

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

**Band:** 10 (1950)

**Artikel:** Résistance intrinsèque des cordons de soudure d'angle

**Autor:** Goelzer, A.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-10583>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 29.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Résistance intrinsèque des cordons de soudure d'angle

*Innere Festigkeit der Kehlnähte*

*Internal strength of fillet welds*

A. GOELZER, Directeur de la Société SECROM, Paris

Un assez grand nombre de problèmes de résistance des matériaux ont pu être résolus par la théorie de l'élasticité, bien que souvent cette théorie conduise à des formules compliquées.

D'autre part, le souci de respecter les coefficients de sécurité avec plus de précision a conduit, depuis plusieurs années, à définir mathématiquement la limite du domaine élastique de sorte que les formules finales sont des formules résultant de la combinaison des formules de contrainte avec une équation limite du domaine élastique.

La présente étude est une application de ces deux points de vue. Le calcul des contraintes est conduit au moyen de la théorie de l'élasticité et les formules finales résultent de l'application de ces formules à la limite du domaine élastique défini suivant la théorie des courbes intrinsèques<sup>1)</sup>.

On pourrait d'ailleurs aussi bien utiliser des équations entre les contraintes principales qui ont été proposées par divers auteurs (Hencky, V. Misès etc.) pour définir cette limite du domaine élastique. Les résultats obtenus seraient voisins.

## Introduction

D'un point de vue très général, le calcul d'un cordon de soudure faisant partie intégrante d'une pièce dépend tout d'abord des propriétés intrinsèques du métal de la soudure comparées à celles du métal de base. Indépendamment de toute question de forme des joints soudés ce sont ces propriétés de la matière qui différencient le cordon de soudure du métal de base des pièces à assembler.

---

<sup>1)</sup> C'est la méthode suivie en France dans l'instruction sur la soudure du Ministère des Travaux Publics et aussi dans les règles d'utilisation de l'acier du Ministère de la Reconstruction et de l'Urbanisme.

Il y a ensuite lieu de considérer la forme du joint et le système des forces extérieures appliquées, créant un certain état de contrainte. Dans le cas des soudures d'angle que nous envisageons plus particulièrement dans cette étude, il importe de bien distinguer les soudures frontales des soudures latérales.

Si nous isolons le prisme triangulaire qui constitue schématiquement le cordon de soudure, ce prisme doit se trouver en équilibre sous le système des contraintes appliquées à ses trois faces. La répartition exacte des contraintes sur les faces du cordon de soudure ne peut être obtenue par le calcul, car il faudrait alors déterminer l'état d'équilibre élastique de l'ensemble du joint: métal de base et soudure, opération en général inextricable.

On pourra remplacer les contraintes agissant sur les faces en contact  $OA O'A'$ ,  $AB A'B'$ , par leur résultante générale et leur moment résultant (fig. 1).

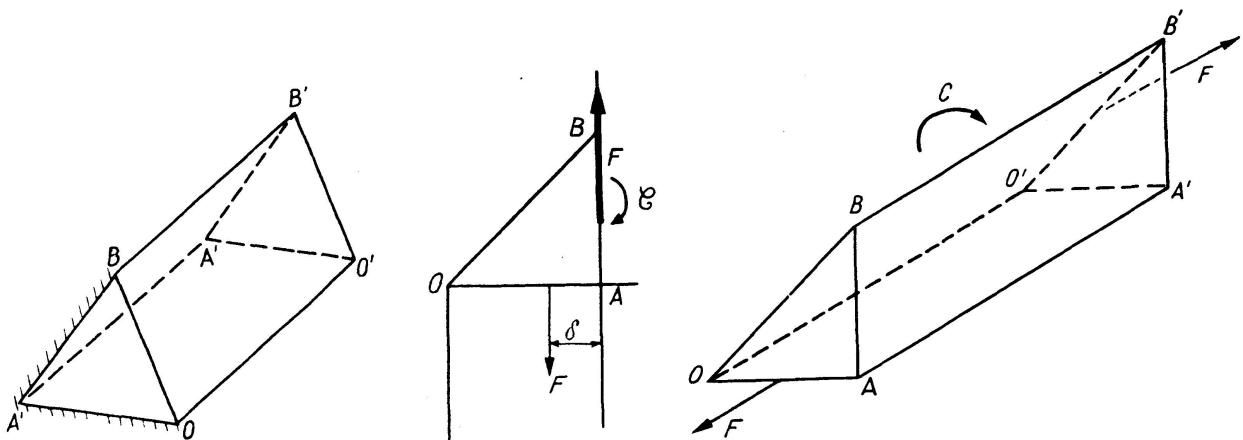


Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

Sur la face libre  $OB$ ,  $O'B'$  il n'y a aucun effort appliqué. Ceci posé, on obtient les sollicitations suivantes pour un cordon d'angle:

a) *Cordon frontal*: Les faces  $OA O'A'$  sont sollicitées par des forces situées dans des plans perpendiculaires à la direction  $OO'$ . On a donc affaire à un solide plan dont les tranches juxtaposées telles que  $OAB O'A'B'$  sont identiques au point de vue forme et efforts.

La section droite  $OAB$  est donc sollicitée par une force  $F$  normale à  $OA$ , la face  $AB$  par une force tangentielle égale et opposée à  $F$  et par un couple de moment  $C = F\delta$  (fig. 2).

b) *Cordon latéral*: Dans ce cas, il n'est plus question de solide plan, on a un problème à trois dimensions. La sollicitation principale consiste dans l'action de deux forces  $F$  égales et opposées contenues dans les plans:  $OA O'A'$ ,  $AB A'B'$  et parallèles à la direction  $OO'$  des arêtes du prisme. Le cordon se trouve donc soumis en outre à un couple  $C$  égal et opposé au couple des 2 forces  $F$  (fig. 3).

Les forces  $F$  donnent lieu à des contraintes de cisaillement longitudinales prépondérantes. Le couple  $\mathfrak{C}$  produit des contraintes supplémentaires sur les deux faces non libres, contraintes dont l'action est d'autant plus négligeable que la longueur  $OO'$  est grande par rapport aux dimensions transversales du cordon.

## Chapitre I

### Représentation des propriétés intrinsèques du métal des cordons de soudure

#### 1. Choix d'une courbe intrinsèque

Nous partirons de la théorie de Mr. CAQUOT sur l'existence des premiers glissements à la limite élastique conduisant à la notion de courbes intrinsèques.

Les résultats établis par Messieurs CHALOS et BETEILLE<sup>2)</sup> donnent pour équation de la courbe intrinsèque:

$$T^2 + \left(1 + \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{R}'}{4\mathfrak{T}^2}\right)N^2 - \frac{\mathfrak{R} + \mathfrak{R}'}{2}N + \frac{\mathfrak{T}^2(\mathfrak{R} - \mathfrak{R}')^2}{4\mathfrak{R}\mathfrak{R}'} = 0 \quad (1)$$

de la forme:

$$T^2 + A N^2 + BN + C = 0 \quad (1)$$

dans laquelle  $N$  et  $T$  représentent les composantes normales et tangentielles sur l'élément plan suivant lequel a lieu le premier glissement caractérisant la limite élastique du métal.

Dans cette équation:  $\mathfrak{R}$  est la limite élastique du métal à la compression,  $\mathfrak{R}'$  la limite élastique du métal à la tension, et  $\mathfrak{T}^2$  la limite élastique du métal au cisaillement.

Les résultats d'expérience montrent que la courbe intrinsèque est d'allure parabolique; nous supposerons donc que:

$$A = 0 \quad \text{ou} \quad \mathfrak{R}\mathfrak{R}' = -4\mathfrak{T}^2$$

et nous adopterons finalement comme équation de la courbe intrinsèque:

$$T^2 + BN + C = 0 \quad (2)$$

ou:

$$T^2 - \frac{\mathfrak{R} + \mathfrak{R}'}{2}N - \frac{(\mathfrak{R} - \mathfrak{R}')^2}{16} = 0$$

(2)

On peut admettre par exemple pour un métal d'apport destiné à souder de l'acier doux:

$$\mathfrak{R} = 34 \text{ K}^0 \quad \mathfrak{R}' = -30 \text{ K}^0$$

<sup>2)</sup> Représentation du domaine de stabilité d'un solide élastique (Annales des Ponts et Chaussées de mai 1938).

L'équation de la courbe est alors:

$$T^2 - 2N - 256 = 0 \quad (\text{voir fig. 4}) \quad (3)$$

qui correspond pour  $N=0$  à environ  $T=\mathfrak{T}=16 \text{ K}^0$  et pour  $T=0$  à une contrainte de décohésion:

$$N_0 = -128 \text{ K}^0$$

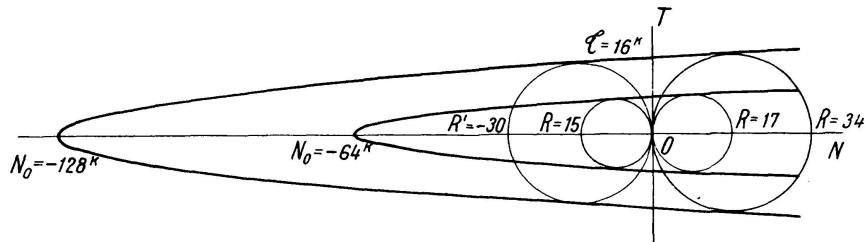


Fig. 4

### Courbe limite admissible

Si on fixe un coefficient de sécurité à la traction et à la compression,  $s$  en prenant des contraintes admissibles  $R, R'$  telles que:

$$\frac{\mathfrak{R}}{R} = \frac{\mathfrak{R}'}{R'} = s \quad (4)$$

on aura une nouvelle courbe pour laquelle

$$B = -\frac{\mathfrak{R} + \mathfrak{R}'}{2} = -\frac{R + R'}{2} s$$

$$C = -\frac{(\mathfrak{R} - \mathfrak{R}')}{16} = -\frac{(R - R')^2}{16} s^2$$

d'où

$$T^2 - \frac{R + R'}{2} s \cdot n \cdot \frac{(R - R')^2}{16} s^2 = 0$$

On voit que vis-à-vis de  $R$  et  $R'$  remplaçant  $\mathfrak{R}$  et  $\mathfrak{R}'$  on a une nouvelle courbe dont les coordonnées sont  $x = \frac{N}{s}$  et  $y = \frac{T}{s}$  soit:

$$y^2 - \frac{R + R'}{2} x - \frac{(R - R')^2}{16} = 0 \quad (5)$$

Nous appellerons cette courbe homothétique de la courbe intrinsèque dans le rapport  $s$ , la courbe limite admissible des contraintes. C'est cette courbe à l'intérieur de laquelle devront se trouver tous les cercles de Mohr relatifs à tous les points du triangle de soudure pour une sollicitation déterminée: on sera ainsi assuré qu'en aucun point de la soudure les contraintes admissibles ne sont dépassées.

En prenant  $s = 2$  on a la courbe indiquée sur la figure 4

$$T^2 - N - 64 = 0$$

## Chapitre II. Calcul des cordons d'angle frontaux

### 1. Généralités

Nous avons indiqué autrefois, dans le Bulletin 2—3<sup>3</sup>) de la Société des Ingénieurs Soudeurs deux solutions particulières de l'équilibre élastique plan d'un cordon frontal considéré comme faisant partie d'un assemblage à double couvre-joint symétrique (voir fig. 5).

La première solution (I) correspond au point de passage de l'effort normal dans le couvre-joint au tiers de la base  $OA$  à partir de  $A$ . La seconde solution (II) correspond au point de passage de l'effort normal au milieu de  $OA$ .

