

Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 10 (1950)

Artikel: Méthode de calcul des ponts à poutres multiples tenant compte de leur résistance à la torsion
Autor: Massonnet, Charles
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-10587>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 05.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Méthode de calcul des ponts à poutres multiples tenant compte de leur résistance à la torsion

Berechnungsmethode für Brücken mit mehreren Längsträgern mit Berücksichtigung ihres Torsionswiderstandes

Method of calculation for bridges with several longitudinal beams, taking into consideration their torsional resistance

CHARLES MASSONNET, Professeur à l'Université de Liège

1. Introduction

La très grande majorité des méthodes proposées jusqu'ici pour rechercher les sollicitations des ponts à poutres multiples sont basées sur l'hypothèse simplificatrice que les éléments de l'ouvrage n'offrent aucune résistance à la torsion.

Cette hypothèse s'impose avant tout par le souci de simplifier radicalement un problème extrêmement complexe; en effet, alors que le degré d'hyperstaticité réel d'un grillage de poutres assemblées rigidement est égal à trois fois le nombre de noeuds de ce grillage, celui d'un grillage à poutres sans résistance à la torsion n'est égal qu'à ce nombre de noeuds seulement.

Quand on envisage le mécanisme suivant lequel travaille le pont, on s'aperçoit que l'hypothèse en question est en réalité fort peu justifiée; en effet, la très grande majorité des ponts à poutres multiples comportent actuellement une dalle de tablier en béton armé dans laquelle les sollicitations de torsion jouent un rôle prépondérant. Si l'on peut négliger pratiquement cet effet de torsion dans les ponts à poutres métalliques, il n'est guère admissible de le faire dans les ponts monolithes nervurés en béton armé et moins encore dans les ponts-dalles en béton armé ou précontraint dont l'usage se généralise de plus en plus.

Il existe quelques méthodes pour analyser les réseaux de poutres en tenant compte de leur résistance à la torsion; il nous semble cependant que ces procédés sont tellement compliqués que peu d'ingénieurs de bureaux d'études auront la patience de les appliquer, dans le calcul réel d'un ouvrage, aux multiples sollicitations qu'il faut toujours prendre en considération.

Notre but est de décrire une méthode nouvelle, qui nous paraît plus rapide que celles connues jusqu'ici.

Dans l'étude que nous avons consacrée au calcul des ponts sans résistance à la torsion¹⁾ [6], nous avons montré que les procédés de calcul imaginés par LEONHARDT [1, 2] et GUYON [3] étaient particulièrement commodes à utiliser et se complétaient d'ailleurs en quelque sorte; il y a donc lieu d'essayer de généraliser ces procédés pour y inclure l'effet de la torsion.

La méthode de LEONHARDT ne se prête pas à cette extension, parce qu'elle est basée sur le remplacement des entretoises réelles par une entretoise médiane fictive équivalente. Il est visible que des charges appliquées, par exemple, au milieu du pont, tordent les entretoises réelles, alors qu'elles n'amènent aucune torsion de l'entretoise unique équivalente.

La méthode de GUYON, au contraire, est susceptible d'une généralisation aisée, comme on le verra dans les pages qui suivent.

2. Rappel de la théorie générale des plaques anisotropes et des grillages continus de poutres

Un pont à poutres multiples se présente toujours comme un grillage de poutres résistant à la torsion, solidaire d'une dalle formant platelage du tablier.

L'importance relative des deux éléments ci-dessus est variable selon les dispositions constructives adoptées: on peut imaginer une série continue d'ouvrages, s'étendant depuis le grillage de poutres à dalle très mince jusqu'à la dalle d'épaisseur constante.

Le comportement de l'ouvrage est donc intermédiaire entre celui d'un grillage continu et celui d'une dalle anisotrope.

Nous allons rappeler brièvement les équations qui régissent les déformations de ces deux systèmes portants²⁾.

A. Plaques anisotropes

L'anisotropie de la plaque provient en fait de ce qu'elle est différemment armée ou nervurée dans les deux sens perpendiculaires. Néanmoins, pour pouvoir étudier son comportement, nous la supposons faite d'un matériau homogène et anisotrope fictif et nous supposons que ce dernier possède des propriétés élastiques symétriques par rapport à trois plans orthogonaux.

Prenons ces plans comme plans coordonnés et examinons le cas d'un état de tension plane dans le plan des xy . Nous pouvons écrire les relations existant

¹⁾ Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de la présente note.

²⁾ Ce rappel est rédigé d'après l'ouvrage du Professeur TIMOSHENKO, *Theory of Plates and Shells*, Mc-Graw Hill, New York, 1940, pp. 188 à 191.

entre les tensions $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ et les déformations $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$, sous la forme générale

$$\begin{cases} \sigma_x = E_x' \epsilon_x + E'' \epsilon_y \\ \sigma_y = E_y' \epsilon_y + E'' \epsilon_x \\ \tau_{xy} = G \gamma_{xy} \end{cases} \quad (1)$$

Nous supposons remplie l'hypothèse classique de la théorie des plaques, d'après laquelle des éléments de droite perpendiculaires au plan moyen de la plaque (plan des xy) avant flexion restent droits et normaux au feuillet moyen déformé. Les composantes de la déformation sont dès lors:

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \epsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2)$$

En les introduisant dans les équations (1), on trouve

$$\begin{cases} \sigma_x = -z \left(E_x' \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + E'' \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y = -z \left(E_y' \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + E'' \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} = -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (3)$$

Les moments de flexion et de torsion ont donc pour valeurs

$$\begin{cases} M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z dz = - \left(\rho_P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho_t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y z dz = - \left(\rho_E \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \rho_t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} = -M_{yx} = - \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} z dz = 2 \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{cases} \quad (4)$$

à condition de poser

$$\rho_P = \frac{E_x' h^3}{12}, \quad \rho_E = \frac{E_y' h^3}{12}, \quad \rho_t = \frac{E'' h^3}{12}, \quad \gamma = \frac{G h^3}{12} \quad (5)$$

L'effort tranchant vertical T_y se déduit de l'équation d'équilibre de rotation d'un élément de plaque autour de l'axe des x (fig. 1). On trouve ainsi

$$T_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}, \quad (6)$$

ou, en remplaçant les moments par leurs valeurs (4),

$$T_y = -\rho_E \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \gamma \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \quad (7)$$

L'équilibre vertical du même élément de plaque conduit à l'équation (fig. 1 a)

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -p(x, y) \quad (8)$$

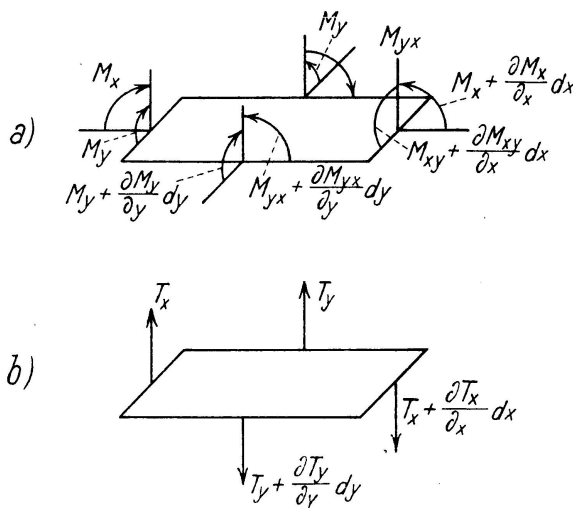


Fig. 1

En introduisant dans cette relation les expressions (4), on obtient l'équation suivante

$$\rho_P \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(\rho_t + 2\gamma) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \rho_E \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y) \quad (9)$$

Nous poserons

$$\rho_t + 2\gamma = H,$$

ce qui nous permettra d'écrire l'équation différentielle des plaques anisotropes sous la forme

$$\rho_P \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \rho_E \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y) \quad (10)$$

B. Grillages continus

Envisageons le grillage de maille $l_1 b_1$ (fig. 2) dont les poutres sont assemblées rigidement et résistent à la torsion.

Désignons par $B_P = EI_P$ la rigidité flexionnelle des poutres espacées de b_1 et par $B_E = EI_E$ celle des entretoises espacées de l_1 .

Le grillage continu fictif équivalent aura pour rigidités flexionnelles par unité de longueur

$$\rho_P = \frac{B_P}{b_1} \quad \text{et} \quad \rho_E = \frac{B_E}{l_1} \quad (11)$$

respectivement, de sorte qu'il sera le siège de moments fléchissants unitaires

$$M_x = -\rho_P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad M_y = -\rho_E \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (12)$$

Appelons d'autre part C_P et C_E les rigidités torsionnelles respectives des poutres et des entretoises. Considérons la torsion d'un élément $b_1 l_1$ d'un élément du grillage réel représenté à la figure 2. Le grillage continu équivalent doit avoir les rigidités torsionnelles respectives

$$\gamma_P = \frac{C_P}{b_1} \quad \text{et} \quad \gamma_E = \frac{C_E}{l_1} \quad (13)$$

par unité de longueur, et, comme la torsion géométrique de la surface vaut $\partial^2 w / dx dy$, il y naît les moments de torsion unitaires

$$M_{xy} = \gamma_P \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad M_{yx} = -\gamma_E \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (14)$$

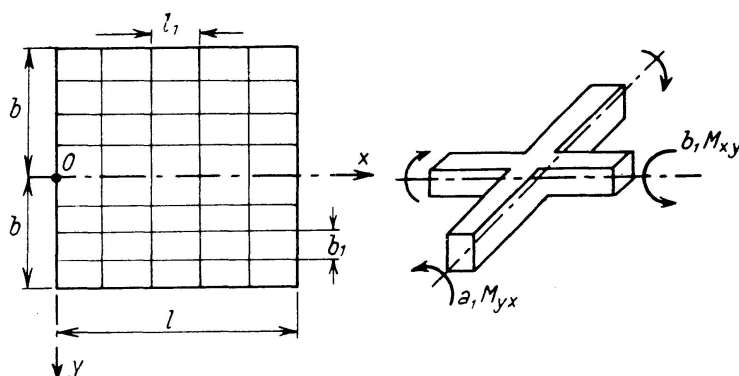


Fig. 2

L'effort tranchant vertical se calcule comme ci-dessus par la formule (6), ce qui donne, en remplaçant M_y et M_{xy} par leurs valeurs (12) et (14),

$$T_y = -\rho_E \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \gamma_P \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \quad (15)$$

L'équilibre vertical d'un élément du grillage continu s'exprime par la même équation (8) que ci-dessus. En y remplaçant M_x et M_y par leurs valeurs (12), M_{yx} et M_{xy} par leurs expressions (14), on trouve pour l'équation différentielle du grillage continu

$$\rho_P \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (\gamma_P + \gamma_E) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \rho_E \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y) \quad (16)$$

Elle est de la même forme générale que l'équation d'équilibre (10) des plaques anisotropes.

C. Comparaison des deux théories ci-dessus, en vue de leur application
aux ponts à poutres multiples

Un pont à poutres multiples, étant une construction intermédiaire entre la plaque anisotrope et le grillage continu, doit obéir également à une équation différentielle de la forme (10) ou (16).

Dans un tel pont, l'effet de plaque ne peut provenir que de la dalle du tablier, qui est en béton armé. Le coefficient de Poisson du béton étant très faible (de l'ordre de 0,10), nous le prendrons pour simplifier égal à zéro, ce qui revient à négliger la rigidité ρ_t correspondante devant ρ_P , ρ_E et γ .

Dès lors, on voit que les expressions des moments fléchissants et l'équation de la déformée sont les mêmes dans les deux cas. En vue de faciliter les calculs ultérieurs, nous poserons

$$2H = \gamma_P + \gamma_E = 2\alpha \sqrt{\rho_P \rho_E} \quad (17)$$

L'équation (10) ou (16) prend alors la forme

$$\rho_P \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\alpha \sqrt{\rho_P \rho_E} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \rho_E \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y), \quad (18)$$

où l'influence relative de la torsion est caractérisée par le *paramètre de torsion* α .

Le grillage continu sans résistance à la torsion étudié par M. GUYON correspond à $\alpha = 0$. La plaque isotrope, de son côté, correspond à $\rho_P = \rho_E$ et $\alpha = 1$, auquel cas l'équation (18) se réduit à l'équation classique de Lagrange

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{\rho_P}$$

Pour un pont réel, le terme de torsion de l'équation (18) a toujours une valeur intermédiaire entre celles correspondant aux deux cas extrêmes envisagés ci-dessus. On couvrira donc tout le domaine à étudier en faisant varier le paramètre α entre 0 et 1.

