

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen  
**Band:** 9 (1949)

**Artikel:** La répartition transversale des charges dans les ponts à arcs multiples  
**Autor:** Massonnet, Ch.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-9708>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 28.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# **La répartition transversale des charges dans les ponts à arcs multiples**

*Die Querverteilung der Lasten in Brücken mit mehreren nebeneinanderliegenden Bogen*

*The transverse distribution of loads in bridges with several adjacent arches*

CH. MASSONNET, Chargé de Cours à l'Université de Liège

## **1. Position du problème**

Considérons un pont en arc à tablier supérieur soutenu par plus de deux arcs parallèles. Nous nous proposons de rechercher les tensions et déformations qui naissent dans ce pont sous l'effet d'une charge quelconque disposée sur le tablier, et d'analyser, en particulier, comment cette charge se répartit entre les différents arcs.

## **2. Hypothèses de calcul et notations**

Rapportons le tablier du pont à un système d'axes trirectangles,  $xyz$ , l'origine 0 se trouvant au milieu de l'entretoise d'extrémité et l'axe des  $z$  étant dirigé vers le bas. (fig. 1).

Les arcs, de leur côté, sont rapportés à un système d'axes  $0'xy\zeta$ , les  $x$  étant comptés comme ci-dessus à partir de la retombée gauche de l'arc et les  $\zeta$  positifs vers le haut.

Nous supposons que le pont comporte  $n$  arcs à deux rotules, qui ne sont pas nécessairement identiques, mais possèdent cependant aux points homologues des moments d'inertie réduits  $J_k$  proportionnels, de sorte qu'on peut poser

$$J_k = j_k h(x), \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

les  $j_k$  étant des constantes et  $h(x)$  une fonction bien déterminée.

Ces arcs sont supposés réunis entre eux par une infinité d'entretoises jointives de rigidité  $\rho_E$  par unité de longueur du pont. On choisira  $\rho_E$  de manière que ces entretoises jointives aient un effet équivalent aux entretoises réelles du pont, à savoir:

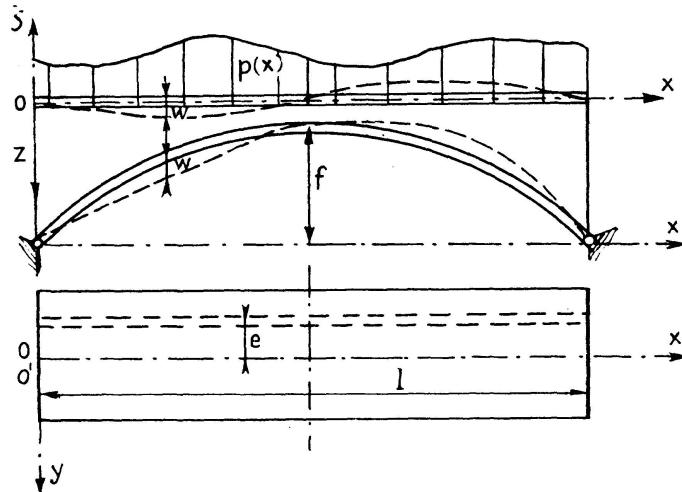


Fig. 1

- a) Les entretoises du tablier.
- b) Les entretoises des arcs.
- c) Eventuellement, le treillis vertical transversal reliant ces deux types d'entretoises et les montants des arcs.

Les entretoises équivalentes sont supposées prismatiques, mais leur rigidité  $\rho_E$  peut changer d'une entretoise à l'autre suivant la loi:  $\rho_E = \rho_E(x)$ .

Les charges du tablier sont supposées transmises aux arcs par une infinité de montants soutenant les entretoises dont il vient d'être question. On néglige le raccourcissement de ces montants par compression ainsi que les déformations des arcs sous l'effet de l'effort tranchant.

Les longerons du tablier sont supposés simplement appuyés à leurs extrémités. Ils ne sont pas nécessairement identiques entre eux, mais on suppose qu'ils possèdent en leurs points homologues des moments d'inertie proportionnels, de sorte qu'on peut poser

$$I_k = i_k h(x), \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

les  $i_k$  étant des constantes et  $h(x)$  la même fonction que dans la formule (1).