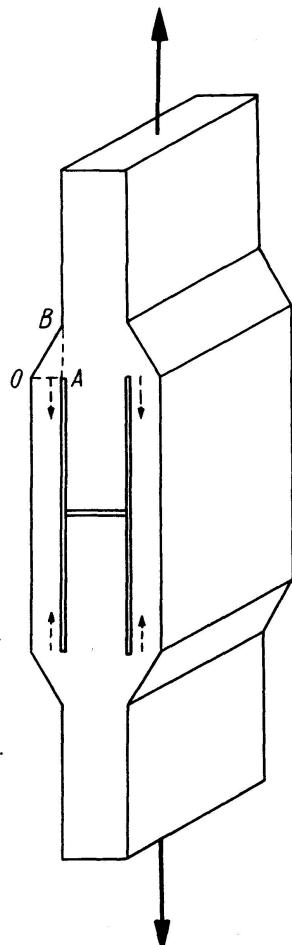


Fig. 5

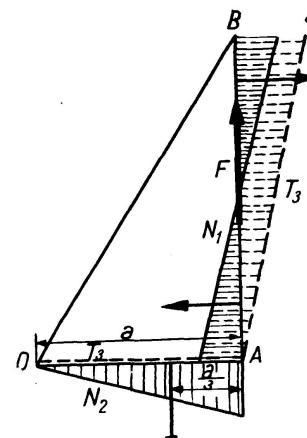


Fig. 6

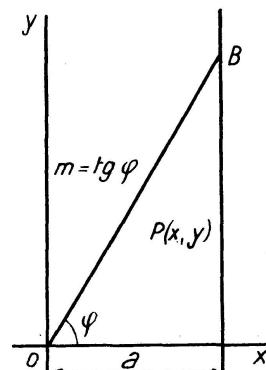


Fig. 7

<sup>3</sup>) Bulletin de la Société des Ingénieurs Soudeurs — 32, Bld de la Chapelle Paris (18<sup>o</sup>) — n° 2—3 de Janvier-Février 1931.

Ces deux solutions sont intéressantes car d'après les résultats d'expériences, il semble bien que dans un tel assemblage le point de passage de l'effort normal varie entre les deux positions correspondant à (I) et (II).

Nous allons étudier successivement les deux états de contrainte relatifs à ces deux solutions.

## 2. Remarque sur les états de contrainte plans

Nous définissons l'état de contrainte par les trois contraintes principales  $\nu_1 \nu_2 \nu_3$  classées par ordre de grandeur algébrique:

$$\nu_3 < \nu_2 < \nu_1$$

et nous envisageons plus particulièrement, en vue de la considération de l'état limite, le cercle de Mohr défini par  $\nu_3$  et  $\nu_1$ .

On constate que dans un état de contrainte plan où *une des contraintes principales est nulle*, ce sont les deux autres contraintes principales  $S_1$  et  $S_2$  racines de l'équation du 2ème degré ci-après qui fournissent les deux nombres algébriques  $\nu_3$  et  $\nu_1$  à condition que  $S_1$  et  $S_2$  soient de signes contraires:

$$S^2 - (N_1 + N_2) S + N_1 N_2 - T_3^2 = 0 \quad (8)$$

Les racines de cette équation dont le discriminant est toujours  $\geq 0$  sont:

$$S_1 = \frac{N_1 + N_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{N_1 - N_2}{2}\right)^2 + T_3^2} \quad \text{et on a: } S_2 < S_1$$

$$S_2 = \frac{N_1 + N_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{N_1 - N_2}{2}\right)^2 + T_3^2}$$

de sorte que:  $S_2 = \nu_3 \quad S_1 = \nu_1$

à condition que:  $N_1 N_2 - T_3^2 \leq 0 \quad (9)$

Les cercles de Mohr sont déterminés par l'abscisse de leur centre et par leur rayon  $\rho$

$$\lambda = \frac{\nu_1 + \nu_3}{2} = \frac{S_1 + S_2}{2} \quad \rho = \frac{\nu_1 - \nu_3}{2} = \frac{S_1 - S_2}{2}$$

## 3. Etude de l'état de contrainte relatif à la solution (I)

En élasticité plane les expressions des efforts normaux  $N_1 N_2$  et de l'effort tangentiel  $T_3$  (notations de Lamé) sont:

$$\text{solution (I)} \quad \left\{ \begin{array}{l} N_1 = K \left( -x + \frac{2}{m} y \right) \\ N_2 = K m^2 x \\ T_3 = K y \end{array} \right. \quad (6)$$

dans lesquelles  $xy$  sont les coordonnées d'un point  $P$  du domaine  $OAB$ ,  $m = \tan \varphi$  et  $K$  est une constante qui a pour expression:

$$K = \frac{2F}{m^2 a^2} \quad (7)$$

dans laquelle  $F$  est l'effort normal unitaire résultant appliqué à  $OA$  et  $a = OA$  (voir fig. 6).

Dans ces conditions, la figure 7 montre l'état d'équilibre du prisme de soudure de section triangulaire  $OAB$ , sous l'action des contraintes s'exerçant sur les faces limites  $OB$ ,  $OA$  et  $AB$ :

- Sur  $OB$  ne s'exerce aucun effort, cette face étant libre.
- Sur  $OA$  la contrainte normale est linéaire de  $O$  à  $A$ , la résultante passant au tiers de  $OA$  à partir de  $A$ . La contrainte de cisaillement est nulle.
- Sur  $AB$  la contrainte normale est linéaire de  $A$  à  $B$  et est nulle au milieu de  $AB$ ; la résultante forme donc un couple égal à  $\frac{Fa}{3}$  en valeur absolue. La contrainte de cisaillement est linéaire et a pour résultante  $F$ .

Constante  $K$ . — La contrainte normale de comparaison sur  $OA$  étant  $\frac{F}{a} = n$  on peut écrire:

$$K = \frac{2n}{m^2 a} \quad (7')$$

Les formules (6) donnent:

$$N_1 N_2 = K^2 (-m^2 x^2 + 2mxy) \quad T_3 = Ky$$

$$\text{et } N_1 N_2 - T_3^2 = -K^2 (y - mx)^2 \text{ toujours } \leq 0$$

L'état de contrainte de la section  $OAB$  du cordon de soudure est défini par la double infinité des cercles de Mohr attachés aux coordonnées  $xy$  d'un point quelconque  $P$  du domaine triangulaire  $OAB$  (voir fig. 8). On a ici pour expression de  $\lambda$  et  $\rho$ :

$$\lambda = \frac{K}{2} \left[ (m^2 - 1)x + \frac{2}{m} y \right] \quad (10)$$

$$\rho^2 = K^2 \frac{m^2 + 1}{4m^2} [(mx - 2y)^2 + m^4 x^2] \quad (11)$$

L'équation d'un cercle de Mohr relatif au point  $P(xy)$  quelconque est:

$$(N - \lambda)^2 + T^2 = \rho^2 \quad (12)$$

Considérons une droite variable issue de  $O$  balayant le domaine  $OAB$  depuis  $OA$  jusqu'à  $OB$  (voir fig. 8), soit:

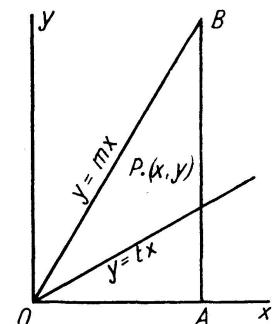


Fig. 8

$$y = tx \quad \text{avec} \quad 0 \leq t \leq m$$

Substituons les variables  $t$  et  $x$  aux variables  $y$  et  $x$  (10) et (11) deviennent:

$$\lambda = \frac{K}{2} \left[ (m^2 - 1) + \frac{2t}{m} \right] x \quad (10')$$

$$\rho^2 = K^2 \frac{m^2 + 1}{4m^2} \left[ (m - 2t)^2 + m^4 \right] x^2 \quad (11')$$

$K$  et  $m$  étant donnés, pour une même valeur de  $t$ ,  $\lambda$  et  $\rho$  sont proportionnels à  $x$ .

Si maintenant nous éliminons  $t$  entre (10') et (11') nous pouvons exprimer  $\rho^2$  en fonction de  $\lambda$  et de  $x$ .

On tire de (10'):

$$t = \frac{\lambda}{Kx} m - \frac{m(m^2 - 1)}{2}$$

d'où:  $m - 2t = m \left( (m^2 - \frac{2\lambda}{Kx}) \right)$

et  $\rho^2 = K^2 \frac{m^2 + 1}{4m^2} \left[ m^2 \left( m^2 - \frac{2\lambda}{Kx} \right)^2 + m^4 \right] x^2$

ou:  $\rho^2 = \frac{K^2}{4} (m^2 + 1) \left[ \left( m^2 - \frac{2\lambda}{Kx} \right)^2 + m^2 \right] x^2 \quad (13)$

Si nous considérons  $x$  comme fixé  $0 \leq x \leq a$ , c'est-à-dire que nous envisageons des points  $P$  sur une droite parallèle à  $AB$ , l'équation du cercle (12) dépend alors du seul paramètre  $\lambda$ .

#### 4. Etude de la famille des cercles de Mohr pour la solution (I)

Les formules précédentes montrent que la famille des cercles de Mohr déterminés par  $\rho$  et  $\lambda$  dépend des variables  $x$ ,  $y$  ou encore de  $x$  et  $t$ .

Il importe tout d'abord d'étudier la configuration de cette famille de cercle. La portion de cette famille relative aux points du domaine triangulaire  $OAB$  doit se trouver entièrement à l'intérieur de la courbe dite „courbe limite admissible“ comme nous l'avons précisé page 40.

Pour se faire une idée de cette configuration un moyen simple consiste à étudier la variation de  $\rho$  en fonction de  $\lambda$  c'est-à-dire à déterminer le lieu géométrique des points diamétraux des cercles situés sur le diamètre vertical parallèle à l'axe  $ON$  d'abscisse  $\lambda$ . Ceci donne une idée de l'allure de la famille des cercles. Nous utiliserons la formule (13).

La courbe représentative de (13) en fonction des deux variables  $\lambda$  et  $\rho$  est une hyperbole (voir fig. 9 et 10) dont le centre est le point:

$$\lambda = \frac{K}{2} m^2 x \quad \rho = 0$$

Les sommets ont pour ordonnées:

$$\pm \rho = \pm \frac{K}{2} m \sqrt{m^2 + 1} \cdot x$$

La pente des asymptotes a pour valeur:

$$\pm \sqrt{m^2 + 1}$$

D'autre part, les formules (10') et (11') permettent de suivre les variations de  $\lambda$  et  $\rho$  quand  $t$  varie de 0 à  $m$ . On obtient facilement les résultats suivants:

$$\begin{array}{lll} \text{Pour } t = 0 & \lambda_0 = \frac{K}{2} (m^2 - 1) x & \rho_0 = \frac{|K|}{2} (m^2 + 1) x \\ t = \frac{m}{2} & \lambda_{\frac{m}{2}} = \frac{K}{2} m^2 x & \rho_{\frac{m}{2}} = \frac{|K|}{2} m \sqrt{m^2 + 1} x \\ t = m & |\lambda_m| = \rho_m = \frac{|K|}{2} (m^2 + 1) x \end{array}$$

De ces résultats, on déduit que le centre de figure de la famille de cercle d'abscisse  $\lambda_m = \frac{K}{2} m^2 x$  (sommets de l'hyperbole) correspond à  $t = \frac{m}{2}$ .

