

Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 9 (1949)

Artikel: Stabilität der Druckgurte offener Brücken unter Berücksichtigung der Plastizität der Querträger
Autor: Schibler, Willy
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-9713>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 28.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Stabilität der Druckgurte offener Brücken unter Berücksichtigung der Plastizität der Querträger

Stability of Top Chords of Open Bridges Considering the Plasticity of Cross-Girders

Stabilité des membrures comprimées de ponts ouverts, tenant compte de la plasticité des entretoises

WILLY SCHIBLER, Dr. sc. techn., Alexandrien

A. Einleitung

Die übliche Berechnung der Stabilität der Druckgurte offener Fachwerkbrücken setzt bei der Bestimmung der elastischen Stützung durch die Halbrahmen stillschweigend voraus, daß die Querträger ausschließlich elastische Formänderungen erleiden. Der Rahmenwiderstand c , d.h. die zur Ausbiegung

des Rahmenkopfes um $f = 1$ notwendige Horizontalkraft H , ergibt sich dann leicht mit den Bezeichnungen der Abb. 1 zu

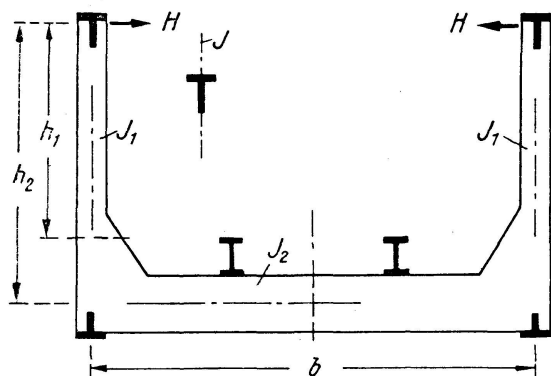


Abb. 1. Querrahmen

$$c = \frac{1}{\frac{h_1^3}{3 E J_1} + \frac{h_2^2 b}{2 E J_2}} \quad (1)$$

wobei E den Elastizitätsmodul und h_1 eine zu schätzende, oder auch unter Berücksichtigung der Eckaussteifung zu bestimmende, ideelle Höhe bezeichnen. *F. Engesser*¹⁾ hat, unter Annahme kon-

stanter Gurtkraft S , unveränderlicher seitlicher Biegesteifigkeit des Gurtes EJ , verteilter Rahmenwiderstände und festgehaltener Gurtendpunkte, die bekannte Formel für die Knickkraft

$$S_k = 2 \sqrt{E J \nu} \quad \text{mit} \quad \nu = \frac{c}{a} \quad (2) \quad (3)$$

¹⁾ *F. Engesser*: Zentralblatt der Bauverwaltung 1884.

abgeleitet. Hierin bedeutet a die Feldweite (Halbrahmenabstand) und ν der auf die Längeneinheit bezogene Rahmenwiderstand. Überschreitet die Gurtspannung S_k/F (F = Querschnittsfläche des Gurtes) die Proportionalitätsgrenze, so ist E in Gl. (2) durch den der Gurtspannung zugeordneten Knickmodul T_k zu ersetzen. Die Formel (2) ergibt, trotz den vereinfachenden Voraussetzungen, im allgemeinen gut brauchbare Ergebnisse²⁾.

Wir müssen jedoch bedenken, daß die Querträger, beim Eintreten der Labilität des Obergurtes, gewöhnlich an gewissen Stellen durch die Auflagerdrücke der Längsträger über die Proportionalitätsgrenze σ_P beansprucht werden. Es soll hier die Auswirkung dieser Plastizierung eines Teiles der Querträger auf die Gurtstabilität untersucht werden³⁾.

B. Bestimmung des Rahmenwiderstandes nach Überschreitung der Proportionalitätsgrenze im Querträger

Wir betrachten zunächst einen in Bezug auf zwei Axen x und y symmetrischen Querträgerquerschnitt der Höhe h , der durch ein Biegemoment M um die x -Axe beansprucht sei (Abb. 2). Der Baustoff folge einem Spannungsdehnungsdiagramm nach Abb. 3, ohne Verfestigungsbereich und identisch für Zug und Druck. Nehmen wir wie üblich linearen Verlauf der Dehnungen ϵ an, so kann, bei gegebener Randfaserdehnung ϵ_R , die Normalspan-

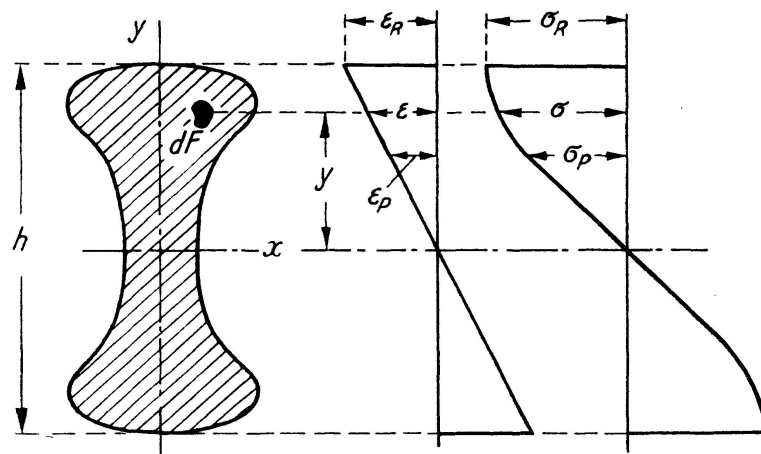


Abb. 2. Plastische Biegung des Querträgers

²⁾ Vgl. W. Schibler: Das Tragvermögen der Druckgurte offener Fachwerkbrücken mit parallelen Gurtungen. Mitteilungen aus dem Institut für Baustatik an der ETH., Nr. 19. Zürich 1946.

³⁾ Normalspannungen, die die Proportionalitätsgrenze überschreiten, treten in den Pfosten — von den heute kaum mehr gebräuchlichen Ständerfachwerken abgesehen — nicht auf, weshalb hier nur der Einfluß der Plastizierung der Querträger behandelt werden soll.