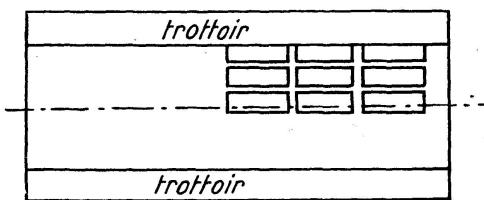


Fig. 2

Enfin, nous admettrons que les charges mobiles produisant les sollicitations les plus défavorables s'obtiennent toujours en disposant côté à côté un certain nombre de convois identiques (fig. 2). Dans ces conditions, il s'indique d'étu-

dier d'abord l'action d'une bande de charges très étroite réparties sur une parallèle à l'axe du pont d'excentricité  $e$  (fig. 1) selon la loi  $p = p(x)$ .

Connaissant les effets produits par cette bande de charges, on obtiendra directement ceux d'une charge quelconque par superposition.

### 3. Poussée d'un arc lié à un longeron par une infinité de montants

Considérons en particulier l'arc numéro  $k$  et le longeron correspondant du tablier. Ces pièces sont solidarisées en chaque point par des montants que l'on a supposés indéformables. Elles prennent donc nécessairement le même déplacement vertical  $w_k$  et les dérivées secondees  $d^2 w_k / dx^2$  sont les mêmes pour chacune d'elles. Les équations de déformation sont, pour le longeron  $k$

$$\frac{d^2 w_k}{dx^2} = - \frac{M_k(x)}{EI_k}$$

et pour l'arc

$$\frac{d^2 w_k}{dx^2} = - \frac{M'_k(x)}{EJ_k},$$

$J_k$  étant le moment d'inertie réduit de l'arc, lié à son moment d'inertie réel  $I'_k$  par la relation

$$\frac{ds}{I'_k} = \frac{dx}{J_k} \quad (3)$$

On déduit de ces relations

$$-\frac{d^2 w_k}{dx^2} = \frac{M_k}{EI_k} = \frac{M'_k}{EJ_k} = \frac{M_k(x) + M'_k(x)}{E(I_k + J_k)} \quad (4)$$

Le moment  $M_k$  dans le longeron est la somme du moment  $\mu_k(x)$  dû aux charges directement appliquées et du moment  $\mu'_k(x)$  dû aux réactions verticales des montants. D'où

$$M_k(x) = \mu_k(x) + \mu'_k(x) \quad (5)$$

D'autre part, le moment dans l'arc est la somme du moment  $-\mu'_k(x)$  provoqué par les actions verticales des montants et du moment  $H_k \zeta$ , où  $H_k$  est la poussée de l'arc; ainsi,

$$M'_k(x) = -\mu'_k - H_k \zeta \quad (6)$$

En additionnant (5) et (6), on trouve

$$M_k + M'_k = \mu_k - H_k \zeta. \quad (7)$$

La seule inconnue hyperstatique du problème est donc la poussée  $H_k$  de l'arc. Pour la déterminer, il suffit d'appliquer la deuxième formule de Bresse, qui donne les déplacements horizontaux d'une poutre courbe. En exprimant que la distance  $l$  entre rotules reste invariable, on trouve

$$\int_0^l \frac{M'_k}{EJ_k} \zeta dx - \int_0^l \frac{N_k}{E\Omega_k} ds = 0 \quad (8)$$

En vertu des relations (4) et (7), on a

$$\frac{M'_k}{EJ_k} = \frac{M_k + M'_k}{E(I_k + J_k)} = \frac{\mu_k - H_k \zeta}{E(I_k + J_k)}$$

Par ailleurs, la seconde intégrale de l'équation (8) ne prend quelque importance que si l'arc est très surbaissé et, dans ce cas, on peut admettre que

$$N_k = H_k \frac{dx}{ds}.$$

En remplaçant  $M'_k/EJ_k$  et  $N_k$  par leurs valeurs ci-dessus dans (8), on trouve

$$\int_0^l \frac{\mu_k \zeta dx}{E(I_k + J_k)} - H_k \int_0^l \frac{\zeta^2}{E(I_k + J_k)} dx - H_k \int_0^l \frac{dx}{E\Omega_k} = 0$$

d'où l'on tire

$$H_k = \frac{\int_0^l \frac{\mu_k \zeta}{E(I_k + J_k)} dx}{\int_0^l \frac{\zeta^2}{E(I_k + J_k)} dx + \int_0^l \frac{dx}{E\Omega_k}} \quad (9)$$