Indépendamment de la forme géométrique de l'hyperbole (13) en  $\lambda$  et  $\rho$ , on peut montrer directement que l'on a toujours:

$$|\lambda| \leq |\lambda_m| \quad \text{ou} \quad |\lambda - \lambda_m| \leq 0$$

et de même que:  $\rho < \rho_m$

ou, ce qui revient au même, puisque  $\rho$  et  $\rho_m$  sont positifs, que:

$$\rho^2 \leq \rho_m^2 \quad \text{ou encore: } \rho^2 - \rho_m^2 \leq 0$$

$$\text{En effet: } \lambda = \frac{K}{2} \left[ (m^2 - 1) + \frac{2t}{m} \right] x \quad \lambda_m = \frac{K}{2} (m^2 + 1) x$$

$$\text{et: } \lambda = \lambda_m = \frac{K}{2} \frac{t - m}{m} 2x$$

$$\text{or: } 0 \leq t \leq m \quad \text{donc } |\lambda - \lambda_m| \leq 0$$

$$\text{De même: } \rho^2 = K^2 \frac{m^2 + 1}{4m^2} [(m - 2t)^2 + m^4] x^2 \quad (11')$$

$$\text{et: } \rho_m^2 = \frac{K^2}{4} (m^2 + 1)^2 x^2$$

$$\text{d'où } \rho^2 - \rho_m^2 = \frac{K^2}{4} \frac{m^2 + 1}{m^2} 4t(t - m) x^2$$

différence toujours  $\leq 0$  car  $0 \leq t \leq m$ .

Pour rester dans le domaine  $OAB$ , on doit de plus limiter la famille de cercle aux points:  $(\lambda_0 \rho_0)$  pour  $t = 0$  et  $(\lambda_m \rho_m)$  pour  $t = m$  en remarquant d'ailleurs que:

$$\lambda_m = \rho_m = \rho_0$$

Résultats indiqués sur les figures 9 et 10.

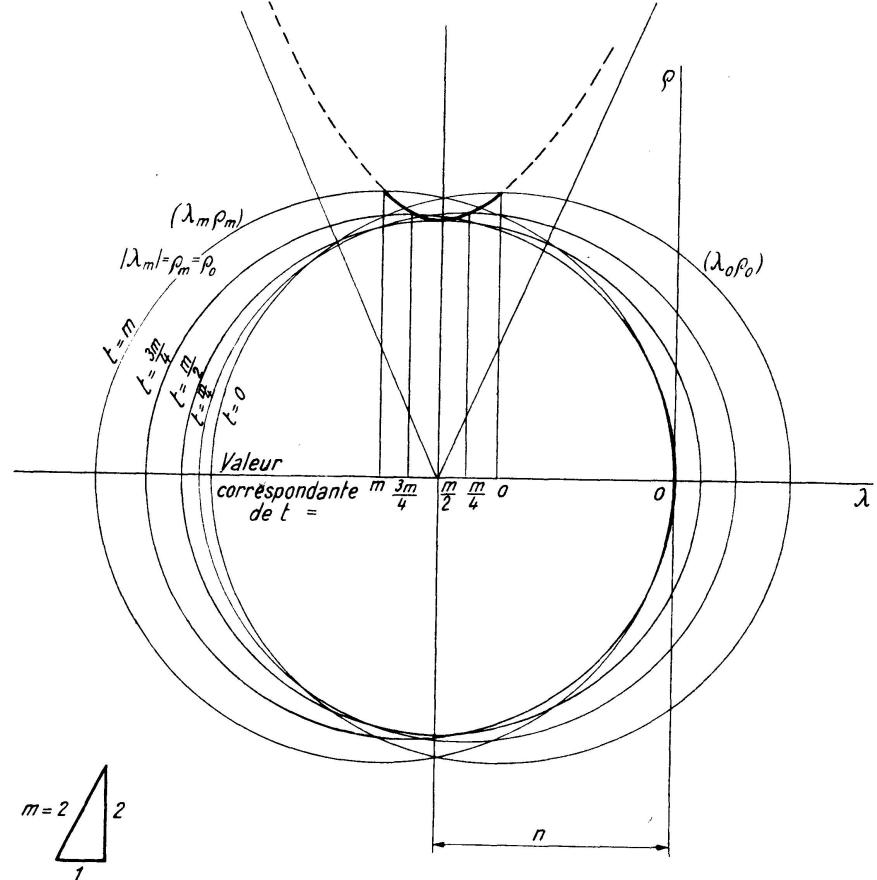


Fig. 9. Solution I. Famille des cercles de Mohr pour  $K$  ou  $n < 0$  et  $m > 1$  ( $m = 2$ )

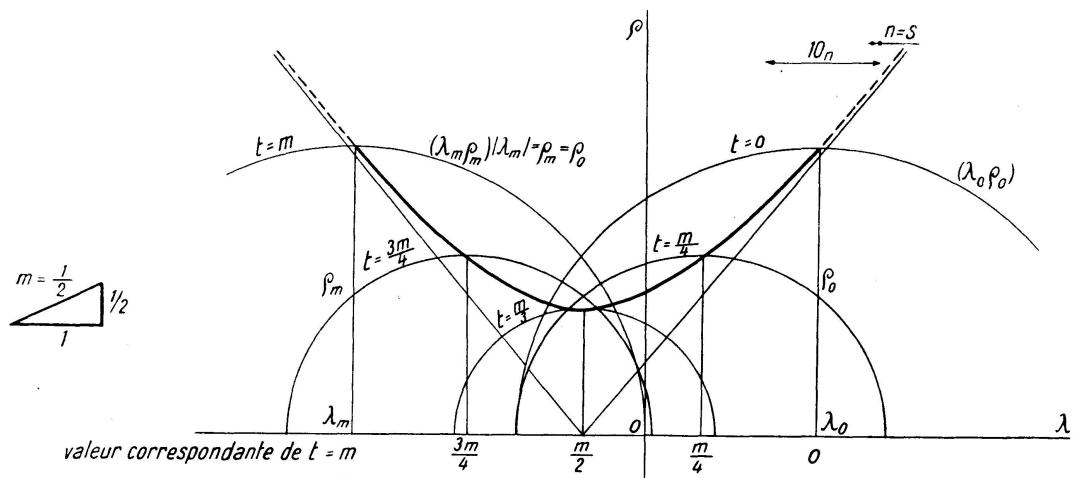


Fig. 10. Solution I. Famille des cercles de Mohr pour  $K$  ou  $n < 0$  et  $m < 1$  ( $m = 1/2$ )

Des propriétés qui viennent d'être établies et de la comparaison de cette figure avec la „courbe limite admissible“ on conclut que ce sont, d'une manière générale, les cercles extrêmes:

$$\begin{aligned} & (\lambda_0 \rho_0) t = 0 \text{ et avec } x = a \text{ (Point } A) \\ & \text{ou } (\lambda_m \rho_0) t = m \text{ et avec } x = a \text{ (Point } B) \end{aligned}$$

qui sont les cercles que l'on peut appeler dangereux: si, en effet, ils sont tangents intérieurement à la „courbe limite admissible“, aucun des autres cercles ne peut couper cette courbe, comme il résulte clairement de l'examen des figures 9 et 10 et de la propriété établie ci-dessus.

Mais nous remarquons que la position du faisceau des cercles de Mohr par rapport à l'origine dépend des signes de  $\lambda_0$  et  $\lambda_m$  qui sont eux-mêmes fixés par les signes de  $K$  et de  $m - 1$ . Plusieurs cas sont ainsi à envisager:

1.  $K$  ou  $n$  sont  $< 0$ : Dans ce cas  $F$  est un effort de traction correspondant à un assemblage tendu.
  - a) Si  $m > 1$   $\lambda_0 < 0$  et  $\lambda_m < 0$  mais  $\lambda_m < \lambda_0$  en valeur algébrique puisque  $K < 0$  de sorte que le cercle le plus dangereux est le cercle relatif au point  $B$ :  $\lambda_m \rho_0$  avec  $\lambda_m = \rho_0$  c'est un cercle de traction.
  - b) Si  $m < 1$   $\lambda_0 > 0$  et  $\lambda_m < 0$  on a toujours  $\lambda_m < \lambda_0$  en valeur algébrique et c'est encore le cercle relatif au point  $B$  qui est le plus dangereux.
2.  $K$  ou  $n$  sont  $> 0$ : Dans ce cas,  $F$  est un effort de compression correspondant à un assemblage comprimé.
  - a) Si  $m > 1$   $\lambda_0 > 0$   $\lambda_m > 0$  mais  $\lambda_0 < \lambda_m$  en valeur algébrique puisque  $K > 0$  de sorte que le cercle le plus dangereux est le cercle relatif au point  $A$  ( $\lambda_0 \rho_0$ ); c'est un cercle de Mohr qui n'est plus un cercle de traction, mais relatif à un état de contrainte plus complexe.
  - b) Si  $m < 1$   $\lambda_0 < 0$  et  $\lambda_m > 0$  on a encore  $\lambda < \lambda_m$  en valeur algébrique et c'est encore le cercle relatif au point  $A$  qui est le plus dangereux.

En résumé, comme on le voit sur les figures 9 et 10 c'est le signe de  $K$  ou  $n$  seul qui est prépondérant pour l'établissement des formules que nous cherchons.

La position de  $m$  par rapport à 1 intervient seulement pour modifier la forme de la famille de cercles et surtout en ce qui concerne la position de cette famille dont le centre est obtenu pour  $t = \frac{m}{2}$ , par rapport à l'origine 0 ( $\lambda = 0$ ) qui correspond elle-même à

$$t_0 = -\frac{m(m^2 - 1)}{2}$$

mais l'allure générale de la famille reste la même. On remarquera que dans ce cas de  $K$  ou  $n$  positif les figures 9 et 10 doivent être regardées à l'envers, c'est-à-dire qu'il faut changer  $\lambda$  en  $-\lambda$ .

5. *Etats de contraintes limites pour la solution (I)*

a)  $K < 0$  — *Soudure transversale tendue.*

L'état de contrainte limite dans ce cas est tout simplement un état de traction simple puisqu'on obtient le cercle de Mohr de traction. Il n'y a donc

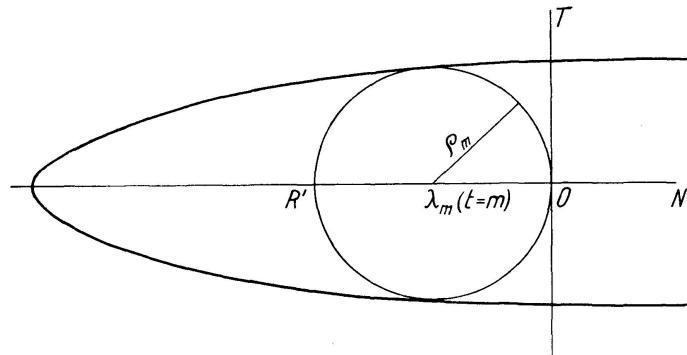


Fig. 11

plus lieu de se servir de l'équation de la courbe limite admissible (fig. 11). La condition limite est:  $2\lambda_m = 2\rho_m = R'$

$$\text{d'où} \quad 2 \frac{K}{2} (m^2 + 1) a \leq R' \quad \text{avec} \quad K = \frac{2F}{m^2 a^2} = \frac{2n}{m^2 a}$$

en posant:  $n = \frac{F}{a}$  valeur de la contrainte unitaire de référence,

$$\text{d'où:} \quad 2n \frac{m^2 + 1}{m^2} \leq R'$$

et:

$$n \leq \frac{m^2}{2(m^2 + 1)} R' \quad (14)$$

expression donnant la valeur limite admissible  $n$  de  $N$ .