Il importe de souligner, en terminant, que les théories de la plaque anisotrope et du grillage continu diffèrent légèrement en ce qui concerne la distribution des moments de torsion M_{xy} et M_{yx} . Ceux-ci sont égaux dans la plaque, par réciprocité, tandis qu'ils sont en général différents dans le grillage. Il résulte de là que les expressions des efforts tranchants T_y sont légèrement différentes dans les deux théories.

Remarquons à ce propos qu'une grande résistance à la torsion ne se rencontre que dans les ponts en béton armé et qu'elle est due en ordre principal à l'effet de plaque dans la dalle du tablier. De plus, il faut que notre théorie des ponts à poutres multiples puisse s'appliquer au cas-limite des ponts-dalles, dont la construction en béton précontraint est susceptible de se développer.

Ces considérations nous déterminent à adopter pour le pont l'expression de T_y trouvée dans le cas d'une plaque anisotrope, à savoir

$$T_y = -\rho_E \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \alpha \sqrt{\rho_P \rho_E} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \quad (19)$$

3. Conditions aux limites

Nous aurons besoin, dans la suite de ce travail, d'exprimer les conditions aux limites existant le long d'un bord appuyé et d'un bord libre du pont. Nous allons établir ces conditions dès à présent, pour les avoir à notre disposition au moment opportun. Rappelons qu'on a supposé pour simplifier $\rho_t = 0$.

A. Conditions d'appui le long d'un bord appuyé

Le long d'un bord appuyé d'équation $x = a$, le déplacement vertical est nul, ce qui s'exprime par la condition

$$w = 0 \text{ pour } x = a \quad (20)$$

De plus, le moment fléchissant M_x est également nul, ce qui donne, d'après les formules (4) ou (12),

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ pour } x = a. \quad (21)$$

B. Conditions d'appui le long d'un bord libre

Le long d'un bord libre d'équation $y = b$, le moment fléchissant M_y s'annule, ce qui donne, d'après les formules (4) ou (12)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ pour } y = b. \quad (22)$$

De plus, la réaction d'appui

$$R_y = T_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x}$$

est nulle. Pour expliciter cette condition, remplaçons-y l'effort tranchant par son expression

$$T_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (6)$$

Il vient

$$R_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x}$$

En introduisant dans cette égalité les valeurs (4) ou (12) et (14) des moments, on trouve que la condition $R_y = 0$ s'écrit

plaque anisotrope $\rho_E \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + H \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0$, pour $y = b$.

grillage continu $\rho_E \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (\gamma_P + \gamma_E) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0$, pour $y = b$.

Ces deux équations sont identiques et s'écrivent, en tenant compte de (17),

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + 2\alpha \sqrt{\frac{\rho_P}{\rho_E}} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0, \text{ pour } y = b. \quad (23)$$

4. Equation générale de la déformée du pont dans une zone non chargée de forces extérieures

Proposons-nous d'étudier l'intégrale générale de l'équation (18) dans une zone non chargée du pont ($p=0$). Nous pouvons représenter la déformée w par la série de Maurice Lévy

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad (24)$$

dont chaque terme satisfait aux conditions d'appui $w=0$ et $\partial^2 w / \partial x^2 = 0$ le long des deux bords appuyés $x=0$ et $x=l$.

Il nous faut maintenant déterminer les fonctions $Y_m(y)$ de manière que la série (24) satisfasse à l'équation différentielle du pont non chargé:

$$\rho_P \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\alpha \sqrt{\rho_P \rho_E} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \rho_E \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0$$

En remplaçant w par son expression (24) dans l'égalité ci-dessus, on trouve aisément que les fonctions Y_m doivent satisfaire à l'équation

$$\rho_E Y_m'''' - 2\alpha \sqrt{\rho_P \rho_E} \frac{m^2 \pi^2}{l^2} Y_m'' + \rho_P \frac{m^4 \pi^4}{l^4} Y_m = 0 \quad (25)$$

Pour simplifier les calculs ultérieurs, nous poserons

$$\omega = \frac{l\pi}{\rho_E} \sqrt{\frac{\rho_P}{\rho_E}}, \quad (26)$$

ce qui permet d'écrire l'équation (25) sous la forme

$$Y_m'''' - 2\alpha m^2 \omega^2 Y_m'' + m^4 \omega^4 Y_m = 0. \quad (27)$$

L'équation caractéristique correspondante est bicarrée et admet pour racines

$$r_{1,2,3,4} = \pm m \omega \sqrt{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}} \quad (28)$$

Comme α est inférieur à l'unité, ces quatre racines sont imaginaires. En utilisant la formule connue d'algèbre élémentaire

$$\sqrt{\alpha \pm i\beta} = \sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}} \pm \sqrt{\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}},$$

on peut écrire ces racines sous la forme complexe habituelle

$$r_{1,2,3,4} = \pm m\omega \left(\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} + i \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} \right) \quad (29)$$

et l'intégrale générale de l'équation (27) est par conséquent de la forme

$$Y = e^{m\omega \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} y} \left[A_m \cos \left(m\omega \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} y \right) + B_m \sin \left(m\omega \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} y \right) \right] + e^{-m\omega \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} y} \left[C_m \cos \left(m\omega \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} y \right) + D_m \sin \left(m\omega \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} y \right) \right] \quad (30)$$

Telle qu'elle est écrite, cette expression n'est plus valable dans le cas limite où $\alpha = 1$; en effet, les racines (29) se réduisent dans ce cas à

$$r_{1,2,3,4} = \pm m\omega$$

et la solution exacte pour ce cas est par conséquent

$$Y_m = A_m e^{m\omega y} + B_m m\omega y e^{m\omega y} + C_m e^{-m\omega y} + D_m m\omega y e^{-m\omega y}, \quad (31)$$

tandis que la solution générale (30) particularisée pour $\alpha = 1$ se réduit à

$$Y_m = A_m e^{m\omega y} + C_m e^{-m\omega y}.$$

Pour pallier cet inconvénient, il suffit de remplacer dans la solution (30) les constantes d'intégration B_m et D_m par $\frac{B_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}}$ et $\frac{D_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}}$ respectivement. La solution générale (30) s'écrit alors

$$Y_m = e^{m\omega \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} y} \left[A_m \cos \left(m\omega \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} y \right) + \frac{B_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} \sin \left(m\omega \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} y \right) \right] + e^{-m\omega \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} y} \left[C_m \cos \left(m\omega \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} y \right) + \frac{D_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} \sin \left(m\omega \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} y \right) \right] \quad (32)$$

et l'on constate aisément qu'elle se réduit à l'expression (31) pour $\alpha = 1$ si l'on remarque que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\sin \left(m\omega \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} y \right)}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} = m\omega y.$$

5. Le pont infiniment large, appuyé sur ses deux bords opposés et chargé de forces $p = p_m \sin m\pi x/l$ réparties le long de l'axe des x

Supposons d'abord que le pont soit infiniment large (fig. 3) et soit chargé de forces réparties suivant la loi sinusoïdale

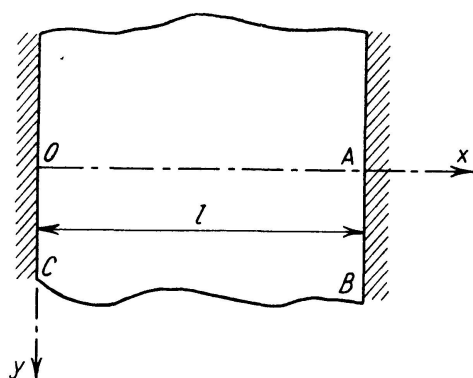


Fig. 3

$$p = p_m \sin \frac{m\pi x}{l}$$

le long de l'axe des x , et proposons-nous de rechercher sa déformée.

Considérons uniquement la partie $OABC$ du pont qui correspond aux valeurs positives de y et observons que le déplacement vertical w et ses dérivées doivent s'annuler à de grandes distances de la charge, de sorte que l'intégrale générale (32) se réduit nécessairement à ³⁾

$$Y_m = e^{-m\omega \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} y} \left[c_m \cos \left(m\omega \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} y \right) + \frac{d_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} \sin \left(m\omega \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} y \right) \right], \quad (y \geq 0)$$

et la déformée du pont a pour expression

$$w = e^{-m\omega \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} y} \left[c_m \cos \left(m\omega \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} y \right) + \frac{d_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} \sin \left(m\omega \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} y \right) \right] \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad (y \geq 0)$$

Par symétrie, on conclut que, le long de l'axe des x ,

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} = 0,$$

ce qui donne, après simplifications,

$$d_m = c_m \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}$$

En tenant compte de cette relation, l'expression de w devient

$$w = c_m e^{-m\omega \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} y} \sin \frac{m\pi x}{l} \left[\cos \left(m\omega \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} y \right) + \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \sin \left(m\omega \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} y \right) \right], \quad (y \geq 0) \quad (33)$$

³⁾ On a remplacé les lettres majuscules C_m et D_m par les minuscules correspondantes, pour éviter la confusion avec des notations ultérieures.

Nous obtiendrons le coefficient c_m en exprimant que l'effort tranchant T_y le long de l'axe des x vaut $-p_m/2 \cdot \sin m\pi x/l$, ce qui donne, d'après la formule (19),

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left(\rho_E \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \alpha \sqrt{\rho_P \rho_E} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -\frac{p_m}{2} \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (34)$$

En remplaçant dans cette égalité w par sa valeur (33), on trouve, tous calculs faits,

$$c_m = \frac{p_m}{2 \sqrt{2(1+\alpha)} \rho_E m^3 \omega^3} \quad (35)$$

Si, au lieu d'agir le long de l'axe des x , la charge $p = p_m \sin m\pi x/l$ agit sur une parallèle à cet axe d'excentricité $e < y$ (fig. 4), on doit mesurer y' par rapport à cette parallèle, c'est-à-dire remplacer y par $(y - e) = |y - e|$ dans la formule (33). On obtient alors

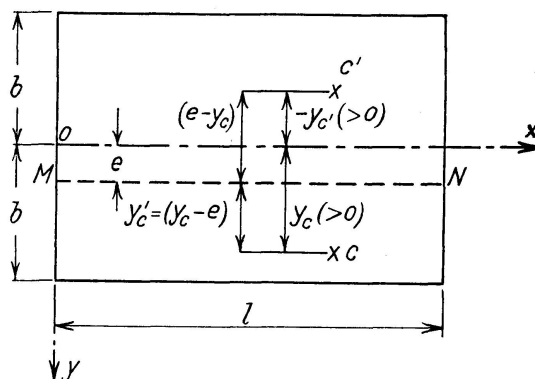


Fig. 4

$$w(y) = c_m e^{-m\omega \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} |y-e|} \sin \frac{m\pi x}{l} \left\{ \cos \left[m\omega \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} |y-e| \right] + \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \sin \left[m\omega \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} |y-e| \right] \right\} \quad (y \geq e) \quad (36)$$

La ligne de charge MN est évidemment un axe de symétrie de la déformée. Par conséquent, le déplacement d'un point de la plaque tel que C' , situé au-dessus de MN ($y_c < e$) sera égal au déplacement du point C symétrique de C' par rapport à MN (fig. 4) et son expression s'obtiendra en remplaçant y par $(e - y) = |y - e|$ dans la formule (33).

On retrouve ainsi la formule (36), qui est donc valable de manière générale.

