}$ et comme

$$x = \varphi \frac{a}{\pi}, \quad dp = \bar{\omega} \frac{d\varphi}{2\pi}$$

La contrainte n_x sur l'axe ($\alpha=0$) pour cette charge est, d'après les expressions (P), où $\beta=\alpha-\varphi=-\varphi$

$$\begin{aligned} d n_x &= \frac{2 \bar{\omega} d\varphi}{2\pi} [\zeta S(-\varphi) - T(-\varphi) - \zeta S(\pi-\varphi) + T(\pi-\varphi)] \\ &= \frac{\bar{\omega} d\varphi}{\pi} \{ \zeta [S(\varphi) - S(\pi-\varphi)] - [T(\varphi) - T(\pi-\varphi)] \} \end{aligned}$$

En remarquant que, d'après les expressions des fonctions $S T U$ etc. en séries,

$S = \frac{d T'}{d\gamma}, \quad T = \frac{d U'}{d\gamma}$, on trouve, en intégrant $d n_x$ de $-\varphi' a + \varphi'$:

$$n_x = \frac{2 \bar{\omega}}{\pi} \{ \zeta [T'(\varphi') + T'(\pi-\varphi')] - [U'(\varphi') + U'(\pi-\varphi')] \}$$

En utilisant les valeurs des fonctions T' et U' on trouve après des calculs faciles

$$n_x = \frac{2 \bar{\omega}}{\pi} \left[\zeta \frac{\sin \varphi' \operatorname{ch} \zeta}{\operatorname{sh}^2 \zeta + \sin^2 \varphi'} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sin \varphi'}{\operatorname{sh} \zeta} \right]$$

et comme la compression p est égale à $\bar{\omega} \frac{\varphi'}{\pi}$

$$n_x = \frac{2 p}{\varphi'} \left[\zeta \frac{\sin \varphi' \operatorname{ch} \zeta}{\operatorname{sh}^2 \zeta + \sin^2 \varphi'} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sin \varphi'}{\operatorname{sh} \zeta} \right]$$

Quand φ' devient petit, $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sin \varphi'}{\operatorname{sh} \zeta}$ peut être assimilé à $\frac{\sin \varphi'}{\operatorname{sh} \zeta}$; on a alors

$$n_x = 2p \frac{\sin \varphi'}{\varphi'} \left[\zeta \frac{\operatorname{ch} \zeta}{\operatorname{sh}^2 \zeta + \sin^2 \varphi'} - \frac{1}{\operatorname{sh} \zeta} \right]$$

Quand φ' tend vers zéro, $\frac{\sin \varphi'}{\varphi'}$ tend vers 1, $\sin \varphi'$ tend vers zéro et l'on retrouve bien la formule donnée dans le cas de la charge concentrée

$$n_x = 2p \frac{\zeta \operatorname{ch} \zeta - \operatorname{sh} \zeta}{\operatorname{sh}^2 \zeta}$$

Nous étudierons plus complètement ci-après cette question de l'étalement des charges.

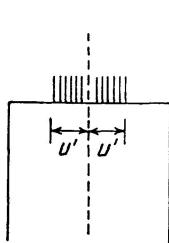


Fig. 11

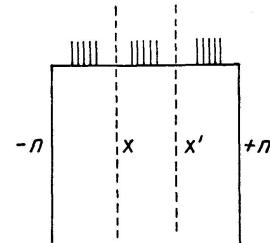


Fig. 12

c) *Cas de charges normales égales régulièrement espacées, symétriques par rapport aux centres de chaque division, et de même étalement (charges périodiques).*

Il y a ici avantage à raisonner par les séries. Le développement en série des charges est périodique, la période étant, si n est le nombre des intervalles, $\frac{2\pi}{n}$. Les contraintes du système I sont également périodiques, avec la même période; sur les verticales XX' etc. qui limitent les divisions, les contraintes prennent donc les mêmes valeurs. Les réactions complémentaires qui annulent les contraintes parasites sur les verticales $x = \pm a$ annulent donc en même temps les contraintes n_x sur les verticales XX' ; les contraintes t sont nulles sur ces mêmes verticales, par suite de la périodicité du système I, puisqu'elles sont nulles sur les verticales $-\pi$ et $+\pi$. Par conséquent n_x et t étant nuls sur ces verticales limites des intervalles, l'équilibre est le même que si le prisme était décomposé en n prismes soumis chacun à une charge symétrique.

Nous verrons plus loin que cette conclusion n'est qu'approximative et qu'en réalité les contraintes n_x et t ne sont pas nulles sur les verticales X et X' , en particulier au voisinage de la face $z=0$. Mais ces contraintes de surface étant mises à part — et calculées par la méthode exacte — l'approximation consistant à admettre que le système est équivalent à n prismes indépendants fournit des ordres de grandeur très acceptables pour ce que nous appellerons plus loin les *contraintes d'éclatement*, c'est-à-dire les contraintes n_x qui se produisent en profondeur.

II. Exposé d'une solution plus exacte.
Cas de charges normales paires

Revenons sur le cas d'une charge normale paire, que l'on peut développer en série de Fourier, en posant comme précédemment $\alpha = \frac{\pi x}{a}$

$\bar{\omega} = \sum A_m \cos m\alpha$, m pouvant prendre toutes les valeurs y compris 0. Considérons le terme d'ordre m de cette série

$$\bar{\omega}_m = A_m \cos m\alpha$$

Nous nous proposons de calculer en tout point du prisme les contraintes partielles n_{mx} , n_{mz} , t_m correspondant à ce terme. Ces contraintes seront évidemment proportionnelles à A_m et on pourra écrire

$$\begin{cases} n_{mx} = A_m \nu_{mx} \\ n_{mz} = A_m \nu_{mz} \\ t_m = A_m \tau_m \end{cases}$$

Tout revient donc à calculer les contraintes ν_{mx} , ν_{mz} , τ_m correspondant à $A_m = 1$, c'est-à-dire les contraintes sous la charge $\bar{\omega}_m = \cos m\alpha$.

Nous avons fait ce calcul pour la contrainte n_x , la plus dangereuse.

Si on connaît pour cette contrainte n_x les différents coefficients ν_m (nous supprimons désormais l'indice x), la contrainte totale n_x en un point (xz) sera donnée par la série

$$n_x = \sum A_m \nu_m (xz)$$

ν_m est une fonction de x et de z . Mais pratiquement il n'est pas nécessaire d'en connaître l'expression en x et z . Il suffit d'en connaître *les valeurs* en un certain nombre de points du prisme. Si ces points sont assez rapprochés, cela suffira pour permettre les interpolations et pour définir ainsi d'une façon suffisante l'état élastique du prisme. Les calculs ont été faits pour les points d'intersection des verticales et des horizontales formant le quadrillage de la figure 9.

Les coefficients $\nu_m (xz)$ ayant été déterminés en tous les sommets du quadrillage ainsi défini, en un de ces points, de coordonnées $x_0 z_0$, les coefficients ν_m seront des *nombres* $\nu_m (x_0 z_0)$ déterminés une fois pour toutes et la contrainte n_x au point $x_0 z_0$ sera donnée par la série

$$n_x = \sum A_m \nu_m (x_0 z_0)$$

A la série de Fourier, donnant $\bar{\omega}$, dont les coefficients $A_0 A_1 \dots A_m$ sont facilement calculables, on a donc fait correspondre, pour n_x , la série numérique

$$n_x = A_0 \nu_0 (x_0 z_0) + A_1 \nu_1 (x_0 z_0) \dots + A_m \nu_m (x_0 z_0) + \dots$$

1. Considérons donc la charge partielle $\bar{\omega}_m = \cos m\alpha$. On a trouvé ci-dessus (I, A) une contrainte (système I)

$$\nu_m^1 = -(m\zeta - 1)e^{-m\zeta} \cos m\alpha$$

qui n'est pas la solution du problème, puisqu'elle n'est pas nulle sur les faces $x = \pm a$, où elle prend la valeur $r_1 = (-1)^{m+1}(m\zeta - 1)e^{-m\zeta}$.

2. Il faut sur ces faces $x = \pm a$ introduire des réactions égales et opposées, de façon à annuler les contraintes parasites, soit:

$$-r_1 = -(-1)^{m+1}(m\zeta - 1)e^{-m\zeta}$$

Cette fonction de réaction $(-r_1)$ est valable pour la moitié supérieure du prisme; pour la moitié inférieure on a une fonction $(-r_1')$ symétrique de $(-r_1)$ c'est-à-dire telle que r_1 et r_1' prennent des valeurs égales en des points symétriques par rapport au plan horizontal médian $z = h$ [c'est-à-dire $r_1(z) = r_1'(2h - z)$].

Appliquons à cette fonction de réaction la même méthode que précédemment (I, A), c'est-à-dire développons-la en série de Fourier et cherchons un système de contraintes qui lui corresponde terme à terme (système II).

Par suite de la symétrie par rapport au plan $z = h$, on pourra obtenir pour $(-r_1)$ un développement ne comportant que des sinus, de la forme

$$-r_1 = -(-1)^{m+1} \sum B_n \sin \frac{n\pi z}{2h} \quad (n \text{ impair}).$$

Moyennant certaines transformations, destinées à obtenir des séries rapidement convergentes, et sur lesquelles il n'y a pas lieu d'insister ici (elles sont explicitées dans notre mémoire précité), il y a avantage à mettre $-r_1$ sous la forme

$$-r_1 = -(-1)^{m+1} \left(-1 + \sum b_n \sin \frac{n\pi z}{2h} \right)$$

C'est-à-dire sous la forme d'une traction ou compression (suivant la direction n_x) uniforme, $(-1)^{m+1}$ et d'une série

$$-(-1)^{m+1} \sum b_n \sin \frac{n\pi z}{2h}$$

ou encore en posant

$$\frac{a}{2h} = k \text{ et } \zeta = \pi \frac{z}{a}, \quad -r_1 = -(-1)^{m+1} (-1 + \sum b_n \sin n k \zeta)$$

Par des calculs analogues à ceux faits en I, on trouve un état élastique satisfaisant aux équations de l'élasticité, mais non à toutes les conditions aux limites: il reste sur les faces horizontales $z = 0$ et $z = 2h$ des réactions parasites tangentialles. Les contraintes ν_x et les réactions parasites ont des expressions de la forme⁵⁾

⁵⁾ Il est bien entendu que ν_m^2 est une simple notation et que l'indice supérieur 2 n'est pas un exposant mais la désignation du rang du système de contraintes dans la réitération.

$$\text{contrainte } \nu_x \quad \nu_m^2 = -(-1)^{m+1} [-1 + \sum b_n f_n(\alpha) \sin n k \zeta]$$

$$\text{réactions parasites } t_m^2 = -(-1)^{m+1} \sum b_n g_n(\alpha) \quad (\text{pour } z=0).$$

Les expressions de b_n , f_n et g_n sont données dans notre mémoire. Pour b_n on a:

$$b_n = \frac{4}{\pi} \frac{m^2}{n} \frac{m^2 + 3k^2 n^2}{(m^2 + k^2 n^2)^2}$$

et cette expression montre que les contraintes du système II dépendent de l'élancement $\frac{2h}{2a}$ (ou de la valeur de k) du prisme. Mais on reconnaît que si $\frac{2h}{2a}$ est suffisamment grand, l'état de contrainte au voisinage de la base varie très peu avec l'élancement, et que c'est un état attaché à l'extrémité du prisme, ne dépendant que des forces appliquées. Nous avons choisi un élancement $\frac{2h}{2a} = 3$, d'où $k = \frac{1}{6}$.

On a alors:

$$b_n = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{36m^2(36m^2 + 3n^2)}{n(36m^2 + n^2)^2}$$

et le développement de $(-r_1)$ est très rapidement convergent.

On a d'autre part pour cette même valeur de $\frac{2h}{2a} = 3$:

$$f_n(\alpha) = 2 \frac{\left(\frac{n\pi}{6} \operatorname{ch} \frac{n\pi}{6} + \operatorname{sh} \frac{n\pi}{6}\right) \operatorname{ch} \frac{na}{6} - \frac{na}{6} \operatorname{sh} \frac{n\pi}{6} \operatorname{sh} \frac{n\alpha}{6}}{\frac{n\pi}{3} + \operatorname{sh} \frac{n\pi}{3}}$$

$$g_n(\alpha) = 2 \frac{\frac{n\pi}{6} \operatorname{ch} \frac{n\pi}{6} \operatorname{sh} \frac{na}{6} - \frac{na}{6} \operatorname{sh} \frac{n\pi}{6} \operatorname{ch} \frac{n\alpha}{6}}{\frac{n\pi}{3} + \operatorname{sh} \frac{n\pi}{3}}$$

Pour faire disparaître les contraintes parasites t_m^2 il faut exercer sur les faces $z=0$ et $z=2h$ des réactions tangentielles $-t_m^2$.

A ce stade du calcul, la contrainte ν_m cherchée peut donc être mise sous la forme

$$\begin{aligned} \nu_m &= \nu_m^1 + \nu_m^2 + \text{effet de } (-t_m^2) \\ &= -(m\zeta - 1) e^{-m\zeta} \cos m\alpha + (-1)^{m+1} - (-1)^{m+1} \sum b_n f_n(\alpha) \sin \frac{n\zeta}{6} \\ &\quad + \text{effet de } (-t_m^2) \end{aligned} \quad (1)$$

Il est clair que si l'on poursuivait les calculs suivant la méthode suivie jusqu'ici, — c'est-à-dire si l'on développait $(-t_m^2)$ en série de Fourier, puis si l'on cherchait le système de contraintes correspondant, qui ferait apparaître des contraintes parasites sur les faces $x = \pm a$, puis si l'on annulait ces contraintes parasites par de nouvelles réactions etc. — la suite des systèmes successifs serait illimitée et rien ne démontrerait, indépendamment de toute question de possibilité d'exécution de tels calculs, la convergence de cette suite.

Mais on constate numériquement, et cela permet de terminer le calcul, que les réactions tangentielles ($-t_m^2$) qu'on doit introduire pour faire disparaître les contraintes parasites du système II suivent, quelle que soit la valeur de m , une loi très sensiblement linéaire, qu'on peut assimiler à la loi $(-t_m^2) = K_m \alpha$.

Si donc on suppose connu le système de contraintes correspondant à une telle loi linéaire et satisfaisant, cette fois, à *toutes les conditions aux limites*, ce serait notre système III; en appelant ν_m^3 la contrainte ν_x correspondante on aurait:

$$\nu_m = \nu_m^1 + \nu_m^2 + \nu_m^3$$

En réalité, comme la loi ($-t_m^2$) n'est pas rigoureusement linéaire, il est nécessaire d'apporter des corrections; nous verrons ci-dessous comment elles peuvent être faites. Moyennant ces corrections, on peut considérer les résultats obtenus comme pratiquement exacts.

3. On est ainsi amené à chercher, par un calcul séparé, l'effet d'une charge linéaire tangentielle. On peut prendre pour cela une loi telle que son développement en série soit le plus simple possible, et nous avons choisi la loi $\theta = \frac{\alpha}{2}$; les résultats obtenus sont alors utilisables pour toute autre loi linéaire, par proportion.

Le développement en série de Fourier de la loi choisie est

$$\theta = \frac{\alpha}{2} = \sum (-1)^{m+1} \frac{\sin n \alpha}{n}$$

Ce calcul, limité aux contraintes n_x peut être décomposé suivant le schéma suivant:

Système	Charge appliquée	Développement	Contrainte n_x	Contraintes parasites
a	θ , tangentiel sur $z=0$	$\sum (-1)^{n+1} \frac{\sin n \alpha}{n}$	$\nu_a(\alpha)$	$\nu_a(\pi)$, normal sur faces $x=\pm a$
b	$-\nu_a(\pi)$, normal sur $x=\pm a$	$\sum d_p \sin p \frac{\pi z}{2h}$	$\nu_b(\alpha)$	τ , tangentiel sur face $z=0$
c	$-\tau$ tangentiel			

Or on constate que les réactions tangentielles $-\tau$ qu'on doit introduire dans le système c suivent de nouveau, avec une très grande approximation, une loi linéaire, comme la charge θ dont on était parti. Cela nous permet une récurrence qui va fermer le cycle.

En effet appelons ν_x la contrainte *réelle* engendrée par θ (qui n'est pas ν_a , laquelle est une fausse solution). On a:

$$\nu_x = \nu_a + \nu_b + \nu_c + \nu_d + \dots \quad (2)$$

mais $\nu_a + \nu_b + \dots$ est la contrainte *réelle* ν_x engendrée par $-\tau$. Elle est donc proportionnelle à ν_x engendrée par θ puisque θ et τ sont tous deux linéaires.