Par exemple  $R' = -15 \text{ K}^0 00$

$$\text{si } m = 1 \quad n \leq -7 \text{ K}^0, 5 \frac{1}{2} = -3 \text{ K}^0 75$$

$$m = 2 \quad n \leq -12 \text{ K}^0, 0 \frac{1}{2} = -6 \text{ K}^0 00$$

Comparaison avec le calcul classique. — (Suivant circulaire du Ministère des Travaux Publics.)

$$\alpha = \beta = \gamma = 0,65 R \quad \alpha = \beta = \gamma = 0,55$$

$$\text{On doit avoir} \quad \frac{F}{h} \leq 0,65 R \quad \text{et} \quad h = a \sin \varphi = a \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$$

$$\text{d'où:} \quad \frac{F \sqrt{1+m^2}}{a m} \leq 0,65 R \quad \text{ou} \quad n \leq 0,65 \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} R$$

$$\text{pour} \quad m = 1 \quad R = -13 \text{ K}^0, 00 \quad n \leq -0,65 \frac{1}{\sqrt{2}} 13 \quad n \leq -6 \text{ K}^0, 00$$

Conclusion: Pour  $m = 1$  le calcul suivant la circulaire est plus favorable pour les soudures d'angle transversales à moins de prendre  $m = 2$ , par exemple, avec notre méthode.

b)  $K > 0$  — *Soudure transversale comprimée.*

Dans ce cas l'état de contrainte limite correspond à  $t = 0$  c'est-à-dire:

$$\lambda_0 = \frac{K}{2} (m^2 - 1) a \quad \rho_0 = \frac{K}{2} (m^2 + 1) a$$

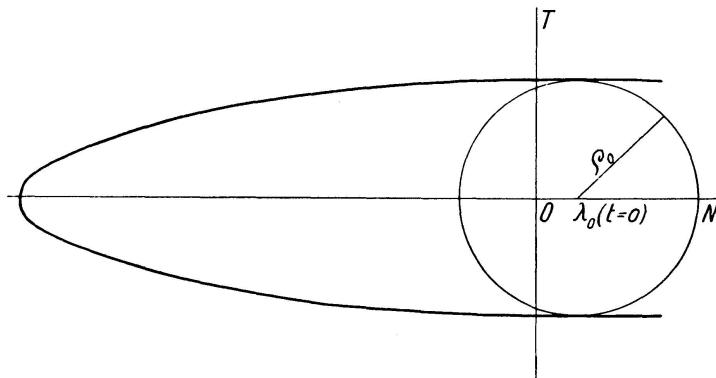


Fig. 12

Le cercle de Mohr n'est plus un cercle fondamental: il faut exprimer qu'il est tangent à la courbe limite admissible (voir fig. 12)

$$\begin{cases} T^2 + (N - \lambda_0)^2 = \rho_0^2 \\ T^2 + BN + C = 0 \end{cases}$$

d'où:  $(N - \lambda_0)^2 - BN - (\rho_0^2 + C) = 0$

ou  $N^2 - (2\lambda_0 + B)N + (\lambda_0^2 - \rho_0^2 - C) = 0$

On doit avoir une racine double:

$$(2\lambda_0 + B)^2 - 4(\lambda_0^2 - \rho_0^2 - C) = 0$$

$$4(B\lambda_0 + \rho_0^2) + B^2 + 4C = 0$$

On a d'ailleurs:  $B = -\frac{R + R'}{2}$  et  $B^2 + 4C = RR'$

et lorsque:  $\lambda_0 = \rho_0$  on retrouve naturellement à titre de vérification les 2 racines

$$\rho = \frac{R}{2} \quad \rho = \frac{R'}{2}$$

Reprendons l'équation précédente:

$$4\rho_0^2 - 2(R + R')\lambda_0 + RR' = 0$$

et remplaçons  $\lambda_0$  et  $\rho_0$  par leurs valeurs:

$$K^2(m^2+1)^2a^2 - K(m^2-1)a(R+R') + RR' = 0$$

d'où l'on peut tirer  $K$ :

$$\Delta = (m^2-1)^2a^2(R+R')^2 - 4(m^2+1)^2a^2RR'$$

$R' < 0$  et  $\Delta > 0$ ,  $\left(\frac{c}{a}\right) < 0$ . Les deux racines sont de signe contraire, il faut prendre la racine positive.

$$K = \frac{(m^2-1)(R+R') + \sqrt{(m^2-1)^2(R+R')^2 - 4(m^2+1)^2RR'}}{2(m^2+1)^2a}$$

Mais:

$$K = \frac{2n}{m^2a}$$

et

$$n < \frac{m^2}{4(m^2+1)^2} [(m^2-1)(R+R') + \sqrt{(m^2-1)^2(R+R')^2 - 4(m^2+1)^2RR'}]$$
(15)

Par exemple pour:  $R = 17 \text{ K}^0$   $R' = -15 \text{ K}^0$   $R+R' = 2$   $RR' = -17 \times 15$

$$m = 1 \quad n = \frac{m^2}{4(m^2+1)^2} 2(m^2+1) \sqrt{-RR'} = \frac{m^2}{2(m^2+1)} \sqrt{-RR'}$$

$$n = \frac{1}{4} \sqrt{-RR'} \quad n \leq \frac{16}{4} = 4 \text{ K}^0 \text{ environ}$$

$$m = 2 \quad n = 25 [3 \times 2 \sqrt{9 \times 4 + 4 \times 25 \times 17 \times 15}] \quad n = 6 \text{ K}^0, 72$$

Remarque. — Si on fait  $R = -R'$  dans la formule (15), on retrouve la formule (14). On constate que la prise en compte de  $R$ , différent de  $R'$  en valeur absolue, est avantageuse (formule 15).

## 6. Etude de l'état de contrainte relatif à la solution (II)

Les expressions des contraintes normales  $N_1 N_2$  et de la contrainte tangentielle  $T_3$  sont:

$$\text{solution (II)} \quad \begin{cases} N_1 = K \left( \frac{a}{2} - 2x + \frac{3}{m}y \right) \\ N_2 = K m \left( \frac{m}{2}a + y \right) \\ T_3 = K \left( \frac{m}{2}a - mx + 2y \right) \end{cases} \quad (16)$$

dans lesquelles  $x, y, m, K, F$  et  $a$  ont la signification indiquée plus haut (page 7) pour la solution (I): (voir fig. 6).

La figure 13 montre l'état d'équilibre du prisme de soudure de section triangulaire  $OAB$ .

— Sur  $OB$  ne s'exerce aucun effort, cette face étant libre.

— Sur  $OA$  la contrainte normale est constante de  $O$  à  $A$ , la résultante passant au milieu de  $OA$ . La contrainte de cisaillement est linéaire et s'annule au milieu de  $OA$  de sorte que la résultante des contraintes de cisaillement sur  $OA$  est nulle.

— Sur  $AB$  la contrainte normale est linéaire de  $A$  à  $B$  et s'annule au milieu de  $AB$ ; la résultante est donc un couple égal à  $\frac{Fa}{2}$ . La contrainte de cisaillement est linéaire de  $A$  à  $B$  et s'annule au  $1/4$  de  $AB$  à partir de  $A$  et la résultante est égale à  $F$ .

Constante  $K$  — Comme pour (I):

$$K = \frac{2n}{m^2a} \quad (17)$$

Les remarques faites pour la solution (I) (page 6) restent valables à condition toujours que:

$$N_1 N_2 - T_3^2 \leq 0$$

Pour simplifier le calcul, mettons les expressions (16) sous la forme:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 = K \frac{1}{m} \left[ \left( \frac{ma}{2} + y \right) + 2(y - mx) \right] \\ N_2 = K m \left( \frac{ma}{2} + y \right) \\ T_3 = K \left[ \left( \frac{ma}{2} + y \right) + (y - mx) \right] \end{array} \right.$$

et posons:  $y - mx \equiv P$      $\frac{ma}{2} + y \equiv Q$

ou si on introduit  $t$  on a:  $(t - m)x \equiv P$  (fig. 8)     $\frac{ma}{2} + tx \equiv Q$

d'où:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 = K \frac{1}{m} (2P + Q) \\ N_2 = K m Q \\ T_3 = K (P + Q) \end{array} \right. \quad (16')$$

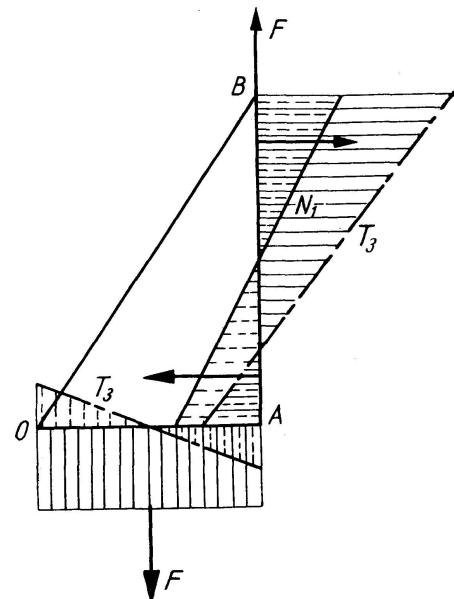


Fig. 13

On obtient immédiatement:

$$N_1 N_2 - T_3^2 = -K^2 P^2 = -K^2 (y - mx)^2 \text{ toujours } \leq 0$$

comme avec la solution (I).

On a donc les mêmes expressions de  $\rho$  et  $\lambda$  (voir page 7). Calculons  $S_1 + S_2$  et  $S_1 - S_2$ :

$$S_1 + S_2 = N_1 + N_2 \quad S_1 - S_2 = 2 \sqrt{\left(\frac{N_1 - N_2}{2}\right)^2 + T_3^2}$$

Or  $N_1 + N_2 = K \frac{1}{m} [2P + (m^2 + 1)Q]$

$$N_1 - N_2 = K \frac{1}{m} [2P - (m^2 - 1)Q]$$

Donc:  $\rho^2 = \frac{K^2}{4} \frac{1}{m^2} [2P - (m^2 - 1)Q]^2 + K^2 (P + Q)^2$

$$\rho^2 = \frac{K^2}{4} \frac{1}{m^2} [4P^2 - 4(m^2 - 1)PQ + (m^2 - 1)^2 Q^2 + 4m^2(P^2 + 2PQ + Q^2)]$$

$$\rho^2 = \frac{K^2}{4} \frac{1}{m^2} [4(m^2 + 1)P^2 + 4(m^2 + 1)PQ + (m^2 + 1)^2 Q^2]$$

ou:  $\rho^2 = \frac{K^2}{4} \frac{m^2 + 1}{m^2} [4P^2 + 4PQ + (m^2 + 1)Q^2]$  (18)

et  $\lambda = \frac{K}{2} \frac{1}{m} [2P + (m^2 + 1)Q]$  (17)

Cherchons à éliminer  $t$  entre ces deux équations et, pour cela, éliminons d'abord  $Q$ : de la 2ème équation, on tire:

$$Q = \frac{1}{m^2 + 1} \left( \frac{2}{K} m \lambda - 2P \right)$$

En remplaçant dans la 1ère  $Q$  par cette expression, on a:

$$\rho^2 = \frac{K^2}{4} \frac{m^2 + 1}{m^2} \left[ 4P^2 + 4P \frac{1}{m^2 + 1} \left( \frac{2}{K} m \lambda - 2P \right) + \frac{\left( \frac{2}{K} m \lambda - 2P \right)^2}{m^2 + 1} \right]$$

d'où:  $\rho^2 = K^2 P^2 + \lambda^2$

et:  $\rho^2 = K^2 (t - m)^2 x^2 + \lambda^2$  (18')

avec:  $\lambda = \frac{K}{2} \frac{1}{m} \left[ 2(t - m)x + (m^2 + 1) \left( \frac{ma}{2} + tx \right) \right]$  (17')

Tirons  $t$  de la 2ème équation et remplaçons dans la 1ère, on a:

$$tx = \frac{m}{m^2 + 3} \left[ 2 \frac{\lambda}{K} + 2x - (m^2 + 1) \frac{a}{2} \right]$$

d'où

$$tx - mx = \frac{m}{m^2+3} \left[ 2 \frac{\lambda}{K} - (m^2+1) \left( x + \frac{a}{2} \right) \right]$$

$$\text{et, par suite: } \rho^2 = K^2 \frac{m^2}{(m^2+3)^2} \left[ \frac{2\lambda}{K} - (m^2+1) \left( x + \frac{a}{2} \right) \right] + \lambda^2 \quad (19)$$

$x$  étant considéré comme fixé  $0 \leq x \leq a$  on peut étudier, comme pour la solution (I) les cercles de Mohr en fonction de  $\lambda$ .