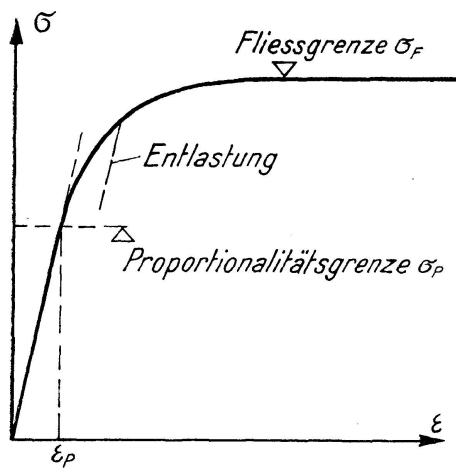


Abb. 3

Spannungsdehnungsdiagramm

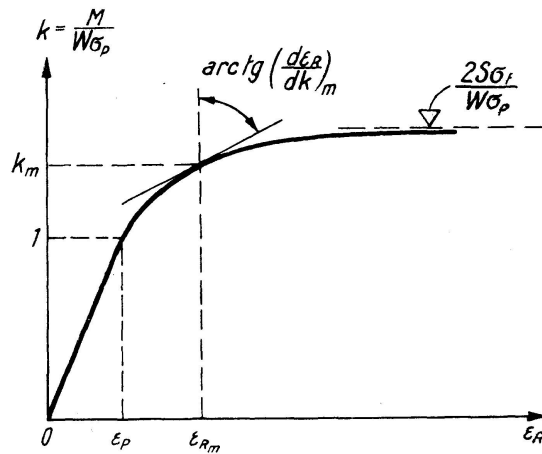
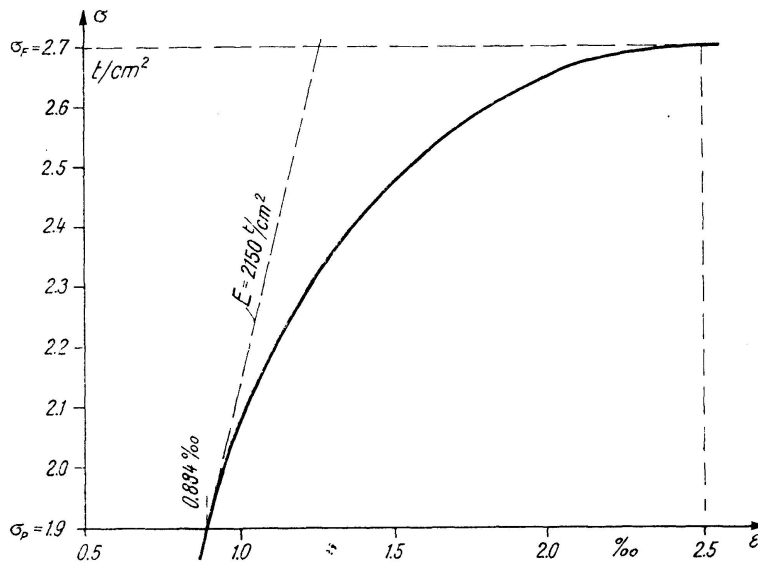

 Abb. 4. Verhältnis k des Biegemomentes zum Biegemoment beim Erreichen von σ_P in Funktion der Randdehnung ϵ_R


Abb. 5. Spannungsdehnungsdiagramm für St. 37

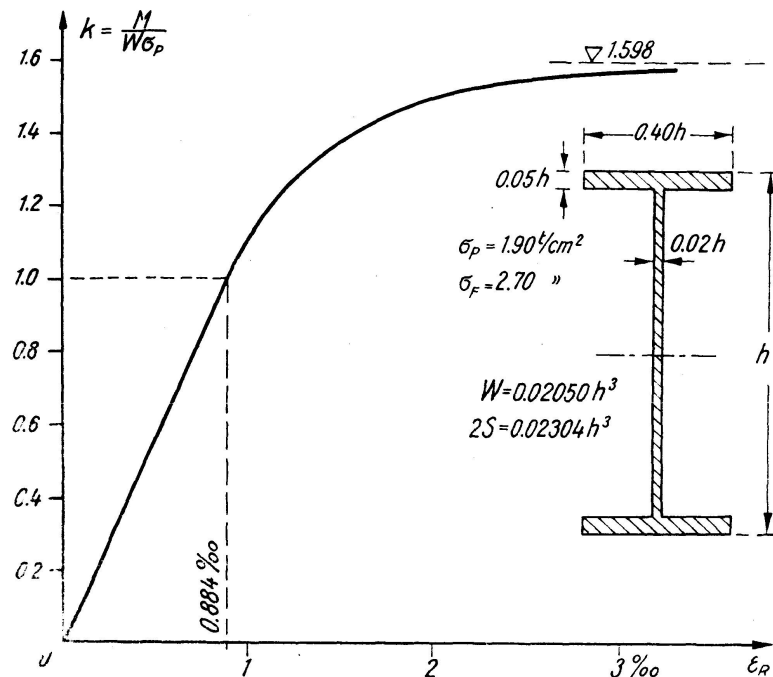
nung σ in jeder Faser unmittelbar aus dem Spannungsdehnungsdiagramm entnommen werden. Aus Gleichgewichtsgründen ist dann

$$M = 2 \int_0^{\frac{h}{2}} \sigma dF y. \quad (4)$$

Das Verhältnis k des Momentes M zum Biegemoment beim Erreichen der Proportionalitätsgrenze σ_P in den Randfasern,

$$k = \frac{M}{W \sigma_P}, \quad (5)$$

worin W das Widerstandsmoment bezeichnet, kann in Abhängigkeit der Rand-

Abb. 6. Verhältnis k in Funktion von ϵ_R für einen I-Querschnitt

faserdehnung ϵ_R aufgetragen werden. Man erhält ein Diagramm nach Abb. 4. Die Kurve verläuft geradlinig solange $\epsilon_R < \epsilon_P$ und nähert sich für große ϵ_R asymptotisch dem Werte $\frac{2S\sigma_F}{W\sigma_P}$, wenn hier S das statische Moment des halben Querschnittes in Bezug auf die x -Axe bedeutet. Unter Annahme eines Spannungsdehnungsdiagrammes gemäß Abb. 5 (St. 37) erhält man beispielsweise die (k, ϵ_R) -Kurve der Abb. 6 für den daselbst eingezeichneten I-Querschnitt.

Wir betrachten nun den Halbrahmen der Abb. 7a. Die Momentenfläche des Querträgers unter Eigengewicht und Verkehrslast ist ein Trapez der Höhe M_m (Abb. 7b), wobei wir uns das Querträgereigengewicht unter den Längsträgern konzentriert denken wollen. Die Randdehnungen (Abb. 7c) verlaufen dem Diagramm der Abb. 4 entsprechend. Der Auflagerneigungswinkel α des Querträgers läßt sich einfach bestimmen: Nach Abb. 8, die ein Querträger-element der Länge ds darstellt, beträgt der Winkel zwischen den benachbarten Querschnittebenen

$$d\varphi = \frac{2\epsilon_R ds}{h}.$$

Offenbar ist dann

$$\alpha = \int d\varphi = \frac{2}{h} \int \epsilon_R ds,$$

wobei sich das Integral über den halben Querträger erstreckt.