Désignons la loi $-\tau$ par: $-\tau = -C\alpha$, C étant une constante, on a:

$$\nu_x(\text{sous } -\tau) = \nu_x(\text{sous } \theta) \cdot \frac{-\tau}{\theta} = \nu_x(\text{sous } \theta) \cdot \frac{-C\alpha}{\frac{\alpha}{2}} = -2C\nu_x(\text{sous } \theta)$$

La formule (2) s'écrit:

$$\nu_x(\text{sous } \theta) = \nu_a + \nu_b + \nu_x(\text{sous } -\tau)$$

ou:

$$\nu_x(\text{sous } \theta) = \nu_a + \nu_b - 2C\nu_x(\text{sous } \theta)$$

d'où

$$\nu_x = \frac{\nu_a + \nu_b}{1 + 2C} \quad (3)$$

et la contrainte ν_x remplit cette fois toutes les conditions.

Si on explicite le calcul, on trouve successivement:

$$\nu_a(\alpha) = \sum (n\zeta - 2) e^{-n\zeta} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\alpha$$

$$\nu_a(\pi) = \sum (n\zeta - 2) \frac{e^{-n\zeta}}{n}$$

Le développement de $[-\nu_a(\pi)]$ (réaction introduite dans le système b) est:

$$-\nu_a(\pi) = \sum d_p \sin \frac{p\pi z}{2h} \quad (p \text{ impair})$$

avec

$$d_p = -\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{p^3}{n \left(\frac{4h^2}{a^2} n^2 + p^2 \right)^2}$$

Puis

$$\nu_b(\alpha) = \sum d_p f_p(\alpha) \sin p \frac{\pi z}{2h}$$

$$\tau_b(0) = \sum d_p g_p(\alpha)$$

f_p et g_p étant les fonctions déjà rencontrées en 2 (il suffit de remplacer dans leurs expressions n par p).

Il n'y a pas lieu d'insister sur la façon dont on peut calculer C ni sur la façon dont on peut rendre le développement d_p plus convergent par une transformation analogue à celle qu'on a faite en 2 pour le développement B_n .

Disons seulement qu'on peut avoir ν_x avec une très grande exactitude en tenant compte de ce que la loi $\tau_b(0)$ n'est pas exactement linéaire et en effectuant la correction suivante; nous l'indiquerons pour fixer les idées pour la contrainte ν_x sur le plan $x = \frac{3a}{4}$. Cette correction revient à prendre pour loi linéaire représentant $\tau_b(0)$ non pas $\tau_b(0) = C\alpha$ qui serait une certaine loi

moyenne, mais $\tau_b(0) = C'(\alpha)$, C' étant une constante, légèrement différente de C et telle que la résultante des charges tangentielles à droite de $\frac{3a}{4}$ soit la même pour la loi linéaire (C') et pour la loi réelle $\tau_b(0)$ (fig. 13).

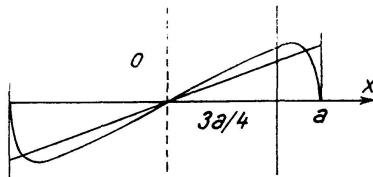


Fig. 13

C'est ce coefficient C' qu'on introduira pour $\nu_x\left(\frac{3a}{4}\right)$ dans la formule (3). (On aura de même un autre coefficient C'' pour $\nu_x\left(\frac{a}{2}\right)$, C'''' pour $\nu_x\left(\frac{a}{4}\right)$, C'''' pour $\nu_x(0)$ les coefficients $C' C'' C'''' C''''$ étant d'ailleurs très voisins.)

4. L'effet d'une charge tangentielle linéaire $\frac{\alpha}{2}$ étant ainsi calculé, on pourra terminer le calcul commencé en 3 puisque nous connaissons maintenant l'effet de la réaction tangentielle $(-t_m)$ que nous avons assimilée à une loi linéaire $K_m \alpha$.

En appelant ν_m^3 la contrainte ν_x engendrée par $(-t_m^2)$ et remplissant cette fois toutes les conditions aux limites on aura

$$\nu_m^3 = \nu_x\left(\text{sous } \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{K_m}{\frac{1}{2}} = 2 K_m \nu_x\left(\text{sous } \frac{\alpha}{2}\right)$$

$\nu_x\left(\text{sous } \frac{\alpha}{2}\right)$ étant la contrainte calculée en 3. On fera d'ailleurs la même correction que celle qui a été indiquée à la fin de 3, c'est-à-dire que l'on adoptera des valeurs $K'_m K''_m K'''_m K''''_m$ (qui seront très voisines les unes des autres), pour les contraintes sur les plans $\frac{3a}{4} \frac{a}{2} \frac{a}{4} 0$, les coefficients $K'_m K''_m \dots$ étant choisis pour qu'on ait égalité des résultantes pour la loi linéaire adoptée et pour la loi réelle $(-t_m^2)$ à droite de la verticale considérée.

Ce calcul étant fait on aura la contrainte définitive ν_x sous la charge normale $\bar{\omega}_m = \cos m \alpha$ par

$$\nu_m = \nu_m^1 + \nu_m^2 + \nu_m^3$$

ν_m^1 ν_m^2 et ν_m^3 étant des fonctions de x et z .

Pour une charge quelconque $\bar{\omega} = \sum A_m \cos m \alpha$, la valeur de la contrainte ν_x sera donnée par la série

$$\nu_x(xz) = A_1 \nu_1 + A_2 \nu_2 + \dots + A_m \nu_m + \dots$$

Les coefficients $\nu_1 \nu_2 \dots$ sont donnés par les tableaux I suivants:

Tableaux I. Contraintes n_x sous charges normales paires

Valeurs des coefficients par lesquels il faut multiplier le coefficient de rang m du développement de la fonction de charge pour obtenir le terme de rang m de la série qui donne n_x

Exemple d'utilisation: Les forces qui agissent sur la base étant développées en série: $\bar{\omega} = A_0 + A_1 \cos \alpha + A_2 \cos 2\alpha + A_3 \cos 3\alpha \dots + A_{10} \cos 10\alpha$ ($\alpha = \pi \frac{x}{a}$) la contrainte n_x au point $x = \frac{a}{2}$ $z = \frac{a}{3}$ s'obtiendra grâce aux coefficients du tableau $x = \frac{a}{2}$ dans la colonne $z = \frac{a}{3}$ et sera égale à la somme de la série numérique: $n_x \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{3} \right) = 0,0933 A_1 + 0,1373 A_2 - 0,0133 A_3 - 0,0321 A_4 - 0,0123 A_5 + 0,0221 A_6 - 0,0115 A_7 + 0,0083 A_8 - 0,0103 A_9 + 0,0150 A_{10}$.

m	Valeurs de z									
	$x=0$	0	$a/6$	$a/3$	$a/2$	$2a/3$	a	$3a/2$	$2a$	$5a/2$
1	+ 1,2569	+ 0,4630	+ 0,0872	- 0,0870	- 0,1639	- 0,1653	- 0,0873	- 0,0282	- 0,0010	+ 0,0051
2	+ 0,9261	- 0,0666	- 0,1576	- 0,0889	- 0,0283	+ 0,0155	+ 0,0089	- 0,0005	- 0,0052	- 0,0047
3	+ 1,0180	- 0,1027	- 0,0836	- 0,0356	- 0,0201	- 0,0111	- 0,0026	+ 0,0016	+ 0,0045	+ 0,0037
4	+ 1,0067	- 0,1386	- 0,0530	- 0,0148	+ 0,0025	+ 0,0049	+ 0,0006	- 0,0018	- 0,0043	- 0,0031
5	+ 0,9805	- 0,1221	- 0,0198	- 0,0016	- 0,0013	- 0,0024	0,0000	+ 0,0016	+ 0,0041	+ 0,0032
6	+ 1,0254	- 0,0853	- 0,0119	- 0,0023	0,0000	+ 0,0008	- 0,0005	- 0,0019	- 0,0041	- 0,0026
7	+ 0,9708	- 0,0772	- 0,0023	+ 0,0024	+ 0,0010	- 0,0002	+ 0,0006	+ 0,0019	+ 0,0041	+ 0,0024
8	+ 1,0322	- 0,0379	- 0,0032	- 0,0027	- 0,0016	- 0,0004	- 0,0008	- 0,0019	- 0,0041	- 0,0024
9	+ 0,9658	- 0,0448	+ 0,0007	+ 0,0029	+ 0,0020	+ 0,0007	+ 0,0010	+ 0,0020	+ 0,0041	+ 0,0024
10	+ 1,0335	- 0,0120	- 0,0060	- 0,0032	- 0,0016	+ 0,0004	- 0,0004	- 0,0019	- 0,0046	- 0,0037
m	$x=a/4$									
1	+ 0,9729	+ 0,3872	+ 0,0912	- 0,0603	- 0,1285	- 0,1423	- 0,0755	- 0,0237	- 0,0008	+ 0,0053
2	- 0,0775	- 0,0572	- 0,0188	+ 0,0112	+ 0,0260	+ 0,0256	+ 0,0109	- 0,0003	- 0,0040	- 0,0043
3	- 0,6908	+ 0,1053	+ 0,0704	+ 0,0155	- 0,0061	- 0,0098	- 0,0018	+ 0,0016	+ 0,0032	+ 0,0031
4	- 0,9895	+ 0,1282	+ 0,0469	+ 0,0148	+ 0,0088	+ 0,0050	0,0000	- 0,0018	- 0,0030	- 0,0028
5	- 0,7307	+ 0,0850	+ 0,0170	- 0,0007	- 0,0031	- 0,0025	+ 0,0004	+ 0,0015	+ 0,0030	+ 0,0028
6	+ 0,0308	- 0,0020	+ 0,0001	+ 0,0019	+ 0,0024	+ 0,0010	- 0,0007	- 0,0020	- 0,0030	- 0,0019
7	+ 0,6716	- 0,0521	- 0,0031	- 0,0022	- 0,0015	- 0,0004	+ 0,0008	+ 0,0019	+ 0,0029	+ 0,0018
8	+ 1,0390	- 0,0430	- 0,0014	+ 0,0007	+ 0,0008	- 0,0001	- 0,0009	- 0,0019	- 0,0029	- 0,0016
9	+ 0,6657	- 0,0300	- 0,0009	- 0,0004	0,0000	+ 0,0004	+ 0,0012	+ 0,0021	+ 0,0030	+ 0,0018
10	+ 0,0409	+ 0,0056	- 0,0004	0,0000	+ 0,0009	+ 0,0006	- 0,0007	- 0,0020	- 0,0033	- 0,0033
m	$x=3a/4$									
1	+ 0,3335	+ 0,2240	+ 0,0933	- 0,0070	- 0,0642	- 0,0865	- 0,0454	- 0,0118	+ 0,0025	+ 0,0062
2	- 1,1403	- 0,0569	+ 0,1373	+ 0,1299	+ 0,0907	+ 0,0335	+ 0,0050	- 0,0022	- 0,0042	- 0,0045
3	+ 0,0685	+ 0,0316	- 0,0133	- 0,0263	- 0,0219	- 0,0081	- 0,0001	+ 0,0023	+ 0,0030	+ 0,0031
4	+ 0,9632	- 0,1519	- 0,0321	+ 0,0087	+ 0,0116	+ 0,0037	- 0,0010	- 0,0022	- 0,0026	- 0,0025
5	+ 0,0162	+ 0,0110	- 0,0123	- 0,0146	- 0,0095	- 0,0017	+ 0,0012	+ 0,0018	+ 0,0024	+ 0,0026
6	- 1,0071	+ 0,0870	+ 0,0221	+ 0,0137	+ 0,0078	+ 0,0001	- 0,0008	- 0,0023	- 0,0030	- 0,0007
7	- 0,0005	+ 0,0036	- 0,0115	- 0,0120	- 0,0070	- 0,0008	+ 0,0012	+ 0,0022	+ 0,0028	+ 0,0009
8	+ 1,0022	- 0,0527	+ 0,0083	+ 0,0108	+ 0,0061	- 0,0008	- 0,0011	- 0,0021	- 0,0028	- 0,0008
9	- 0,0082	+ 0,0019	- 0,0103	- 0,0105	- 0,0059	- 0,0012	+ 0,0012	+ 0,0021	+ 0,0028	+ 0,0009
10	- 0,9915	+ 0,0196	+ 0,0150	+ 0,0098	+ 0,0064	+ 0,0010	- 0,0013	- 0,0022	- 0,0028	- 0,0028

m	Valeurs de z									
	$x = a/2$	0	$a/6$	$a/3$	$a/2$	$2a/3$	a	$3a/2$	$2a$	$5a/2$
1	-0,2966	+0,0397	+0,0505	+0,0178	-0,0151	-0,0258	-0,0115	-0,0002	+0,0043	+0,0049
2	-0,3465	-0,0772	+0,0638	+0,0766	+0,0541	+0,0154	-0,0002	-0,0032	-0,0041	-0,0041
3	+0,9741	-0,0702	-0,1285	-0,0678	-0,0281	-0,0032	+0,0014	+0,0023	+0,0025	+0,0025
4	-1,2221	+0,1429	+0,1002	+0,0368	+0,0122	+0,0005	-0,0013	-0,0018	-0,0017	-0,0017
5	+0,9013	-0,0969	-0,0561	-0,0206	-0,0067	+0,0004	+0,0011	+0,0011	+0,0011	+0,0016
6	-0,1811	+0,0179	+0,0359	+0,0158	+0,0056	+0,0027	+0,0011	-0,0024	-0,0030	-0,0028
7	-0,5387	+0,0309	-0,0290	-0,0155	-0,0057	-0,0026	-0,0002	+0,0011	+0,0023	+0,0017
8	+0,8411	-0,0328	+0,0279	+0,0146	+0,0051	-0,0031	-0,0040	-0,0030	-0,0022	-0,0017
9	-0,5549	+0,0075	-0,0284	-0,0141	-0,0049	+0,0031	+0,0040	+0,0010	+0,0005	-0,0019
10	-0,1500	+0,0135	+0,0248	+0,0124	+0,0055	+0,0007	-0,0002	-0,0015	-0,0014	-0,0008

On trouvera plus loin (tableaux II à VII) des tableaux plus facilement utilisables. Mais nous avons cru utile de donner le tableau ci-dessus, à cause de sa très grande exactitude, et d'autre part parce que, dans certains cas de charges paires, il ne serait pas beaucoup plus long de se servir de ces tableaux que des tableaux II à VII, lorsque les développements des charges peuvent être réduits pratiquement à un petit nombre de termes⁶⁾.

Pour les charges très concentrées (c'est-à-dire étalées sur une faible largeur), il n'en serait plus de même. C'est pourquoi nous avons transformé les tableaux en tableaux d'influence (c'est-à-dire donnant l'effet d'une charge unique) qui sont précisément les tableaux II à VII. Ces tableaux II à VII seront les tableaux pratiques.

Cas de charges normales impaires

Nous avons employé une méthode analogue à celle que nous venons d'exposer. Toutefois nous devons dire que les résultats obtenus sont moins exacts que dans le cas des charges paires.

On obtient des expressions analogues dans les deux premiers systèmes (systèmes I et II) avec réactions parasites: sur les faces verticales (réactions normales) dans le système I, sur les faces horizontales (réactions tangentielles) dans le système II. Mais il n'existe pas, entre les systèmes III et les suivants, de relation de récurrence simple comme dans le cas des charges paires. Il a donc fallu faire des appro-

⁶⁾ Toutefois, pour $z = 0$, les séries donnant n_x sont en général lentement convergentes, et les tableaux I sont en conséquence difficilement utilisables pour cette face $z = 0$. Nous avons donné dans notre mémoire la façon d'obtenir pour cette face des séries n_x rapidement convergentes. Il est inutile ici d'exposer la méthode employée, puisque les tableaux pratiques (tableaux II) donneront en cas de besoin la contrainte n_x aussi bien pour $z = 0$ que pour les autres points du prisme.

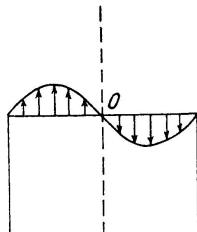


Fig. 14

ximations moins légitimes. Néanmoins on peut considérer que les résultats obtenus pour n_x sont approchés à 10 ou 15% près.

Des tableaux analogues aux tableaux I ont été donnés, nous croyons inutile de les reproduire.