Le second terme du dénominateur est négligeable devant le premier, sauf si l'arc est très surbaissé. Dans ce cas, il reste néanmoins faible vis-à-vis du premier terme et on peut l'évaluer approximativement en supposant que l'arc est parabolique et à moment d'inertie réduit constant et le longeron prismatique. On trouve alors<sup>2)</sup>,  $f$  étant la flèche de l'arc,

$$\int_0^l \frac{\zeta^2}{E(I_k + J_k)} dx + \int_0^l \frac{dx}{E\Omega_k} \approx \int_0^l \frac{\zeta^2}{E(I_k + J_k)} dx \left[ 1 + \frac{15}{8f^2} \left( \frac{I_k + J_k}{\Omega_k} \right)_{moyen} \right].$$

En tenant compte de cette égalité et en remplaçant en outre  $I_k + J_k$  par  $(i_k + j_k)h(x)$ , on peut écrire l'expression de la poussée sous la forme

$$H_k = \frac{\int_0^l \frac{\mu_k \zeta}{h(x)} \frac{dx}{h(x)}}{\int_0^l \frac{\zeta^2}{h(x)} \left[ 1 + \frac{15}{8f^2} \left( \frac{I_k + J_k}{\Omega_k} \right)_{moyen} \right]} \quad (10)$$

Dès que les dimensions du pont sont connues, on peut calculer le terme

<sup>1)</sup> Ce résultat découle immédiatement aussi du théorème de Castigliano, selon lequel

$$\frac{\partial V}{\partial H_k} = 0 \quad \text{avec} \quad V = \int_0^l \frac{M_k^2}{2EJ_k} dx + \int_0^l \frac{N_k^2}{2E\Omega_k} ds$$

<sup>2)</sup> Cf. G. Pigeaud, Résistance des Matériaux, Vol. II, p. 639.

$$N \equiv \left[ 1 + \frac{15}{8 f^2} \left( \frac{I_k + J_k}{\Omega_k} \right)_{moyen} \right] \int_0^l \frac{\zeta^2(x)}{h(x)} dx, \quad (11)$$

qui est le même pour tous les arcs. On peut donc poser finalement

$$H_k = \frac{1}{N} \int_0^l \mu_k \zeta \frac{dx}{h(x)} \quad (12)$$

#### 4. Déplacement vertical d'un arc lié à un longeron

On tire de la formule (4)

$$E(I_k + J_k) \frac{d^2 w_k}{dx^2} = - [M_k(x) + M'_k(x)]$$

En remplaçant le second membre de cette égalité par sa valeur (7) et  $I_k + J_k$  par  $(i_k + j_k) h(x)$ , il vient

$$E(i_k + j_k) h(x) \frac{d^2 w_k}{dx^2} = - \mu_k(x) + H_k \zeta \quad (13)$$

Dérivons deux fois et tenons compte de ce que

$$\frac{d^2 \mu_k}{dx^2} = - p_k(x), \quad (14)$$

où  $p_k(x)$  est l'intensité de la charge transmise au système longeron-arc. On trouve

$$E(i_k + j_k) \frac{d^2}{dx^2} \left[ h(x) \frac{d^2 w_k}{dx^2} \right] = p_k(x) + H_k \frac{d^2 \zeta}{dx^2} \quad (15)$$

En remplaçant dans cette relation  $H_k$  par sa valeur (7), on obtient finalement

$$E(i_k + j_k) \frac{d^2}{dx^2} \left[ h(x) \frac{d^2 w_k}{dx^2} \right] = p_k(x) + \frac{1}{N} \frac{d^2 \zeta}{dx^2} \int_0^l \mu_k \zeta \frac{dx}{h(x)} \quad (16)$$

Cette équation permet de déterminer les déplacements verticaux du système longeron-arc dès que l'on connaît les forces réparties  $p_k(x)$  appliquées au longeron. En effet, le moment  $\mu_k$  qui naît dans une poutre sur deux appuis chargée des forces  $p_k dx$  est donnée par la formule connue<sup>3)</sup>

$$\mu_k = P(x) - \frac{x}{l} P(l), \quad (17)$$

avec

$$P(x) = \int_0^l dx \left[ \int_0^l p_k(\xi) d\xi \right]$$

---

<sup>3)</sup> Cf. G. Pigeaud, Résistance des Matériaux, Vol. I, p. 286.