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, die horizontale Verschiebung f des Rah-

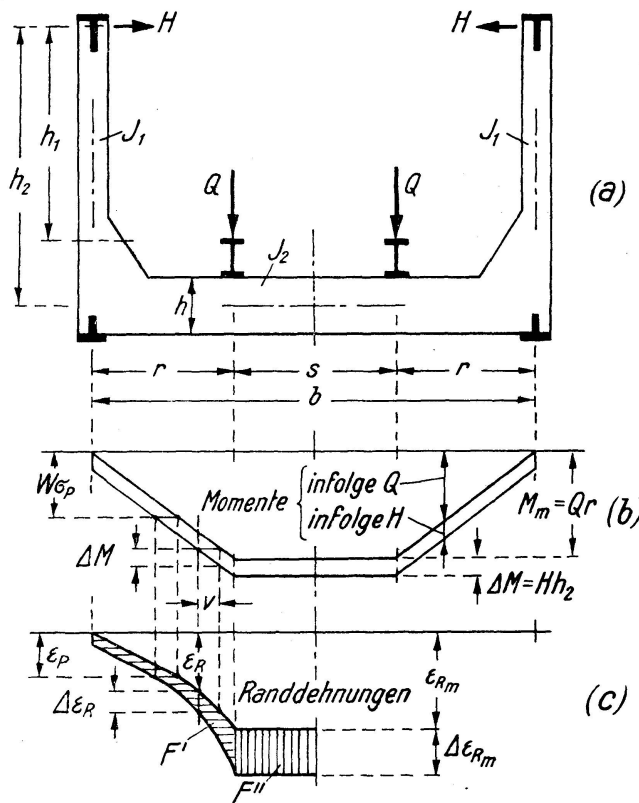


Abb. 7. Momente und Randdehnungen des Querträgers

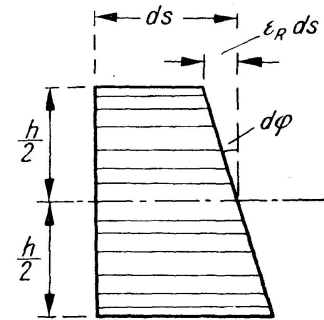


Abb. 8. Formänderung eines Querträgeres

menkopfes infolge einer sehr kleinen Horizontalkraft H zu bestimmen. Es ist

$$f = \frac{H h_1^3}{3EJ_1} + h_2 \Delta \alpha. \quad (6)$$

Hierin bedeutet

$$\Delta \alpha = \frac{2}{h} \int \Delta \epsilon_R ds \quad (7)$$

den Zuwachs von α infolge des kleinen, für den Querträger konstanten Biegemomentes $\Delta M = H h_2$ (Abb. 7b)⁴⁾. Das Integral der Randdehnungszuwächse $\Delta \epsilon_R$ in Gl. (7) ist gleich dem Inhalt $F' + F''$ der gesamten schraffierten Fläche in Abb. 7c. Die horizontal schraffierte Fläche F' ist ein gekrümmter Streifen konstanter waagrechter Breite $v = \frac{\Delta M}{M_m} r$. Ihr Inhalt beträgt somit

$$F' = v \epsilon_{R_m} = \frac{\Delta M}{M_m} r \epsilon_{R_m} = \frac{\Delta M}{k_m W_{\sigma_P}} r \epsilon_{R_m} \quad (8)$$

wenn ϵ_{R_m} und k_m die maximale Randdehnung und den maximalen Wert von k bedeuten. Die vertikal schraffierte Fläche F'' besitzt den Inhalt

⁴⁾ Streng genommen hat auch die kleine Normalkraft im Querträger infolge H einen Einfluß auf $\Delta \alpha$, da nun, wegen des Überschreitens von σ_P , das Superpositionsgesetz seine Gültigkeit verloren hat. Dieser Einfluß ist jedoch unbedeutend.

$$F'' = \Delta \epsilon_{R_m} \frac{s}{2} = \frac{\Delta \epsilon_{R_m}}{\Delta M} \Delta M \frac{s}{2} = \frac{\Delta \epsilon_{R_m}}{\Delta k W \sigma_P} \Delta M \frac{s}{2}$$

oder, da ΔM sehr klein ist,

$$F'' = \left(\frac{d \epsilon_R}{d k} \right)_m \frac{\Delta M}{W \sigma_P} \frac{s}{2}. \quad (9)$$

Die Klammer bezeichnet die Ableitung von ϵ_R nach k für $k = k_m$ (Vergleiche Abb. 4). Es wird nun mit den Gl. (7), (8) und (9)

$$\Delta \alpha = \frac{2}{h} \frac{\Delta M}{W \sigma_P} \left[\frac{\epsilon_{R_m}}{k_m} r + \left(\frac{d \epsilon_R}{d k} \right)_m \frac{s}{2} \right].$$

Der Rahmenwiderstand beträgt sonach mit Gl. (6) und da $\frac{W h}{2} = J_2$

$$c = \frac{H}{f} = \frac{1}{\frac{h_1^3}{3 E J_1} + \frac{h_2^2}{J_2 \sigma_P} \left[\frac{\epsilon_{R_m}}{k_m} r + \left(\frac{d \epsilon_R}{d k} \right)_m \frac{s}{2} \right]}. \quad (10)$$

Für vollständig elastisches Verhalten des Querträgers wird

$$k_m = \frac{M_m}{W \sigma_P} = \frac{\sigma_m}{\sigma_P} \quad \text{und} \quad \left(\frac{d \epsilon_R}{d k} \right)_m = \left(\frac{d \epsilon_R}{d \sigma} \right)_m \sigma_P = \frac{\sigma_P}{E}$$

wo σ_m die maximale Randspannung darstellt. Die eckige Klammer der Gl. (10) wird

$$\left[\frac{\epsilon_{R_m}}{\sigma_m} \sigma_P r + \frac{\sigma_P}{E} \frac{s}{2} \right] = \frac{\sigma_P}{E} \left(r + \frac{s}{2} \right) = \frac{\sigma_P b}{2 E}$$

und Gl.(10) wird identisch mit Gl. (1).

Die obenstehende Berechnung des Rahmenwiderstandes c setzte voraus, daß die Horizontalkraft H gegen die Brückenaxe (nach innen) gerichtet ist. Ist sie nach außen gerichtet, so wirkt das Moment ΔM entlastend, die Dehnungsabnahmen folgen an allen Stellen der Entlastungsgerade des Spannungsdehnungsdiagrammes (Abb. 3). Der Rahmenwiderstand wird dann, ob sich ein Teil des Querträgers plastisch verhält oder nicht, durch Gl. (1) gegeben ⁵⁾.