III. Etablissement des Tableaux Pratiques

Les tableaux qui sont reproduits ci-dessous (Tableaux II) donnent les valeurs des contraintes n_x n_z t engendrées par une force unique normale ou tangentielle appliquée en des points de la base espacés de $\frac{a}{4}$ en $\frac{a}{4}$, aux points d'intersection des horizontales et des verticales de la figure 9. Ils ont été établis de la façon suivante:

Pour les contraintes n_x sous charges normales, qui sont dans les cas usuels les plus dangereuses, nous nous sommes servi des tableaux I (charges paires) et des tableaux analogues (non reproduits) correspondant aux charges impaires; nous avons pris pour forces appliquées deux forces concentrées $\frac{P}{2}$ aux abscisses $\pm u$ (charges paires) et deux forces concentrées antisymétriques $\pm \frac{P}{2}$ aux abscisses $\pm u$ (charges impaires). Par addition, on a obtenu l'effet d'une charge P à l'abscisse u .

Pour toutes les autres contraintes: n_z et t sous charges normales, n_x n_z et t sous charges tangentielles, nous nous sommes servi des résultats de la théorie approchée (I, 2.), c'est-à-dire des formules (P) et (Q) des pages 179/181.

Les contraintes étant proportionnelles à $\frac{P}{2a} = p$ et à $\frac{Q}{2a} = q$ nous avons choisi P et Q de façon que p et q soient égaux à l'unité. On obtiendra donc, dans tout cas concret, les résultats en multipliant les contraintes des tableaux par les contraintes de compression ou de cisaillement moyennes, p et q , engendrées par les forces réellement appliquées.

IV. Tableaux pour le Calcul des Contraintes dans le Cas du Prisme indéfini, sous l'Effet d'une Force unique

Utilisation des tableaux II à VII

Le prisme a pour largeur $2a$. Il est rapporté à deux axes $0x$ et $0z$ (fig. 15).

La charge est appliquée sur la base à l'abscisse u . Sa composante normale est P , sa composante tangentielle est Q . Les tableaux sont établis dans l'hypothèse de P dirigé vers l'intérieur du prisme, et Q dans le sens des x positifs (fig. 15).

On désigne par p la valeur absolue de la compression moyenne $\frac{P}{2a}$, par q la valeur absolue de la contrainte de cisaillement $\frac{Q}{2a}$.

Si donc on appelle d'une façon générale ν_p et ν_q les coefficients des tableaux correspondant respectivement à la charge normale (tableaux II, III, IV) et à la charge tangentielle (tableaux V, VI, VII) la contrainte totale ν sous la force P , Q (ν désignant n_x , n_z ou t) est égale à

$$\nu = p \nu_p + q \nu_q \quad \text{ou} \quad \nu = \frac{P \nu_p + Q \nu_q}{2a}$$

Dans le cas où l'on a plusieurs forces (le cas de forces réparties pouvant être ramené à ce cas en remplaçant les forces réparties par un système de forces concentrées) on aura

$$\nu = \sum \frac{P \nu_p + Q \nu_q}{2a}$$

Les conventions de signe sont les suivantes:

n_x et n_z sont positifs quand ces contraintes sont des tractions — t est positif lorsque sur le plan horizontal laissant au-dessus de lui l'origine 0, cette contrainte est dirigée dans le sens des x positifs (sur la figure 15, t est positif).

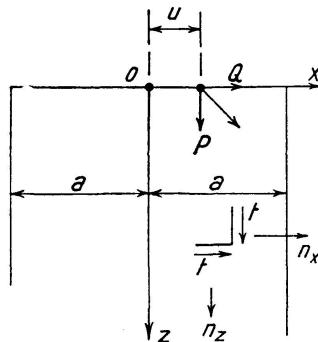


Fig. 15

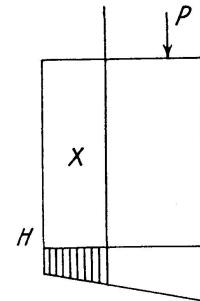


Fig. 16

Les tableaux donnent les contraintes n_x , n_z et t en différents points du prisme:

sur 5 verticales $x=0$, $x=\frac{a}{4}$, $x=\frac{a}{2}$, $x=\frac{3a}{4}$, $x=a$ aux niveaux $z=0$, $\frac{a}{6}$, $\frac{a}{3}$, $\frac{a}{2}$, $\frac{2a}{3}$, a , $\frac{3a}{2}$, $2a$

et pour différentes positions de la charge espacées de $\frac{a}{4}$ en $\frac{a}{4}$ entre $u=-a$ et $u=+a$.

Remarques

1. Pour une charge normale P , si l'on fait une coupe dans le prisme par un plan horizontal H (fig. 16) à grande profondeur, les contraintes qui s'exercent sur ce plan H sont réparties suivant la loi habituelle de la Résistance des Matériaux, et on n'a aucune contrainte de cisaillement sur ce plan H . Si on coupe le prisme par un plan vertical X , à gauche de P , il est nécessaire pour l'équilibre que:

- a) $\Sigma n_x = 0$.
- b) Moment des n_x = moment des contraintes sur le plan H à gauche de X (moment de la partie hachurée du diagramme de contrainte).
- c) Σt = résultante des contraintes sur le plan H à gauche de X .

Ces remarques permettent de préciser les lois de variation des contraintes n_x et t (nous en donnerons ci-après un exemple).

2. Sur la base $z=0$, pour les contraintes sous forces normales, on trouve dans les tableaux, à l'aplomb de la force, une double valeur (dont l'une est $-\infty$) pour n_x . Par exemple pour une force appliquée en $x=0$ on trouve en $x=0, z=0, n_x = -\infty$ et $+0,523$. La signification de cette double valeur est la suivante:

a) A l'aplomb rigoureux de la force, c'est-à-dire pour $x=0$, la contrainte n_x est une compression infinie (due à ce que la force est concentrée) en $z=0$; mais cette compression infinie ne s'étend que sur une épaisseur dz infiniment petite. La résultante $-\infty \cdot dz$ est une force concentrée. Si l'on trace (fig. 17)

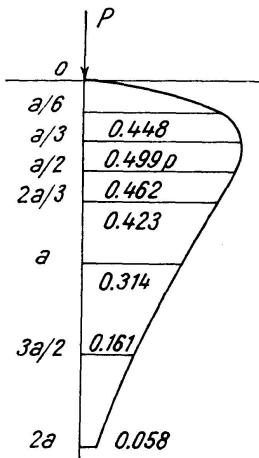


Fig. 17

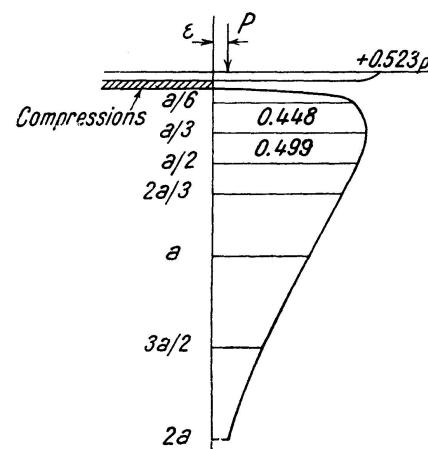
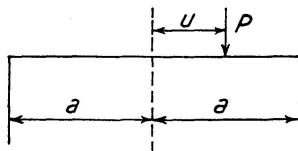


Fig. 18

le diagramme de variation des contraintes n_x le long de $0z$, il faut d'après la remarque précédente que la force concentrée $-\infty \cdot dz$ soit égale à la résultante du diagramme des tractions; n_x passe instantanément de $-\infty$ à 0 quand on passe de $z=0$ à $z=\epsilon$. Le moment de la résultante du diagramme des tractions par rapport à 0 doit être égal au moment, par rapport à 0, de la résultante $\frac{P}{2}$ s'exerçant à gauche de $0z$ sur un plan H à grande profondeur, soit $\frac{P}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{Pa}{4}$.

b) Sur la verticale $x = -\epsilon$ à gauche de la force on a, pour $z=0$, la deuxième valeur, $n_x = +0,523$. Il est alors obligatoire que sur cette verticale, les contraintes n_x suivent une loi telle que celle de la figure 18, avec une zone, très étroite mais à fortes contraintes, en compression. D'autre part les contraintes t devront avoir, sur ce plan $x = -\epsilon$, une résultante égale à $-\frac{P}{2}$. Les contraintes t



Les contraintes doivent être multipliées par $\frac{P}{2a}$

Tableau II. Contrainte n_x sous une charge normale
Positions de la force (u)

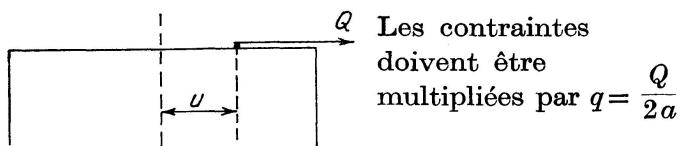
Les contraintes
doivent être
multipliées par $\frac{P}{2a}$

Tableau III. Contrainte n_z sans une charge normale
Position de la force (u)

Position du point étudié	$-a$	$-3a/4$	$-a/2$	$-a/4$	0	$+a/4$	$+a/2$	$+3a/4$	$+a$
$z=0$	$x=0$	0	0	0	$-\infty$	0	0	0	0
	$a/4$	0	0	0	0	$-\infty$	0	0	0
	$a/2$	0	0	0	0	0	$-\infty$	0	0
	$3a/4$	0	0	0	0	0	0	$-\infty$	0
	a	0	0	0	0	0	0	0	$-\infty$
$z=\frac{a}{6}$	$x=0$	-0,006	-0,014	-0,068	-0,684	-7,990	-0,684	-0,014	-0,006
	$a/4$	+0,736	+0,050	-0,005	-0,063	-0,684	-7,993	-0,693	-0,121
	$a/2$	+1,434	+0,096	+0,012	-0,008	-0,066	-0,690	-8,008	-0,794
	$3a/4$	+1,566	+0,098	+0,013	+0,002	-0,014	-0,074	-0,711	-2,934
	a	-4,990	-0,464	-0,031	-0,040	-0,006	-0,024	-0,101	-10,990
$z=\frac{a}{3}$	$x=0$	-0,078	-0,124	-0,340	-1,570	-3,892	-1,570	-0,124	-0,078
	$a/4$	+0,626	-0,065	-0,066	-0,353	-1,140	-3,909	-1,628	-0,382
	$a/2$	+1,130	+0,302	+0,039	-0,089	-0,370	-1,605	-4,009	-1,870
	$3a/4$	+0,680	+0,165	+0,049	-0,027	-0,124	-0,421	-1,743	-3,820
	a	-0,892	-0,720	-0,137	+0,055	-0,078	-0,193	-0,603	-2,420
$z=\frac{a}{2}$	$x=0$	-0,208	-0,294	-0,668	-1,650	-2,564	-1,650	-0,294	-0,208
	$a/4$	+0,456	+0,126	-0,166	-0,624	-1,650	-2,608	-1,001	-1,044
	$a/2$	+0,882	+0,374	+0,048	-0,205	-0,668	-1,739	-2,820	-2,168
	$3a/4$	+0,600	+0,333	+0,089	-0,074	-0,294	-0,802	-2,033	-3,900
	a	+0,436	-0,313	-0,155	-0,116	-0,208	-0,472	-1,181	-5,564
$z=\frac{2a}{3}$	$x=0$	-0,372	-0,478	-0,848	-1,514	-1,950	-1,514	-0,478	-0,372
	$a/4$	+0,272	+0,042	-0,282	-0,772	-1,514	-2,026	-1,710	-1,261
	$a/2$	+0,652	+0,349	+0,020	-0,325	-0,848	-1,667	-2,342	-2,348
	$3a/4$	+0,736	+0,393	+0,110	-0,148	-0,478	-1,078	-2,102	-3,191
	a	+1,050	+0,141	-0,063	-0,172	-0,372	-0,784	-1,623	-4,950
$z=a$	$x=0$	-0,668	-0,750	-0,970	-1,250	-1,386	-1,250	-0,750	-0,668
	$a/4$	0	-0,168	-0,465	-0,840	-1,250	-1,516	-1,535	-1,469
	$a/2$	+0,530	+0,248	-0,099	-0,489	-0,970	-1,511	-1,955	-2,470
	$3a/4$	+1,000	+0,527	+0,103	-0,276	-0,750	-1,362	-2,103	-2,883
	a	+1,614	+0,746	+0,168	-0,229	-0,668	-1,271	-2,108	-4,386
$z=\frac{3a}{2}$	$x=0$	-0,900	-0,928	-0,998	-1,072	-1,104	-1,072	-0,928	-0,900
	$a/4$	-0,178	-0,353	-0,616	-0,828	-1,072	-1,274	-1,384	-1,678
	$a/2$	+0,502	+0,164	-0,276	-0,587	-0,998	-1,373	-1,728	-2,498
	$3a/4$	+1,178	+0,640	+0,008	-0,389	-0,928	-1,509	-2,008	-3,322
	a	+1,896	+1,111	+0,250	-0,247	-0,900	-1,619	-2,246	-3,255
$z=2a$	$x=0$	-0,972	-0,982	-1,000	-1,018	-1,028	-1,018	-1	-0,972
	$a/4$	-0,232	-0,413	-0,614	-0,817	-1,018	-1,211	-1,386	-1,732
	$a/2$	+0,500	+0,135	-0,235	-0,616	0	-1,384	-1,765	-2,135
	$3a/4$	+1,232	+0,675	+0,123	-0,422	-0,982	-1,550	-2,123	-2,703
	a	+1,972	+1,215	+0,473	-0,249	-0,972	-1,715	-2,473	-4,028

Les contraintes doivent être multipliées par $\frac{P}{2a}$

Tableau IV. Contrainte t sous une charge normale
Position de la force (u)



Les contraintes
doivent être
multipliées par $q = \frac{Q}{2a}$

Tableau V
Contrainte n_x sous une charge tangentielle
Position de la force (u)

Position du point étudié	$-a$	$-3a/4$	$-a/2$	$-a/4$	0	$+a/4$	$+a/2$	$+3a/4$	$+a$	
$z=0$	$x=0$	$-\infty$	-5,656	-4	-5,656	$-\infty + \infty$	+5,656	+4	+5,656	$+\infty$
	$a/4$	$-\infty$	-2,318	-2,093	-2,397	-4,461	$-\infty + \infty$	+7,563	+9,338	$+\infty$
	$a/2$	$-\infty$	+0,020	-0,820	-0,966	-1,410	-3,310	$-\infty + \infty$	+13,676	$+\infty$
	$3a/4$	$-\infty$	+0,682	-0,143	-0,225	-0,314	-0,569	-1,799	$-\infty + \infty$	$+\infty$
	a	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$z=\frac{a}{6}$	$x=0$	0	-2,964	-3,096	-2,964	0	+2,964	+3,096	+2,964	0
	$a/4$	+0,867	-2,339	-1,846	-1,924	-1,912	+1,084	+4,214	+3,677	+0,867
	$a/2$	+1,767	-1,673	-0,856	-0,894	-1,030	-0,938	+2,240	+4,299	+1,767
	$3a/4$	+2,425	-0,833	-0,216	-0,234	-0,279	-0,322	-0,084	+2,087	+2,425
	a	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$z=\frac{a}{3}$	$x=0$	0	-0,872	-1,520	-0,872	0	+0,872	+1,520	+0,872	0
	$a/4$	+0,566	-0,801	-1,147	-1,009	-0,221	+0,631	+1,245	+0,823	+0,566
	$a/2$	+0,962	-0,588	-0,675	-0,574	-0,421	+0,314	+0,845	+0,272	+0,962
	$3a/4$	+0,608	-0,188	-0,246	-0,172	-0,144	-0,052	+0,402	-0,084	+0,608
	a	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$z=\frac{a}{2}$	$x=0$	0	-0,192	-0,444	-0,192	0	+0,192	+0,444	+0,192	0
	$a/4$	+0,290	-0,111	-0,467	-0,350	+0,102	+0,260	+0,169	+0,107	+0,290
	$a/2$	+0,377	+0,015	-0,304	-0,282	-0,060	+0,302	+0,140	+0,185	+0,377
	$3a/4$	+0,133	+0,067	-0,100	-0,102	-0,053	+0,064	+0,152	+0,159	+0,133
	a	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$z=\frac{2a}{3}$	$x=0$	0	+0,054	+0,216	+0,054	0	-0,054	-0,216	-0,054	0
	$a/4$	+0,117	+0,087	+0,026	+0,079	+0,119	+0,047	-0,244	-0,205	+0,117
	$a/2$	+0,020	+0,122	+0,037	-0,062	+0,152	+0,144	-0,179	-0,192	+0,020
	$3a/4$	+0,019	-0,023	+0,085	-0,026	0	+0,158	-0,077	-0,099	+0,019
	a	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$z=a$	$x=0$	0	+0,140	+0,196	+0,144	0	-0,144	-0,196	-0,140	0
	$a/4$	-0,006	+0,108	+0,139	+0,132	+0,064	-0,082	-0,177	-0,162	-0,006
	$a/2$	-0,020	+0,067	+0,077	+0,077	+0,059	-0,011	-0,119	-0,137	-0,020
	$3a/4$	-0,018	+0,019	+0,026	+0,024	+0,020	+0,006	-0,030	-0,055	-0,018
	a	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$z=\frac{3a}{2}$	$x=0$	0	+0,066	+0,096	+0,066	0	-0,066	-0,096	-0,066	0
	$a/4$	-0,014	+0,045	+0,083	+0,069	+0,016	-0,043	-0,079	-0,071	-0,014
	$a/2$	-0,020	+0,020	+0,053	+0,046	+0,020	-0,016	-0,043	-0,050	-0,020
	$3a/4$	-0,009	+0,001	+0,020	+0,017	+0,007	+0,001	-0,010	-0,019	-0,009
	a	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$z=2a$	$x=0$	0	+0,026	+0,032	+0,020	0	-0,020	-0,032	-0,026	0
	$a/4$	-0,029	+0,019	+0,026	+0,024	-0,002	-0,012	-0,026	-0,037	-0,029
	$a/2$	-0,047	+0,011	+0,016	+0,017	-0,002	-0,003	-0,016	-0,027	-0,047
	$3a/4$	-0,037	-0,004	+0,006	+0,007	-0,006	+0,003	-0,006	-0,012	-0,037
	a	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Les contraintes
doivent être
multipliées par $\frac{Q}{2a}$