### 5. Principe de la méthode de calcul des ponts à arcs multiples

Pour une mise en charge quelconque, les entretoises du pont se comportent comme des poutres sur appuis élastiques, mais l'allure de leur déformée varie d'une entretoise à l'autre. Il en résulte que la déformée du pont et les actions  $p_k(x)$  des entretoises sur les longerons obéissent à des lois très complexes.

Pour ne devoir étudier qu'une seule entretoise sur appuis élastiques nous allons décomposer la mise en charge réelle en une série de chargements simples, dans lesquels toutes les entretoises prennent la même déformée  $g(y)$ , à un facteur près.

Si une telle mise en charge simple existe, elle imprime nécessairement au tablier du pont des déplacements verticaux de la forme

$$w = f(x) g(y) \quad (19)$$

D'après la loi de Hooke, les réactions d'appui sur les différents arcs d'une entretoise élémentaire de largeur  $dx$  sont proportionnelles à l'amplitude des déplacements de ces appuis, c'est-à-dire à  $f(x)$ , ainsi qu'à la rigidité  $\rho_E(x)$  de l'entretoise considérée:

$$p_k(x) = A_k(y_k) f(x) \rho_E(x), \quad (20)$$

$A_k(y_k)$  étant un coefficient différent d'un arc à l'autre et dépendant de l'allure de la déformée transversale  $g(y)$  du pont.

En remplaçant  $w_k$  et  $p_k$  par leurs valeurs (19) et (20) dans l'équation (16), on obtient l'égalité

$$g(y_k) E(i_k + j_k) \frac{d^2}{dx^2} \left[ h(x) \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right] - A_k(y_k) \rho_E(x) f(x) - \frac{1}{N} \frac{d^2 \zeta}{dx^2} \int_0^l \mu_k \zeta \frac{dx}{h(x)} = 0 \quad (21)$$

Rappelons que le moment  $\mu_k$  intervenant dans l'intégrale du dernier terme est lié à la charge  $p_k$  par la formule (17).

Supposons un instant que l'on ait trouvé une solution  $f(x)$  de cette équation. On pourrait alors en calculer le dernier terme, qui serait une certaine constante.

Il résulte de cette constatation que la solution de l'équation (21) est nécessairement comprise parmi les solutions de l'équation différentielle du quatrième ordre

$$g(y_k) E(i_k + j_k) \frac{d^2}{dx^2} \left[ h(x) \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right] - A_k(y_k) \rho_E(x) f(x) + C = 0 \quad (22)$$

On peut toujours obtenir la solution de cette équation sous forme d'une série de puissances. Mais nous allons montrer que, dans un cas très important pour la pratique, le problème peut se traiter jusqu'au bout au moyen des seules fonctions élémentaires.

## CHAPITRE II.

*Etude complète des ponts à longerons prismatiques, entretoises identiques et arcs paraboliques à deux rotules de moment d'inertie réduit constant*

### 6. Simplification de l'équation (22)

Les entretoises étant identiques entre elles, leur rigidité  $\rho_E$  est constante tout le long du pont. De plus, le moment d'inertie  $I_k$  du longeron  $k$  et le moment d'inertie réduit  $J_k$  de l'arc  $k$  sont constants, c'est-à-dire qu'on peut poser  $h(x) = 1$  et remplacer  $i_k + j_k$  par  $(I_k + J_k)$ . Enfin, comme les arcs sont paraboliques, leur équation est (fig. 1)

$$\zeta = \frac{4f}{l^2} x(1-x), \quad (23)$$

$f$  étant la flèche de l'arc. On en déduit

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} = -\frac{8f}{l^2} \quad (24) \quad \text{et} \quad \int_0^l \zeta^2 dx = \frac{8f^2 l}{15} \quad (25)$$

En substituant dans l'expression (11) de  $N$ , on trouve

$$N = \left(1 + \frac{15}{8f^2} \frac{I_k + J_k}{\Omega_k}\right) \frac{8f^2 l}{15} = \frac{8f^2 l}{15} + \frac{(I_k + J_k)l}{\Omega_k}$$