6. Le pont chargé de forces $p = p_m \sin m\pi x/l$ réparties le long d'une parallèle à son axe d'excentricité e

Pour étudier le pont de largeur finie $2b$, libre sur ses deux bords latéraux $y = \pm b$ et chargé de forces sinusoïdales $p = p_m \sin m\pi x/l$ réparties suivant une parallèle à son axe d'excentricité e , il suffit de superposer à la solution particulière (36), valable pour le pont infiniment large, la solution générale (32) valable pour le pont non chargé. On obtient ainsi la formule suivante:

$$\begin{aligned}
w = \sin \frac{m\pi x}{l} & \left\{ e^{m\omega \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} y} \left[A_m \cos \left(m\omega \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} y \right) + \frac{B_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} \sin \left(m\omega \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} y \right) + \right. \right. \\
& e^{-m\omega \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} y} \left[C_m \cos \left(m\omega \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} y \right) + \frac{D_m}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} \sin \left(m\omega \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} y \right) \right] + \\
& \left. \left. c_m e^{-m\omega \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} |y-e|} \left[\cos m\omega \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} |y-e| + \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \sin m\omega \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} |y-e| \right] \right\} \quad (37)
\end{aligned}$$

On déterminera les coefficients A_m , B_m , C_m et D_m de cette solution de manière que la somme des deux solutions satisfasse aux conditions d'appui (22) et (23) le long des deux bords libres. Ces conditions s'écrivent, en remplaçant dans la seconde $\sqrt{\rho_P/\rho_E}$ par $\omega^2 l^2/\pi^2$,

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 0, \\
\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + 2\alpha \frac{l^2 \omega^2}{\pi^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} &= 0
\end{aligned} \right\} \text{ pour } y = \pm b \quad (38)$$

Tous calculs faits, on obtient les conditions d'appui suivantes:

$$1. \text{ pour } y = +b, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (39')$$

$$\begin{aligned}
& \frac{c_m}{\sqrt{1-\alpha}} e^{-m\omega \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} (b-e)} \left\{ \sqrt{1+\alpha} \sin \left[m\omega \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} (b-e) \right] - \right. \\
& \quad \left. \sqrt{1-\alpha} \cos \left[m\omega \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} (b-e) \right] \right\} + \\
& e^{m\omega \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} b} \left\{ \left(\frac{\alpha \sqrt{2} B_m}{\sqrt{1-\alpha}} - \sqrt{1-\alpha^2} A_m \right) \sin \left(m\omega \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} b \right) + \right. \\
& \quad \left. \left[\alpha A_m + \sqrt{2(1+\alpha)} B_m \right] \cos \left(m\omega \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} b \right) \right\} + \\
& e^{-m\omega \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} b} \left\{ \left(\frac{\alpha \sqrt{2} D_m}{\sqrt{1-\alpha}} + \sqrt{1-\alpha^2} C_m \right) \sin \left(m\omega \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} b \right) + \right. \\
& \quad \left. \left[\alpha C_m - \sqrt{2(1+\alpha)} D_m \right] \cos \left(m\omega \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} b \right) \right\} = 0
\end{aligned}$$

$$2. \text{ pour } y = -b, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (39'')$$

$$\begin{aligned}
& \frac{c_m}{\sqrt{1-\alpha}} e^{-m\omega \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} (e+b)} \left\{ \sqrt{1+\alpha} \sin \left[m\omega \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} (e+b) \right] - \right. \\
& \quad \left. \sqrt{1-\alpha} \cos \left[m\omega \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} (e+b) \right] \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& e^{-m\omega\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}b} \left\{ - \left(\frac{\alpha\sqrt{2}B_m}{\sqrt{1-\alpha}} - \sqrt{1-\alpha}A_m \right) \sin \left(m\omega\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}b \right) + \right. \\
& \quad \left. \left[\alpha A_m + \sqrt{2(1+\alpha)}B_m \right] \cos \left(m\omega\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}b \right) \right\} + \\
& e^{m\omega\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}b} \left\{ - \left(\frac{\alpha\sqrt{2}D_m}{\sqrt{1-\alpha}} + \sqrt{1-\alpha}C_m \right) \sin \left(m\omega\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}b \right) + \right. \\
& \quad \left. \left[\alpha C_m - \sqrt{2(1+\alpha)}D_m \right] \cos \left(m\omega\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}b \right) \right\} = 0
\end{aligned}$$

$$3. \text{ pour } y = +b, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + 2\alpha \frac{l^2 \omega^2}{\pi^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0. \quad (39''')$$

$$\begin{aligned}
& \frac{c_m \sqrt{2}}{\sqrt{1-\alpha}} e^{-m\omega\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}(b-e)} \left\{ \alpha \sin \left[m\omega\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}(b-e) \right] + \right. \\
& \quad \left. \sqrt{1-\alpha^2} \cos \left[m\omega\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}(b-e) \right] \right\} + \\
& e^{m\omega\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}b} \left\{ - \sin \left(m\omega\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}b \right) \left[\sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}B_m + \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}A_m \right] + \right. \\
& \quad \left. \cos \left(m\omega\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}b \right) \left[-\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}A_m + B_m \right] \right\} + \\
& e^{-m\omega\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}b} \left\{ \sin \left(m\omega\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}b \right) \left[\sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}D_m - \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}C_m \right] + \right. \\
& \quad \left. \cos \left(m\omega\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}b \right) \left[\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}C_m + D_m \right] \right\} = 0
\end{aligned}$$

$$4. \text{ pour } y = -b, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + 2\alpha \frac{l^2 \omega^2}{\pi^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0. \quad (39''')$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{c_m \sqrt{2}}{\sqrt{1-\alpha}} e^{-m\omega\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}(b+e)} \left\{ \alpha \sin \left[m\omega\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}(b+e) \right] + \right. \\
& \quad \left. \sqrt{1-\alpha^2} \cos \left[m\omega\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}(b+e) \right] \right\} + \\
& e^{-m\omega\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}b} \left\{ \sin \left(m\omega\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}b \right) \left[\sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}B_m + \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}A_m \right] + \right. \\
& \quad \left. \cos \left(m\omega\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}b \right) \left[-\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}A_m + B_m \right] \right\} +
\end{aligned}$$

$$e^{m\omega\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}b} \left\{ - \left[\sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} D_m - \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} C_m \right] \sin \left(m\omega \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} b \right) + \right. \\ \left. \cos \left(m\omega \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} b \right) \left[\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} C_m + D_m \right] \right\} = 0$$

Posons pour simplifier

$$\frac{\pi y}{b} = \beta, \quad \frac{\pi e}{b} = \psi \quad (40)$$

et introduisons le paramètre d'entretoisement

$$\vartheta = \frac{b}{l} \sqrt[4]{\frac{\rho_P}{\rho_E}} \quad (41)$$

en fonction duquel on peut exprimer ω sous la forme

$$\omega = \frac{\pi}{b} \frac{b}{l} \sqrt[4]{\frac{\rho_P}{\rho_E}} = \frac{\pi}{b} \vartheta. \quad (42)$$

On voit qu'on a

$$\omega(b+e) = \vartheta(\pi+\psi) \quad \text{et} \quad \omega(b-e) = \vartheta(\pi-\psi) \quad (43)$$

Posons de plus

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{c_m}{\sqrt{1-\alpha}} e^{-m\vartheta(\pi-\psi)\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}} \left\{ \sqrt{1+\alpha} \sin \left[\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} m\vartheta(\pi-\psi) \right] - \right. \\ \left. \sqrt{1-\alpha} \cos \left[\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} m\vartheta(\pi-\psi) \right] \right\} = M \\ \frac{c_m}{\sqrt{1-\alpha}} e^{-m\vartheta(\pi+\psi)\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}} \left\{ \sqrt{1+\alpha} \sin \left[\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} m\vartheta(\pi+\psi) \right] - \right. \\ \left. \sqrt{1-\alpha} \cos \left[\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} m\vartheta(\pi+\psi) \right] \right\} = N \\ \frac{c_m \sqrt{2}}{\sqrt{1-\alpha}} e^{-m\vartheta(\pi-\psi)\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}} \left\{ \alpha \sin \left[\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} m\vartheta(\pi-\psi) \right] + \right. \\ \left. \sqrt{1-\alpha^2} \cos \left[\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} m\vartheta(\pi-\psi) \right] \right\} = P \\ \frac{c_m \sqrt{2}}{\sqrt{1-\alpha}} e^{-m\vartheta(\pi+\psi)\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}} \left\{ \alpha \sin \left[\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} m\vartheta(\pi+\psi) \right] + \right. \\ \left. \sqrt{1-\alpha^2} \cos \left[\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} m\vartheta(\pi+\psi) \right] \right\} = Q \end{array} \right. \quad (44)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[e^{m\vartheta\pi\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}} + e^{-m\vartheta\pi\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}} \right] \sin\left(m\vartheta\pi\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}\right) = \beta, \\ \left[e^{m\vartheta\pi\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}} - e^{-m\vartheta\pi\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}} \right] \sin\left(m\vartheta\pi\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}\right) = \gamma, \\ \left[e^{m\vartheta\pi\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}} + e^{-m\vartheta\pi\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}} \right] \cos\left(m\vartheta\pi\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}\right) = \delta, \\ \left[e^{m\vartheta\pi\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}} - e^{-m\vartheta\pi\sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}} \right] \cos\left(m\vartheta\pi\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}\right) = \epsilon. \end{array} \right. \quad (45)$$

Additionnons et soustrayons les équations (39') et (39''), puis (39''') et (39'''), en y introduisant les notations précédentes; il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} M + N + \gamma \left[\frac{\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{1-\alpha}} (B_m - D_m) - \sqrt{1-\alpha^2} (A_m + C_m) \right] + \\ \quad \delta [\alpha (A_m + C_m) + \sqrt{2(1+\alpha)} (B_m - D_m)] = 0 \\ M - N + \beta \left[\frac{\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{1-\alpha}} (B_m + D_m) - \sqrt{1-\alpha^2} (A_m - C_m) \right] + \\ \quad \epsilon [\alpha (A_m - C_m) + \sqrt{2(1+\alpha)} (B_m + D_m)] = 0 \\ P + Q - \beta \left[\sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} (B_m - D_m) + \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} (A_m + C_m) \right] + \\ \quad \epsilon \left[(B_m - D_m) - \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} (A_m + C_m) \right] = 0 \\ P - Q - \gamma \left[\sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} (B_m + D_m) + \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} (A_m - C_m) \right] + \\ \quad \delta \left[(B_m + D_m) - \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} (A_m - C_m) \right] = 0 \end{array} \right. \quad (46)$$

Si nous posons encore

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha\delta - \sqrt{1-\alpha^2}\gamma = \zeta \\ \sqrt{2(1+\alpha)}\delta + \frac{\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{1-\alpha}}\gamma = \eta \\ -\sqrt{1-\alpha^2}\beta + \alpha\epsilon = \lambda \\ \frac{\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{1-\alpha}}\beta + \sqrt{2(1+\alpha)}\epsilon = \nu \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}\beta + \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}\epsilon = \xi \\ \epsilon - \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}\beta = \sigma \\ \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}\gamma + \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}\delta = \varphi \\ \delta - \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}\gamma = \omega, \end{array} \right. \quad (47)$$

nous pouvons écrire les équations (46) sous la forme plus condensée

$$\begin{cases} M + N + \zeta(A_m + C_m) + \eta(B_m - D_m) = 0 \\ M - N + \lambda(A_m - C_m) + \nu(B_m + D_m) = 0 \\ P + Q - \xi(A_m + C_m) + \sigma(B_m - D_m) = 0 \\ P - Q - \varphi(A_m - C_m) + \omega(B_m + D_m) = 0. \end{cases} \quad (48)$$

De la première et de la troisième de ces équations, on tire

$$A_m + C_m = \frac{(P+Q)\eta - (M+N)\sigma}{\sigma\zeta + \eta\xi}; \quad B_m - D_m = -\frac{(M+N)\xi + (P+\varphi)\zeta}{\sigma\zeta + \eta\xi} \quad (49)$$

De la deuxième et de la quatrième, on déduit ensuite

$$A_m - C_m = \frac{(P-Q)\nu - (M-N)\omega}{\lambda\omega + \varphi\nu}; \quad B_m + D_m = -\frac{(M-N)\varphi + (P-Q)\lambda}{\lambda\omega + \varphi\nu} \quad (49)$$

Les équations (49) donnent immédiatement les valeurs des coefficients A_m , B_m , C_m et D_m . Il suffit d'introduire ces valeurs dans la solution générale (37) pour obtenir la déformée réelle du pont soumis à la charge sinusoïdale

$$p = p_m \sin \frac{m\pi x}{l}.$$

7. Méthode approchée de calcul des ponts à poutres multiples tenant compte de leur résistance à la torsion

A. Généralités

Nous verrons au paragraphe 8 qu'il est possible de calculer rigoureusement les efforts dans le pont pour n'importe quelle distribution de charges, mais cette méthode exacte conduit à des calculs impraticables. C'est pourquoi nous allons tout d'abord développer une méthode approchée de calcul, bien suffisante pour la pratique.

Nous envisagerons tout d'abord le cas particulier où le pont n'est chargé que sur une bande longitudinale très étroite, que nous assimilerons à une parallèle à son axe d'excentricité transversale e .

Nous ferons la même hypothèse fondamentale que dans notre mémoire sur les ponts sans résistance à la torsion [6], à savoir que *la répartition transversale des efforts entre les différentes poutres est la même que si les forces appliquées sur cette bande étaient réparties suivant la loi sinusoïdale*

$$p(x) = p_1 \sin \frac{\pi x}{l},$$

La validité de cette hypothèse a été discutée en détail dans le mémoire précité [6].

Pour étudier le cas de charge qui vient d'être défini, il suffit de faire $m = 1$ dans toutes les formules du paragraphe précédent.

B. Lignes d'influence du coefficient de répartition transversale K

Pour pouvoir utiliser les résultats numériques obtenus par GUYON dans le cas où $\alpha = 0$, nous appellerons avec lui *coefficient de répartition transversale K* le rapport du déplacement vertical d'un point du pont sous l'effet de la charge $p(x)$ au déplacement que prendrait ce point si la charge p était uniformément répartie sur toute la largeur du pont.