⁵⁾ In der in Fußnote 2 erwähnten Arbeit wurde gezeigt, daß die Bestimmung des Tragvermögens der Gurtung, wegen der ungleichen Belastung der Querträger und der daraus folgenden ungleichen Ausbiegung der Rahmenköpfe, eigentlich ein Formänderungsproblem und nicht ein Stabilitätsproblem darstellt. Über den Einfluß der Plastizierung der Querträger ist dann folgendes zu sagen:

Wir denken uns die Brücke von einem Lastenzug befahren, der dem gegebenen (vorgeschriebenen) entspricht, bei dem jedoch jeder Achsdruck mit einem gewissen Vergrößerungsfaktor n multipliziert wurde (n -facher Lastenzug). Der Faktor n werde allmählich gesteigert, bis das Tragvermögen der Gurtung nahezu erreicht ist. Alle Querträger haben dann plastische Formänderungen erlitten. Beim Regelfall gleicher Quer-

Der Gurt ist somit ein Druckstab mit einer je nach der Knickrichtung (nach innen oder nach außen) verschieden starken seitlichen Stützung, und es soll nachfolgend die Knicklast für einen solchen Stab bestimmt werden. Dabei werden wir, analog wie *Engesser*, konstante Gurtkraft, konstante Biegesteifigkeit und verteilte Rahmenwiderstände annehmen. Letztere betragen dann je Längeneinheit, wenn wir den Wert von c nach Gl. (1) mit c_1 , denjenigen nach Gl. (10) mit c_2 bezeichnen,

$$\nu_1 = \frac{c_1}{a} \quad \text{oder} \quad \nu_2 = \frac{c_2}{a} \quad (11)$$

je nachdem der Gurt an der betreffenden Stelle nach außen oder nach innen ausknickt. Es ist stets $\nu_1 \geq \nu_2$.

C. Stabilität eines Druckstabes mit von der Knickrichtung abhängiger elastischer Stützung ⁶⁾

1. Ableitung der Knickbedingung

Wir betrachten einen Teil eines ausgeknickten Stabes mit der Axialkraft S und der Biegesteifigkeit EJ (Abb. 9), der durch verteilte seitliche Kräfte gestützt sei, deren Wert, je Längeneinheit längs des Stabes und je Längeneinheit Ausbiegung, ν_1 bzw. ν_2 , je nach der Knickrichtung, betragen soll. Die Biegelinie ist eine Wellenlinie. Wir setzen voraus, daß die Stabendpunkte festgehalten sind und daß in ihnen das gleiche Biegemoment als in den übrigen Schnittpunkten der Biegelinie mit der ursprünglichen Stabaxe wirkt. Dann werden sämtliche auf derselben Seite der Axe liegenden Halbwellen einander gleich, und es genügt, nur zwei sich folgende Halbwellen, eine auf jeder Seite,

trägerabstände und gleicher Ausbildung aller Querträger sind diese Formänderungen, dank der Gleichheit der Grenzwerte der Längsträgerauflagerdrücke, für sämtliche Halbrahmen gleich. Bei einer neuen Belastung der Brücke, diesmal bei einem dem kritischen Zustand entsprechenden Wert des Faktors n , ist der weitaus größte Teil der Querträgerdeformationen, dank der Kaltreckung durch die vorherigen Belastungen, elastisch. Der Unterschied der Ausbiegungen der Rahmenköpfe, der ja allein für die Formänderungsaufgabe maßgebend ist, entspricht somit elastischem Verhalten der Halbrahmen. Nur die Formänderungen im letzten Augenblick, die uns die Rahmenwiderstände bestimmen, sind plastisch. Es ist somit der Einfluß der Ungleichheit der Querträgerbelastungen eher kleiner bei Berücksichtigung der Plastizität der Querträger als bei Annahme rein elastischer Deformationen.

Es sei noch erwähnt, daß wir stillschweigend angenommen haben, daß alle Querrahmen, bei denen der Gurt nach innen ausweicht, mit dem maximalen Längsträgerauflagerdruck belastet werden. Da die Biegelinie des ausgeknickten Gurtes bei der Ausbildung ihrer Gestalt eine gewisse Freiheit besitzt, wird diese Voraussetzung meistens nahezu erfüllt sein.

⁶⁾ In diesem Abschnitt C besitzen die Buchstaben a , φ , ν , r und s eine andere Bedeutung als in den übrigen Abschnitten. Eine Verwechslung ist jedoch ausgeschlossen.

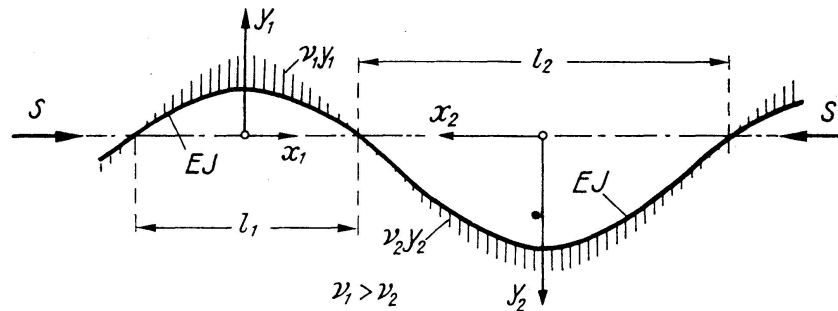


Abb. 9. Knickung eines je nach der Knickrichtung verschieden stark gebetteten Druckstabes (für $\nu_2/\nu_1 = 0,263$)

zu untersuchen. Für diese beiden Halbwellen, deren Längen l_1 bzw. l_2 vorläufig unbekannt sind, wählen wir ein Koordinatensystem $x_1 y_1$ bzw. $x_2 y_2$.

Greifen wir nun eine Halbwelle heraus, so ist die Differentialgleichung ihrer Biegelinie, wenn wir uns an die Theorie des elastisch gebetteten Stabes erinnern,

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} + S \frac{d^2 y}{dx^2} + \nu y = 0.$$

Die charakteristische Gleichung

$$EJ \omega^4 + S \omega^2 + \nu = 0$$

mit den vier Lösungen

$$\omega = \pm i \sqrt{\frac{S}{2EJ} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4EJ\nu}{S^2}} \right)} \quad (i = \sqrt{-1})$$

liefert uns, unter Berücksichtigung der Symmetrie um die y -Axe, die Gleichung der Biegelinie

$$y = A \cos \gamma x + B \cos \delta x \quad (12)$$

mit

$$\gamma = \sqrt{\frac{S}{2EJ} (1 + \sqrt{1 - \mu})}, \quad \delta = \sqrt{\frac{S}{2EJ} (1 - \sqrt{1 - \mu})} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{4EJ\nu}{S^2} \quad (13) (14) (15)$$

Setzen wir

$$\rho = \sqrt{\frac{Sl^2}{8EJ}}, \quad w = \sqrt{1 - \mu}, \quad \varphi = \gamma \frac{l}{2} = \rho \sqrt{1 + w}, \quad (16) (17) (18)$$

$$\psi = \delta \frac{l}{2} = \rho \sqrt{1 - w} \quad (19)$$

so erhalten wir aus der Bedingung $y = 0$ für $x = l/2$:

$$A \cos \varphi + B \cos \psi = 0 \quad \text{oder} \quad B = -A \frac{\cos \varphi}{\cos \psi}.$$