Tableau VI. Contrainte n_z sous une charge tangentielle
Position de la force (u)

Position du point étudié	$-a$	$-3a/4$	$-a/2$	$-a/4$	0	$+a/4$	$+a/2$	$+3a/4$	$+a$
$z=0$	$x=0$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$a/4$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$a/2$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$3a/4$	0	0	0	0	0	0	0	0
	a	0	0	0	0	0	0	0	0
$z = \frac{a}{b}$	$x=0$	0	-0,058	-0,220	-1,112	0	+1,112	+0,220	+0,058
	$a/4$	-0,456	-0,158	-0,116	-0,252	-1,148	-0,036	+1,052	+0,062
	$a/2$	-0,810	-0,260	-0,118	-0,132	-0,282	-1,186	-0,118	+0,792
	$3a/4$	-0,454	-0,256	-0,118	-0,110	-0,152	-0,270	-1,286	-0,476
	a	-2,060	+0,474	-0,018	-0,088	-0,126	-0,204	-0,458	-1,746
$z = \frac{a}{3}$	$x=0$	0	-0,172	-0,490	-1,160	0	+1,160	+0,490	+0,172
	$a/4$	-0,348	-0,348	-0,366	-0,644	-1,280	-0,134	+0,958	+0,142
	$a/2$	-0,550	-0,526	-0,390	-0,444	-0,752	-1,424	-0,390	+0,454
	$3a/4$	-0,408	-0,556	-0,412	-0,404	-0,530	-0,914	-1,736	-1,046
	a	-2,082	-0,244	-0,310	-0,368	-0,482	-0,716	-1,270	-2,548
$z = \frac{a}{2}$	$x=0$	0	-0,246	-0,574	-0,788	0	+0,788	+0,574	+0,246
	$a/4$	-0,328	-0,476	-0,588	-0,842	-1,032	-0,266	+0,444	+0,098
	$a/2$	-0,574	-0,708	-0,686	-0,784	-1,070	-1,324	-0,686	-0,168
	$3a/4$	-0,936	-0,856	-0,782	-0,804	-0,986	-1,380	-1,814	-1,430
	a	-2,298	-1,124	-0,798	-0,824	-0,986	-1,320	-1,946	-2,696
$z = \frac{2a}{3}$	$x=0$	0	-0,254	-0,592	-0,506	0	+0,506	+0,592	+0,254
	$a/4$	-0,386	-0,588	-0,736	-0,908	-0,900	-0,414	+0,024	+0,004
	$a/2$	-0,688	-0,924	-0,966	-1,084	-1,272	-1,332	-0,966	-0,672
	$3a/4$	-1,414	-1,174	-1,194	-1,242	-1,430	-1,732	-1,954	-1,766
	a	-2,560	-1,850	-1,342	-1,412	-1,568	-1,904	-2,526	-2,862
$z = a$	$x=0$	0	-0,170	-0,270	-0,212	0	+0,212	+0,270	+0,170
	$a/4$	-0,650	-0,800	-0,916	-0,972	-0,906	-0,704	-0,530	-0,530
	$a/2$	-1,370	-1,428	-1,494	-1,574	-1,652	-1,620	-1,494	-1,382
	$3a/4$	-2,244	-2,128	-2,070	-2,110	-2,250	-2,380	-2,456	-2,398
	a	-3,280	-2,980	-2,720	-2,640	-2,770	-2,982	-3,260	-3,412
$z = \frac{3a}{2}$	$x=0$	0	-0,058	-0,084	-0,050	0	+0,050	+0,084	+0,058
	$a/4$	-1,088	-1,118	-1,182	-1,194	-1,160	-1,110	-1,064	-1,034
	$a/2$	-2,210	-2,180	-2,250	-2,280	-2,300	-2,280	-2,250	-2,178
	$3a/4$	-3,380	-3,272	-3,316	-3,340	-3,380	-3,420	-3,434	-3,356
	a	-4,590	-4,416	-4,416	-4,400	-4,440	-4,500	-4,584	-4,536
$z = 2a$	$x=0$	0	-0,016	-0,024	-0,012	0	+0,012	+0,024	+0,016
	$a/4$	-1,488	-1,504	-1,516	-1,500	-1,500	-1,480	-1,484	-1,480
	$a/2$	-2,986	-2,994	-3,000	-2,980	-3,000	-2,980	-3,000	-2,994
	$3a/4$	-4,498	-4,490	-4,484	-4,260	-4,500	-4,480	-4,516	-4,514
	a	-6,020	-6,004	-5,976	-5,920	-6,000	-5,920	-6,024	-6,036

Les contraintes doivent être multipliées par $\frac{Q}{2a}$

Tableau VII. Contrainte t sous une charge tangentielle
Position de la force (u)

doivent donc passer brusquement d'une valeur positive à une valeur négative en franchissant la verticale 0. Cela permettrait de préciser la forme des lignes d'influence de t ⁷⁾.

En pratique on n'aura jamais de forces concentrées, mais des forces étalées, avec une densité $\bar{\omega}$, sur une certaine largeur. La contrainte n_x sur le plan $z=0$ se calculera alors par la deuxième valeur (soit $+0,523 p$ dans le cas présent) mais on doit ajouter *dans la zone chargée*, un terme complémentaire égal à $-\bar{\omega}$ (ce qui donne lieu dans le cas de la force concentrée à la discontinuité $+0,523 p - \infty + 0,523 p$ que nous avons signalée ci-dessus).

Applications

Les applications sont très nombreuses puisque les tableaux permettent de déterminer les contraintes dans le prisme sous un système de forces quelconques; on peut à partir de ces résultats tracer les isostatiques et par conséquent rechercher, dans le cas du béton, les formes les plus favorables d'armatures et leur importance. Nous nous contenterons de donner quelques exemples.

Exemple I

Contraintes sous une force normale concentrée P à l'abcisse $\frac{a}{2}$ (Fig. 19).

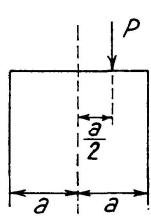


Fig. 19

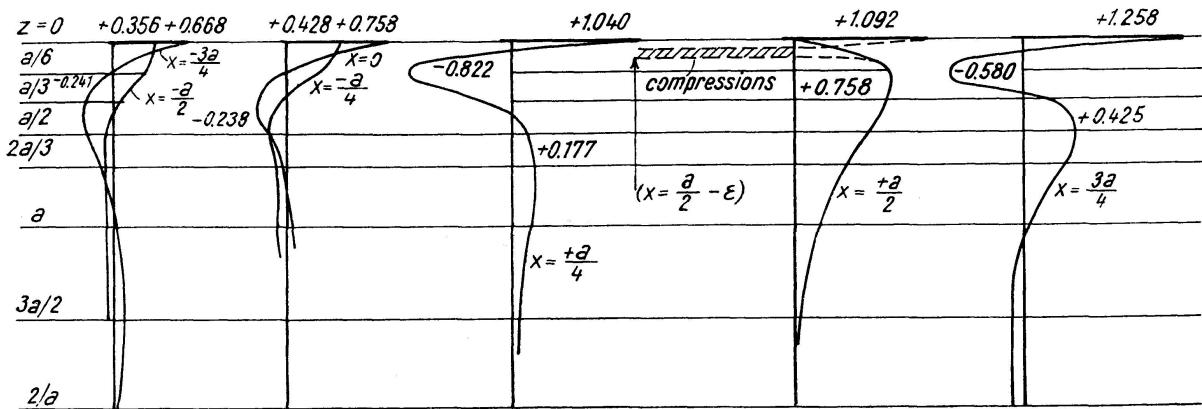
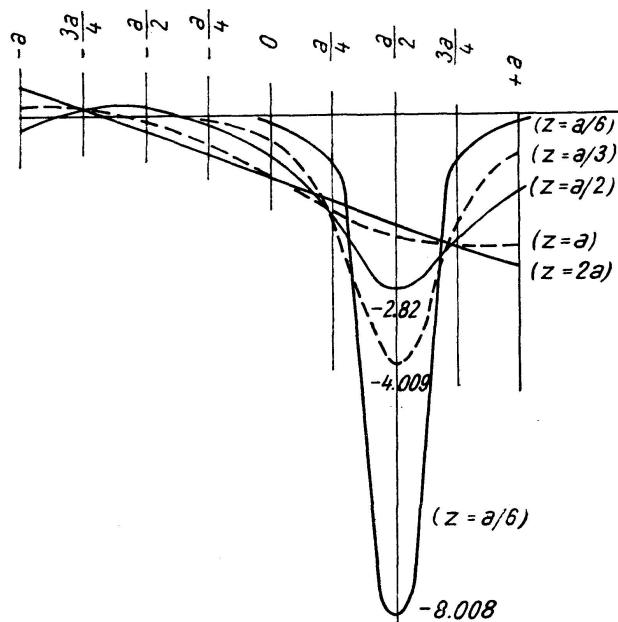
Les tableaux donnent directement les contraintes n_x n_z t . Nous nous bornerons à représenter (figures 20 et 21) les diagrammes des contraintes n_x sur les différents plans verticaux et les diagrammes des contraintes n_z sur les différents plans horizontaux que les tableaux permettent d'explorer. On voit que la contrainte n_z tend rapidement vers la loi linéaire.

Des valeurs de n_x n_z et t , on déduit les inclinaisons des isostatiques en tout point, ce qui permet de tracer avec une précision suffisante le réseau formé par ces lignes. Nous l'avons représenté sur la figure 22a. On peut également tracer les lignes d'égale valeur des tensions principales, que nous nommerons les isobares principales (fig. 22b). Etant donné que nous cherchons principalement à déterminer l'importance des frettages transversaux en admettant que l'on résiste d'autre part aux contraintes de traction longitudinale par des armatures disposées dans ce sens longitudinal, les tensions principales qui nous intéressent le plus sont les

⁷⁾ D'après la théorie approchée faite en (I 1^o et 2^o) on trouverait que la contrainte de cisaillement t sur le plan $x=\epsilon$ aurait pour expression

$$p \frac{\zeta \operatorname{sh} \zeta \epsilon}{8} \left(\frac{1}{\operatorname{sh}^4 \frac{\zeta}{2}} - \frac{1}{2 \operatorname{ch}^4 \frac{\zeta}{2}} \right)$$

Elle deviendrait infinie pour $\zeta=0$ et très petite partout ailleurs. On aurait donc encore une force de cisaillement concentrée au voisinage de la base, égale à $\frac{P}{2}$.

Fig. 20. Contraintes n_x sur les plans verticaux (à multiplier par p)Fig. 21. Contraintes n_z sur les plans horizontaux (à multiplier par p)

tensions principales de traction qui se rapprochent le plus de l'horizontale. Nous avons tracé ces isobares sur la figure 22 b.

En comparant les figures 22a et 22b on voit que, lorsque les tensions principales transversales atteignent leurs valeurs les plus grandes, leurs directions sont très voisines de l'horizontale. Ceci est presque général et cette constatation permet de simplifier beaucoup l'étude des contraintes transversales, puisqu'il suffira pratiquement d'étudier les contraintes n_x sans avoir à tracer les isostatiques.

Ayant d'ailleurs trouvé les maximum de n_x , on pourra, si on le désire, déterminer aux points où ils se produisent, mais en ces seuls points, la direction exacte des isostatiques et la valeur exacte des tensions principales. On trouvera en général que les directions principales ont en ces points une inclinaison

faible sur l'horizontale, et que la valeur de la tension principale est très peu différente de la valeur de n_x qu'on avait calculée.

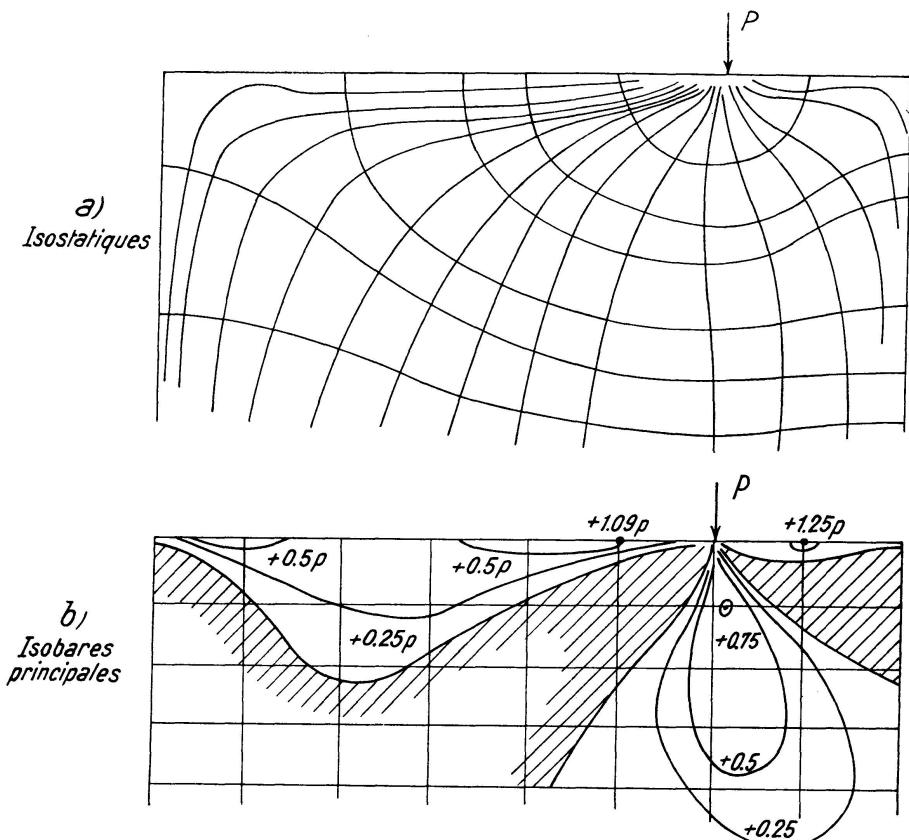


Fig. 22. Isostatiques et isobares pour une force à l'abscisse

Exemple II

Contraintes transversales sous l'action d'un effort normal axial étalé sur une largeur $2a'$

En vertu de la remarque précédente, nous nous sommes contentés de calculer par les tableaux les valeurs de n_x et avons tracé les lignes d'égales valeurs de n_x que nous appellerons les isobares n_x (Fig. 23).