### 7. Etude de la famille des cercles de Mohr pour la solution (II)

Comme pour la solution (I), nous examinerons la configuration de la famille de cercle en étudiant la variation de  $\rho$  en fonction de  $\lambda$ . On trouve encore que la courbe représentative est une hyperbole, donc le centre est le point:

$$\lambda = 2K \frac{m^2}{m^2+9} \left( x + \frac{a}{2} \right) \quad \rho = 0 \quad (\text{voir fig. 14 et 15})$$

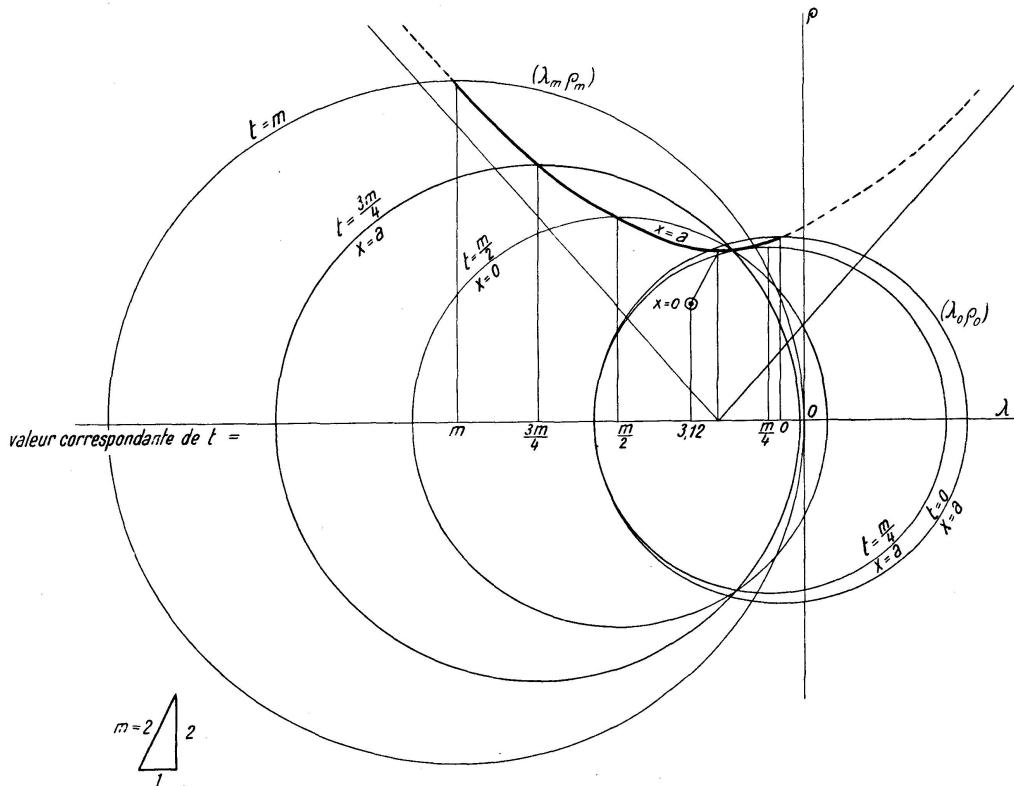


Fig. 14. Solution II. Famille des cercles de Mohr pour  $K$  ou  $n < 0$  et  $m > 1$  ( $m = 2$ )

Les sommets ont pour ordonnées:

$$\pm \rho = \pm K^m \sqrt{\frac{m^2+1}{m^2+9}} \left( x + \frac{a}{2} \right)$$

Lorsque  $x \neq 0$  pour  $x = 0$  on a toujours  $\rho = \lambda = \frac{K}{2} (m^2+1) \frac{a}{2}$

La pente des asymptotes a pour valeur:

$$\pm \frac{1}{m^2+3} \sqrt{(m^2+1)(m^2+9)} \quad \text{indépendante de } x$$

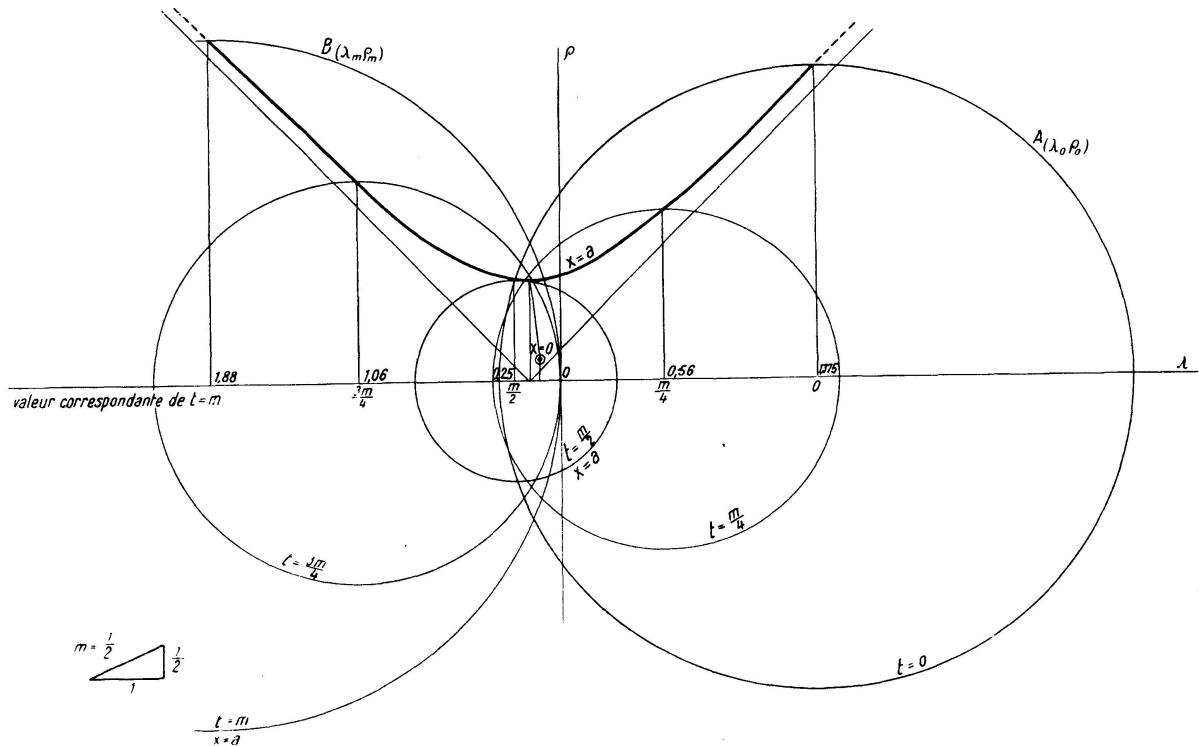


Fig. 15. Solution II. Famille des cercles de Mohr pour  $K$  ou  $n < 0$  et  $m < 1$  ( $m = 1/2$ )

On peut en outre suivre la variation de  $\lambda$  et  $\rho$  quand  $t$  varie 0 à  $m$ .

$$\text{Pour } t=0 \quad \lambda_0 = \frac{K}{2} \left[ (m^2+1) \frac{a}{2} - 2x \right] \quad \rho_0 = \frac{|K|}{2} \sqrt{m^2+1} \sqrt{(m^2+1) \frac{a^2}{4} - 2ax + 4x^2}$$

$$t = \frac{m}{2} \quad \lambda_{\frac{m}{2}} = \frac{K}{2} \left[ (m^2+1) \frac{a}{2} + (m^2-1) \frac{x}{2} \right] \quad \rho_{\frac{m}{2}} = \frac{|K|}{2} (m^2+1) \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{m^2-1}{m^2+1} \frac{ax}{2} + \frac{x^2}{4}}$$

$$t = m \quad \lambda_m = \frac{K}{2} (m^2+1) \left( \frac{a}{2} + x \right) \quad \rho_m = |\lambda_m|$$

Il faut remarquer que pour la solution (II) nous n'avons plus  $\lambda$  et  $\rho$  proportionnels à  $x$  comme c'était le cas avec la solution (I). Il est donc nécessaire d'étudier l'influence de la variation de  $x$  entre 0 et  $a$  sur les valeurs de  $\lambda$  et  $\rho$ . Mais les propriétés établies pour la solution (I) quant aux grandeurs relatives de  $\lambda$  et  $\lambda_m$ ,  $\rho$  et  $\rho_m$  restent vraies.

Nous allons montrer en effet qu'en valeur absolue, la plus grande valeur de  $\lambda$  est toujours celle qui correspond à  $t = m$ , c'est-à-dire que l'on a:  $|\lambda| \leq |\lambda_m|$  ou  $|\lambda - \lambda_m| \leq 0$ . Mettant en évidence  $t$  et  $x$  on a:

$$\lambda = \frac{K}{2} \frac{1}{m} \left[ (m^2 + 3)tx - 2mx + m(m^2 + 1) \frac{a}{2} \right]$$

et  $\lambda_m = \frac{K}{2} (m^2 + 1) \left( \frac{a}{2} + x \right)$

d'où  $\lambda - \lambda_m = \frac{K}{2} \frac{m^2 + 3}{m} (t - m)x$

or  $t - m \leq 0$  donc:  $|\lambda - \lambda_m|$  est toujours  $\leq 0$

On peut voir de même que  $\rho \leq \rho_m$  ou, ce qui revient au même, puisque  $\rho$  et  $\rho_m$  sont positifs, que  $\rho^2 < \rho_m^2$  ou encore:

$$\rho^2 - \rho_m^2 \leq 0$$

En effet:  $\rho^2 = K^2 (t - m)^2 x^2 + \lambda^2$

$$\rho_m^2 = \lambda_m^2$$

et on doit avoir:

$$K^2 (t - m)^2 x^2 + \lambda^2 - \lambda_m^2 \leq 0$$

Or, nous connaissons  $\lambda - \lambda_m$  calculons:  $\lambda + \lambda_m$

$$\lambda + \lambda_m = \frac{K}{2} \left[ \frac{m^2 + 3}{m} tx + (m^2 - 1)x + (m^2 + 1)a \right]$$

de sorte que:

$$\lambda^2 - \lambda_m^2 = \frac{K^2}{4} \frac{m^2 + 3}{m} \left[ \left( \frac{m^2 + 3}{m} t + m^2 - 1 \right) x + (m^2 + 1)a \right] (t - m)x$$

et on doit avoir:

$$\frac{K^2}{4} (t - m)x \left\{ \left[ 4(t - m) + \frac{m^2 + 3}{m} \left( \frac{m^2 + 3}{m} t + m^2 - 1 \right) \right] x + \frac{(m^2 + 3)(m^2 + 1)}{m} a \right\} \leq 0$$

or,  $t - m < 0$ , il faut donc que:

$$\left[ 4(t - m) + \frac{m^2 + 3}{m} \left( \frac{m^2 + 3}{m} t + m^2 - 1 \right) \right] x + \frac{(m^2 + 3)(m^2 + 1)}{m} a \geq 0$$

ou:

$$\left\{ \left[ \frac{(m^2 + 3)^2}{m^2} + 4 \right] t + \frac{(m^2 + 3)(m^2 - 1)}{m} - 4m \right\} x + \frac{(m^2 + 3)(m^2 + 1)}{m} a \geq 0$$

ou:

$$\left( \frac{m^4 + 10m^2 + 9}{m^2} t + \frac{m^4 - 2m^2 - 3}{m} \right) x + \frac{(m^2 + 3)(m^2 + 1)}{m} a \geq 0$$

remarquant que:  $m^4 + 10m^2 + 9 = (m^2 + 1)(m^2 + 9)$

et:  $m^4 - 2m^2 - 3 = (m^2 + 1)(m^2 - 3)$

on a:  $\frac{m^2 + 1}{m^2} \left\{ [(m^2 + 9)t + m(m^2 - 3)]x + m(m^2 + 3)a \right\} \geq 0$

$$\text{ou } \frac{m^2 + 1}{m^2} [(m^2 + 9)tx + m^3(a + x) + 3m(a - x)] \geq 0$$

l'inégalité est bien satisfaite pour  $0 \leq x \leq a$ , tous les termes étant positifs.