Wir berechnen folgende, später benötigten Werte:

$$y'_{\left(x=\frac{l}{2}\right)} = -A \gamma \sin \varphi - B \delta \sin \psi = -A \cos \varphi (\gamma \operatorname{tg} \varphi - \delta \operatorname{tg} \psi) \quad (20)$$

$$y''_{\left(x=\frac{l}{2}\right)} = -A \gamma^2 \cos \varphi - B \delta^2 \cos \psi = -A \cos \varphi (\gamma^2 - \delta^2) = -A \cos \varphi \frac{S}{EJ} w \quad (21)$$

und

$$\int_0^{\frac{l}{2}} y dx = \frac{A}{\gamma} \sin \varphi + \frac{B}{\delta} \sin \psi = A \cos \varphi \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\gamma} - \frac{\operatorname{tg} \psi}{\delta} \right). \quad (22)$$

Betrachten wir wieder die beiden Halbwellen der Abb. 9, so erfordern Stetigkeits- und Gleichgewichtsbedingungen daß

$$y'_1\left(x_1=\frac{l_1}{2}\right) = y'_2\left(x_2=\frac{l_2}{2}\right) \quad y_1\left(x_1=\frac{l_1}{2}\right) = -y_2\left(x_2=\frac{l_2}{2}\right) \quad (23) \quad (24)$$

$$\nu_1 \int_0^{\frac{l_1}{2}} y_1 dx_1 = \nu_2 \int_0^{\frac{l_2}{2}} y_2 dx_2 \quad (25)$$

oder nach Einsetzen der Gl. (20) (21) (22) und einigen Umformungen

$$A_1 \cos \varphi_1 (\sqrt{1+w_1} \operatorname{tg} \varphi_1 - \sqrt{1-w_1} \operatorname{tg} \psi_1) = A_2 \cos \varphi_2 (\sqrt{1+w_2} \operatorname{tg} \varphi_2 - \sqrt{1-w_2} \operatorname{tg} \psi_2) \quad (26)$$

$$A_1 \cos \varphi_1 \cdot w_1 = -A_2 \cos \varphi_2 \cdot w_2 \quad (27)$$

$$A_1 \cos \varphi_1 \cdot \mu_1 \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\sqrt{1+w_1}} - \frac{\operatorname{tg} \psi_1}{\sqrt{1-w_1}} \right) = A_2 \cos \varphi_2 \cdot \mu_2 \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi_2}{\sqrt{1+w_2}} - \frac{\operatorname{tg} \psi_2}{\sqrt{1-w_2}} \right) \quad (28)$$

Nach Division der Gl. (26) durch Gl. (27) und der Gl. (28) durch Gl. (27) erhält man mit

$$u = \frac{1}{w} (\sqrt{1+w} \operatorname{tg} \varphi - \sqrt{1-w} \operatorname{tg} \psi) \quad (29)$$

$$v = \frac{\mu}{w} \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1+w}} - \frac{\operatorname{tg} \psi}{\sqrt{1-w}} \right) \quad (30)$$

die Knickbedingung

$$\boxed{\begin{array}{l} u_1 + u_2 = 0 \\ v_1 + v_2 = 0 \end{array}} \quad (31)$$

Die Ausdrücke (29) und (30) für u und v können nur Anwendung finden, wenn w reel ist, d.h. für $\mu < 1$ oder $S > 2 \sqrt{EI\nu}$. Für $\mu > 1$ wird eine Umformung notwendig. Es gilt

$$\left. \begin{array}{l} \varphi \\ \psi \end{array} \right\} = \rho \sqrt{1 \pm i \sqrt{\mu - 1}} = \rho \sqrt{\frac{\sqrt{\mu} + 1}{2}} \pm i \rho \sqrt{\frac{\sqrt{\mu} - 1}{2}} = a \pm i \beta$$

wobei das obere Vorzeichen für φ , das untere für ψ steht. Hierin ist

$$\alpha = m\rho, \quad \beta = n\rho \quad \text{mit} \quad m = \sqrt{\frac{\sqrt{\mu} + 1}{2}}, \quad n = \sqrt{\frac{\sqrt{\mu} - 1}{2}}.$$

Damit wird

$$u = \frac{1}{\rho w} [(\alpha + i\beta) \operatorname{tg}(\alpha + i\beta) - (\alpha - i\beta) \operatorname{tg}(\alpha - i\beta)].$$

Mit der allgemeinen Beziehung

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm i\beta) = \frac{\sin 2\alpha \pm i \operatorname{Sin} 2\beta}{\cos 2\alpha + \operatorname{Cos} 2\beta} \quad (32)$$

erhält man, wenn wir noch

$$r = 2m = \sqrt{2(\sqrt{\mu} + 1)}, \quad s = 2n = \sqrt{2(\sqrt{\mu} - 1)}, \quad (33) (34)$$

$$\xi = r\rho = 2\alpha, \quad \eta = s\rho = 2\beta \quad (35) (36)$$

setzen,

$$u = \frac{i}{\rho i \sqrt{\mu - 1}} \cdot \frac{r\rho \operatorname{Sin} \eta + s\rho \sin \xi}{\operatorname{Cos} \eta + \cos \xi}$$

oder nach Kürzung durch $rs = 2\sqrt{\mu - 1}$,

$$u = \frac{\frac{2}{s} \operatorname{Sin} \eta + \frac{2}{r} \sin \xi}{\operatorname{Cos} \eta + \cos \xi}. \quad (37)$$

Analog wird v umgeformt. Es ist

$$v = \frac{\rho\mu}{w} \left[\frac{\operatorname{tg}(\alpha + i\beta)}{\alpha + i\beta} - \frac{\operatorname{tg}(\alpha - i\beta)}{(\alpha - i\beta)} \right].$$

Unter Beachtung der Gl. (32) und (33) bis (36) ergibt sich

$$v = \frac{i\rho\mu}{i\sqrt{\mu - 1}(\alpha^2 + \beta^2)} \cdot \frac{r\rho \operatorname{Sin} \eta - s\rho \sin \xi}{\operatorname{Cos} \eta + \cos \xi}$$

oder, da $\alpha^2 + \beta^2 = \rho^2 \sqrt{\mu}$ und $rs = 2\sqrt{\mu - 1}$,

$$v = \sqrt{\mu} \frac{\frac{2}{s} \operatorname{Sin} \eta - \frac{2}{r} \sin \xi}{\operatorname{Cos} \eta + \cos \xi}. \quad (38)$$

Für den Fall $\mu = 1$ erhält man u und v als Grenzwerte der Gl. (29) und (30), oder auch aus Gl. (37) und (38) für $\xi = 2\rho$ und $\eta = 0$, zu

$$u = \frac{\rho}{\cos^2 \rho} + \operatorname{tg} \rho \quad \text{und} \quad v = \frac{\rho}{\cos^2 \rho} - \operatorname{tg} \rho.$$

2. Auswertung der Knickbedingung

Die Knickbedingung (31) besteht aus zwei Gleichungen, die die Größen μ_1 , ρ_1 , μ_2 und ρ_2 enthalten. Betrachten wir zunächst die Stabkraft beim Ausknicken S_k , die Biegesteifigkeit EJ und den Wert der stärkeren der beiden seitlichen Stützungen v_1 als gegeben, so ist μ_1 nach Gl. (15) bekannt. Von allen Werten μ_2 , die die Knickbedingung befriedigen, ist der größte maßgebend, da dieser dem maximalen Wert der schwächeren der beiden seitlichen Stützungen v_2 entspricht, bei dem eine ausgebogene Gleichgewichtslage möglich ist, d. h. bei dem Ausknicken noch stattfinden kann.