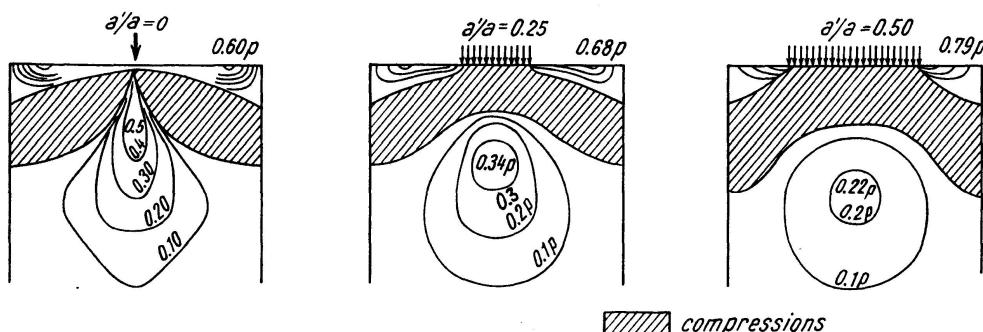


Fig. 23. Isobares n_x pour différents cas d'étalement des forces

Cette figure met en évidence l'existence de tractions en surface, vers les angles; les contraintes correspondantes sont élevées, mais les résultantes sont faibles, car la zône en traction est de faible épaisseur.

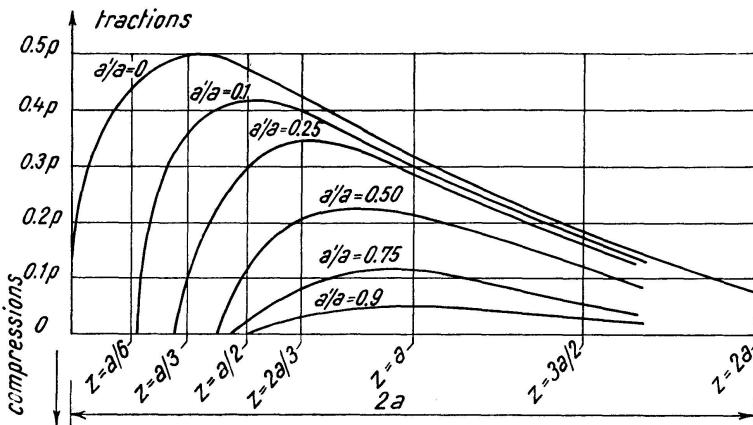


Fig. 24. Valeurs des contraintes d'éclatement sur l'axe dans le cas de forces normales centrées, pour différents étalements $\frac{a'}{a}$

On a d'autre part, en profondeur, une autre zône en traction que nous appellerons la zône d'éclatement. Cette zône d'éclatement est séparée des zônes de surface par une zône en compression dans le sens transversal. On devra donc disposer des frettages en surface (frettages à fleur) de faible importance, et des frettages dans la zône d'éclatement au voisinage du maximum de la contrainte d'éclatement.

Etant donnée la grande importance pratique de cette étude, nous avons représenté sur la figure 24 la variation de la contrainte d'éclatement sur l'axe pour différentes valeurs de l'étalement $\frac{a'}{a}$. Ces valeurs ont été calculées très exactement à l'aide des tableaux I.

Exemple III

Valeurs des contraintes de traction, sur l'axe, dans le cas de forces tangentielles symétriques (écartèlement)

Ce problème est celui qui est schématisé sur la figure 25. Si les forces sont appliquées chacune sur une largeur très petite (forces ponctuelles), les tableaux donnent directement les valeurs des contraintes de traction sur l'axe (tableau V).

La figure 26 résume les résultats, n_x étant exprimé en fonction de $q = \frac{Q}{2a}$, Q étant la valeur de chacune des forces tangentielles.

Le tableau V ayant été calculé comme on l'a dit, par la méthode approchée, il ne faut considérer les valeurs de la figure 26 que comme une indication.

On pourrait sans grande erreur remplacer la loi de traction de la figure 26 par une loi triangulaire.

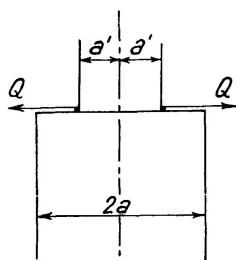
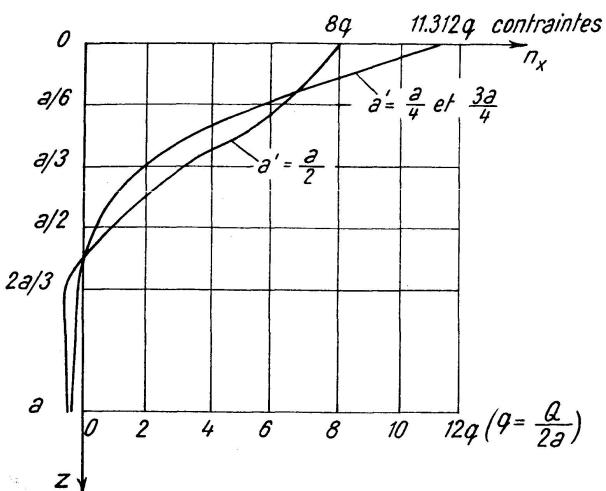


Fig. 25

Fig. 26. Contraintes d'écartèlement sur l'axe du prisme en fonction de z pour différentes valeurs de l'écartement $2a'$ des points d'application



La valeur de n_x , déduite de la théorie approchée est pour $z=0$ et $x=0$ (c'est-à-dire sur l'axe et en surface) égale à

$$n_x(0,0) = \frac{8}{\sin \pi \frac{a'}{a}} \frac{Q}{2a}$$

La hauteur z de la zone en traction, en admettant la loi triangulaire, est donc égale à

$$z = \frac{a}{2} \sin \pi \frac{a'}{a}$$

ce qui donne immédiatement la répartition approximative dans le cas de forces ponctuelles. Dans le cas où les forces sont réparties sur une certaine largeur, on pourra décomposer la force en plusieurs forces ponctuelles et appliquer la règle précédente.

Il n'y a pas lieu d'insister davantage sur les applications, chaque cas particulier pouvant être étudié par les tableaux quelles que soient la distribution et l'inclinaison des forces s'exerçant sur la base.

IIème Partie. Cas du prisme à section rectangulaire de dimensions finies

Les axes sont disposés comme sur la figure 27, l'origine étant au centre de la base; les côtés du rectangle de base sont $2a$ et $2b$.

L'état élastique en chaque point est défini par les 3 contraintes normales et les 3 contraintes tangentielles s'exerçant sur trois facettes parallèles aux plans de coordonnées

facette perpendiculaire à	contraintes
$0x$	$n_1 \quad t_2 \quad t_3$
$0y$	$t_1 \quad n_2 \quad t_3$
$0z$	$t_1 \quad t_2 \quad n_3$

Les contraintes normales sont positives si elles sont des tractions; les contraintes tangentialles sont positives lorsque, sur une section horizontale limitant la partie supérieure du prisme, ou sur une section transversale limitant la partie gauche du prisme, elles sont dirigées suivant le sens positif des axes (toutes les contraintes représentées sur la figure 27 sont positives).

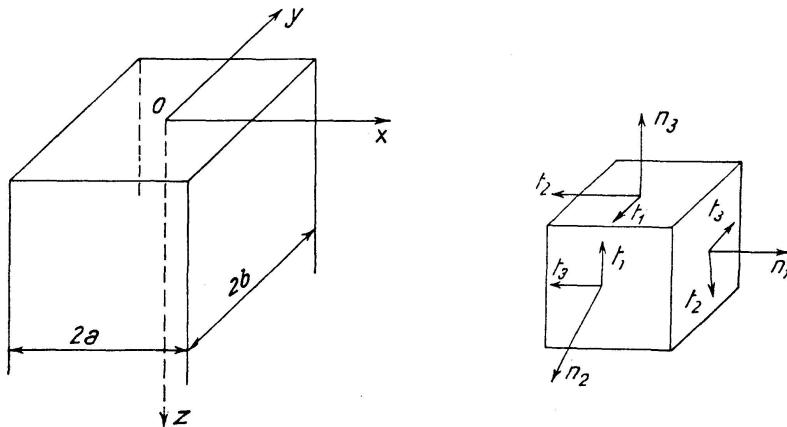


Fig. 27

Nous chercherons les contraintes par une théorie approchée tout à fait comparable à celle que nous avons appliquée dans le problème d'élasticité plane (I^{ère} Partie). La comparaison faite dans cette I^{ère} Partie pour les contraintes n_x nous permettra une évaluation raisonnable de l'erreur commise pour les contraintes n_1 et n_2 qui nous intéressent le plus.

Nous étudierons ci-dessous le cas de forces appliquées normales, et paires en x et y , c'est-à-dire symétriques par rapport aux axes $0x$ et $0y$. La méthode approchée peut être également appliquée au cas de forces paires en x et impaires en y (c'est-à-dire symétriques par rapport à l'un des axes et antisymétriques par rapport à l'autre); elle peut être également appliquée à des forces tangentialles paires ou impaires; et par conséquent, par superposition, on peut obtenir l'état élastique approché pour tout cas de forces.

Nous nous contenterons de développer les calculs dans le premier cas (forces normales symétriques) qui est le plus important. L'étude des autres cas a été abordée dans le mémoire déposé à la Bibliothèque de l'Ecole des Ponts et Chaussées.

Cas de charges normales symétriques par rapport aux deux axes principaux de la base

La fonction de charge peut être développée dans le plan de la base en une série double trigonométrique, ne comportant que des cosinus.

$$\bar{\omega} = \sum \sum A_m^n \cos \frac{m \pi x}{a} \cos \frac{n \pi y}{b}$$

m et n pouvant prendre des valeurs quelconques y compris zéro. On peut obtenir terme à terme, comme dans le cas du prisme indéfini dans une direction, un système de contraintes I, satisfaisant aux équations de l'élasticité, mais non à toutes les conditions aux limites.

Ces conditions aux limites sont:

Pour	Contraintes		
$x = \pm a$	0	0	0
$y = \pm b$	0	0	0
$z = 0$	0	0	$n_3 = \bar{\omega}$

1. Considérons le terme partiel de la série de charge

$$\bar{\omega}_m^n = A_m^n \cos \frac{m \pi x}{a} \cos \frac{n \pi y}{b}$$

et le système suivant, (I), de contraintes, où N_1 N_2 N_3 T_1 T_2 T_3 sont des fonctions de z seul.

$$I \quad \left\{ \begin{array}{l} n_1 = N_1 \cos \frac{m \pi x}{a} \cos \frac{n \pi y}{b} \\ n_2 = N_2 \cos \frac{m \pi x}{a} \cos \frac{n \pi y}{b} \\ n_3 = N_3 \cos \frac{m \pi x}{a} \cos \frac{n \pi y}{b} \\ t_1 = T_1 \cos \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} \\ t_2 = T_2 \sin \frac{m \pi x}{a} \cos \frac{n \pi y}{b} \\ t_3 = T_3 \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} \end{array} \right.$$

Ce système ne peut évidemment satisfaire aux conditions aux limites $n_1 = 0$ pour $x = \pm a$ et $n_2 = 0$ pour $y = \pm b$. On peut déterminer les fonctions N et T pourqu'il satisfasse à toutes les autres conditions aux limites et aux équations de l'élasticité.

Les 6 fonctions n et t doivent satisfaire aux 6 conditions de compatibilité, soit, si Δ représente l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, η le coefficient de Poisson, et si l'on pose d'autre part $\theta = n_1 + n_2 + n_3$:

$$(1 + \eta) \Delta n_1 + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0 \quad \text{et deux équations analogues}$$

$$(1 + \eta) \Delta t_1 + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial z} = 0 \quad \text{et deux équations analogues.}$$

Si on désigne par Θ la somme $N_1 + N_2 + N_3$ on a

$$\theta = \Theta \cos \frac{m \pi x}{a} \cos \frac{n \pi y}{b}$$

et $\Delta n_1 = \left[N_1'' - \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) N_1 \right] \cos \frac{m \pi x}{a} \cos \frac{n \pi y}{b}$

(N_1'' étant suivant la notation usuelle la dérivée seconde de N_1), et des formules de même forme pour Δn_2 Δn_3 Δt_1 Δt_2 Δt_3 chaque fonction Δn ou Δt ayant en facteur le produit des deux fonctions trigonométriques qui figure dans la fonction n ou t dont elle dérive.

Nous poserons

$$\frac{1}{l_{mn}^2} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)$$

Les équations de compatibilité s'écrivent, en supprimant l'indice de l_{mn} pour simplifier:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 + \eta) \left(N_1'' - \frac{N_1}{l^2} \right) = \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \Theta \\ (1 + \eta) \left(N_2'' - \frac{N_2}{l^2} \right) = \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \Theta \\ (1 + \eta) \left(N_3'' - \frac{N_3}{l^2} \right) = -\Theta'' \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 + \eta) \left(T_1'' - \frac{T_1}{l^2} \right) = \frac{n \pi}{b} \Theta' \\ (1 + \eta) \left(T_2'' - \frac{T_2}{l^2} \right) = \frac{m \pi}{a} \Theta' \\ (1 + \eta) \left(T_3'' - \frac{T_3}{l^2} \right) = -\frac{m n \pi^2}{a b} \Theta \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (4) \\ (5) \\ (6) \end{array}$$

En ajoutant membre à membre les trois premières équations, on obtient:

$$(1 + \eta) \left(\Theta'' - \frac{\Theta}{l^2} \right) = - \left(\Theta'' - \frac{\Theta}{l^2} \right)$$

Θ doit donc être une solution de l'équation différentielle:

$$\Theta'' - \frac{\Theta}{l^2} = 0 \quad (7)$$

B' et C' étant deux constantes, cette solution s'écrit:

$$\Theta = B' e^{-\frac{z}{l}} + C' e^{\frac{z}{l}}$$

C' est évidemment nul, car Θ ne peut devenir infini avec z .

On a donc, en changeant de constante et en posant $B' = B(1 + \eta)$ ce qui simplifie la suite des calculs:

$$\Theta = B(1 + \eta) e^{-\frac{z}{l}}$$

Les équations (1) à (6) deviennent alors:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1'' - \frac{N_1}{l^2} = \frac{m^2 \pi^2}{a^2} B e^{-\frac{z}{l}} \quad (1') \\ N_2'' - \frac{N_2}{l^2} = \frac{n^2 \pi^2}{b^2} B e^{-\frac{z}{l}} \quad (2') \\ N_3'' - \frac{N_3}{l^2} = -\frac{B}{l^2} e^{-\frac{z}{l}} \quad (3') \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} T_1'' - \frac{T_1}{l^2} = -\frac{n \pi}{b} \frac{B}{l} e^{-\frac{z}{l}} \quad (4') \\ T_2'' - \frac{T_2}{l^2} = -\frac{m \pi}{a} \frac{B}{l} e^{-\frac{z}{l}} \quad (5') \\ T_3'' - \frac{T_3}{l^2} = -\frac{m n \pi^2}{a b} B e^{-\frac{z}{l}} \quad (6') \end{array} \right.$$

Toutes ces équations sont de la forme, U désignant une fonction quelconque et K un coefficient constant:

$$U'' - \frac{U}{l^2} = K e^{-\frac{z}{l}}$$

dont la solution — en tenant compte de ce que les exponentielles à exposants positifs qui s'introduisent dans la solution complète doivent avoir des coefficients nuls, car autrement U deviendrait infini avec z — a pour expression, D étant une constante:

$$U = \left(D - \frac{K l}{2} z \right) e^{-\frac{z}{l}}$$

En appliquant cela aux équations 1' à 6' on trouve, $E_1 E_2 E_3 F_1 F_2 F_3$ étant six constantes:

$$\begin{array}{ll} N_1 = \left(E_1 - \frac{B}{2} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} l z \right) e^{-\frac{z}{l}} & T_1 = \left(F_1 + \frac{B}{2} \frac{n \pi}{b} z \right) e^{-\frac{z}{l}} \\ N_2 = \left(E_2 - \frac{B}{2} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} l z \right) e^{-\frac{z}{l}} & T_2 = \left(F_2 + \frac{B}{2} \frac{m \pi}{a} z \right) e^{-\frac{z}{l}} \\ N_3 = \left(E_3 + \frac{B}{2} \frac{z}{l} \right) e^{-\frac{z}{l}} & T_3 = \left(F_3 + \frac{B}{2} \frac{m n \pi^2}{a b} z \right) e^{-\frac{z}{l}} \end{array}$$

Les conditions aux limites sur la base donnent

$$E_3 = A_n^m \quad F_1 = 0 \quad F_2 = 0$$

En formant la somme $N_1 + N_2 + N_3 = \Theta$ on trouve $\Theta = (E_1 + E_2 + E_3) e^{-\frac{z}{l}}$, le terme en $z e^{-\frac{z}{l}}$ étant identiquement nul.