Ce déplacement moyen w^0 est défini par l'équation

$$\frac{d^4 w^0}{dx^4} = \frac{p}{2b\rho_P} = \frac{p_1}{2b\rho_P} \sin \frac{\pi x}{l},$$

d'où l'on déduit

$$w^0 = \frac{p_1}{2b\rho_P} \frac{l^4}{\pi^4} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Pour obtenir les lignes d'influence du coefficient K , il suffit de calculer w , puis de le diviser par w^0 . Il revient au même de remplacer dans l'équation (37) le terme $c_1 \sin \pi x/l$ (où le coefficient c_1 est donné par la formule (35)) par le quotient

$$\frac{c_1 \sin \frac{\pi x}{l}}{w^0} = \frac{p_1 l^3 \sin \frac{\pi x}{l}}{2\sqrt{2(1+\alpha)}\rho_P \omega^3} \frac{2b\rho_P}{p_1} \frac{l^4}{\pi^4} \frac{1}{\sin \frac{\pi x}{l}} = \frac{b}{l} \sqrt[4]{\frac{\rho_P}{\rho_E}} \frac{\pi}{\sqrt{2(1+\alpha)}} = \frac{\pi \vartheta}{\sqrt{2(1+\alpha)}}$$

Remarquons à présent que, si le pont est chargé uniformément sur toute sa largeur, le déplacement de chaque point de sa section transversale devient égal au déplacement moyen w^0 . Il suit de là que l'ordonnée moyenne de la ligne d'influence de w doit être égale à w^0 , ou encore, que l'ordonnée moyenne de la ligne d'influence de $K = w/w^0$ doit être égale à l'unité. Il serait difficile de calculer l'aire exacte de la ligne d'influence. Mais, comme nous en déterminerons 8 ordonnées équidistantes (correspondant à $y = -b, -\frac{3b}{4}, -\frac{b}{2}, -\frac{b}{4}, 0, \frac{b}{4}, \frac{b}{2}, \frac{3b}{4}$), on obtient aisément une excellente valeur approchée de cette aire par la formule de Simpson

$$\text{Aire} = \frac{2b}{24} [2 \sum K_{\text{pair}} - (K_0 + K_{2n}) + 4 \sum K_{\text{impair}}]$$

On doit donc avoir

$$\text{ordonnée moyenne} = \frac{\text{Aire}}{2b} = \frac{1}{24} [2 \sum K_{\text{pair}} - (K_0 + K_{2n}) + 4 \sum K_{\text{impair}}] = 1. \quad (50)$$

Par ailleurs, en vertu du principe de Maxwell, on a

$$K_{ab} = K_{ba}, \quad (51)$$

c'est-à-dire que le tableau des K doit être symétrique par rapport aux diagonales formées par les nombres en caractères gras (voir les tableaux 2, 3 et 4 ci-après).

Les relations (50) et (51) constituent deux vérifications très précieuses en fin des calculs, qui sont longs et périlleux.

Dans le cas particulier où $\alpha=0$, les expressions (39) à (49) se simplifient très considérablement et l'on doit retrouver les résultats obtenus par GUYON pour le treillis continu sans résistance à la torsion⁴).

Effectivement, les résultats obtenus par les deux méthodes sont presque identiques, comme le montre le tableau suivant, calculé pour la valeur $\vartheta=0,66874$ du paramètre d'entretoisement.

Tableau n° 1
Comparaison de nos résultats avec ceux de GUYON

Position de la poutre	GUYON			MASSONNET		
	Position de la charge			Position de la charge		
	$-b$	0	$+b$	$-b$	0	$+b$
0	+0,120	+1,618	+0,120	+0,119	+1,620	+0,119
$b/4$	-0,294	+1,442	+0,874	-0,306	+1,443	+0,888
$b/2$	-0,517	+1,055	+2,113	-0,518	+1,055	+2,121
$3b/4$	-0,635	+0,595	+3,871	-0,627	+0,594	+3,861
b	-0,692	+0,120	+5,984	-0,706	+0,119	+5,986

Nous pouvons donc nous servir des résultats de GUYON sans contrôle supplémentaire. Signalons à ce propos que nos calculs ont été effectués à la machine à l'aide de tables des lignes trigonométriques et fonctions exponentielles à 4 et 5 décimales. De sorte que l'erreur sur nos résultats est moindre en général qu'une unité du dernier chiffre conservé.

Variation de K avec le paramètre α

Il nous faudrait en principe déterminer les lignes d'influence de K pour toute une série de valeurs régulièrement espacées du paramètre de torsion α , ce qui conduirait à des calculs très considérables. Pour éviter cet inconvénient, nous avons essayé de trouver une loi empirique permettant de déterminer le coefficient K par interpolation entre les valeurs extrêmes qu'il prend pour $\alpha=0$ et $\alpha=1$.

Dans ce but, nous avons calculé toutes les lignes d'influence d'un pont de paramètre d'entretoisement $\vartheta=0,66874$ pour les valeurs 0, $1/4$, $1/2$ et 1 du paramètre de torsion. Les résultats des calculs sont consignés dans le tableau n° 2 ci-dessous.

⁴) Rappelons que nous avons déjà obtenu l'expression générale du coefficient K relatif à $\alpha=0$ par une autre méthode dans notre mémoire antérieur [6].

Tableau n° 2

Valeurs du coefficient de répartition K_α pour des ponts de paramètre d'entretoisement $\vartheta = 0,66874$ possédant différentes résistances à la torsion

Valeurs du paramètre de torsion	Position de la poutre	Excentricité de la charge								
		$-b$	$-\frac{3b}{4}$	$-\frac{b}{2}$	$-\frac{b}{4}$	0	$\frac{b}{4}$	$\frac{b}{2}$	$\frac{3b}{4}$	b
$\alpha = 0$	0	+0,120	+0,595	+1,055	+1,442	+ 1,618	+1,442	+1,055	+0,595	+0,120
	$b/4$	-0,294	+0,149	+0,603	+ 1,051	+1,442	+ 1,646	+1,527	+1,226	+0,874
	$b/2$	-0,517	-0,175	+ 0,195	+0,603	+1,055	+1,527	+ 1,909	+2,064	+2,113
	$3b/4$	-0,635	- 0,427	-0,175	+0,149	+0,595	+1,226	+2,064	+ 3,004	+3,871
	b	- 0,692	-0,635	-0,517	-0,294	+0,120	+0,874	+2,113	+3,871	+ 5,984
$\alpha = 1/4$	0	+0,439	+0,723	+1,021	+1,297	+ 1,434	+1,297	+1,021	+0,723	+0,439
	$b/4$	+0,092	+0,359	+0,653	+ 0,980	+1,297	+ 1,487	+1,417	+1,220	+1,003
	$b/2$	-0,113	+0,103	+ 0,349	+0,653	+1,021	+1,417	+ 1,732	+1,837	+1,856
	$3b/4$	-0,242	- 0,085	+0,103	+0,358	+0,723	+1,220	+1,837	+ 2,483	+3,029
	b	- 0,344	-0,242	-0,113	+0,092	+0,439	+1,003	+1,857	+3,028	+ 4,446
$\alpha = 1/2$	0	+0,589	+0,785	+1,007	+1,227	+ 1,342	+1,227	+1,007	+0,785	+0,589
	$b/4$	+0,297	+0,480	+0,697	+ 0,958	+1,227	+ 1,399	+1,348	+1,197	+1,040
	$b/2$	+0,114	+0,265	+ 0,452	+0,697	+1,007	+1,348	+ 1,619	+1,696	+1,697
	$3b/4$	-0,006	+ 0,114	+0,267	+0,480	+0,785	+1,197	+1,696	+ 2,196	+2,581
	b	- 0,098	-0,006	+0,114	+0,297	+0,589	+1,040	+1,697	+2,581	+ 3,644
$\alpha = 1$	0	+0,733	+0,849	+0,995	+1,157	+ 1,248	+1,157	+0,995	+0,848	+0,733
	$b/4$	+0,511	+0,617	+0,759	+ 0,947	+1,157	+ 1,300	+1,263	+1,158	+1,058
	$b/2$	+0,364	+0,455	+ 0,580	+0,759	+0,995	+1,263	+ 1,477	+1,525	+1,511
	$3b/4$	+0,269	+ 0,346	+0,455	+0,617	+0,849	+1,158	+1,525	+ 1,875	+2,105
	b	+ 0,202	+0,269	+0,364	+0,511	+0,733	+1,058	+1,511	+2,104	+ 2,811

La figure 5, tracée pour $\vartheta = 0,66874$, montre comment se modifient les lignes d'influence de K quand α varie de 0 à 1. L'examen de cette figure et du tableau ci-dessus montre que la formule d'interpolation suivante

$$K_\alpha = K_0 + (K_1 - K_0) \sqrt{\alpha} \quad (52)$$

donne des résultats suffisamment précis pour la pratique.

Il nous suffira donc, dans la suite, de calculer les lignes d'influence de K pour les deux cas extrêmes $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$ ⁵⁾.

Les résultats relatifs à $\alpha = 0$ sont tirés du mémoire de GUYON [3], ils sont reproduits au tableau n° 3 ci-dessous.

Nous avons exécuté les calculs relatifs à $\alpha = 1$ pour les 4 premières valeurs de ϑ adoptées par GUYON; les résultats obtenus sont consignés dans le tableau

⁵⁾ Remarquons en passant que l'influence de la torsion est très sensible même pour de petites valeurs de α , puisque, pour $\alpha = 1/4$, son effet est déjà la moitié de celui qui correspond à la plaque isotrope ($\alpha = 1$). Ceci montre qu'on commettrait de grosses erreurs en négligeant cette influence dans les ponts en béton armé.

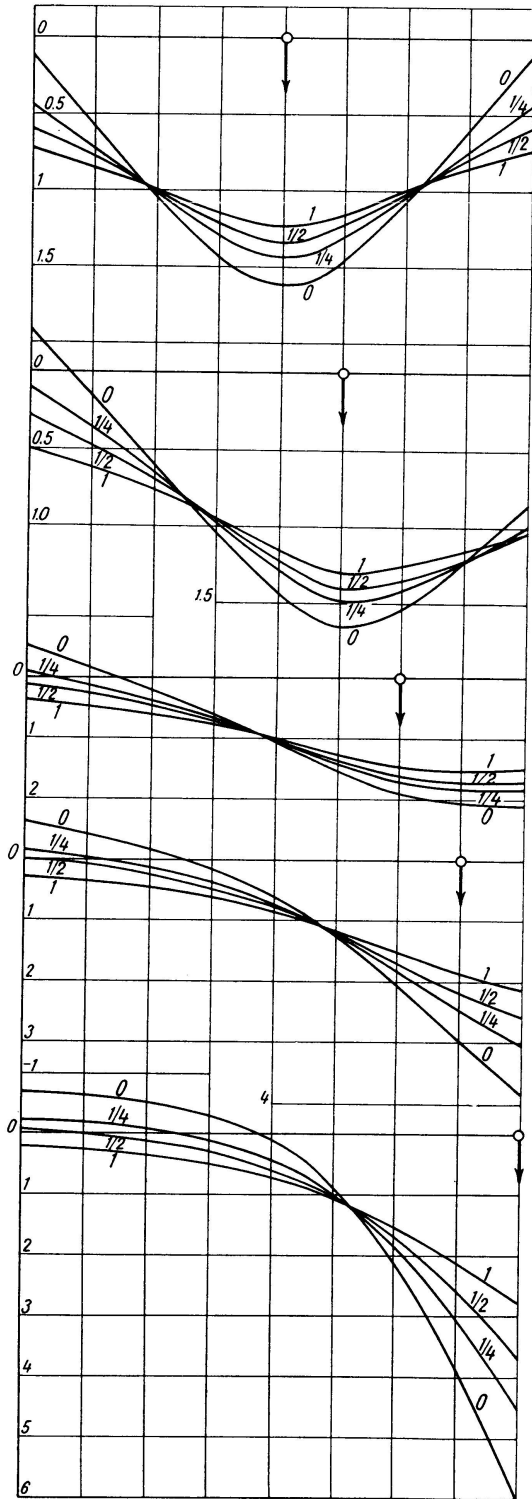


Fig. 5

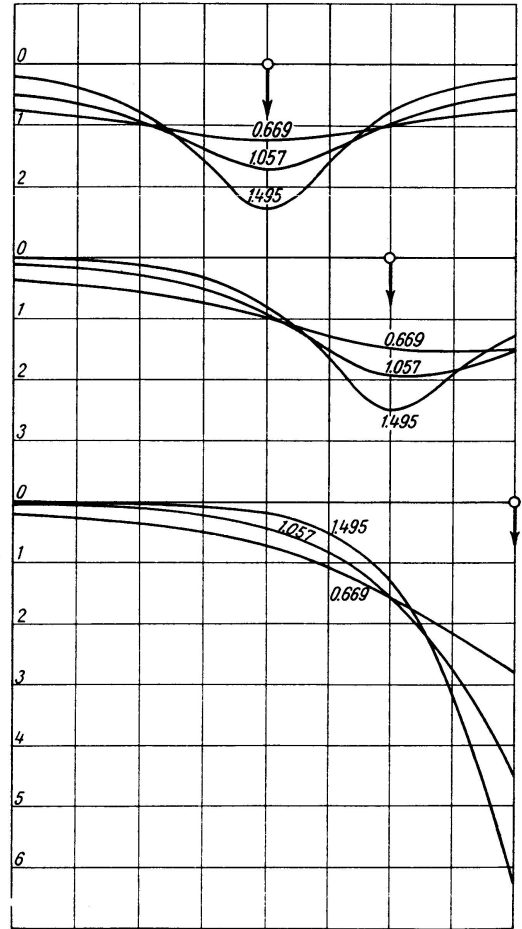


Fig. 6

n° 4 ci-dessous. La figure 6 montre comment évoluent les lignes d'influence de K ($\alpha = 1$) quand le paramètre ϑ augmente.