Wir tragen in einem ersten Diagramm (Abb. 10) u_1 und v_1 in Funktion von ρ_1 für den betrachteten Wert von μ_1 auf, in einem zweiten Diagramm (Abb. 11) u_2 und v_2 in Funktion von μ_2 für einen frei gewählten Wert von ρ_2 . Sodann kehren wir das zweite Diagramm um 180° , bringen seine μ_2 -Axe mit der ρ_1 -Axe des ersten in Deckung, und verschieben es horizontal bis die Schnittpunkte der

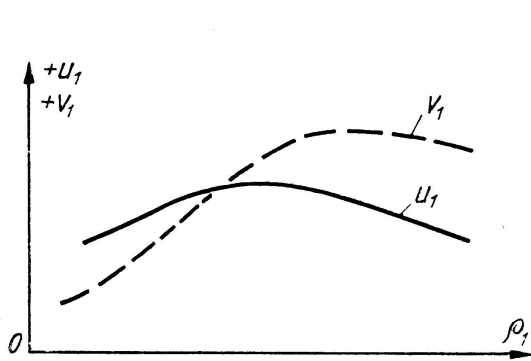


Abb. 10

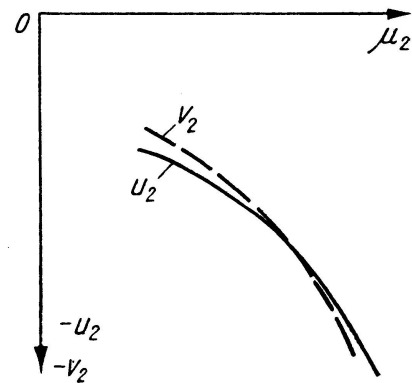


Abb. 11

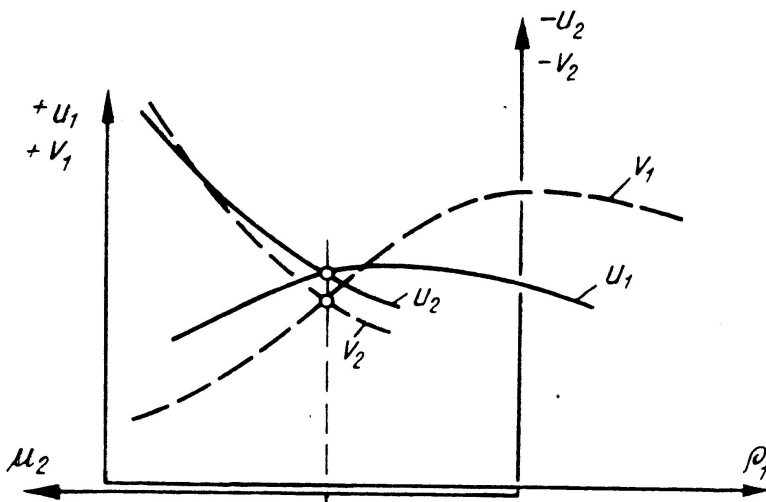


Abb. 12

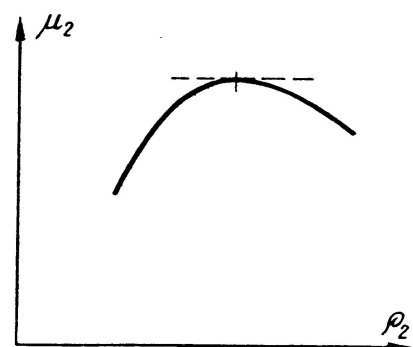


Abb. 13.

Abb. 10, 11, 12 und 13. Zur Lösung der Knickbedingung mit der Nebenbedingung $\mu_2 = \max$ für gegebenes μ_1

beiden u -Kurven und der beiden v -Kurven auf einer Vertikalen liegen (Abb. 12). Es ist leicht einzusehen, daß die Abszisse μ_2 dieser Vertikalen eine Lösung der Knickgleichungen ist. Durch Wiederholung mit anderen Werten von ρ_2 ergeben sich verschiedene Lösungen für μ_2 , die, in Abhängigkeit von ρ_2 aufgetragen, eine Kurve nach Abb. 13 ergeben. Der Größtwert von μ_2 ist der gesuchte maßgebende Wert.

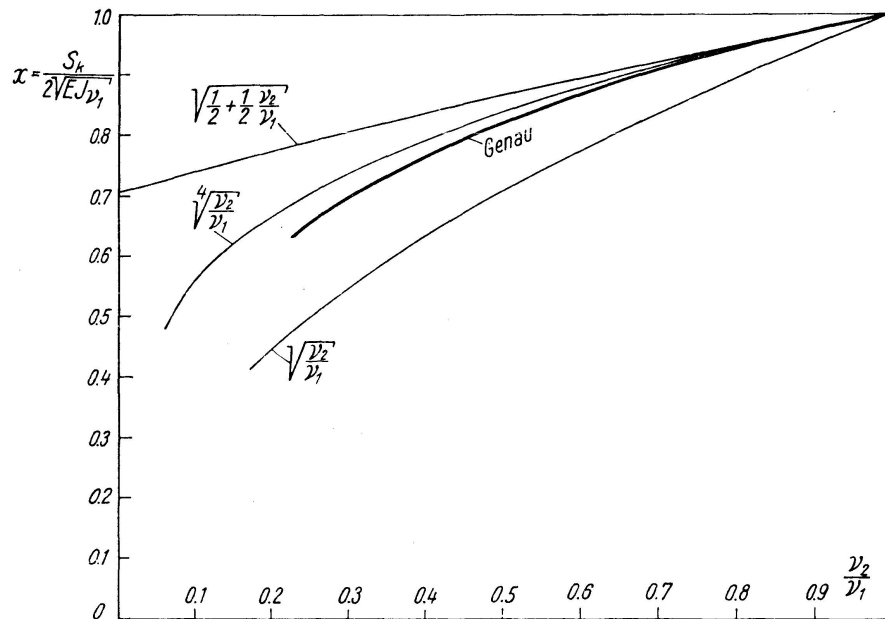


Abb. 14. Gurtknicklast S_k in Abhängigkeit des Verhältnisses v_2/v_1 der Stärke der seitlichen Stützungen

Durch Wahl anderer Werte für μ_1 wird es möglich, die Knicklast

$$S_k = \sqrt{\frac{4 EJ v_1}{\mu_1}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} 2 \sqrt{EJ v_1}$$

oder auch das Verhältnis

$$\kappa = \frac{S_k}{2 \sqrt{EJ v_1}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} \quad (39)$$

der Knicklast S_k zur Engesser'schen Last [vergleiche Gl. (2)] für Vorhandensein der stärkeren Stützung v_1 allein, zu bestimmen. Wir erhalten die stark ausgezogene Kurve der Abb. 14. Beispielsweise ergibt sich für $\mu_1 = 2,25$ der Maximalwert von μ_2 zu 0,592, d. h. für $v_2/v_1 = 0,263$ ist $\kappa = 1/1,5 = 0,667$.