En résumé, pour une valeur donnée de  $x$ , d'ailleurs quelconque, mais comprise entre 0 et  $a$  toujours vis-à-vis des deux cercles  $(\lambda_m \rho_m)$  pour  $t = m$  et  $(\lambda, \rho)$  pour  $t$  quelconque comprise entre 0 et  $m$ :

$$|\lambda_m| \geq |\lambda| \quad \rho_m \geq \rho$$

Mais comme on a  $\rho_m = |\lambda_m|$  et que la plus grande valeur possible de  $|\lambda_m|$  correspond à  $x = a$ , le cercle le plus dangereux est le cercle:

$$\rho_m = |\lambda_m| = \frac{|K|}{2} (m^2 + 1) \frac{3a}{2} \quad (\text{voir fig. 14 et 15})$$

Cette conclusion est valable pour  $K < 0$  comme dans la solution (I). Lorsque  $K > 0$  on n'a plus ici  $\rho_m = \rho_0$  et il faut voir quel est le cercle le plus dangereux quand  $t$  varie de 0 à  $m$ .

Ici, comme pour la solution (I) page 46, il faut limiter la famille de cercles aux points  $(\lambda_0 \rho_0)$  pour  $t = 0$  et  $(\lambda_m \rho_m)$  pour  $t = m$  et on a:  $\lambda_m = \rho_m$ .

Ces résultats sont indiqués sur les figures 14 et 15.

Des propriétés qui viennent d'être établies et de la comparaison de ces figures avec la „courbe limite admissible“, on conclut que ce sont toujours les cercles extrêmes:

$$(\lambda_0 \rho_0) \quad t = 0 \quad \text{avec } x = a \quad (\text{Point } A)$$

$$\text{ou: } (\lambda_m \rho_m) \quad t = m \quad \text{avec } x = a \quad (\text{Point } B)$$

qui sont les plus dangereux.

Mais dans ce cas encore, comme précédemment, (page 46), la position des faisceaux de cercle de Mohr par rapport à l'origine dépend des signes de  $\lambda_0$  et  $\lambda_m$ , en relation eux-mêmes avec les signes de  $K$  et de la quantité:

$$\mathfrak{A} = (m^2 + 1) \frac{a}{2} - 2x \quad (\text{voir page 54})$$

Plusieurs cas doivent être aussi envisagés ici, mais en fonction de  $m$  et de  $x$ .

a)  $K$  ou  $n$  sont  $< 0$ , cas de l'assemblage tendu:

$$\alpha) \quad \mathfrak{A} = (m^2 + 1) \frac{a}{2} - 2x > 0 \quad \lambda_0 < 0 \quad \text{et} \quad \lambda_m < 0$$

mais  $\lambda_m < \lambda_0$  en valeur puisque  $K < 0$  de sorte que le cercle le plus dangereux est le cercle relatif au point  $B$   $(\lambda_m \rho_m)$  avec  $\lambda_m = \rho_m$ ; c'est le cercle de traction, sous réserve que l'on ait bien  $\mathfrak{A} > 0$ .

Une discussion simple donne les résultats suivants

$$m < \sqrt{3} \quad \begin{cases} x < (m^2 + 1) \frac{a}{4} & \mathfrak{A} > 0 \\ x > (m^2 + 1) \frac{a}{4} & \mathfrak{A} < 0 \end{cases}$$

$$m > \sqrt{3} \quad \mathfrak{A} > 0$$

On a toujours  $\lambda_m < \lambda_0$  en valeur algébrique et c'est encore le cercle relatif au point  $B$  qui est le plus dangereux, sous réserve, cependant, que  $\mathfrak{A} < 0$ , inégalité qui n'est pas toujours vérifiée.

$$a(m^2 + 1) \frac{a}{4} < x < a \text{ avec } m < \sqrt{3} \text{ d'après le paragraphe a).}$$

b)  $K$  ou  $n$  sont  $> 0$ , cas de l'assemblage comprimé:

$$\beta) \quad \mathfrak{A} = (m^2 + 1) \frac{a}{2} - 2x > 0 \quad \lambda_0 > 0 \quad \lambda_m > 0$$

mais  $\lambda_0 < \lambda_m$  en valeur algébrique puisque  $K > 0$  de sorte que le cercle le plus dangereux est le cercle relatif au point  $A$  ( $\lambda_0 \rho_0$ ) qui n'est pas un cercle de traction.

Ceci n'a lieu que si  $\mathfrak{A} > 0$  c'est-à-dire que l'on a:

$$x < (m^2 + 1) \frac{a}{4} \quad \text{avec} \quad m < \sqrt{3}$$

ou  $x$  quelconque entre 0 et  $a$  si  $m > \sqrt{3}$

$$\gamma) \quad \mathfrak{A} = (m^2 + 1) \frac{a}{2} - 2x < 0 \quad \lambda_0 < 0 \quad \text{et} \quad \lambda_m > 0$$

on a encore  $\lambda_0 < \lambda_m$  en valeur algébrique et c'est encore le cercle relatif au point  $A$  qui est le plus dangereux. Il faut que  $\mathfrak{A} < 0$  c'est-à-dire que:

$$(m^2 + 1) \frac{a}{4} < x < a \quad \text{avec} \quad m < \sqrt{3}$$

En résumé:

Pour  $K$  ou  $n < 0$  (traction) c'est le cercle relatif au point  $B$  qui est le plus éloigné de l'origine, en général, quelque soit  $m$ , excepté si  $m < \sqrt{3}$  pour  $x > (m^2 + 1) \frac{a}{4}$  alors c'est le cercle relatif à  $A$ .

Pour  $K$  ou  $n > 0$  (compression) c'est toujours le cercle relatif au point  $B$  qui est le plus éloigné de l'origine en général quelque soit  $m$  excepté si  $m \leq \sqrt{3}$  pour  $x > (m^2 + 1) \frac{a}{4}$  alors c'est le cercle relatif à  $A$ .

Mais l'examen des figures 14 et 15 montre que dans tous les cas possibles les hyperboles situées entre le point  $x = 0$  et l'hyperbole  $x = a$  donnent toujours

la même allure générale à la famille des cercles de Mohr (voir page 54 et fig. 15).

On constate, d'après ces résultats, que l'allure du faisceau des cercles de Mohr reste la même dans le cas (1) et par suite, le cercle le plus dangereux est toujours celui qui correspond à  $t=m$  pour  $x=a$  lorsque  $K$  ou  $n < 0$ .

Mais lorsque  $K$  ou  $n > 0$  il y a doute, notamment pour les petites valeurs de  $m$  (voir fig. 15).

Une discussion plus serrée conduite avec les données :

$$\begin{aligned} R &= 17 \text{ K}^0 \\ R' &= -15 \text{ K}^0 \end{aligned}$$

montre que pour  $m < 2,32$  environ, le cercle le plus dangereux est celui correspondant à  $T=0$  pour  $x=a$ .

Pour  $m$  supérieur à 2,32 environ, le cercle le plus dangereux est celui correspondant à  $t=m$  pour  $x=a$ .

### 8. Etats de contrainte limite pour la solution (II)

#### a) $K < 0$ — Soudure transversale tendue.

Nous venons d'arriver à la même conclusion que pour la solution (I) et la condition limite est encore (voir page 48) :

$$\begin{aligned} 2\lambda_m &= 2\rho_m = R' && \text{pour } x=a \\ \text{d'où: } & \frac{K}{2}(m^2+1)\frac{3a}{2} \leq R' && \text{avec } K = \frac{2u}{m^2a} \\ \text{d'où: } & n \leq \frac{2m^2}{3(m^2+1)}R' && (20) \end{aligned}$$

pour valeur de la limite admissible de  $n$ .

Par exemple pour:  $R' = -15 \text{ K}^0 00$

$$\begin{aligned} \text{si } m=1 & n \leq -5 \text{ K}^0 00 \\ \text{si } m=2 & n \leq -8 \text{ K}^0 00 \end{aligned}$$

#### b) $K > 0$ — Soudure transversale comprimée

Nous sommes ainsi arrivés à la même conclusion que pour la solution (I) pour  $m < \sqrt{3}$  et nous devons exprimer que le cercle de Mohr  $\lambda_0 \rho_0$  est tangent à la courbe limite admissible (voir page 49). On obtient la même condition :

$$4\rho_0^2 - 2(R+R')\lambda_0 + RR' = 0 \text{ pour } x=a$$

On a, en se reportant aux valeurs de  $\lambda_0 \rho_0$  (page 54) :

$$\lambda_0 = \frac{K}{2} \frac{m^2-3}{2}a \quad \rho_0 = \frac{K}{2} \frac{\sqrt{(m^2+1)(m^2+9)}}{2}a$$

$$(m^2 + 1)(m^2 + 9)a^2 \cdot K^2 - 2(m^2 - 3)(R + R')a \cdot K + 4RR' = 0$$

on a:  $\Delta = (m^2 - 3)^2(R + R')^2a^2 - 4(m^2 + 1)(m^2 + 9)RR'a^2$

or  $R' < 0$  donc  $\Delta > 0$  et le produit des racines est  $< 0$ . Nous prendrons la racine  $> 0$  pour  $K$  et on aura par suite:

$$n \leq \frac{m^2}{2(m^2 + 1)(m^2 + 9)} [(m^2 - 3)(R + R') + \sqrt{(m^2 - 3)^2(R + R')^2 - 4(m^2 + 1)(m^2 + 9)RR'}]$$

(21)

Par exemple pour:

$$R = 17 \text{ K}^0 \quad R' = -15 \text{ K}^0 \quad R + R = 2 \quad RR' = -17 \times 15$$

$$m = 1 \quad m = \frac{1}{2 \times 2 \times 10} [-2 \times 2 + \sqrt{4 \times 4 + 4 \times 2 \times 10 \times 17 \times 15}]$$

d'où:  $n = 3 \text{ K}^0, 27$

$$m = 2 \quad n = \frac{4}{2 \times 5 \times 13} [1 \times 2 \sqrt{1 \times 4 + 4 \times 5 \times 13 \times 17 \times 15}]$$

d'où:  $n = 8 \text{ K}^0, 00$

Remarque. — Si on fait  $R = -R'$  dans la formule (21) on a:

$$n = \frac{m^2}{\sqrt{(m^2 + 1)(m^2 + 9)}} (-R')$$

mais ici on ne retrouve pas naturellement la formule (20) parce que avec la solution (II)  $\rho_0 \neq \rho_m$ .

On constate ici, contrairement à ce qui a été indiqué pour la solution (I) page 50 que la prise en compte de  $R \neq R'$  en valeur absolue n'est pas forcément avantageuse, cela dépend de la valeur de  $m$ .

Lorsque  $m > 2,32$  il faut considérer le cercle  $(\lambda_m \rho_m)$  et on retombe sur la formule (20).

### Chapitre III. Calcul des cordons d'angle latéraux<sup>4)</sup>

#### 1. Equation d'équilibre élastique

Nous négligeons le couple des deux forces  $F$  et une solution approchée est donnée pour les déformations:

<sup>4)</sup> Une partie des résultats qui suivent a été exposée dans le Bulletin de la Société des Ingénieurs Soudeurs (voir page 5). Ils sont approchés, ainsi que ceux établis dans le paragraphe 3 page 25, parce que les conditions aux limites ne sont pas entièrement satisfaites.