La valeur $\vartheta = 0$ nécessite un examen particulier. Si α est différent de zéro, $\vartheta = 0$ correspond à un pont dont les entretoises présenteraient des rigidités à la flexion ρ_E et à la torsion γ_E infiniment grandes. Par réciprocité, on doit

admettre que la rigidité à la torsion γ_P des poutres est également infiniment grande. Dans ces conditions, les entretoises restent rectilignes quand on charge le pont; au surplus, elles ne peuvent s'incliner sur l'horizontale; car, si elles s'inclinaient, le pont prendrait une déformée d'équation

$$w = (Ay + B) \sin \frac{\pi x}{l},$$

et subirait la torsion d'amplitude finie

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = A \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l},$$

ce qui n'est pas possible si poutres et entretoises ont une rigidité torsionnelle infinie.

Il est donc nécessaire de supposer A infiniment petit et le pont se déforme par abaissement uniforme de toutes les entretoises parallèlement à elles-mêmes; toutes les poutres ont donc la même déformée. Il suit de là que, pour $\vartheta = 0$, on a pour toutes les valeurs de $\alpha \neq 0$

$$K = 1,$$

quelles que soient les positions de la charge et du point considéré de l'entretoise.

Ce raisonnement n'est plus valable dans le cas où les entretoises n'ont aucune résistance à la torsion ($\alpha = 0$). Ce cas correspond à la méthode d'Engesser et a été étudié en détail ailleurs [6].

On constate ainsi que les valeurs de K sont des fonctions discontinues de α pour $\alpha = 0$.

Il est difficile, à première vue, de se représenter comment le pont peut transmettre aux appuis une charge sinusoïdale $p \sin \pi x/l$ excentrée de la longueur e , tout en prenant une déformée cylindrique (fig. 7). En effet, les poutres, se déformant toutes également comme on l'a montré ci-dessus, exercent sur les entretoises des réactions uniformément réparties à raison de $p/2b \sin \pi x/l$ kilogs par mètre courant d'entretoise (fig. 7). La résultante de ces réactions passe par l'axe du pont et n'équilibre pas la charge extérieure.

Ce paradoxe apparent s'explique aisément si l'on tient compte des moments de torsion. En réalité, pour équilibrer le couple extérieur

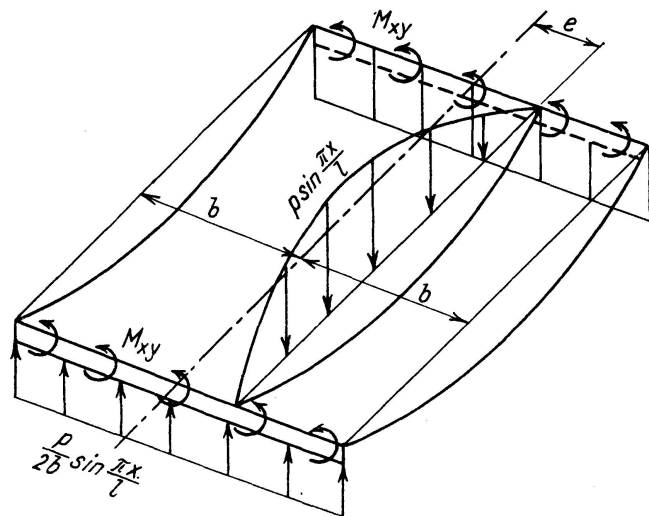


Fig. 7

$$e p \int_0^l \sin \frac{\pi x}{l} dx,$$

les entretoises doivent tourner de l'angle infiniment petit $d\varphi$, donnant au pont la déformée

Tableau n° 3
Valeurs du coefficient de répartition K pour $\alpha = 0$

$\varphi = \frac{b}{l} \sqrt[4]{\frac{\rho_P}{\rho_E}}$	Position de la poutre	Excentricité de la charge								
		$-b$	$-\frac{3b}{4}$	$-\frac{b}{2}$	$-\frac{b}{4}$	0	$\frac{b}{4}$	$\frac{b}{2}$	$\frac{3b}{4}$	b
0	0	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1
	$b/4$	+0,25	+0,437	+0,625	+0,812	+1	+1,187	+1,375	+1,562	+1,75
	$b/2$	-0,5	-0,125	+0,250	+0,625	+1	+1,375	+1,75	+2,125	+2,5
	$3b/4$	-1,25	-0,687	-0,125	+0,437	+1	+1,562	+2,125	+2,687	+3,25
	b	-2	-1,25	-0,5	+0,25	+1	+1,75	+2,5	+3,25	+4
0,669	0	+0,120	+0,595	+1,055	+1,442	+1,618	+1,442	+1,055	+0,595	+0,120
	$b/4$	-0,294	+0,149	+0,603	+1,051	+1,442	+1,646	+1,527	+1,226	+0,874
	$b/2$	-0,517	-0,175	+0,195	+0,603	+1,055	+1,527	+1,909	+2,064	+2,113
	$3b/4$	-0,635	-0,427	-0,175	+0,149	+0,595	+1,226	+2,064	+3,004	+3,871
	b	-0,692	-0,635	-0,517	-0,294	+0,120	+0,874	+2,113	+3,871	+5,984
1,057	0	-0,733	+0,109	+0,993	+1,944	+2,403	+1,944	+0,993	+0,109	-0,733
	$b/4$	-0,595	-0,156	+0,339	+1,045	+1,944	+2,492	+1,894	+0,798	-0,383
	$b/2$	-0,301	-0,153	-0,003	+0,339	+0,993	+1,894	+2,490	+1,996	+1,049
	$3b/4$	+0,002	-0,114	-0,153	-0,156	+0,109	+0,798	+1,996	+3,427	+4,403
	b	+0,225	+0,002	-0,301	-0,595	-0,733	-0,383	+1,049	+4,403	+9,452
1,495	0	-0,467	-0,119	+0,594	+2,073	+3,344	+2,073	+0,594	-0,119	-0,467
	$b/4$	-0,114	-0,157	-0,058	+0,576	+2,073	+3,398	+2,132	+0,455	-0,883
	$b/2$	+0,023	-0,073	-0,152	-0,119	+0,594	+2,132	+3,464	+2,043	-0,217
	$3b/4$	+0,044	+0,001	-0,073	-0,157	-0,119	+0,455	+2,043	+3,894	+3,887
	b	+0,051	+0,044	+0,023	-0,114	-0,467	-0,883	-0,217	+3,887	+13,827
1,778	0	-0,213	-0,186	+0,293	+2,045	+3,953	+2,045	+0,293	-0,186	-0,213
	$b/4$	+0,038	-0,109	-0,172	+0,281	+2,045	+3,985	+2,102	+0,229	-0,804
	$b/2$	-0,012	-0,029	-0,108	-0,172	+0,293	+2,102	+4,100	+2,039	-0,816
	$3b/4$	+0,032	+0,016	-0,029	-0,109	-0,186	+0,229	+2,039	+4,319	+3,218
	b	+0,013	+0,032	-0,012	+0,038	-0,213	-0,804	-0,816	+3,218	+15,801
2,34	0	+0,061	-0,157	-0,133	+1,750	+5,200	+1,750	-0,133	-0,157	+0,061
	$b/4$	+0,012	-0,010	-0,152	-0,134	+1,750	+5,201	+1,761	-0,143	-0,292
	$b/2$	+0,037	+0,013	-0,065	-0,152	-0,133	+1,761	+5,254	+1,803	-1,402
	$3b/4$	+0,037	+0,003	+0,013	-0,010	-0,157	-0,143	+1,803	+5,436	+1,491
	b	+0,051	+0,037	+0,037	+0,012	+0,061	-0,292	-1,402	+1,491	+20,795
3,162	0	+0,045	-0,019	-0,284	+1,012	+7,016	+1,012	-0,284	-0,019	+0,045
	$b/4$	-0,052	+0,203	-0,015	-0,284	+1,012	+7,016	+1,009	-0,297	+0,108
	$b/2$	0	0	+0,020	-0,015	-0,284	+1,009	+7,032	+1,060	-0,852
	$3b/4$	-0,061	+0,058	0	+0,023	-0,019	-0,297	+1,060	+7,398	-1,125
	b	+0,211	-0,061	0	-0,052	+0,045	+0,108	-0,852	-1,125	+28,077

Tableau n° 4
Valeurs du coefficient de répartition K pour $\alpha = 1$

$\vartheta = \frac{b}{l} \sqrt[4]{\frac{\rho_P}{\rho_E}}$	Position de la poutre	Excentricité de la charge								
		$-b$	$-\frac{3b}{4}$	$-\frac{b}{2}$	$-\frac{b}{4}$	0	$\frac{b}{4}$	$\frac{b}{2}$	$\frac{3b}{4}$	b
0,669	0	+0,733	+0,849	+0,995	+1,157	+1,248	+1,157	+0,995	+0,849	+0,733
	$b/4$	+0,511	+0,617	+0,759	+0,947	+1,157	+1,300	+1,263	+1,158	+1,058
	$b/2$	+0,364	+0,455	+0,580	+0,759	+0,995	+1,263	+1,477	+1,525	+1,511
	$3b/4$	+0,269	+0,346	+0,455	+0,617	+0,849	+1,158	+1,525	+1,875	+2,105
	b	+0,202	+0,269	+0,364	+0,511	+0,733	+1,058	+1,511	+2,104	+2,811
1,057	0	+0,428	+0,612	+0,926	+1,383	+1,710	+1,383	+0,926	+0,612	+0,428
	$b/4$	+0,219	+0,330	+0,533	+0,887	+1,383	+1,753	+1,480	+1,091	+0,825
	$b/2$	+0,113	+0,178	+0,301	+0,533	+0,926	+1,480	+1,939	+1,796	+1,541
	$3b/4$	+0,063	+0,102	+0,179	+0,331	+0,613	+1,092	+1,796	+2,510	+2,733
	b	+0,037	+0,063	+0,113	+0,219	+0,482	+0,825	+1,541	+2,733	+4,429
1,495	0	+0,191	+0,362	+0,775	+1,593	+2,356	+1,589	+0,775	+0,362	+0,191
	$b/4$	+0,070	+0,140	+0,323	+0,758	+1,589	+2,375	+1,639	+0,879	+0,510
	$b/2$	+0,025	+0,053	+0,128	+0,323	+0,774	+1,639	+2,497	+1,903	+1,300
	$3b/4$	+0,010	+0,021	+0,053	+0,140	+0,362	+0,879	+1,903	+3,104	+3,072
	b	+0,005	+0,010	+0,026	+0,070	+0,191	+0,510	+1,301	+3,071	+6,263
1,778	0	+0,106	+0,243	+0,658	+1,660	+2,795	+1,660	+0,658	+0,243	+0,106
	$b/4$	+0,031	+0,076	+0,223	+0,658	+1,660	+2,804	+1,687	+0,726	+0,349
	$b/2$	+0,009	+0,023	+0,071	+0,223	+0,658	+1,687	+2,885	+1,895	+1,093
	$3b/4$	+0,003	+0,007	+0,023	+0,076	+0,243	+0,726	+1,895	+3,453	+3,122
	b	0	+0,003	+0,009	+0,031	+0,106	+0,349	+1,093	+3,122	+7,449

$$w = y \sin \frac{\pi x}{l} d\varphi.$$

Le pont subit ainsi la torsion infiniment petite

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l} d\varphi,$$

qui entraîne dans les poutres des moments de torsion

$$M_{xy} = \gamma_P \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \gamma_P \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l} d\varphi,$$

uniformément répartis dans une section transversale du pont (fig. 7). Ces moments sont d'intensité finie parce que γ_P est infiniment grand. Ils atteignent leur valeur maximum $\gamma_P \pi/l \cdot d\varphi$ aux deux extrémités des poutres, où l'on doit supposer qu'il existe de fortes entretoises capables de les reprendre.