Auch die Biegelinie beim Ausknicken läßt sich ermitteln, worauf hier nicht näher eingegangen werden soll. Es sei nur erwähnt, daß man für $v_2/v_1 = 0,263$ die Biegelinie der Abb. 9 mit

$$l_1 = 2,93 \sqrt[4]{\frac{EJ}{v_1}} \quad \text{und} \quad l_2 = 4,83 \sqrt[4]{\frac{EJ}{v_1}} = 3,46 \sqrt[4]{\frac{EJ}{v_2}}$$

erhält, wogegen sich die Halbwellenlänge l für konstantes ν zu

$$l = \pi \sqrt[4]{\frac{EJ}{\nu}}$$

ergeben würde. An Hand dieser berechneten Biegelinie wurden als Kontrolle die Gleichgewichts- und Stetigkeitsbedingungen (23) (24) (25) nachgeprüft.

Das Diagramm der Abb. 14 besitzt auch nach Überschreitung der Proportionalitätsgrenze im Druckgurte Gültigkeit, wenn E durch den Knickmodul T_k ersetzt wird.

3. Näherungswerte

Näherungswerte für κ lassen sich einfach mit der Energiemethode finden. Wir betrachten wieder zwei benachbarte Halbwellen der Biegelinie (Abb. 15)

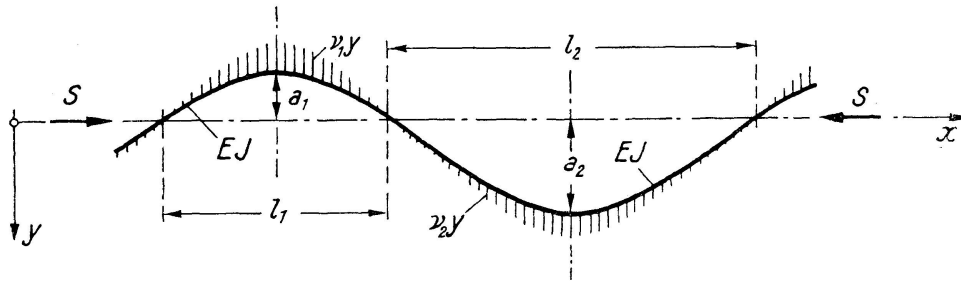


Abb. 15. Zur Bestimmung der Knicklast mit Hilfe der Energiemethode

und wählen ein Koordinatensystem x, y wie angegeben. Beim Ausknicken geht durch die Verschiebung der Längskraft S parallel zur x -Axe potentielle Energie verloren. Da sich die gesamte im System enthaltene Energie nicht ändert, muß dieser Verlust durch die im Gurt und in den Halbrahmen aufgespeicherte Formänderungsarbeit aufgehoben werden. Es ist deshalb

$$\frac{S_k}{2} \int y'^2 dx = \frac{EJ}{2} \int y''^2 dx + \frac{1}{2} \int \nu y^2 dx, \quad (40)$$

wobei das erste Glied die Arbeit der Längskraft, das zweite die Biegungsarbeit und das letzte die Arbeit der seitlichen Stützung darstellt. Die Integrale erstrecken sich über die zwei Halbwellen. Nehmen wir nun letztere als Sinushalbwellen mit den Amplituden a_1 und a_2 an, so muß aus Stetigkeits- und Gleichgewichtsgründen sein

$$\frac{a_1}{l_1} = \frac{a_2}{l_2} \quad \text{und} \quad \nu_1 a_1 l_1 = \nu_2 a_2 l_2,$$

woraus

$$l_2 = l_1 \sqrt[4]{\frac{\nu_1}{\nu_2}} \quad \text{und} \quad a_2 = a_1 \sqrt[4]{\frac{\nu_1}{\nu_2}}. \quad (41) (42)$$

Unter Berücksichtigung der Gl. (40) (41) (42) und da für eine Sinushalbwellen der Länge l und der Amplitude a

$$\int y'^2 dx = \frac{\pi^2 a^2}{2l} \quad \text{sowie} \quad \int y''^2 dx = \frac{\pi^4 a^2}{2l^3}$$

ist, ergibt sich die Knicklast zu

$$S_k = \frac{\pi^2 EJ}{l_1^2} \sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_1}} + \frac{\nu_1 l_1^2}{\pi^2}.$$

Dieser Wert wird zu einem Minimum für

$$l_1^2 = \pi^2 \sqrt{\frac{EJ}{\nu_1}} \sqrt[4]{\frac{\nu_2}{\nu_1}}$$

und beträgt dann

$$S_k = \sqrt[4]{\frac{\nu_2}{\nu_1}} \cdot 2 \sqrt{EJ \nu_1}.$$

Es ist somit

$$\kappa = \sqrt[4]{\frac{\nu_2}{\nu_1}}. \quad (43)$$

Die entsprechende Kurve ist zum Vergleich in Abb. 14 eingezeichnet. Sie besitzt für $\nu_2/\nu_1 = 1$ die gleiche Tangente wie die genaue Kurve.

Unter der ungünstigen Annahme, daß die Knicklast dieselbe ist, wie wenn die Stützung überall nur die Stärke ν_2 hätte, erhält man

$$S_k = 2 \sqrt{EJ \nu_2} = 2 \sqrt{EJ \nu_1} \cdot \sqrt[4]{\frac{\nu_2}{\nu_1}}$$

oder, wie in Abb. 14 eingetragen,

$$\kappa = \sqrt[4]{\frac{\nu_2}{\nu_1}}. \quad (44)$$

Würde man hingegen voraussetzen, daß die Stützung für den ganzen Gurt den Mittelwert von ν_1 und ν_2 besitzt, d.h. daß

$$S_k = 2 \sqrt{EJ \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}} = 2 \sqrt{EJ \nu_1} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\nu_2}{\nu_1}}$$

so wäre

$$\kappa = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\nu_2}{\nu_1}}. \quad (45)$$

Diese Annahme ist, wie aus Abb. 14 zu ersehen, zu günstig.