Comme $\Theta = B(1 + \eta) e^{-\frac{z}{l}}$ on a donc, en tenant compte de $E_3 = A_n^m$,

$$E_1 + E_2 + A_n^m = B(1 + \eta) \quad (8)$$

Les fonctions N et T ont donc les expressions suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 = \left(E_1 - \frac{B}{2} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} l z \right) e^{-\frac{z}{l}} \\ N_2 = \left(E_2 - \frac{B}{2} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} l z \right) e^{-\frac{z}{l}} \\ N_3 = \left(A_m^n + \frac{B}{2} \frac{z}{l} \right) e^{-\frac{z}{l}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} T_1 = \frac{B}{2} \frac{n \pi}{b} z e^{-\frac{z}{l}} \\ T_2 = \frac{B}{2} \frac{m \pi}{a} z e^{-\frac{z}{l}} \\ T_3 = \left(F_3 + \frac{B}{2} \frac{m n \pi^2}{a b} l z \right) e^{-\frac{z}{l}} \end{array} \right.$$

dans lesquelles entrent les quatre constantes E_1 E_2 B F_3 à déterminer.

Entre ces quatre constantes on a la relation (8). Il nous faut trois relations supplémentaires. Elles nous sont fournies par les équations d'équilibre, qui sont:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial n_1}{\partial x} + \frac{\partial t_3}{\partial y} + \frac{\partial t_2}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial t_3}{\partial x} + \frac{\partial n_2}{\partial y} + \frac{\partial t_1}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial t_2}{\partial x} + \frac{\partial t_1}{\partial y} + \frac{\partial n_3}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

lesquelles s'écrivent, en dérivant les équations I:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{m \pi}{a} N_1 + \frac{n \pi}{b} T_3 + T_2' = 0 \\ \frac{m \pi}{a} T_3 - \frac{n \pi}{b} N_2 + T_1' = 0 \\ \frac{m \pi}{a} T_2 + \frac{n \pi}{b} T_1 + N_3' = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (9) \\ (10) \\ (11) \end{array}$$

L'équation (9) donne, en supprimant le facteur commun $e^{-\frac{z}{l}}$ et en remarquant que le terme en $z e^{-\frac{z}{l}}$ est nul:

$$-\frac{m \pi}{a} E_1 + \frac{n \pi}{b} F_3 + \frac{B}{2} \frac{m \pi}{a} = 0 \quad (9')$$

on a de même: $\frac{m \pi}{a} F_3 - \frac{n \pi}{b} E_2 + \frac{B}{2} \frac{n \pi}{b} = 0 \quad (10')$

$$-A_m^n + B = 0 \quad (11')$$

Ces équations, jointes à l'équation (8) donnent:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 = A_m^n l^2 \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + 2 \eta \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) \\ E_2 = A_m^n l^2 \left(\frac{n^2 \pi^2}{b^2} + 2 \eta \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right) \\ F_3 = -A_m^n l^2 (1 - 2 \eta) \frac{m n \pi^2}{a b} \end{array} \right.$$

et les fonctions N et T du système I ont pour expressions:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 = -A_m^n l^2 \left[\frac{m^2 \pi^2}{a^2} \left(\frac{z}{l} - 1 \right) e^{-\frac{z}{l}} - 2\eta \frac{n^2 \pi^2}{b^2} e^{-\frac{z}{l}} \right] \\ N_2 = -A_m^n l^2 \left[\frac{n^2 \pi^2}{b^2} \left(\frac{z}{l} - 1 \right) e^{-\frac{z}{l}} - 2\eta \frac{m^2 \pi^2}{a^2} e^{-\frac{z}{l}} \right] \\ N_3 = A_m^n \left(\frac{z}{l} + 1 \right) e^{-\frac{z}{l}} \\ \\ T_1 = A_m^n \frac{n\pi}{b} z e^{-\frac{z}{l}} \\ T_2 = A_m^n \frac{m\pi}{a} z e^{-\frac{z}{l}} \\ T_3 = A_m^n l^2 \frac{m n \pi^2}{a b} \left[\left(\frac{z}{l} - 1 \right) e^{-\frac{z}{l}} + 2\eta e^{-\frac{z}{l}} \right] \end{array} \right.$$

Le système I de contraintes s'obtiendra en multipliant les fonctions N et T par les fonctions trigonométriques $\cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}$ etc. qui figurent dans les expressions du système I.

2. Le système I n'est pas la solution du problème puisque les conditions aux limites sur les faces $x = \pm a$ et $y = \pm b$ ne sont pas satisfaites; il existe en effet sur ces faces les contraintes parasites suivantes:

$$\text{sur les faces } x = \pm a, \quad n_1 = N_1 \cos m\pi \cos \frac{n\pi y}{b} = -(-1)^{m+1} N_1 \cos \frac{n\pi y}{b}$$

$$\text{sur les faces } y = \pm b, \quad n_2 = N_2 \cos \frac{m\pi x}{a} \cos n\pi = -(-1)^{m+1} N_2 \cos \frac{m\pi x}{a}$$

Exerçons sur ces faces des réactions égales et de sens contraire aux contraintes parasites, soit:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 = (-1)^{m+1} N_1 \cos \frac{n\pi y}{b} \\ R_2 = (-1)^{m+1} N_2 \cos \frac{m\pi x}{a} \end{array} \right.$$

et admettons, comme nous l'avons fait dans la théorie approchée dans le cas du problème plan, que les contraintes correspondantes sont les tractions (ou compressions) pures:

$$\text{II } \left\{ \begin{array}{ll} n_1 = R_1 & t_1 = 0 \\ n_2 = R_2 & t_2 = 0 \\ n_3 = 0 & t_3 = 0 \end{array} \right.$$

Les contraintes définitives de la solution approchée que nous cherchons ici s'obtiendront par addition des systèmes (I) et (II) et on obtient finalement le système de contraintes suivant:

$$\left\{
 \begin{aligned}
 n_1 &= -\sum \sum A_m^n l^2 \left[\frac{m^2 \pi^2}{a^2} \left(\frac{z}{l} - 1 \right) e^{-\frac{z}{l}} \right. \\
 &\quad \left. - 2 \eta \frac{n^2 \pi^2}{b^2} e^{-\frac{z}{l}} \right] \left[\cos \frac{m \pi x}{a} + (-1)^{m+1} \right] \cos \frac{n \pi y}{b} \\
 n_2 &= -\sum \sum A_m^n l^2 \left[\frac{n^2 \pi^2}{b^2} \left(\frac{z}{l} - 1 \right) e^{-\frac{z}{l}} \right. \\
 &\quad \left. - 2 \eta \frac{m^2 \pi^2}{a^2} e^{-\frac{z}{l}} \right] \left[\cos \frac{n \pi y}{b} + (-1)^{m+1} \right] \cos \frac{m \pi x}{a} \\
 n_3 &= \sum \sum A_m^n \left(\frac{z}{l} + 1 \right) e^{-\frac{z}{l}} \cos \frac{m \pi x}{a} \cos \frac{n \pi y}{b} \\
 t_1 &= \sum \sum A_m^n \frac{n \pi}{b} z e^{-\frac{z}{l}} \cos \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} \\
 t_2 &= \sum \sum A_m^n \frac{m \pi}{a} z e^{-\frac{z}{l}} \sin \frac{m \pi x}{a} \cos \frac{n \pi y}{b} \\
 t_3 &= \sum \sum A_m^n l^2 \frac{m n \pi^2}{a b} \left[\left(\frac{z}{l} - 1 \right) e^{-\frac{z}{l}} + 2 \eta e^{-\frac{z}{l}} \right] \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} \\
 \text{avec } \frac{1}{l^2} &= \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)
 \end{aligned}
 \right.$$

Ces expressions sont susceptibles d'une interprétation assez simple que nous préciserons en nous bornant à examiner la contrainte n_1 (les conclusions sont valables pour n_2 en permutant a et b , et x et y).

La série de charge $\sum \sum A_m^n \cos \frac{m \pi x}{a} \cos \frac{n \pi y}{b}$

peut être décomposée en 4 termes:

— un terme constant correspondant aux valeurs $m=0$ et $n=0$, A_0^0 : il est égal à la compression uniforme p créée par la résultante des forces à une profondeur suffisante.

Deux séries simples $\sum_1^{\infty} A_m^0 \cos \frac{m \pi x}{a}$ et $\sum_1^{\infty} A_0^n \cos \frac{n \pi y}{b}$ correspondant aux valeurs 0 pour n et pour m .

Une série double $\sum_1^{\infty} \sum_1^{\infty} A_m^n \cos \frac{m \pi x}{a} \cos \frac{n \pi y}{b}$ correspondant aux valeurs de m et n simultanément différentes de zéro.

Nous supposerons pour simplifier que le coefficient de Poisson, η , est nul.

Considérons la projection du prisme sur le plan xOz et la projection des forces s'exerçant sur la base. En chaque point, cette résultante de projection a une intensité $P(x)$ par unité de longueur, et on a $P(x) dx = \int_{-b}^{+b} \bar{\omega} dy dx$.

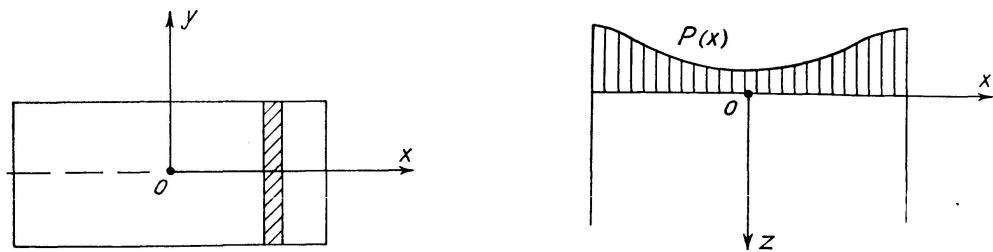


Fig. 28

Dans l'intégration, les termes contenant $\cos \frac{n\pi y}{b}$ disparaissent, et il reste:

$$P(x) = 2b \left[A_0^0 + \sum_1^0 A_m^0 \cos \frac{m\pi x}{a} \right]$$

A_0^0 et A_m^0 sont donc les coefficients du développement en série de Fourier de la charge $\frac{P(x)}{2b}$, c'est-à-dire de la charge qu'on aurait sur la base d'un prisme indéfini (dans la direction $0y$) si en chaque abscisse x la charge était uniformément étalée et égale à la valeur moyenne des charges réelles. Nous appellerons ce prisme le prisme projeté.

On peut d'autre part écrire n_1 en décomposant la série n_1 en ses 4 termes; mais deux de ces termes sont nuls, ce sont ceux correspondant à A_0^0 et à $\sum A_0^n \cos \frac{n\pi y}{b}$; et on a:

$$n_1 = - \sum A_m^0 \left(\frac{m\pi z}{a} - 1 \right) e^{-\frac{m\pi z}{a}} \left[\cos \frac{m\pi x}{a} + (-1)^{m+1} \right] - \sum_1^{\infty} \sum_1^{\infty} A_m^n l^2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \left(\frac{z}{l} - 1 \right) e^{-\frac{z}{l}} \left[\cos \frac{m\pi x}{a} + (-1)^{m+1} \right] \cos \frac{n\pi y}{b}$$

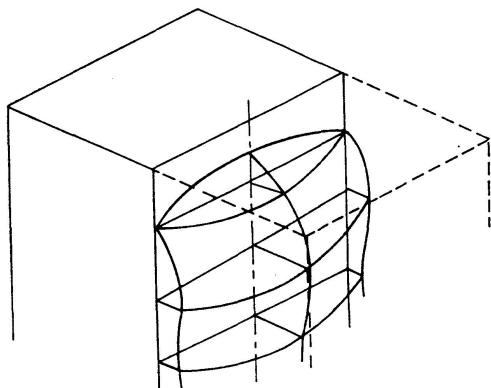


Fig. 29

Le premier terme est la contrainte n_1 qu'on aurait dans le prisme projeté. Le deuxième terme tient compte de la répartition transversale réelle des charges. Sa valeur moyenne est nulle.

On voit donc que, en étudiant le prisme en projection, soumis à la projection des forces supposées étalées uniformément dans le sens transversal (ce que nous savons faire par les théories données dans le cas du prisme indéfini suivant $0y$) on obtient la contrainte n_1 moyenne dans

l'hypothèse d'une répartition transversale uniforme en toute abscisse x , et que la série double permet d'étudier la répartition transversale réelle des contraintes.

Autrement dit encore, la contrainte n_1 qui s'exerce sur un plan transversal (fig. 29) est une fonction des coordonnées y et z dans ce plan. Cette fonction peut être représentée par une certaine surface. Le premier terme de n_1 est la surface moyenne, qui correspond à l'étalement uniforme; le deuxième terme donne les différences en plus et en moins par rapport à cette surface moyenne.

*Expression de la contrainte n_1 s'exerçant sur un plan de symétrie
($y 0 z$ par exemple)*

Dans ce cas $x = 0$ et l'on a, m prenant uniquement des valeurs impaires et n des valeurs quelconques

$$n_1 = -2 \sum A_m^0 \left(\frac{m\pi z}{a} - 1 \right) e^{-\frac{m\pi z}{a}} - 2 \sum_{1}^{\infty} \sum_{1}^{\infty} A_m^n l^2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \left(\frac{z}{l} - 1 \right) e^{-\frac{z}{l}} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (12)$$

Conformément à ce qui a été dit ci-dessus, le premier terme, fonction uniquement de z , est la contrainte qu'on aurait au niveau z si la charge, conservant sa loi de répartition longitudinale (c'est-à-dire en projection sur $y 0 z$), était d'autre part répartie uniformément sur la base sur toute parallèle à $0 y$; la valeur moyenne de n_1 sur toute horizontale du plan $y 0 z$ est d'ailleurs égale à ce premier terme, car le second terme a une valeur moyenne nulle. Ce second terme, fonction de y et z , donne, sur chaque horizontale, l'écart en plus ou en moins de la contrainte avec sa valeur moyenne.

L'expression (12) de n_1 résultant d'ailleurs de la théorie simplifiée qui a été exposée ci-dessus, la valeur de cette contrainte n_1 en chaque point ($y z$) n'est qu'approchée. Mais si on introduit dans le premier terme les corrections faites dans la I^{ère} Partie, c'est-à-dire si l'on remplace ce premier terme par la valeur „exacte“ que l'on peut calculer par les tableaux I ou les tableaux II à VII de la première partie, on peut considérer que la valeur moyenne ainsi corrigée devient exacte. La série double devient alors un terme additif — positif ou négatif (et à valeur moyenne nulle) — tenant compte de la loi de répartition transversale des charges, terme dont la valeur ne sera qu'approximative, mais qui permet d'obtenir une représentation satisfaisante des phénomènes.

Il serait intéressant de disposer de tables pour le calcul des contraintes n_1 . Malheureusement, l'établissement de ces tables demande un travail matériel très important et nous n'avons pu que l'ébaucher.

Pratiquement en effet, la sommation de la série double n'est possible que si la suite des coefficients A_m^n est rapidement décroissante; la convergence de la série, par suite de la présence du terme exponentiel $e^{-\frac{z}{l}}$ est d'ailleurs accélérée et on peut se contenter d'un nombre de termes relativement petit.

C'est ainsi — et en introduisant la correction sur le premier terme comme on l'a dit ci-dessus — que nous avons calculé, pour le prisme à base carrée

chargé sur un carré concentrique à la base avec une densité de charge uniforme, les valeurs de n_1 sur un des plans de symétrie pour des rapports d'étalement (rapport $\frac{a'}{a}$ des côtés du carré de charge et du carré de base) égaux à $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$. Les lignes d'égale valeur des contraintes n_1 sont représentées pour ces deux cas de charge par les figures 33 et 34.

Mais lorsque le rapport d'étalement transversal diminue et tend vers zéro, les sommes deviennent impraticables à cause du très grand nombre de termes à conserver.

Nous nous contenterons d'indiquer qu'il semble possible alors d'effectuer une sommation approchée de la série double grâce à certaines approximations.

Pour montrer dans quel sens on peut procéder, nous examinerons le cas du prisme à base carrée chargée au centre sur un carré concentrique à la base avec une densité uniforme, et nous limiterons au calcul des contraintes n_1 sur l'axe du prisme (droite $x=0 y=0$), que nous appellerons encore les contraintes maximum d'éclatement.

On a dans ce cas $a=b$ et les rapports d'étalement longitudinal et transversal sont égaux.