L'équilibre de rotation du pont entier autour de son axe longitudinal (fig. 7) exige qu'on ait

$$4b (M_{xy})_{max} = e \cdot p \int_0^l \sin \frac{\pi x}{l} dx = \frac{2pel}{\pi},$$

d'où
$$(M_{xy})_{max} = \frac{p e l}{2 \pi b}$$

et
$$M_{xy} = \frac{p e l}{2 \pi b} \cos \frac{\pi x}{l}. \quad (53)$$

C. Calcul des moments fléchissants dans les poutres du pont

Les tableaux n° 3 et 4 permettent de tracer les lignes d'influence de K_0 et K_1 pour les 5 valeurs suivantes de ϑ : 0 – 0,669 – 1,057 – 1,495 – 1,778. Pour des valeurs différentes de ce paramètre, il faut interpoler. Cette interpolation est assez difficile, parce que la loi de variation de K est complexe. Pour la faciliter, on se servira avec avantage de courbes donnant, pour les 5 positions des poutres reprises aux tableaux, la variation de K en fonction de θ . Ces courbes peuvent se construire facilement sur papier millimétré.

Supposons par exemple que nous prenions $\alpha = 0$ et $\vartheta = 1$. On lira les valeurs de K sur les courbes précitées, ce qui permettra de dresser le tableau suivant:

Position de la poutre	Position de la charge								
	$-b$	$-\frac{3b}{4}$	$-\frac{b}{2}$	$-\frac{b}{4}$	0	$\frac{b}{4}$	$\frac{b}{2}$	$\frac{3b}{4}$	b
0	-0,70	+0,17	+1,00	+1,90	+2,30	+1,90	+1,00	+0,17	-0,70
$b/4$	-0,59	-0,12	+0,40	+1,08	+1,90	+2,36	+1,85	+0,85	-0,28
$b/2$	-0,35	-0,16	+0,03	+0,40	+1,00	+1,85	+2,36	+2,00	+1,26
$3b/4$	-0,09	-0,16	-0,16	-0,12	+0,17	+0,85	+2,00	+3,35	+4,30
b	+0,15	-0,09	-0,35	-0,59	-0,70	-0,28	+1,26	+4,30	+8,80

Il est à recommander de faire deux vérifications (basées sur les deux propriétés démontrées au littéra B ci-dessus), qui permettent de retoucher le tableau pour corriger les imperfections de la méthode graphique:

1. En vertu du théorème de Maxwell, le tableau doit être symétrique par rapport aux deux diagonales formées des nombres en caractères gras.
2. La valeur moyenne de K par ligne horizontale doit être l'unité; si l'on appelle K_0, K_1, \dots, K_8 , les 9 coefficients d'une ligne à partir de la gauche, on doit avoir sensiblement

$$2 \sum K_{pairs} + 4 \sum K_{impairs} - (K_0 + K_8) = 24 \quad (50)$$

Ayant obtenu par la méthode ci-dessus les valeurs de K_0 et K_1 pour la valeur de ϑ choisie, on calculera ensuite la valeur du paramètre de torsion α qui correspond au pont étudié et on interpolera entre les valeurs de K_0 et K_1 à l'aide de la formule

$$K_\alpha = K_0 + (K_1 - K_0) \sqrt{\alpha}. \quad (52)$$

Cette opération permettra de tracer les lignes d'influence du coefficient de répartition transversale.

Emploi des lignes d'influence de K:

Nous savons que, sous la charge

$$p(x) = p_1 \sin \frac{\pi x}{l}$$

répartie sinusoïdalement le long d'une parallèle à l'axe du pont d'excentricité e , le pont prend une déformée sinusoïdale donnée par l'équation (37) où l'on fait $m = 1$; cette déformée est de la forme générale

$$w = f(y) \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Les moments fléchissants unitaires dans les poutres du pont sont liés à w par la formule

$$M_x = -\rho_P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (12)$$

ils sont donc de la forme

$$M_x = \frac{\pi^2}{l^2} \rho_P f(y) \sin \frac{\pi x}{l} = \frac{\pi^2 \rho_P}{l^2} w,$$

et sont *proportionnels* au déplacement du point considéré de la poutre. Le coefficient de répartition transversale K , défini en B. par le quotient

$$K = \frac{w}{w^0},$$

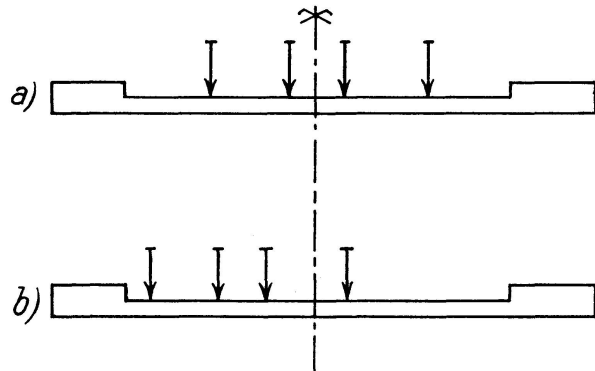


Fig. 8

est donc encore égal au quotient M_x/M_x^0 , où M_x est le moment fléchissant réel dans la section x de la poutre et où M_x^0 représente le moment moyen qui naîtrait dans les poutres du pont, si elles fléchissaient toutes identiquement.

Supposons maintenant que le pont soit chargé de plusieurs files parallèles de véhicules réglementaires et appelons P_1, P_2, \dots, P_n , les charges concentrées (constituées par les roues de ces véhicules) situées dans une section transversale déterminée d'abscisse ξ (fig. 8).

Appelons m_{0x} le moment fléchissant provoqué dans une poutre sur deux appuis d'extrémité par une force concentrée unitaire d'abscisse ξ . La force concentrée $P(\xi, \eta)$ provoque dans la section x du pont le moment fléchissant moyen $M_x^0 = P m_{0x}$; elle provoque donc dans la section x de la poutre (y) le moment fléchissant

$$P K(y, \eta) m_{0x}$$

L'ensemble des forces P d'abscisse ξ provoque dans cette même section le moment fléchissant

$$m_{0x}(\xi) \sum_{\eta=-b}^{\eta=+b} P(\xi, \eta) K(y, \eta) \quad (a)$$

Pour obtenir le maximum de ce moment, on doit placer les charges P transversalement sur le pont dans une position déterminée, qu'on recherche par tâtonnements. La figure 8a) montre la position des charges qui donne le moment maximum dans les poutres centrales du pont et la figure 8b) celle qui provoque le maximum dans les poutres de rive.

Enfin, pour obtenir le moment fléchissant total dans la poutre en question, il faut faire la somme des quantités (a) ci-dessus pour toutes les files transversales de charges placées sur le pont.

Généralement, toutes les charges P d'une même file transversale sont identiques et l'expression du moment fléchissant total se réduit à

$$\sum_{\eta=-b}^{\eta=+b} K(y, \eta) \sum_{\xi=0}^{\xi=l} P(\xi, \eta) m_{0x}(\xi)$$

Les quantités m_{0x} sont les ordonnées de la ligne d'influence (en forme de chevron) du moment fléchissant dans la section (x) d'une poutre sur deux appuis simples. Il suffit donc de rechercher, par la méthode classique des lignes d'influence, le moment maximum dans une poutre isolée sur appuis simples soumise à l'action d'une file longitudinale de charges de roues, puis de multiplier le moment obtenu par le facteur $\Sigma K(y, \eta)$. *En résumé, et nous ne saurions assez le souligner, toute l'étude théorique des paragraphes précédents doit servir uniquement à déterminer la répartition transversale la plus défavorable des charges, caractérisée par le terme ΣK . Une fois cette répartition connue, l'étude du pont se poursuit par les méthodes ordinaires de la stabilité des constructions, indépendamment de la présente étude.*

D. Lignes d'influence des moments fléchissants dans les entretoises

Le moment fléchissant par mètre courant d'entretoise est donné par l'expression

$$M_y = -\rho_E \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (12)$$

où w est la déformée du pont.

L'expression développée de w s'obtient en faisant $m = 1$ dans la formule (37) et en y introduisant les notations (42) et (43); on trouve ainsi

$$\begin{aligned} w = \sin \frac{\pi x}{l} & \left\{ e^{\beta \vartheta \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}} \left[A \cos \beta \vartheta \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} + \frac{B}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} \sin \beta \vartheta \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} \right] \right. \\ & + e^{-\beta \vartheta \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}} \left[C \cos \beta \vartheta \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} + \frac{D}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} \sin \beta \vartheta \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} \right] \\ & \left. + c \cdot e^{-\vartheta |\beta - \psi| \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}} \left[\cos \left(\vartheta \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} |\beta - \psi| \right) + \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \sin \left(\vartheta \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} |\beta - \psi| \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (54)$$