D. Zahlenbeispiel

Eine offene Brücke mit

$a = 500 \text{ cm}$	$h_1 = 440 \text{ cm}$	$h_2 = 520 \text{ cm}$
$b = 500 \text{ cm}$	$r = 160 \text{ cm}$	$s = 180 \text{ cm}$
$J = 32000 \text{ cm}^4$	$F = 380 \text{ cm}^2$	$J_1 = 30000 \text{ cm}^4$

besitzt Querträger von I-förmigem Querschnitt nach Abb. 6 mit $h = 75$ cm, $W = 8660$ cm³ und $J_2 = 324\,000$ cm⁴, die so bemessen sind, daß unter Gebrauchslast (ständige Last + Verkehrslast) die maximale Biegespannung 1,19 t/cm² erreicht. Die Knicksicherheit des Druckgurtes, unter Benützung der Gl. (2), d. h. unter Annahme unbegrenzt elastischer Querträger, soll 2,70 betragen. Der Baustoff ist St. 37 mit einem $\sigma - \epsilon$ Diagramm nach Abb. 5. Die Knickspannungen in Abhängigkeit des Schlankheitsgrades λ sind für $\lambda < 106$ durch die *Tetmajer'sche* Formel

$$\sigma_k = 3,10 - 0,0114 \lambda \quad (\text{in t/cm}^2)$$

gegeben, womit sich der Knickmodul zu

$$T_k = \frac{(3,10 - \sigma_k)^2 \cdot \sigma_k}{(0,0114 \pi)^2} = 780 (3,10 - \sigma_k)^2 \cdot \sigma_k$$

ergibt. Es sei die Knicksicherheit des Gurtes unter Berücksichtigung der Plastizierung der Querträger zu bestimmen.

Wir berechnen zunächst den Rahmenwiderstand c_1 nach Gl. (1) und erhalten $c_1 = 1,862$ t/cm und nach Gl. (3) $\nu_1 = c_1/a = 0,00373$ t/cm². Nach Gl. (2) wird $S_k = 829$ t:

$$\sigma_k = S_k/F = 829/380 = 2,180 \text{ t/cm}^2, \quad T_k = 1440 \text{ t/cm}^2,$$

$$S_k = 2 \sqrt{T_k J \nu} = 2 \sqrt{1440 \cdot 32000 \cdot 0,00373} = 829 \text{ t}.$$

Unter Berücksichtigung der Plastizität erhalten wir hingegen durch Probieren $S_k = 762$ t. Tatsächlich ist dann

$$\frac{M_m}{W} = 1,19 \cdot 2,70 \frac{762}{829} = 2,94 \text{ t/cm}^2, \quad k_m = \frac{M_m}{W \sigma_P} = \frac{2,94}{1,90} = 1,55$$

womit nach Abb. 6

$$\epsilon_{R_m} = 2,46\% \quad \left(\frac{d \epsilon_R}{d k} \right)_m = 14,8\%$$

und nach Gl. (10) $c_2 = 0,880$ t/cm. Mit dem Wert $\nu_2/\nu_1 = c_2/c_1 = 0,880/1,862 = 0,471$ wird nach Abb. 14 $\kappa = 0,805$. Da $\sigma_k = 762/380 = 2,005$ t/cm² oder $T_k = 1880$ t/cm² ist, ergibt sich

$$S_k = 2 \sqrt{T_k J \nu_1 \cdot \kappa} = 2 \sqrt{1880 \cdot 32000 \cdot 0,00373 \cdot 0,805} = 762 \text{ t},$$

womit die gesuchte Sicherheit $2,70 \frac{762}{829} = 2,48$ wird. Der Unterschied beträgt somit ca. 8 %.

■ Wäre die maximale Biegespannung des Querträgers 1,09 t/cm² statt 1,19 t/cm² gewesen, so hätte sich analog die Sicherheit zu 2,61 ergeben [4 % Unterschied gegenüber Gl. (2)]⁷⁾.

⁷⁾ Dieses Beispiel entspricht der normalen Ausführung einer offenen eingleisigen Eisenbahnbrücke aus St. 37. Es zeigt, daß der Einfluß der Querträgerplastizierung auf die Knicksicherheit des Druckgurtes, wenn diese Sicherheit 2,70 beträgt und solange die

Zusammenfassung

Das Knicken der Druckgurte oben offener Fachwerkbrücken wird unter Berücksichtigung des Überschreitens der Proportionalitätsgrenze in den Querträgern infolge der Längsträgerauflagerdrücke untersucht. Die Rahmenwiderstände können mit Hilfe des Spannungsdehnungsdiagrammes berechnet werden. Ihre Größen hängen davon ab, ob der Gurt beim betreffenden Querrahmen nach innen oder nach außen ausweicht. Die Lösung des hierdurch entstehenden Stabilitätsproblems eines Druckstabes mit je nach der Knickrichtung verschiedenen starker seitlicher elastischer Stützung wird angegeben und mittelst Näherungsmethoden überprüft. Ein Zahlenbeispiel dient zur Veranschaulichung der Theorie und des Rechnungsganges.

Summary

The buckling strength of top chords of through truss bridges without upper lateral bracing is computed for the case of cross-girder bending stresses exceeding the proportional limit. The lateral stiffness of the cross-frames, formed by the cross-girders and the posts of the main girders, may be obtained by means of the stress-strain diagram; its magnitude depends upon whether the chord buckles, at the considered frame, inwards or outwards. The chord is therefore a strut supported laterally in an elastic medium, the stiffness of which varies according to the buckling direction. The solution of this problem of elastic stability is given and checked by approximative methods. A numerical example illustrates the theory.

Résumé

Le flambage des membrures comprimées de ponts réticulés sans contreventement supérieur est examiné pour le cas où les tensions de flexion des entretoises dépassent la limite de proportionnalité. La rigidité latérale des semicadres, formés par les montants des poutres maîtresses et les entretoises, peut être calculée avec l'aide du diagramme tension-allongement du matériau. Cette rigidité dépend du côté vers lequel la membrure flambe au droit du cadre considéré (vers l'intérieur ou l'extérieur du pont). La membrure est ainsi une barre comprimée supportée latéralement par un milieu élastique de rigidité variant avec la direction du flambage; la solution de ce problème de stabilité élastique est indiquée et vérifiée à l'aide de méthodes approximatives. Un exemple numérique illustre la théorie.

größte vorhandene Biegespannung im Querträger für Gebrauchslast unter $1,10 \text{ t/cm}^2$ liegt, ungefähr 4% nicht übersteigt und somit vernachlässigt werden kann. (Dabei dürfen die Spannungen, da es sich hier um Verformungen handelt, bei genieteten Trägern auf den ungeschwächten Querschnitt bezogen werden.) Dies ist bei nach der eidg. Verordnung vom 14. 5. 1935, Art. 64, 68, bemessenen Querträgern der Fall (vgl. die in Fußnote 2 erwähnte Arbeit, S. 76 und 77). Liegt die Biegebeanspruchung des Querträgers höher, so empfiehlt sich die genauere Untersuchung.