Avec les notations suivantes: $\alpha' = \pi \frac{a'}{a}$; $\frac{\pi x}{a} = \alpha$; $\frac{\pi y}{b} = \beta$; $\frac{\pi z}{a} = \zeta$

$$\frac{P}{2a \cdot 2b} = \frac{P}{4a^2} = p \quad (P \text{ étant la résultante des charges appliquées})$$

$$f(\zeta) = (\zeta - 1)e^{-\zeta}$$

$$\text{on a :} \quad \frac{1}{l^2} = \frac{\pi^2}{a^2} (m^2 + n^2) \quad \frac{z}{l} = \frac{\pi z}{a} \sqrt{m^2 + n^2} = \zeta \sqrt{m^2 + n^2}$$

en tenant compte de ce que les coefficients A_m^n et A_m^0 du développement (12) ont pour valeurs

$$A_0^0 = -p; \quad A_m^0 = -2p \frac{\sin m \alpha'}{m \alpha'}; \quad A_0^n = -2p \frac{\sin n \alpha'}{n \alpha'}$$

$$A_m^n = -4p \frac{\sin m \alpha'}{m \alpha'} \frac{\sin n \alpha'}{n \alpha'}$$

le développement (12) prend la forme:

$$n_1 = 4p \sum \frac{\sin m \alpha'}{m \alpha'} f(m \zeta) + 8p \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin m \alpha'}{m \alpha'} \frac{\sin n \alpha'}{n \alpha'} \frac{m^2}{m^2 + n^2} f(\zeta \sqrt{m^2 + n^2}) \cos n \beta \quad (13)$$

Pour les contraintes sur l'axe ($x=0 y=0$) on a $\beta=0$ et par conséquent l'expression de n_1 sur cet axe devient

$$n_1 = 4p \sum \frac{\sin m \alpha'}{m \alpha'} f(m \zeta) + 8p \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin m \alpha'}{m \alpha'} \frac{\sin n \alpha'}{n \alpha'} \frac{m^2}{m^2 + n^2} f(\zeta \sqrt{m^2 + n^2}) \quad (14)$$

(m impair, n quelconque).

C'est cette contrainte qu'il devient difficile, matériellement, de calculer quand α' devient petit à cause de l'extrême lenteur de la convergence. On peut alors appliquer les deux approximations suivantes, dont la légitimité est précisément d'autant plus grande que la série est plus lentement convergente.

1. Etant donnée une série à termes impairs:

$$u_1 + u_3 + u_5 + \dots + u_m + \dots$$

si on considère u_m comme une fonction de la variable m , m pouvant varier de 0 à ∞ , l'intégrale $\int_0^\infty u_m dm$ a pour valeur approchée (fig. 30):

$$(u_1 + u_3 + u_5 + \dots) \cdot 2$$

Inversement la somme de la série $u_1 + u_3 + u_5 + \dots$ a pour valeur approchée

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty u_m dm$$

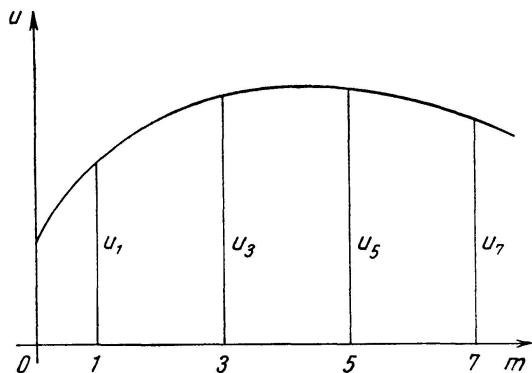


Fig. 30

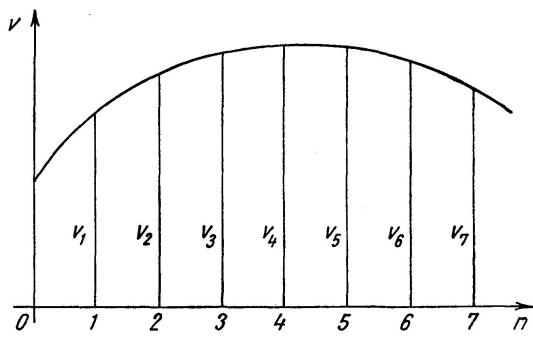


Fig. 31

2. Etant donnée une série dont le terme général est v_n , n pouvant prendre toutes les valeurs, paires et impaires, zéro exclus, la somme de la série est

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots$$

Si on considère v comme une fonction continue de n , n variant de 0 à ∞ , l'intégrale $\int_0^\infty v_n dn$ a pour valeur approchée (fig. 31):

$$\left(\frac{v_0 + v_1}{2} + \frac{v_1 + v_2}{2} + \frac{v_2 + v_3}{2} + \dots \right) \cdot 1 = \frac{v_0}{2} + v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots$$

Inversement la somme de la série a pour valeur approchée:

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots = -\frac{v_0}{2} + \int_0^\infty v_n dn$$

Ceci posé, appelons u_m le terme général de la série double qui figure dans l'expression (14).

Groupons tous les termes correspondant à une même valeur de n et désignons en la somme par S_n . On a donc

$$S_n = \sum_{m=1}^{m=\infty} u_m^n \quad (m \text{ impair et } n \text{ fixé})$$

D'après l'approximation 1. on aura sensiblement

$$S_n = \frac{1}{2} \int_0^\infty u_m^n dm$$

La série double prend alors la forme

$$S_n = 8p(S_1 + S_2 + S_3 + \dots)$$

qui, d'après l'approximation 2. a sensiblement pour valeur, si l'on considère S_n comme une fonction continue de la variable n :

$$8p \left[-\frac{S_0}{2} + \int_0^\infty S_n dn \right] = -4pS_0 + 8p \int_0^\infty S_n dn$$

Or S_0 est égal à $\sum_{m=1}^{m=\infty} u_m^0$ (m impair) et le terme u_m^0 a pour valeur (en faisant $n=0$ dans le terme général de la série double):

$$u_m^0 = \frac{\sin m \alpha'}{m \alpha'} f(m \zeta)$$

L'expression (14) prend donc la forme

$$n_1 = 4p \sum \frac{\sin m \alpha'}{m \alpha'} f(m \zeta) - 4p \sum \frac{\sin m \alpha'}{m \alpha'} f(m \zeta) + 8p \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{2} u_m^n dm dn$$

soit

$$n_1 = 4p \int_0^\infty \int_0^\infty u_m^n dn$$

La valeur approchée de n_1 est donc:

$$n_1 = 4p \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sin m \alpha'}{m \alpha'} \frac{\sin n \alpha'}{n \alpha'} \frac{m^2}{m^2 + n^2} f(\zeta \sqrt{m^2 + n^2}) dm dn \quad (15)$$

D'autre part si on appelle n_2 la contrainte sur le deuxième plan de symétrie, $x \otimes z$, et sur l'axe, il est évident par raison de symétrie que $n_2 = n_1$; et n_2 aurait la même expression (15) en permutant m et n . On a donc

$$n_1 = 4p \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sin m \alpha'}{m \alpha'} \frac{\sin n \alpha'}{n \alpha'} \frac{n^2}{m^2 + n^2} f(\zeta \sqrt{m^2 + n^2}) dm dn \quad (16)$$

En ajoutant les expressions (15) et (16) on obtient donc pour valeur approchée de n_1 sur l'axe:

$$n_1 = 2p \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sin m \alpha'}{m \alpha'} \frac{\sin n \alpha'}{n \alpha'} f(\zeta \sqrt{m^2 + n^2}) dm dn \quad (17)$$

Appelons w le terme sous le signe \iint ; w est fonction de m et n . Considérons la surface qui, dans le système de coordonnées rectangulaires $0 m n Z$ (fig. 32) a pour équation $Z = w(mn)$.

L'intégrale double (17) est égale au volume compris entre cette surface et le trièdre $0 m n Z$.

On peut, pour calculer ce volume, transformer l'équation de la surface en coordonnées semi-polaires (fig. 32) en posant:

$$m = \rho \cos \omega \quad n = \rho \sin \omega$$

Le volume a pour valeur, dans ce système de coordonnées $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty w \rho d\omega d\rho$
avec $w = \frac{\sin(\alpha' \rho \cos \omega) \sin(\alpha' \rho \sin \omega)}{\alpha'^2 \rho^2 \sin \omega \cos \omega} f(\zeta \rho)$

Quand on change ω en $\frac{\pi}{2} - \omega$, w ne change pas. Donc le volume a pour valeur $2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^\infty w \rho d\omega d\rho$.

Par conséquent: $n_1 = 2 \cdot 2p \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^\infty \frac{\sin(\alpha' \rho \cos \omega) \sin(\alpha' \rho \sin \omega)}{\rho \alpha'^2 \sin \omega \cos \omega} f(\zeta \rho) d\omega d\rho$

ou, en posant:

$$\alpha' (\cos \omega - \sin \omega) = \varphi$$

$$\alpha' (\cos \omega + \sin \omega) = \psi$$

$$n_1 = \frac{2p}{\alpha'^2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\int_0^\infty \frac{\cos \varphi \rho - \cos \psi \rho}{\rho} f(\zeta \rho) d\rho \right] \frac{d\omega}{\sin \omega \cos \omega} \quad (18)$$

L'intégrale en ρ sous le crochet s'écrit en explicitant la fonction f

$$\int_0^\infty \frac{\cos \varphi \rho - \cos \psi \rho}{\rho} (\zeta \rho - 1) e^{-\zeta \rho} d\rho = \zeta \int_0^\infty (\cos \varphi \rho - \cos \psi \rho) e^{-\zeta \rho} d\rho - \int_0^\infty \frac{\cos \varphi \rho - \cos \psi \rho}{\rho} e^{-\zeta \rho} d\rho \quad (19)$$

La première intégrale du second membre de (19) est calculable; elle a pour valeur

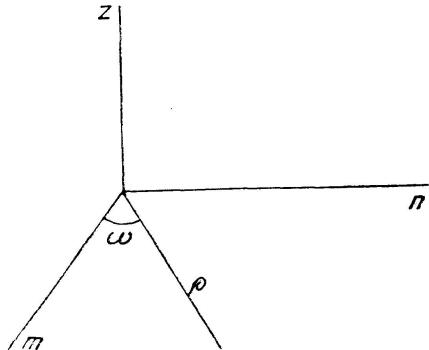


Fig. 32

$$\zeta \left[-e^{-\zeta \rho} \left(\frac{\zeta \cos \varphi \rho - \varphi \sin \varphi \rho}{\zeta^2 + \varphi^2} - \frac{\zeta \cos \psi \rho - \psi \sin \psi \rho}{\zeta^2 + \psi^2} \right) \right]_0^\infty = \zeta^2 \frac{\psi^2 - \varphi^2}{(\zeta^2 + \varphi^2)(\zeta^2 + \psi^2)}$$

La deuxième intégrale n'est pas calculable, mais on peut en avoir une valeur approchée en utilisant l'approximation 2.

En effet si on appelle $v(\rho)$ le terme sous le signe \int on a approximativement:

$$\int_0^\infty v(\rho) d\rho = \frac{v_0}{2} + v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots$$

Or $v(0)$ est nul, car c'est la limite de

$$\frac{\cos \varphi \rho - \cos \psi \rho}{\rho} = 2 \frac{\sin(\alpha' \rho \cos \omega) \sin(\alpha' \rho \sin \omega)}{\rho}$$

quand ρ tend vers zéro, et cette limite est nulle. On a donc:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty v(\rho) d\rho &\approx \cos \varphi e^{-\zeta} + \frac{\cos 2\varphi}{2} e^{-2\zeta} + \dots + \frac{\cos n\varphi}{n} e^{-n\zeta} + \dots \\ &\quad - \left[\cos \psi e^{-\zeta} + \frac{\cos 2\psi}{2} e^{-2\zeta} + \dots + \frac{\cos n\psi}{n} e^{-n\zeta} + \dots \right] \end{aligned}$$

et les deux séries ci-dessus ne sont autres que les fonctions $U(\zeta \varphi)$ et $U(\zeta \psi)$ que nous avons rencontrées dans l'étude plane. Nous en avons donné les expressions en termes finis, qui sont:

$$U(\zeta \varphi) = -L \sqrt{1 - 2e^{-\zeta} \cos \varphi + e^{-2\zeta}} = -\frac{1}{2} L \frac{2(\operatorname{ch} \zeta - \cos \varphi)}{e^\zeta}$$

de même pour $U(\zeta \psi)$

$$\text{On a donc } \int_0^\infty v(\rho) d\rho \approx \frac{1}{2} L \frac{\operatorname{ch} \zeta - \cos \psi}{\operatorname{ch} \zeta - \cos \varphi}$$

L'intégrale (19) a donc pour valeur approchée:

$$\zeta^2 \frac{\psi^2 - \varphi^2}{(\zeta^2 + \varphi^2)(\zeta^2 + \psi^2)} - \frac{1}{2} L \frac{\operatorname{ch} \zeta - \cos \psi}{\operatorname{ch} \zeta - \cos \varphi}$$

et par conséquent

$$n_1 = \frac{2p\zeta^2}{\alpha'^2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\psi^2 - \varphi^2}{(\zeta^2 + \varphi^2)(\zeta^2 + \psi^2)} \frac{d\omega}{\sin \omega \cos \omega} + \frac{p}{\alpha'^2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} L \frac{\operatorname{ch} \zeta - \cos \varphi}{\operatorname{ch} \zeta - \cos \psi} \frac{d\omega}{\sin \omega \cos \omega}; \quad (20)$$

φ et ψ étant des fonctions de ω , on est ramené à de simples quadratures.

La première intégrale de (20) peut être calculée. On trouve sans difficulté en explicitant φ et ψ qu'elle est égale à

$$2p \frac{\pi \zeta}{(\zeta^2 + \alpha'^2) \sqrt{\zeta^2 + 2\alpha'^2}}$$

La deuxième ne semble pas calculable; on peut en calculer les valeurs numériques en remplaçant l'intégrale définie par une somme, en donnant à ω des accroissements suffisamment petits.

On peut donc effectuer le calcul numérique de n_1 pour toute valeur de ζ , n_1 prenant la forme

$$n_1 = 2p \frac{\pi \zeta}{(\zeta^2 + \alpha'^2) \sqrt{\zeta^2 + 2\alpha'^2}} + \frac{p}{\alpha'^2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} L \frac{\operatorname{ch} \zeta - \cos \varphi}{\operatorname{ch} \zeta - \cos \psi} \frac{d\omega}{\sin \omega \cos \omega} \quad (21)$$

avec $\varphi = \alpha' (\cos \omega - \sin \omega)$
 $\psi = \alpha' (\cos \omega + \sin \omega)$

Si α' est très petit, φ et ψ sont eux-mêmes très petits et l'on peut simplifier l'expression (21), pour des valeurs de ζ suffisantes toutefois.

On a en effet

$$\frac{\operatorname{ch} \zeta - \cos \varphi}{\operatorname{ch} \zeta - \cos \psi} = 1 + \frac{\cos \psi - \cos \varphi}{\operatorname{ch} \zeta - \cos \psi}$$

soit sensiblement $\frac{\operatorname{ch} \zeta - \cos \varphi}{\operatorname{ch} \zeta - \cos \psi} = 1 + \frac{\varphi^2 - \psi^2}{2(\operatorname{ch} \zeta - \cos \psi)} = 1 - \frac{4\alpha'^2}{2} \frac{\sin \omega \cos \omega}{\operatorname{ch} \zeta - \cos \psi}$

Si ζ n'est pas trop petit, $2\alpha'^2 \frac{\sin \omega \cos \omega}{\operatorname{ch} \zeta - \cos \psi}$ est petit et l'on a approximativement

$$L \frac{\operatorname{ch} \zeta - \cos \varphi}{\operatorname{ch} \zeta - \cos \psi} = -2\alpha'^2 \frac{\sin \omega \cos \omega}{\operatorname{ch} \zeta - \cos \psi}$$

L'expression approchée de n_1 devient alors:

$$n_1 = 2p \left[\frac{\pi \zeta}{(\zeta^2 + \alpha'^2) \sqrt{\zeta^2 + 2\alpha'^2}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\omega}{\operatorname{ch} \zeta - \cos \psi} \right] \quad (22)$$

[$\psi = \alpha' (\cos \omega + \sin \omega)$]

Cette approximation cesse d'être légitime lorsque ζ devient lui-même très petit, car alors $2\alpha'^2 \frac{\sin \omega \cos \omega}{\operatorname{ch} \zeta - \cos \psi}$ n'est plus petit. Il faut alors revenir, pour ces petites valeurs de ζ , à la formule (21).