Pour des arcs de surbaissement  $f/l$  supérieur à 0,1, le dernier terme est négligeable devant le premier et l'expression de  $N$  se réduit pratiquement à

$$N = \frac{8f^2 l}{15} \quad (26)$$

Enfin, si l'on remplace  $p_k$  par  $A_k \rho_E f(x)$  dans l'expression (17) du moment isostatique  $\mu_k$ , on trouve

$$\mu_k(x) = A_k \rho_E \left[ Q(x) - \frac{x}{l} Q(l) \right] \quad (27)$$

où l'on a posé

$$Q(x) = \int_0^l dx \left[ \int_0^x f(\xi) d\xi \right] \quad (28)$$

Si l'on tient compte de tous ces résultats, l'équation (22) prend la forme

$$g(y_k) E(I_k + J_k) \frac{d^4 f(x)}{dx^4} - A_k(y_k) \rho_E f(x) + A_k \rho_E \frac{60}{l^5} \int_0^l x(1-x) \left[ Q(x) - \frac{x}{l} Q(l) \right] dx = 0 \quad (29)$$

Posons pour simplifier

$$\sqrt[4]{\frac{A_k(y_k) \rho_E}{g(y_k) E(I_k + J_k)}} = \beta \quad (30)$$

et

$$\frac{60 A_k \rho_E}{l^5 g(y_k) E(I_k + J_k)} = \frac{60 \beta^4}{l^5} = \gamma \quad (31)$$

l'équation (29) s'écrit finalement

$$\frac{d^4 f}{dx^4} - \beta^4 f + \gamma \int_0^l x(1-x) \left[ Q(x) - \frac{x}{l} Q(l) \right] dx = 0 \quad (32)$$

### 7. Recherche des déformées propres du pont

Nous appellerons déformées propres — par analogie avec les vibrations propres — les déformées  $w = f(x) g(y)$  et charges propres les charges  $p = p(x)$  qui produisent ces déformées. Le but du présent paragraphe est de déterminer ces quantités dans le cas particulier défini au paragraphe 6.

#### A. Déformée longitudinale du pont.

Comme on l'a déjà dit à la fin du paragraphe 5, la solution de l'équation (32) est nécessairement comprise parmi celles de l'équation différentielle non homogène

$$\frac{d^4 f}{dx^4} - \beta^4 f + \beta^4 K = 0, \quad (33)$$

où  $\beta^4 K$  représente une constante indéterminée pour l'instant.

L'équation (32), étant linéaire, son intégrale générale s'obtient en ajoutant à l'intégrale générale  $f_1$  de l'équation homogène

$$\frac{d^4 f}{dx^4} - \beta^4 f = 0 \quad (34)$$

une intégrale particulière  $f_2$  de l'équation complète (33).

L'équation (34) admet comme équation caractéristique

$$X^4 - \beta^4 = 0$$

dont les racines sont  $X_{12} = \pm \beta, X_{34} = \pm i\beta$ .

Elle admet donc comme intégrale générale

$$f_1(x) = A \operatorname{sh} \beta x + B \operatorname{ch} \beta x + C \sin \beta x + D \cos \beta x, \quad (35)$$

où  $A, B, C, D$  sont quatre constantes arbitraires d'intégration.

Quant à la solution particulière de l'équation (33), elle peut visiblement être prise égale à la constante  $K$ :

$$f_2 = K$$

La solution générale cherchée de (33) s'écrit donc

$$f(x) = A \operatorname{sh} \beta x + B \operatorname{ch} \beta x + C \sin \beta x + D \cos \beta x + K \quad (36)$$

Il nous faut à présent sélectionner, parmi cette quintuple infinité de solutions de l'équation (33), celles qui satisfont effectivement à l'équation (32) du problème.

Avant d'entreprendre ce travail, remarquons d'abord que la solution particulière  $f_2(x) = K$  est une solution effective de (32). En effet, le moment  $\mu$  correspondant à la charge uniforme  $f_2 = K$  a la forme parabolique bien connue

$$\mu = \frac{K x(l-x)}{2}$$

et l'on vérifie aisément que, pour les valeurs (30) et (31) de  $\beta$  et  $\gamma$ , on a

$$-\beta^4 K + \gamma \frac{K}{2} \int_0^l x^2(l-x)^2 dx = 0.$$

Ce résultat n'a rien d'étonnant, car la solution  $f_2 = K$  correspond à un arc chargé uniformément sur toute sa longueur. Si l'on se rappelle que la parabole est précisément le funiculaire d'un système de charges uniformes, on constate que les charges  $f_2 = K$  ne produisent dans l'arc que de la compression simple sans flexion. Comme nous avons négligé les déformations par compression, il s'ensuit que l'arc ne subit aucune déformation. On a donc

$$M + M' = \mu - H\zeta = 0$$

et l'équation (13) d'où provient (32) est identiquement vérifiée.