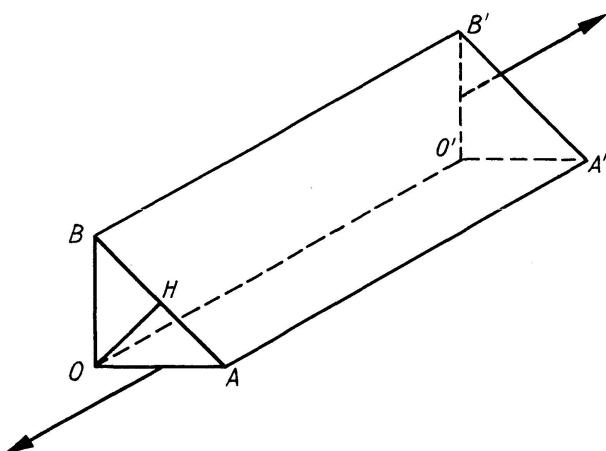


Fig. 16

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \\ w = \frac{1}{\mu} (Ax + By) \end{cases}$$

qui satisfont aux équations générales de l'élasticité pour le cordon  $OAB$  (voir fig. 16). Les contraintes sont les suivantes:

$$N_1 = N_2 = N_3 = 0$$

$$T_1 = B \quad T_2 = A \quad T_3 = 0$$

Les 3 contraintes principales  $\nu_1 \nu_2 \nu_3$  ( $\nu_3 < \nu_2 < \nu_1$ ) sont les racines de l'équation en  $S$ :

$$\begin{vmatrix} -S & O & A \\ O & -S & B \\ A & B & -S \end{vmatrix} = 0$$

d'où:

$$S(S^2 - A^2 - B^2) = 0; \text{ on a donc:}$$

$$\nu_3 = -\sqrt{A^2 + B^2} \quad \nu_2 = 0 \quad \nu_1 = +\sqrt{A^2 + B^2}$$

On a donc un problème de cisaillement pur et  $\sqrt{A^2 + B^2}$  est le rayon du cercle de Mohr.

On démontre d'ailleurs que:

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \frac{F}{h}$$

$h = OH$  étant la hauteur du triangle  $OAB$ . L'équation du cercle de Mohr est:

$$N^2 + T^2 = \tau^2 \quad (22)$$

$\tau$  étant le cisaillement égal en valeur absolue à  $\nu_1$  et  $\nu_3$  de sorte que:

$$\tau = \sqrt{A^2 + B^2} \quad (23)$$

2. Si nous considérons toujours la courbe limite admissible:

$$T^2 + BN + C = 0 \quad (24) \quad B = -\frac{R + R'}{2} \quad C = -\frac{(R - R')^2}{16}$$

quand la limite permise est atteinte il faut que le cercle de Mohr soit tangent à cette courbe.

En éliminant  $T$  entre les deux équations on a l'équation en  $N$ :

$$N^2 - BN - (\tau^2 + C) = 0$$

qui doit avoir une racine double:

$$B^2 + 4(\tau^2 + C) = 0 \text{ ou } 4\tau^2 + R R' = 0$$

on en tire:

$$\boxed{\tau = \frac{1}{2} \sqrt{-R R'}} \quad (25)$$

condition évidente puisque la courbe limite admissible a précisément été déterminée comme tangente au cercle de Mohr de cisaillement pur:

Si:  $R' = -\frac{30}{2} = -15$   $R = +17 \text{ K}^0 00$

$$\tau \leq \frac{1}{2} \sqrt{15 \times 17} \quad \neq \quad 8 \text{ K}^0 00$$

### 3. Cas d'un cordon d'angle travaillant longitudinalement au cisaillement et à l'extension

Ce cas se produit quand le cordon d'angle assemble des semelles de membrures de poutres. Le cordon faisant partie intégrante de la membrure participe aussi forcément à la sollicitation générale de la membrure.

Ce fait est généralement perdu de vue, de sorte que l'on déclare quelquefois à tort que les cordons d'angle travaillent très peu.

Si nous combinons le cas de la traction ou compression simple:

$$N_1 = N_2 = 0 \quad N_3 = \nu \quad T_1 = T_2 = T_3 = 0$$

avec celui du cisaillement pur on a l'état de contrainte résultant:

$$N_1 = N_2 = 0 \quad N_3 = \nu \quad T_1 = B \quad T_2 = A \quad T_3 = 0$$

Les 3 contraintes principales sont racines de l'équation:

$$\begin{vmatrix} -S & O & A \\ O & -S & B \\ A & B & \nu - S \end{vmatrix} = 0$$

ou:  $S[S^2 - \nu s - (A^2 + B^2)] = 0 \text{ ou } S(S^2 - \nu s - \tau^2) = 0$

équation dont les racines sont:

$$\nu_3 = \frac{\nu - \sqrt{\nu^2 + 4\tau^2}}{2} \quad \nu_2 = 0 \quad \nu_1 = \frac{\nu + \sqrt{\nu^2 + \tau^2}}{2}$$

On obtient alors un cercle de Mohr dont le rayon est:

$$\frac{1}{2} \sqrt{\nu^2 + 4\tau^2} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu^2}{4} + \tau^2}$$

et l'abscisse du centre:  $\frac{n}{2}$ . Son équation est:

$$T^2 + N^2 - \nu N - \tau^2 = 0 \quad (25')$$

La figure 17 montre la composition des cercles de Mohr, composants du cisaillement simple et de la traction ou compression simple.

Il doit être tangent à la courbe limite. En élément  $T^2$  entre les deux équations on a l'équation en  $N$

$$N^2 - (\nu + B)N - \left( \tau^2 - \frac{\nu^2}{4} + C \right) = 0$$

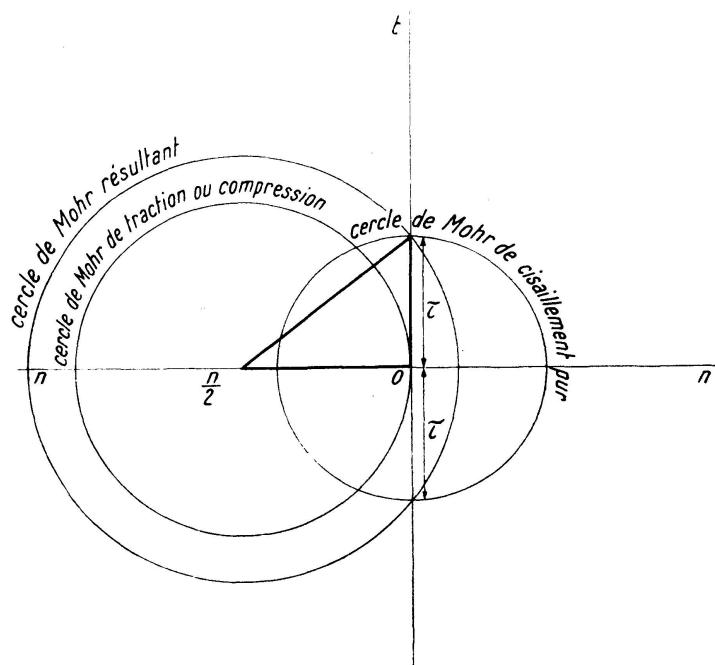


Fig. 17

qui doit avoir une racine double:

$$(\nu + B)^2 + 4 \left( \tau^2 - \frac{\nu^2}{4} + C \right) = 0$$

ou:  $2 + 2B + B^2 + 4\tau^2 - 2 + 4C = 0$

$$4\tau^2 + 2 + 2B + RR' = 0$$

ou:  $4\tau^2 + \nu^2 - (R + R')\nu + RR' = 0 \quad (26)$

d'où  $\tau = \frac{1}{2} \sqrt{(R + R')\nu - \nu^2 - RR'} \quad (26')$

or:  $-RR'$  est  $> 0$  et est le terme principal sous le radical; le terme  $\nu^2$  est toujours soustractif. Quant au terme  $(R + R')\nu$  son influence est assez faible;

il est soustractif si  $\nu < 0$  (cas d'un effort normal de traction) et additif si  $\nu > 0$  (cas d'un effort normal de compression).

En reprenant l'exemple numérique du paragraphe 2<sup>o</sup> – et en choisissant:

$$\nu = -13 \text{ K}^0, 00 \quad (\text{traction}) \quad \text{on a:}$$

$$\tau \leq \frac{1}{2} \sqrt{2 \times 13 - 169 + 255}$$

ou:

$$\tau \leq 3 \text{ K}^0, 9$$

Par conséquent si on ne tient pas compte de  $\nu$  on a droit à une contrainte de cisaillement:  $\tau = 8 \text{ K}^0, 00$ , alors que si on en tient compte la contrainte maximum permise est  $\tau = 3 \text{ K}^0, 9$ .

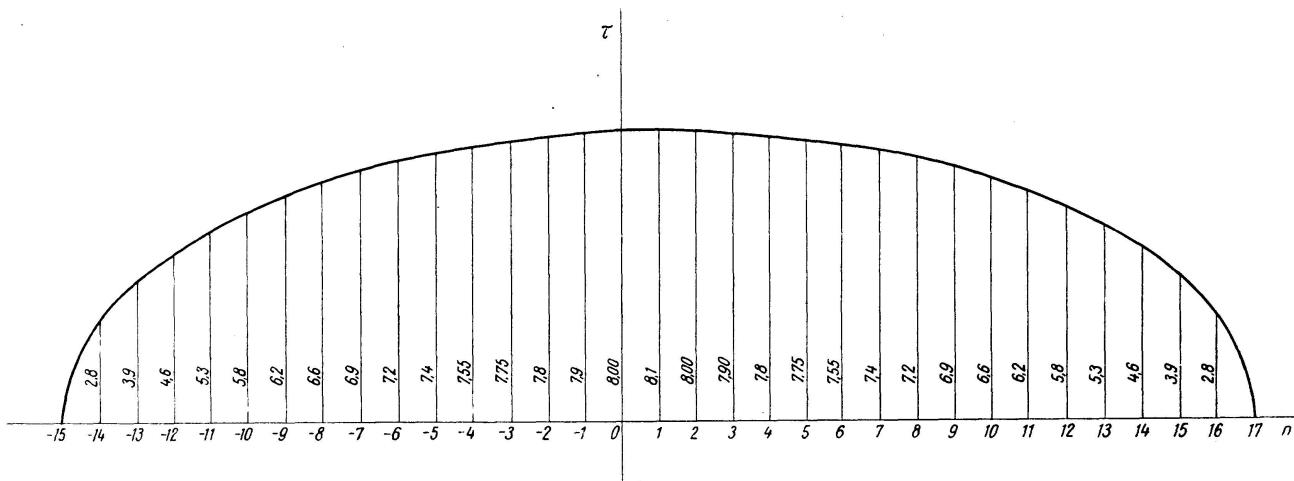


Fig. 18

Si

$$\nu = +13 \text{ K}^0, 00 \quad (\text{compression}) \quad \text{on a:}$$

$$\tau = \frac{1}{2} \sqrt{2 \times 13 - 169 + 255}$$

ou:

$$\tau \leq 5 \text{ K}^0, 3$$

résultat plus favorable.

*Etude de la relation (26) liant  $\tau$  et  $\nu$ :*

On voit que l'influence de  $\nu$  sur un cordon longitudinal est importante. Il est donc intéressant de tracer la courbe représentative de la formule (26) par rapport aux variables  $n$  et  $\tau$  (voir fig. 18).

### Conclusion

Cette étude nous a montré sur un cas concret qu'il est possible d'associer, sans difficultés insurmontables, la recherche des contraintes par la théorie de l'élasticité à la notion de courbe intrinsèque prise comme limite de sécurité.

Ainsi que nous l'avons vu, il suffit d'envisager la famille des cercles de Mohr, représentant l'état de contrainte auquel est soumis la pièce que l'on calcule. On limitera cette famille de cercles au contour de la pièce et il restera à exprimer que l'ensemble de cercles, ainsi limité, est intérieur à la courbe limite admissible homothétique de la courbe intrinsèque de limite élastique.