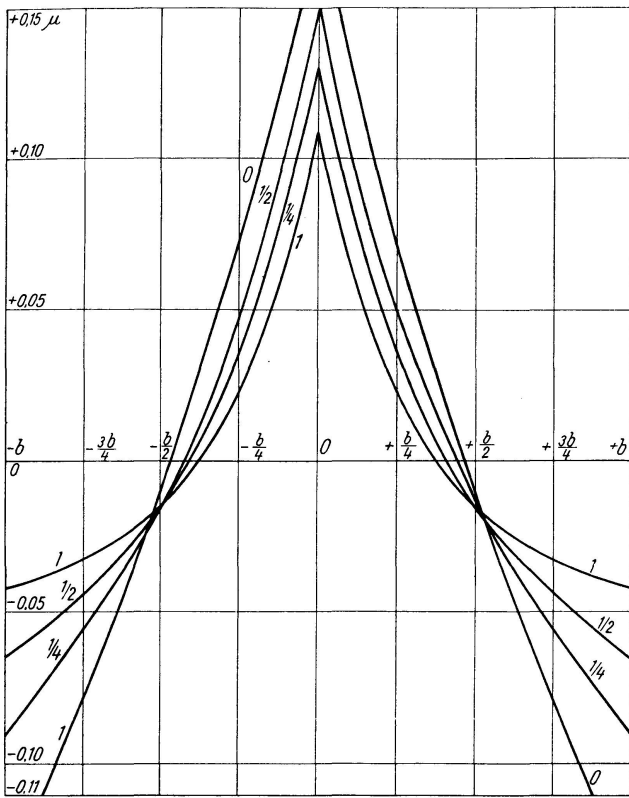


Fig. 9

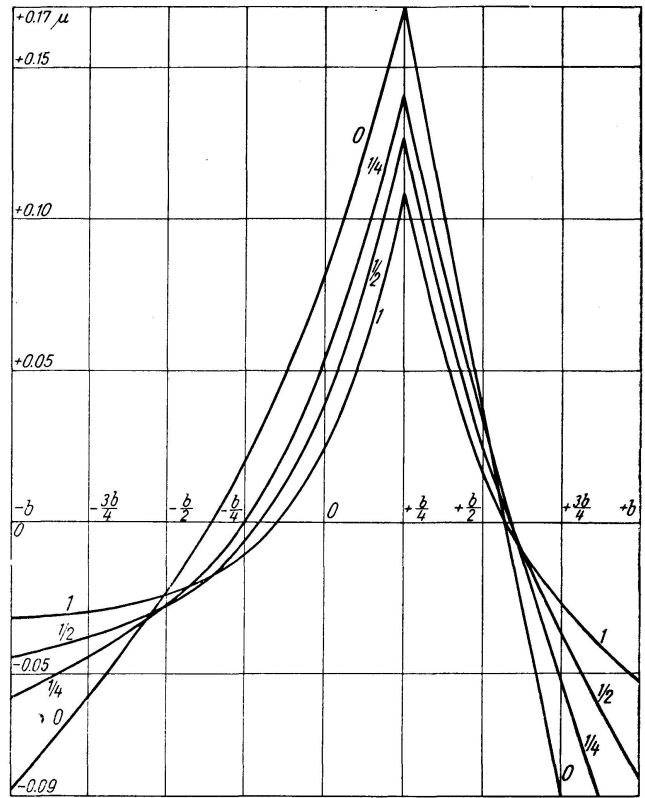


Fig. 10

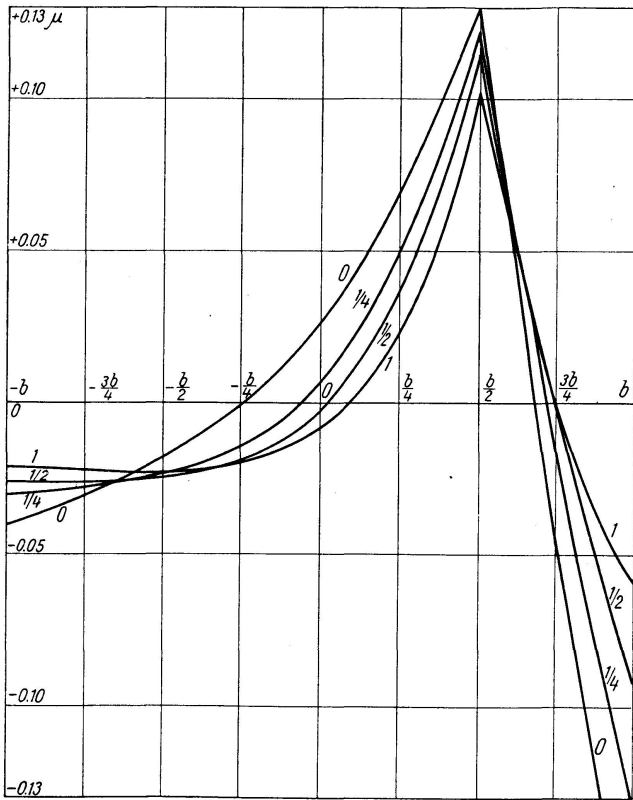


Fig. 11

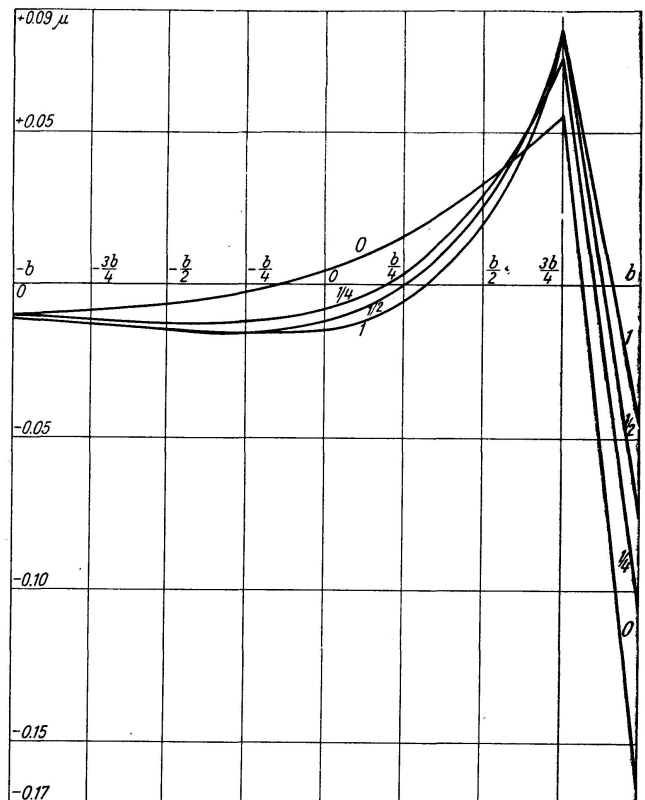


Fig. 12

La constante c intervenant dans cette formule est définie par la formule (35) qui s'écrit, avec la notation ϑ ,

$$c = \frac{p b^3}{2 \sqrt{2(1+\alpha)} \rho_E \pi^3 \vartheta^3} \quad (55)$$

En effectuant la double dérivation de w , on obtient l'expression suivante

$$M_y = \mu p b \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (56)$$

Le coefficient μ a la valeur suivante:

$$\begin{aligned} \mu = & \alpha \left(A f_\beta + \frac{B}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} g_\beta \right) + \sqrt{1-\alpha^2} \left(-A g_\beta + \frac{B f_\beta}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} \right) + \alpha \left(C h_\beta + \frac{D}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} i_\beta \right) \\ & + \sqrt{1-\alpha^2} \left(C i_\beta - \frac{D}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} h_\beta \right) + c \left[\sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} i_{|\beta-\psi|} - h_{|\beta-\psi|} \right], \end{aligned} \quad (57)$$

où l'on a posé, pour simplifier les écritures,

$$\begin{aligned} f_\beta &= e^{\beta \vartheta \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}} \cos \beta \vartheta \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}; & g_\beta &= e^{\beta \vartheta \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}} \sin \beta \vartheta \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}, \\ h_\beta &= e^{-\beta \vartheta \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}} \cos \beta \vartheta \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}; & i_\beta &= e^{-\beta \vartheta \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}} \sin \beta \vartheta \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}, \\ h_{|\beta-\psi|} &= e^{-|\beta-\psi| \vartheta \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}} \cos |\beta-\psi| \vartheta \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}; & i_{|\beta-\psi|} &= e^{-|\beta-\psi| \vartheta \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}} \sin |\beta-\psi| \vartheta \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} \end{aligned} \quad (58)$$

Nous avons calculé ci-dessous (Tableau n° 5) les valeurs du coefficient μ pour $\vartheta = 0,66874$ et α variable de 0 à 1. Ce tableau permet de tracer les lignes d'influence de μ pour les quatre sections d'ordonnées 0, $b/4$; $b/2$ et $3b/4$ (figures 9 à 12).

Il ressort de ce tableau et de ces figures que l'on peut déterminer les valeurs de μ correspondant à une valeur quelconque de α par la formule empirique suivante

$$\mu_\alpha = \mu_0 + (\mu_1 - \mu_0) \sqrt{\alpha} \quad (59)$$

avec une précision suffisante pour les besoins de la pratique. La précision donnée par la formule (59) est cependant moindre que celle de la formule analogue (52) relative au coefficient K .

Grâce à la formule (59), il nous suffit de connaître les valeurs de μ_0 et de μ_1 , relatives aux valeurs $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$ du paramètre α .

Les valeurs de μ_0 ont été calculées par GUYON [3] pour les valeurs suivantes de ϑ : 0; 0,669; 1,495; 2,34; 3,162. Nous reprendrons ces résultats au Tableau

Tableau n° 5

Valeurs du coefficient $10^4 \cdot \mu$ pour $\vartheta = 0,66874$ et α variable de 0 à 1

α	Position de la section	Excentricité de la charge								
		$-b$	$-3b/4$	$-b/2$	$-b/4$	0	$b/4$	$b/2$	$3b/4$	b
0	0	-1419	-786	-102	+735	+1830	+735	-102	-786	-1419
	$b/4$	-869	-568	-234	+202	+828	+1713	+361	-814	-1924
	$b/2$	-408	-301	-179	-4	+255	+698	+1300	-654	-2139
	$3b/4$	-106	-87	-63	-25	+43	+157	+329	+559	-1678
	b		0	0	0	0	0	0	0	0
1/4	0	-897	-560	-142	+486	+1487	+486	-142	-560	-897
	$b/4$	-576	-447	-277	+12	+534	+1411	+296	-519	-1189
	$b/2$	-303	-281	-242	-149	+63	+482	+1221	-162	-1342
	$3b/4$	-106	-119	-129	-123	-78	+45	+300	+755	-1078
	b	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1/2	0	-652	-445	-153	+360	+1304	+360	-153	-434	-652
	$b/4$	-443	-377	-274	-60	+390	+1268	+247	-374	-853
	$b/2$	-260	-260	-248	-191	-230	+366	+1147	-39	-958
	$3b/4$	-114	-130	-146	-151	-120	+1	+268	+825	-783
	b	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	-419	-322	-151	+231	+1096	+231	-151	-322	-419
	$b/4$	-311	-290	-243	-108	+246	+1081	+179	-261	-528
	$b/2$	-213	-221	-225	-199	-86	+239	+1025	+30	-591
	$3b/4$	-117	-130	-145	-156	-141	-54	+204	+837	-498
	b	0	0	0	0	0	0	0	0	0

n° 6, bien qu'ils diffèrent légèrement des nôtres. (On comparera, à ce point de vue, les valeurs de μ relatives à $\vartheta = 0,669$ figurant dans les tableaux 5 et 6.)

Nous avons calculé les valeurs de μ_1 pour $\alpha = 1$ et les valeurs de ϑ ci-après : 0; 0,669; 1,057; 1,495; 1,778. Ces valeurs sont consignées dans le tableau n° 7.

La détermination des valeurs de μ_1 pour $\vartheta = 0$ demande quelques mots d'explication. Il est possible d'obtenir ces valeurs en cherchant la limite de l'expression (57) pour ϑ tendant vers zéro. Les calculs sont très longs parce qu'il faut y conserver les trois premiers termes des développements en série de e_x , $\sin x$, $\cos x$. Nous ne les reproduirons pas ici, parce qu'on peut obtenir le même résultat par un raisonnement beaucoup plus simple et plus concret.

Examinons (fig. 13) l'équilibre de la bande élémentaire d'entretoise de largeur dx située à l'abscisse x . D'après l'analyse faite ci-dessus à la fin du littéra b), cette entretoise est soumise de la part des poutres à des réactions uniformes d'intensité $p/2b \sin \pi x/l dx$, dirigées de bas en haut. Elle doit reprendre également la variation, sur la longueur dx , des moments de torsion dans les poutres, qui vaut, d'après la formule (53),

$$\frac{dM_{xy}}{dx} dx = -\frac{p e l}{2 \pi b l} \frac{\pi}{l} \sin \frac{\pi x}{l} dx = -\frac{p e}{2 b} \sin \frac{\pi x}{l} dx.$$

Tableau n° 6
Valeurs du coefficient $10^4 \mu_0$ ($\alpha=0$, ϑ variable)

Valeurs du paramètre d'entretoisement	Position de la section	Excentricité de la charge								
		$-b$	$-3b/4$	$-b/2$	$-b/4$	0	$b/4$	$b/2$	$3b/4$	b
$\vartheta = 0$	0	-2500	-1250	0	+1250	+2500	+1250	0	-1250	-2500
	$b/4$	-1758	-968	-178	+612	+1403	+2195	+487	-1221	-2930
	$b/2$	-937	-546	-156	+234	+625	+1055	+1406	-703	-2812
	$3b/4$	-273	-166	-58	+49	+156	+263	+371	+478	-1914
	b	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\vartheta = 0,669$	0	-1418	-786	-103	+734	+1828	+734	-103	-786	-1418
	$b/4$	-873	-564	-234	+230	+826	+1685	+363	-817	-1920
	$b/2$	-435	-299	-175	+470	+266	+649	+1306	-454	-2123
	$3b/4$	-109	-86	-60	+25	+40	+106	+331	+559	-1681
	b	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\vartheta = 1,495$	0	+16	-82	-161	-31	+758	-31	-161	-82	+16
	$b/4$	+45	-21	-88	-155	-26	+764	-26	-178	-150
	$b/2$	+12	+10	-33	-81	-140	+3	+795	-106	-562
	$3b/4$	-6	+60	-4	-24	-49	-75	+81	+583	-975
	b	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\vartheta = 2,34$	0	+13	-5	-43	-99	+490	-99	-43	-5	+13
	$b/4$	-11	+10	-5	-43	-98	+490	-100	-44	+17
	$b/2$	-75	-9	+14	-5	-43	-99	+488	-98	-0
	$3b/4$	+62	-10	-12	+9	-7	-38	-77	+491	-431
	b	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\vartheta = 3,162$	0	0	+2	-8	-71	+364	-71	-8	+2	0
	$b/4$	-117	+6	+6	-9	-71	+372	-75	-13	+127
	$b/2$	+196	-8	-4	+4	-8	-72	+366	-66	-184
	$3b/4$	-122	+2	+3	+1	+2	-8	-70	+370	-117
	b	0	0	0	0	0	0	0	0	0

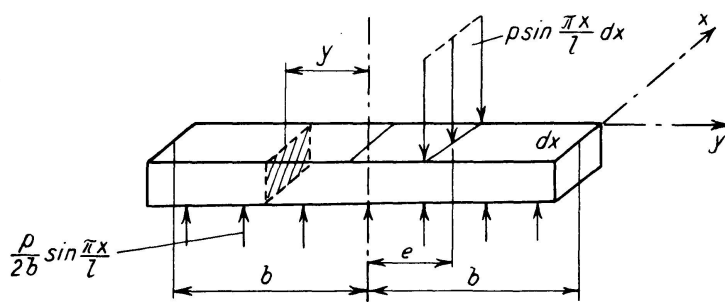


Fig. 13

Le moment fléchissant dans la section y de l'entretoise vaut, d'après la figure 6,

$$M_y dx = \frac{p}{2b} \sin \frac{\pi x}{l} dx \frac{(b+y)^2}{2} - \frac{pe}{2b} \sin \frac{\pi x}{l} dx (b+y) \quad (y \leq e)$$

Tableau n° 7
Valeurs du coefficient $10^4 \cdot \mu_1$ pour $\alpha = 1$ et ϑ variable