Cette remarque nous permettra de simplifier les calculs qui vont suivre.

Nous devons à présent déterminer les 5 constantes arbitraires  $A, B, C, D$  et  $K$  de manière que la déformée  $f(x)$  donnée par l'équation (36)

a) satisfasse aux conditions d'appui simple aux extrémités du longeron à savoir

$$f(x) = 0 \text{ et } f''(x) = 0 \text{ pour } x = 0 \text{ et } x = l \quad (37)$$

b) satisfasse effectivement à l'équation (32), compte tenu de la valeur explicite de son dernier terme.

Explicitons successivement ces deux groupes de conditions.

a) Les 4 conditions (37) s'écrivent sous forme développée:

$$f = 0 \text{ pour } x = 0: B + D + K = 0$$

$$f'' = 0 \text{ pour } x = 0: B - D = 0$$

$$f = 0 \text{ pour } x = l: A sh \beta l + B ch \beta l + C \sin \beta l + D \cos \beta l + K = 0$$

$$f'' = 0 \text{ pour } x = l: A sh \beta l + B ch \beta l - C \sin \beta l - D \cos \beta l = 0$$

On en déduit immédiatement

$$D = B, \quad K = -2B \quad (38)$$

$$A sh \beta l + B (ch \beta l - 1) = 0 \quad (39)$$

$$C \sin \beta l + B (\cos \beta l - 1) = 0, \quad (40)$$

ce qui permet d'écrire l'expression (36) de  $f(x)$  sous la forme plus simple

$$f(x) = A \operatorname{sh} \beta x + B (\operatorname{ch} \beta x + \cos \beta x - 2) + C \sin \beta x. \quad (41)$$

b) Nous devons maintenant exprimer que cette fonction satisfait effectivement à l'équation (32). D'après la remarque faite ci-dessus, le terme constant  $K = -2B$  satisfait pour sa part à cette équation; il disparaît donc de la condition à obtenir et il suffit par conséquent d'introduire dans l'équation (32) l'expression simplifiée

$$f_1(x) = A \operatorname{sh} \beta x + B (\operatorname{ch} \beta x + \cos \beta x) + C \sin \beta x. \quad (42)$$

Calculons d'abord le moment  $\mu$  qui naîtrait dans une poutre sur deux appuis simples sous l'effet des charges  $f_1(x)$ . Ce moment est donné par les formules (17) et (18). On a successivement

$$b \int_0^x f_1(\xi) d\xi = A \operatorname{ch} \beta x + B (\operatorname{sh} \beta x + \sin \beta x) - C \cos \beta x$$

puis

$$\beta^2 Q(x) = \int_0^x dx [\int_0^x f_1(\xi) d\xi] = A \operatorname{sh} \beta x + B (\operatorname{ch} \beta x - \cos \beta x) - C \sin \beta x$$

D'après la formule (27), le moment fléchissant dans le longeron  $k$  vaut

$$\mu_k(x) = A_k \rho_E \left[ Q(x) - \frac{x}{l} Q(l) \right],$$

mais on constate aisément que, en vertu des conditions d'appui (39) et (40), on a

$$\beta^2 Q(l) = A \operatorname{sh} \beta l + B (\operatorname{ch} \beta l - \cos \beta l) - C \sin \beta l = 0.$$

Il en résulte que le moment  $\mu_k$  se réduit à

$$\mu_k(x) = A_k \rho_E Q(x) = \frac{A_k \rho_E}{\beta^2} [A \operatorname{sh} \beta x + B (\operatorname{ch} \beta x - \cos \beta x) - C \sin \beta x].$$

Introduisons à présent l'expression (42) de  $f_1(x)$  dans l'équation (32). Elle annule les deux premiers termes de (32), puisque c'est une intégrale de l'équation homogène (34). Il suffit donc d'exprimer que

$$\beta^2 \int_0^l x(l-x) Q(x) dx = \int_0^l x(1-x) [A \operatorname{sh} \beta x + B (\operatorname{ch} \beta x - \cos \beta x) - C \sin \beta x] dx = 0. \quad (43)$$