Examinons maintenant l'influence de la forme des cordons sur les résultats précédents:

*Cordons d'angle frontaux*

*Solution I.*

a) Soudure tendue — Contrainte maximum admissible:

$$n = \frac{m^2}{2(m^2+1)} R' \quad (14)$$

Il est intéressant de tracer la courbe représentative de  $n$  en fonction de  $m$  (voir fig. 19), on constate qu'il n'y a pas intérêt à dépasser la valeur  $m = 2$ . En-dessous de  $m = 1$  les résultats sont très défavorables. La valeur  $m = \frac{1}{2}$  semble pouvoir être généralement adoptée.

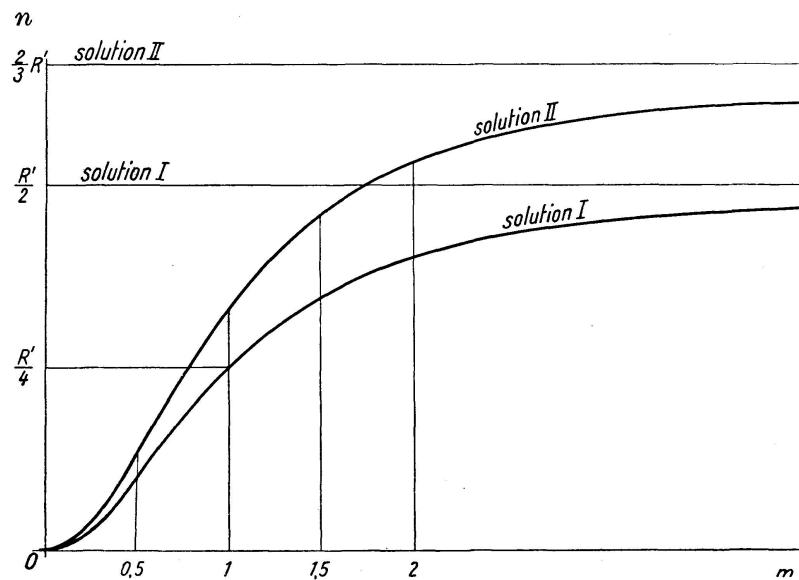


Fig. 19

b) Soudure comprimée — Contrainte maximum admissible:

$$n = \frac{m^2}{4(m^2+1)^2} [(m^2-1)(R+R') + \sqrt{(m^2-1)^2(R+R')^2 - 4(m^2+1)^2RR'} ] \quad (15)$$

Si  $(R+R')$  est petit, on peut utiliser la formule (14) et la courbe de la figure 19 sans erreur sensible.

Dans le cas contraire, il faut calculer avec la formule (15); les contraintes énoncées au paragraphe a) restent vraies. D'ailleurs dans le cas de  $m=1$  on trouve, comme nous l'avons vu page 50 que:

$$n = \frac{m^2}{2(m^2+1)} \sqrt{-RR'} = \frac{\sqrt{-RR'}}{4}$$

### Solution II

a) Soudure tendue — Contrainte maximum admissible

$$n = \frac{2m^2}{3(m^2+1)} R' \quad (20)$$

Sur la figure 19 est tracée la courbe représentative dont les ordonnées sont celles de la formule (14) multipliées par  $\frac{4}{3}$ . Les conclusions sont les mêmes.

b) Soudure comprimée pour  $m < \sqrt{3}$  — Contrainte maximum admissible:

$$n = \frac{m^2}{2(m^2+1)(m^2+9)} [(m^2-3)(R+R') + \sqrt{(m^2-3)^2(R+R')^2 - 4(m^2+1)(m^2+9)RR'} \quad (21)$$

Si  $(R+R')$  est petit, on peut utiliser la formule suivante:

$$n = \frac{m^2}{\sqrt{(m^2+1)(m^2+9)}} \sqrt{-RR'}$$

Dans le cas de  $m = \sqrt{3}$  les mêmes termes disparaissent de la formule (21) et on a:

$$n = 0,30 \sqrt{-RR'}$$

Les formules auxquelles nous parvenons par la méthode exposée ici semblent plus avantageuses que les formules classiques résultant de l'application des règlements.

Il faut remarquer que cette contradiction n'est qu'apparente parce que, étant donné la rigueur de nos calculs à partir des hypothèses faites, nous faisons état des cercles de Mohr limites, de diamètre plus important que le cercle de Mohr correspondant au sommet des hyperboles des fig. 9, 10, 14, 15.

Il n'est pas douteux que, pratiquement, les zones du cordon, au voisinage de  $t=n$  et de  $t=0$  se plastifieraient assez vite, sans danger pour la tenue de l'ensemble du cordon.

### Cordons d'angle latéraux

Les formules auxquelles nous sommes parvenus permettent de prendre en compte à la fois  $\tau$  et  $n$ . On partira d'une solution initiale calculée avec  $\tau$  seul et on corrigera le résultat obtenu en agissant sur la section du cordon pour satisfaire à la condition (26).

### Résumé

Le problème du calcul des cordons de soudure d'angle est tout d'abord posé dans sa généralité. Les différences de sollicitation d'un cordon frontal et d'un cordon latéral sont ensuite mises en lumière. Dans les deux cas on est amené à calculer le cordon de soudure, isolé de l'ensemble, moyennant certaines hypothèses simplificatrices. Pour ces raisons, les calculs présentés n'ont pas un caractère complet de rigueur mathématique mais constituent une approximation tenant compte le mieux possible du mode de sollicitation de chaque sorte de cordon. Les solutions élastiques d'équilibre plan sont cependant rigoureuses à partir des hypothèses faites.

Les propriétés mécaniques intrinsèques du métal des cordons de soudure sont définies par une courbe intrinsèque de forme parabolique, faisant état de la limite élastique à la traction et de la limite élastique à la compression. On en déduit par homothétie dans le rapport du coefficient de sécurité une courbe dite „courbe limite admissible“.

Le calcul des cordons de soudure d'angle frontaux est alors établi pour deux solutions d'équilibre élastique plan différant par le point de passage de la force extérieure normale à la base du cordon. Ces deux solutions semblent encadrer la réalité. Les états de contrainte sont définis par la famille des cercles de Mohr attachés à chaque point du domaine triangulaire limité par les faces du cordon.

Les formules sont alors obtenues en écrivant que la portion de famille ainsi limitée est toute entière à l'intérieur de la „courbe limite admissible“.

Le calcul des cordons d'angle latéraux est fait par la théorie de l'élasticité en supposant un cisaillement longitudinal uniforme sur les deux surfaces de contact. Enfin, on a tenu compte du fait général suivant: le cordon de soudure latéral faisant partie intégrante des pièces qu'il assemble est également sollicité à la traction et à la compression simple, circonstance qui diminue la contrainte admissible au cisaillement pur.

Il est essentiel de signaler que nous n'avons pas admis de coefficients de sécurité différents pour la tension, la compression et le cisaillement.

En effet, la théorie des courbes intrinsèques du moment où on l'applique tient compte de ce fait, et il serait, à notre avis, illogique de superposer de nouveaux coefficients de sécurité à ceux résultant de cette théorie, étant donné surtout que nos calculs sont basés sur la théorie de l'élasticité.

### Zusammenfassung

Das Problem der Berechnung der Kehlnähte wird zunächst ganz allgemein behandelt. Dann werden die Unterschiede der Beanspruchung zwischen einer Stirn- und einer Flankennaht dargelegt. In beiden Fällen ist man genötigt, die Schweißnaht getrennt vom Ganzen und unter gewissen vereinfachenden

Voraussetzungen zu berechnen. Aus diesem Grunde haben die angegebenen Berechnungen nicht eine umfassende Bedeutung im Sinne mathematischer Genauigkeit, sondern sind eine Näherungsmethode, die aber so gut wie möglich den Beanspruchungsarten jeder Schweißnahtform Rechnung trägt. Die elastischen, ebenen Gleichgewichtszustände sind indessen unter den gemachten Voraussetzungen genau.

Die inneren mechanischen Eigenschaften des Schweißgutes sind durch eine „Innenkurve“ von parabolischer Form bestimmt, die die Elastizitätsgrenzen für Zug und für Druck berücksichtigt. Man leitet daraus durch Gleichsetzen in der Beziehung des Sicherheitskoeffizienten eine Kurve ab, die „zulässige Grenzkurve“ genannt wird.

Die Berechnung der Stirnkehlnähte wird dann für zwei elastische ebene Gleichgewichtszustände durchgeführt, die sich im Durchgangspunkt der äußeren, zur Unterseite der Naht senkrechten Kraft unterscheiden. Der tatsächliche Zustand scheint nun zwischen diesen beiden Fällen zu liegen. Die Spannungsverhältnisse sind durch die Schar der Mohr'schen Kreise bestimmt, die zu jedem Punkt der dreieckförmigen, durch die Oberflächen der Naht begrenzten Fläche gehören.

Man erhält dann die Formeln indem man angibt, daß die so begrenzte Teilschar vollständig innerhalb der „zulässigen Grenzkurve“ liegt.

Die Berechnung der Flankenkehlnähte geschieht nach der Elastizitätstheorie, indem man ein gleichmäßiges Längs-Abscheren der beiden Berührungsflächen voraussetzt. Schließlich wird noch der folgende allgemeine Umstand berücksichtigt: indem die Flankenkehlnaht einen wesentlichen Bestandteil der Stücke, die sie verbindet, darstellt, ist sie auch einfachem Zug und Druck unterworfen, wodurch die zulässige Spannung für reines Abscheren vermindert wird.

Es muß betont werden, daß wir für Zug, Druck und Abscheren keine verschiedenen Sicherheitskoeffizienten angenommen haben.

Die Theorie der Innenkurven berücksichtigt diese Tatsache bereits sobald sie angewandt wird, und es wäre nach unserer Ansicht nicht logisch, neue Sicherheitskoeffizienten denjenigen, die sich aus dieser Theorie ergeben, zu superponieren; dies vor allem, weil unseren Berechnungen die Elastizitätstheorie zu Grunde gelegt wurde.

### Summary

The problem of calculating fillet welds is first handled quite generally. Then the differences in stressing between a butt weld and a flank weld are illustrated. In both cases it is necessary to calculate the welded seam separate from the whole and at the same time make certain simplifying assumptions. For this reason the calculations which are given have no comprehensive

importance in the sense of mathematical accuracy, but represent an approximation method which, however, takes into account as far as possible the types of stressing of each form of welded seam. The elastic, plane conditions of equilibrium are nevertheless exact under the assumptions made.

The inner mechanical properties of the weld metal are determined by an „internal curve“ of parabolic form that takes into consideration the elastic limits for tension and for compression. By equalising with respect to the factor of safety, a curve is derived from this, which is named „permissible boundary curve“.

The calculating of the butt fillet welds is then carried out for two elastic, plane conditions of equilibrium, which differ in the point of passage of the external force at right angles to the lower side of the seam. The actual state now appears to lie between these two cases. The stress relations are determined by a set of Mohr's circles which belong to each point of the triangular area bounded by the surface of the seam.

The formulae are then obtained by assuming that the partial set of circles thus limited lies completely within the „permissible limit curve“.

The calculating of the flank fillet welds is made according to the theory of elasticity, in that uniform longitudinal shearing of the two contact surfaces is assumed. Finally also the following general circumstance is taken into consideration: In that the flank fillet weld represents an essential constituent part of the pieces which it connects, it is subjected to simple tension and compression, whereby the permissible stressing for pure shear is diminished.

It must be pointed out that we have not used different factors of safety for tension, compression and shear.

The theory of the inner curves takes this fact into consideration as soon as it is applied, and in our opinion it would not be logical to superpose new factors of safety on those given by that theory; particularly since our calculations are based on the theory of elasticity.