Pour $\zeta = 0$, le premier terme de cette formule (21) est nul si $\alpha' \neq 0$, le deuxième terme est négatif et prend une valeur infinie; on aurait donc en surface pour n_1 une contrainte de compression infinie. Cette conclusion est erronée, parce que la méthode de calcul approché n'est plus valable. On peut avoir directement la valeur de n_1 en surface par la formule (14) ou l'on fait $\zeta = 0$; les fonctions $f(m\zeta)$ et $f(\zeta \sqrt{m^2 + n^2})$ deviennent égales à -1 et l'on a

$$n_1 = -4p \sum \frac{\sin m \alpha'}{m \alpha'} - 8p \sum \sum \frac{\sin m \alpha'}{m \alpha'} \frac{\sin n \alpha'}{n \alpha'} \frac{m^2}{m^2 + n^2} \quad (m \text{ impair})$$

En traitant cette expression comme on l'a fait ci-dessus à l'aide des approximations 1^o et 2^o on voit facilement que $n_1 = -\frac{\bar{\omega}}{2}$, $\bar{\omega}$ étant la compression locale sur le carré de charge (c'est-à-dire $\frac{P}{4a'^2}$); n_1 est donc une compression très grande, mais non infinie comme il résultait de la formule (21).

Lorsqu'on a affaire à une charge concentrée, $\alpha' = 0$, et on a directement par la formule (17)

$$n_1 = 2p \int_0^\infty \int_0^\infty f(\zeta \sqrt{m^2 + n^2}) dm dn$$

Transformée en coordonnées semi-polaires comme précédemment, cette expression devient:

$$\begin{aligned} n_1 &= 2p \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty f(\zeta \rho) \rho d\rho d\omega \\ &= \pi p \int_0^\infty (\zeta \rho - 1) e^{-\zeta \rho} \rho d\rho = -\frac{\pi p}{\zeta^2} [(1 + \zeta \rho + \zeta^2 \rho^2) e^{-\zeta \rho}]_0^\infty \end{aligned}$$

soit

$$n_1 = \frac{\pi p}{\zeta^2} \quad (23)$$

n_1 est donc une traction, qui devient infinie pour $\zeta = 0$. Mais pour cette même valeur 0 de ζ , le calcul que l'on a fait ci-dessus reste valable et l'on trouve $n_1 = -\frac{\bar{\omega}}{2}$ soit $n_1 = -\infty$.

On a donc, dans le cas d'une force concentrée, 2 valeurs, $-\infty$ et $+\infty$, pour la contrainte n_1 sur l'axe pour $z=0$. Ceci est tout à fait analogue à ce

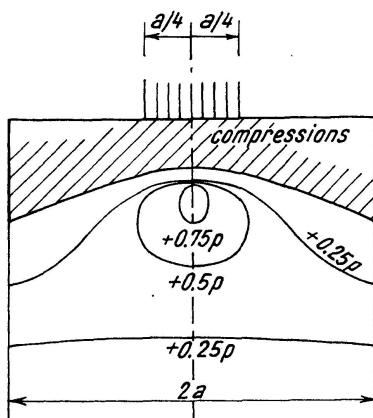


Fig. 33. Isobares de la contrainte d'éclatement sur un plan de symétrie pour un prisme à base carrée chargé sur un carré concentré à la base $\frac{a'}{a} = \frac{1}{4}$

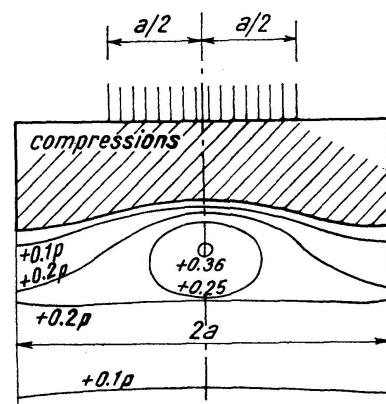


Fig. 34. Isobares de la contrainte d'éclatement sur un plan de symétrie pour un prisme à base carrée chargé sur un carré concentré à la base $\frac{a'}{a} = \frac{1}{2}$

qu'on a rencontré dans l'étude plane; la compression infinie correspond à l'action d'une force finie rasante N_1 s'exerçant le long de l'arête $0x$, et répartie elle-même le long de cette arête avec une densité variable, devenant infinie pour $x=0 y=0$. La contrainte n_1 de compression correspondante est donc un infiniment grand du second ordre, puis on passe immédiatement à une traction $\left(\frac{\pi p}{\zeta^2}\right)$ infinie, mais du premier ordre.

La figure 35, sur laquelle nous avons représenté les variations de n_1 en fonction de z pour différentes valeurs du rapport d'étalement $\frac{a'}{a}$, met bien en évidence les phénomènes. On voit que, au fur et à mesure que $\frac{a'}{a}$ diminue, la contrainte maximum de compression (atteinte pour $\zeta=0$ et égale à $\frac{\omega}{2}$) et la contrainte maximum de traction augmentent; le niveau où se produit le maximum de traction se rapproche d'autre part de la surface. Pour $\frac{a'}{a}=0$, les deux maximum deviennent infinis et le maximum positif vient sur la face $z=0$ même.

La figure 35 représente les lois de variation de la contrainte d'éclatement n_1 dans le cas du prisme à base carrée chargé sur un carré concentrique à cette base. La courbe $\frac{a'}{a}=0$ a été calculée à l'aide de la formule asymptotique

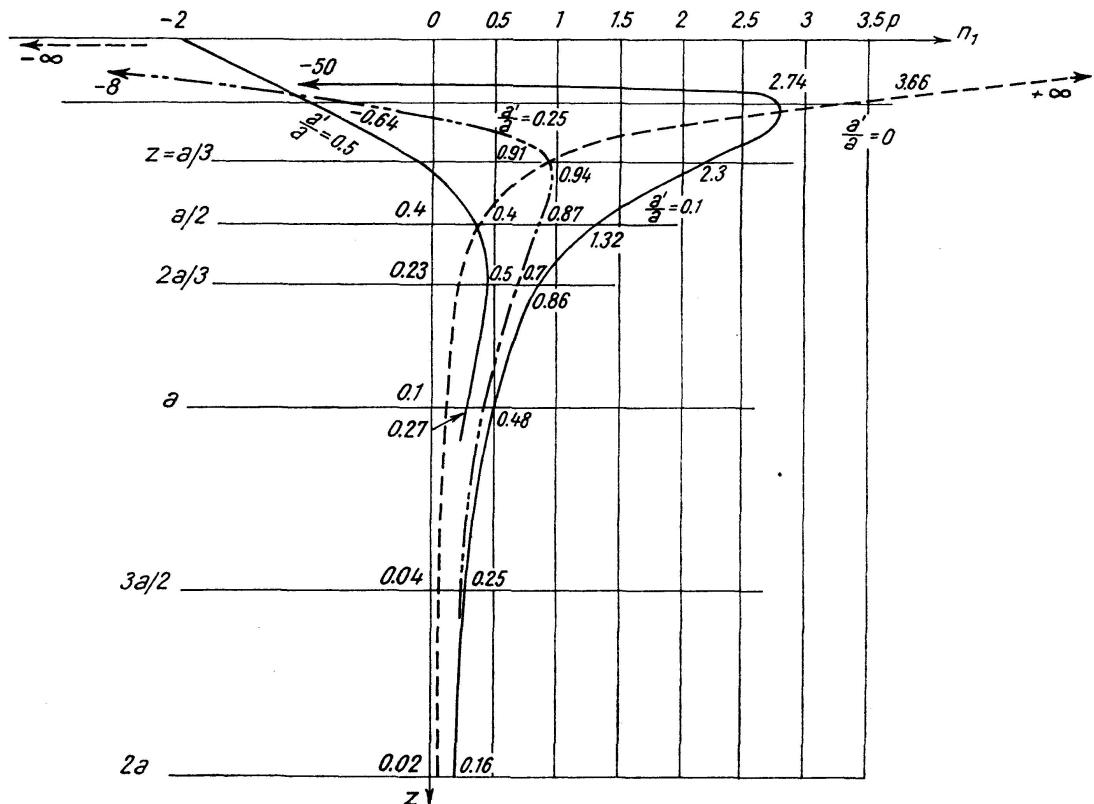


Fig. 35. Valeurs des contraintes n_1 sur l'axe d'un prisme à base carrée de côté $2a$ chargé sur un carré concentrique de côté $2a'$, pour différentes valeurs du rapport d'étalement $\frac{a'}{a}$.

(les coefficients doivent être multipliés par p , compression moyenne)

(23); la courbe $\frac{a'}{a} = \frac{1}{10}$ à l'aide des formules approchées (21) et (22), la courbe $\frac{a'}{a} = \frac{1}{4}$ à l'aide de la formule approchée (21) et la courbe $\frac{a'}{a} = \frac{1}{2}$ a été calculée directement par les séries doubles. Les résultats résumés sur la figure 35 sont d'ailleurs les résultats bruts, c'est-à-dire sans la correction à l'aide des tableaux II à VII pour la valeur moyenne, car nous avons eu surtout en vue d'indiquer l'allure générale des phénomènes. Aussi ne retrouvera-t-on pas exactement, pour les courbes $\frac{a'}{a} = \frac{1}{4}$ et $\frac{a'}{a} = \frac{1}{2}$ les mêmes valeurs des contraintes n_1 sur l'axe que dans les figures 33 et 34.

On comparera les valeurs de n_1 de la figure 35 à celles de la figure 24 de l'étude plane (c'est-à-dire dans le cas d'une répartition uniforme le long de toute droite perpendiculaire au plan de symétrie), ou mieux, puisque la fig. 35 ne donne que les résultats bruts sans correction, aux valeurs résultant de la théorie approchée de la I^{ère} Partie dans le cas de forces étalées symétriquement par rapport à l'axe avec répartition transversale uniforme; cette contrainte dans le cas de la répartition transversale uniforme avait pour valeur

$$n_1 = 2p \frac{\sin \alpha'}{\alpha'} \left[\frac{\zeta \operatorname{ch} \zeta}{\operatorname{sh}^2 \zeta + \sin^2 \alpha'} - \frac{1}{\operatorname{sh} \zeta} \right]$$

(voir I^{ère} Partie, page 184). De cette comparaison on déduit l'effet de la localisation transversale. On voit que cette localisation transversale entraîne une aggravation importante des contraintes d'éclatement n_1 .

Si on appelle facteur de concentration le rapport de la contrainte maximum d'éclatement (maximum positif de la figure 35) à la contrainte maximum d'éclatement qu'on aurait si la charge, tout en conservant sa loi de répartition longitudinale, était uniformément répartie dans le sens transversal (contrainte d'éclatement de la I^{ère} Partie), ce rapport (calculé d'après les théories approchées aussi bien pour le prisme indéfini que pour le prisme fini) est de:

$$\begin{aligned} 1,5 & \text{ pour } \frac{a'}{a} = \frac{1}{2} \\ 2,65 & \text{ pour } \frac{a'}{a} = \frac{1}{4} \\ 4,7 & \text{ pour } \frac{a'}{a} = \frac{1}{10} \\ \infty & \text{ pour } \frac{a'}{a} = 0 \end{aligned}$$

Pour des valeurs intermédiaires de $\frac{a'}{a}$ on pourra interpoler le facteur de concentration.

On constate d'autre part que le maximum est plus près de la base que dans le cas de l'étalement transversal uniforme; pour $\frac{a'}{a} = \frac{1}{10}$, le maximum remonte de $z = \frac{a}{2}$ à $z = \frac{a}{6}$. Cette constatation est importante car elle amène à rapprocher les frettages de la face d'appui.

On constatera encore que la perturbation locale par rapport à l'état de Saint-Venant se produit sur une longueur plus grande, dans le cas où les forces appliquées sont localisées dans les deux sens (transversal et longitudinal) que dans le cas où elles ne sont localisées que dans un sens. Pour $z=2a$ et pour $\frac{a'}{a} = \frac{1}{10}$ on a $n_1 = 0,16 p$ dans le cas de double localisation, au lieu de $n_1 = 0,03 p$ dans le cas de simple localisation.

Toutes ces remarques ne sont quantitativement valables que pour le cas étudié, c'est-à-dire pour le prisme à base carrée chargé sur un carré concentrique.

La méthode que nous avons employée peut être étendue à des cas différents, quoique moins simplement.

Nous indiquerons pour terminer que le calcul exposé fait apparaître, dans certains cas, qui sont courants, des concentrations de contrainte beaucoup plus fortes que celles qu'on évalue d'habitude, et qui nécessiteraient par conséquent des frettages plus importants que ceux que l'usage a consacrés. Or les constructions réalisées résistent. Il est certain que cette résistance est due à l'apparition de déformations plastiques grâce auxquelles les contraintes s'uniformisent dans une certaine mesure. Il ne faut pas perdre de vue cette faculté d'adaptation de la matière; mais c'est là une autre étude, qu'il serait souhaitable de voir entreprise.

Résumé

On étudie l'état élastique d'un prisme chargé uniquement sur ses bases, au voisinage de ces bases.

Dans une première partie, on étudie le cas du prisme indéfini, les forces appliquées ayant une répartition identique dans toute section transversale, et des directions quelconques normales ou obliques.

On obtient d'abord une solution approchée grâce à un développement en série de Fourier, les réactions parasites qui s'introduisent sur certaines faces étant éliminées par des forces de sens contraire, dont on calcule l'effet approximatif par les méthodes usuelles de la Résistance des matériaux. Cette solution approchée est ensuite exprimée en termes finis.

Une méthode plus exacte est développée pour le cas de charges normales paires, par un procédé de réitération.

On déduit finalement de ces méthodes des tables pour le calcul des contraintes sous l'effet d'une force unique de position et d'obliquité quelconque.

Dans une deuxième partie, on étudie le cas du prisme à base rectangulaire de dimensions finies. Le cas des charges normales symétriques est seul développé. On obtient une solution approchée à l'aide de séries doubles; des procédés de calcul numérique de ces séries sont indiqués pour un cas particulier de charge.

Zusammenfassung

Der elastische Zustand in den Enden eines nur an den Grundflächen belasteten Prismas wird untersucht.

In einem ersten Teil wird der Fall des unendlich langen Prismas behandelt, bei dem die angreifenden Kräfte in jedem Schnitt gleich verteilt sind, jedoch eine beliebige normale oder schiefe Richtung haben können.

Eine Näherungslösung wird zunächst mit Hilfe einer Reihenentwicklung nach Fourier erhalten. Dabei werden die störenden Reaktionen, welche auf gewisse Flächen wirken, durch Kräfte entgegengesetzter Richtung eliminiert, deren ungefährer Einfluß mit den üblichen Methoden der Festigkeitslehre berechnet werden kann. Diese Näherungslösung wird in einem geschlossenen Ausdruck angegeben.

Eine genauere Methode wird für den Fall eines angreifenden Kräftepaars als Iterationsverfahren entwickelt.

Schließlich werden aus diesen Methoden Tabellen abgeleitet für die Berechnung der Spannungen unter dem Einfluß einer Einzellast von beliebiger Lage und Richtung.

In einem zweiten Teil wird der Fall des rechteckigen Prismas mit endlichen Abmessungen untersucht, unter Beschränkung auf den Fall normaler, symmetrischer Lasten. Eine Näherungslösung wird mit Hilfe der Anwendung von Doppelreihen erhalten. Numerische Berechnungsverfahren für diese Reihen werden für einen bestimmten Lastfall angegeben.

Summary

The paper describes the investigation of the elastic state of a prism, near its end surfaces, when loaded solely on those end surfaces.

The first part of the paper deals with a semi-infinite prism submitted to the action of forces in any direction, normal or oblique, of the same distribution at any cross-section.

An approximate solution is first obtained by means of the development of a Fourier's series, the parasite reactions produced on certain surfaces being eliminated by means of forces of the opposite sense, whose approximate effect is calculated by usual methods of strength of materials. This approximate solution is then expressed in finite terms. A more exact method is developed for normal symmetrical loads by a process of reiteration of calculations.

Using these methods, tables are finally constituted for the calculation of stresses under the action of a single force of any position and inclinations.

In the second part of the paper, the case of a prism of rectangular base and finite dimensions is dealt with. The case of normal symmetrical loads alone is developed. An approximate solution is obtained by the use of double series. Methods of numerical calculation of these series are indicated for a particular case of loading.