ϑ	Position de la section	Excentricité de la charge								
		$-b$	$-3b/4$	$-b/2$	$-b/4$	0	$b/4$	$b/2$	$3b/4$	b
0	0	-2500	-1250	0	+1250	+2500	+1250	0	-1250	-2500
	$b/4$	-2345	-1407	-469	+469	+1407	+2345	+938	-938	-2345
	$b/2$	-1875	-1250	-625	0	+625	+1250	+1875	0	-1875
	$3b/4$	-1093	-781	-469	-157	+157	+469	+781	+1093	-1093
	b	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,668	0	-419	-322	-151	+213	+1096	+231	-151	-322	-419
	$b/4$	-311	-290	-243	-108	+246	+1081	+179	-261	-528
	$b/2$	-213	-221	-225	-199	-86	+239	+1025	+30	-591
	$3b/4$	-117	-130	-145	-156	-141	-54	+204	+837	-498
	b	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,057	0	-121	-131	-117	+41	+740	+41	-117	-131	-121
	$b/4$	-66	-84	-107	-106	+43	+827	+20	-160	-207
	$b/2$	-35	-49	-72	-101	-106	+33	+705	-47	-317
	$3b/4$	-16	-24	-38	-62	-91	-99	+22	+623	-363
	b	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,495	0	-30	-47	-72	-30	+531	-30	-72	-47	-30
	$b/4$	-12	-21	-41	-38	-14	+529	-37	-87	-74
	$b/2$	-4	-8	-19	-40	-71	-34	+517	-67	-159
	$3b/4$	-2	-3	-7	-18	-40	-72	-37	+475	-257
	b	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,778	0	-12	-24	-50	-44	+447	-44	-50	-24	-12
	$b/4$	-4	-9	-22	-49	-44	+446	-46	-57	-38
	$b/2$	-1	-3	-8	-22	-50	-46	+440	-64	-102
	$3b/4$	0	-1	-2	-8	-22	-51	-52	+410	-206
	b	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Il peut se mettre sous la forme

$$M_y dx = \mu p b \sin \frac{\pi x}{l} dx,$$

à condition de poser

$$\mu = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{y}{b}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{y}{b}\right) \frac{e}{b} \quad (y \leq e)$$

Pour $y > e$, on trouve de même

$$\mu = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{y}{b}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{y}{b}\right) \frac{e}{b} - \frac{y-e}{b} \quad (y > e)$$

Ces deux relations peuvent se condenser en la formule générale

$$\mu = \frac{1}{4} - \frac{|y-e|}{2b} + \frac{y^2}{4b^2} - \frac{ey}{2b^2} \quad (60)$$

La ligne d'influence de μ s'obtient en considérant dans la formule (60) y comme constante et e comme variable. C'est une ligne en chevron formée de deux droites (fig. 14). Les 3 ordonnées z définissant le chevron ont pour valeur commune

$$z = \frac{1}{4} \left[1 - \left(\frac{e}{b} \right)^2 \right] \quad (61)$$

Les lignes d'influence actuelles ont une allure nettement différente de celles correspondant au grillage sans résistance à la torsion⁶⁾ ($\alpha = 0$). Cette différence s'explique par le fait que, dès que α est différent de zéro, si petit soit-il, il apparaît des moments de torsion finis qui modifient radicalement les conditions d'équilibre de l'entretoise élémentaire. Les valeurs de μ sont donc des fonctions de α discontinues pour $\alpha = 0$, tout comme les valeurs de K .

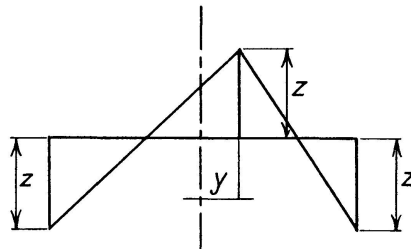


Fig. 14

8. Méthode rigoureuse de calcul

L'objectif de la méthode rigoureuse est d'établir les surfaces d'influence des divers effets des charges, en tenant compte de la résistance du pont à la torsion.

Considérons, dans ce but, une force concentrée P de coordonnées $x = c$, $y = e$. Il est facile de vérifier que cette force peut se remplacer par la série de Fourier⁷⁾

$$q = \frac{2P}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi c}{l} \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad (62)$$

D'autre part, on a vu au § 5 que la valeur ϑ_m du paramètre d'entretoisement qui correspond à la distribution de charges

$$p = p_m \sin \frac{m\pi x}{l} \quad \left(\text{avec } p_m = \frac{2P}{l} \sin \frac{m\pi c}{l} \right) \quad (63)$$

⁶⁾ Voir à ce sujet notre étude sur la méthode d'ENGESSER [6] et le mémoire de GUYON [3].

⁷⁾ Cette formule est établie en détail dans notre mémoire cité [6].

est $\vartheta_m = m \vartheta$. Cela signifie encore que, sous la charge (63), les entretoises se comportent comme si elles étaient m fois plus souples que sous la charge $p_1 \sin \pi x/l$.

Par conséquent, les raisonnements faits au § 15 de notre mémoire précité [6] et, en particulier, les formules (86) à (91) de ce mémoire, sont intégralement applicables à un pont résistant à la torsion. Seules, les valeurs numériques des coefficients K et μ sont différentes et dépendent ici du paramètre de torsion α .

A. Déformations et sollicitations des poutres

$$w(x, y) = \frac{Pl^3}{b \rho_P \pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} K_m(e, y) \sin \frac{m \pi c}{l} \sin \frac{m \pi x}{l}$$

$$M_x(x, y) = \frac{Pl}{b \pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} K_m(e, y) \sin \frac{m \pi c}{l} \sin \frac{m \pi x}{l}$$

B. Sollicitations des entretoises

$$M_y(x, y) = \frac{2 P b}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m \sin \frac{m \pi c}{l} \sin \frac{m \pi x}{l}$$

9. Indications complémentaires concernant l'application de la méthode de calcul proposée

Une grande partie des résultats généraux établis dans notre étude antérieure [6] concernant les ponts sans résistance à la torsion peuvent s'étendre au cas actuel. Nous nous permettons de renvoyer le lecteur à ce mémoire et de nous borner à l'énoncé des résultats essentiels.

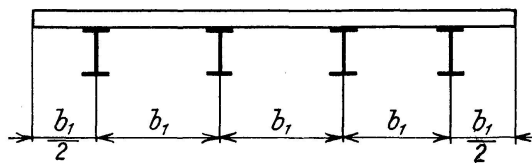


Fig. 15

A. Effet des hypothèses de base concernant la structure du pont sur la précision des résultats obtenus

a) L'erreur commise en substituant aux poutres réelles en nombre fini une répartition continue de poutres est très faible, à condition de prendre soin de considérer la répartition continue comme s'étendant sur une largeur $b_1/2$ au-delà des poutres extrêmes (fig. 15).

b) L'erreur commise en substituant aux entretoises réelles en nombre fini une répartition continue d'entretoises est absolument négligeable dès qu'il y a plus d'une entretoise (celles sur appuis non comptées). S'il n'y a qu'une entretoise médiane, l'erreur est de l'ordre de 1,5%.

c) La méthode peut s'étendre au cas où les poutres sont à moment d'inertie variable ainsi qu'aux poutres continues ou cantilever, mais sa précision dans ces cas est nettement moins bonne.

B. *Justification des hypothèses concernant l'élasticité du béton*

Les essais très étendus entrepris à l'université d'Illinois sur des ponts à dalle en béton supportée par des poutres métalliques [4, 5] nous permettent d'affirmer que la fissuration du béton ne modifie pas sensiblement la distribution transversale des charges dans un pont à poutres multiples de ce type et que les sollicitations calculées dans l'hypothèse de l'élasticité indéfinie du béton se maintiennent pratiquement jusqu'au stade précédant immédiatement la rupture.

C. *Précisions utiles pour l'application pratique de la méthode*

Toutes les considérations développées à ce sujet dans notre mémoire antérieur restent d'application.

D. *Applications numériques*

Les deux avant-projets calculés dans notre mémoire antérieur peuvent être repris en tenant compte de la résistance à la torsion. Les seules parties à modifier sont celles concernant les lignes d'influence des coefficients K et μ . A vrai dire, l'effet de la torsion dans le premier avant-projet étudié est certainement faible et ne mérite sans doute pas d'être pris en considération.

Résumé

L'auteur généralise la méthode de GUYON (Ann. P. et Ch. France, 1947) basée sur la considération d'un grillage continu de poutres et d'entretoises, pour le cas où ces pièces résistent à la torsion. Il établit les valeurs numériques du coefficient de répartition transversale des charges pour tous les paramètres d'entretoisement ϑ et pour toutes les valeurs de la rigidité relative à la torsion des poutres du pont. Il donne également des tableaux permettant de calculer les coefficients caractéristiques des moments fléchissants dans les entretoises.

Pratiquement, la méthode s'applique, comme celle de GUYON, en se limitant au premier terme de Fourier; elle permet ainsi de prendre en compte la résis-

tance du pont à la torsion *sans supplément de calculs*. D'autre part, elle permet, si on le désire, d'analyser exactement l'effet d'une charge quelconque par développement en série de Fourier.

La méthode, non seulement donne des résultats plus précis que les méthodes classiques dans les ponts habituels, mais encore s'applique directement aux ponts à poutres jointives précontraintes transversalement, ainsi qu'aux ponts-dalles en béton armé ou précontraint, qui sont s'application courante actuellement.

Zusammenfassung

Der Verfasser verallgemeinert die Methode von GUYON (Ann. P. et Ch. France, 1947), die auf der Voraussetzung eines kontinuierlichen Rostes von Längs- und Querträgern beruht, für den Fall des Verdrehungswiderstandes dieser Bauteile. Er gibt Zahlenwerte des Querverteilungskoeffizienten der Lasten für alle Querverbands-Parameter und für alle Werte der Torsionssteifigkeit der Träger an. Außerdem stellt er Tabellen auf, die die Berechnung der charakteristischen Koeffizienten der Biegemomente in den Querträgern ermöglichen.

Praktisch läßt sich die Methode wie diejenige von GUYON anwenden, wenn sie sich auf das erste Glied von Fourier beschränkt; es wird dadurch möglich, den Verdrehungswiderstand der Brücke ohne zusätzliche Berechnungen zu berücksichtigen. Wenn nötig, erlaubt sie uns aber auch, durch Entwicklung in eine Fourierreihe die genaue Bestimmung des Einflusses irgendeiner Last.

Das Verfahren liefert nicht nur genauere Ergebnisse als die klassischen Methoden bei normalen Brücken, sondern kann auch direkt auf Brücken mit zusammenhängenden quervorgespannten Längsträgern und auf Plattenbrücken in Eisenbeton oder vorgespanntem Beton, wie sie in neuester Zeit zu Bedeutung gelangt sind, angewandt werden.

Summary

The author generalises GUYON's method (Ann. P. et Ch. France, 1947), which is based on the assumption of a continuous grid of longitudinal and transverse beams, for the case of the torsional resistance of these structural parts. He gives numerical values of the transverse distribution coefficients of the loads for all bracing parameters and for all values of the torsional stiffness of the beams. In addition, he prepares tables which make it possible to calculate the characteristic coefficients of the bending moments in the transverse beams.

Practically the method may be adopted like that of GUYON, if it is restricted to the first Fourier term; it thereby becomes possible to take the torsional

resistance of the bridge into consideration without additional calculations. If necessary, it allows us also to determine exactly the influence of any load by developing into a Fourier series.

The method furnishes not only more accurate results than the classic methods in the case of normal bridges, but can also be adopted for bridges with continuous longitudinal beams prestressed transversely, and for slab bridges in reinforced or prestressed concrete, such as are becoming of importance in recent times.

Bibliographie

1. F. LEONHARDT: Die vereinfachte Berechnung zweiseitig gelagerter Trägerroste. Bau-technik, 1938, P. 535.
2. F. LEONHARDT: Anleitung für die vereinfachte Trägerrostberechnung. Berlin 1940, W. Ernst & Sohn.
3. Y. GUYON: Calcul des ponts larges à poutres multiples solidarisiées par des entretoises. Ann. P. et Ch., Sept.-Oct. 1946, pp. 553 à 612.
4. F. E. RICHART, N. M. NEWMARK et C. P. SISS: Highway bridge floors, a symposium. Proc. A.S.C.E., mars 1948. Discussion, sept., oct., nov. 1948 et avril 1949.
5. University of Illinois Engineering Experiment Station, Bulletins No. 336, 363, et 375.
6. CH. MASSONNET: Contribution au calcul des ponts à poutres multiples. Ann. Trav. Publ. Belgique. Juin, 1950, pp. 377 à 424; octobre 1950, pp. 749 à 800; décembre 1959, pp. ?