Les intégrales intervenant dans cette condition peuvent se calculer par parties sans difficultés. Tous calculs faits, on trouve la condition

$$A(1 - \operatorname{ch} \beta l) + B(2\beta l - \operatorname{sh} \beta l - \sin \beta l) - C(1 - \cos \beta l) = 0 \quad (44)$$

Ainsi donc, les coefficients  $A$ ,  $B$  et  $C$  doivent satisfaire simultanément aux trois équations linéaires et homogènes (39), (40) et (44).

On sait qu'un système d'équations homogènes n'admet en général que la solution triviale  $A = B = C = 0$ , sauf si le déterminant des coefficients est nul.

Par conséquent, pour que le pont puisse se déformer suivant la loi  $w = f(x)$   $g(y)$ , il faut qu'on ait

$$\begin{vmatrix} sh \beta l & ch \beta l - 1 & 0 \\ 0 & \cos \beta l - 1 & \sin \beta l \\ 1 - ch \beta l & 2 \beta l - sh \beta l - \sin \beta l & \cos \beta l - 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (45)$$

Si l'on tient compte des relations connues

$$ch^2 \beta l - sh^2 \beta l = 1 \quad \text{et} \quad \sin^2 \beta l + \cos^2 \beta l = 1,$$

on peut mettre la condition (45) sous la forme

$$sh \beta l (1 - \cos \beta l - \beta l \sin \beta l) + \sin \beta l (ch \beta l - 1) = 0 \quad (46)$$

Cette équation transcendante admet d'abord l'infini de racines

$$\beta^{(2n)} l = 2 n \pi, \quad (47)$$

car  $\cos 2 n \pi = +1$  et  $\sin 2 n \pi = 0$

Pour ces valeurs de  $\beta l$ , les conditions (39) et (44) se réduisent à

$$\begin{cases} A sh 2 n \pi + B (ch 2 n \pi - 1) = 0 \\ A (1 - ch 2 n \pi) + B (4 n \pi - sh 2 n \pi) = 0, \end{cases}$$

d'où il résulte que

$$A = B = 0.$$

La fonction  $f(x)$  se réduit dès lors à

$$f^{(2n)}(x) = C \sin \frac{2 n \pi x}{l} \quad (48)$$

Les deux premières fonctions (48) correspondant à  $n = 1$  et  $n = 2$  respectivement, sont représentées à la figure 3. Elles sont antisymétriques par rapport au milieu du pont, ce qui explique qu'elles satisfont à la condition (43), car l'intégrale du produit d'une fonction antisymétrique par la fonction symétrique  $x(l - x)$  est nécessairement nulle.

Outre les solutions (47), l'équation transcendante admet encore une infinité d'autres racines, que l'on ne peut déterminer que par tâtonnements, en se servant d'une table des fonctions intervenantes. Les deux plus petites de ces racines valent respectivement

$$\beta^{(3)} l = 9,1815 < 3 \pi, \quad \beta^{(5)} l = 15,571 < 5 \pi. \quad (49)$$

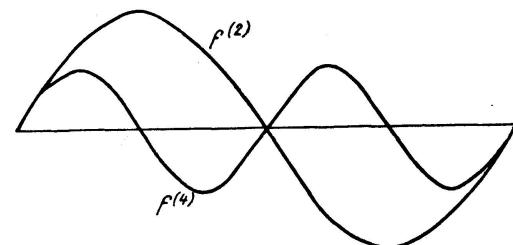


Fig. 3

Il est facile de montrer que les racines suivantes sont pratiquement égales à  $(2n+1)\pi$ . En effet, pour  $\beta l$  grand, on a pratiquement

$$\operatorname{sh} \beta l = \operatorname{ch} \beta l = \frac{e^{\beta l}}{2}.$$

En introduisant ces expressions dans la formule (46) et en négligeant le terme  $-\sin \beta l$  devant les autres, on obtient la condition

$$1 - \cos \beta l - \left( \frac{\beta l}{2} - 1 \right) \sin \beta l = 0.$$

Comme  $(\frac{\beta l}{2} - 1)$  est grand devant l'unité, cette condition est pratiquement équivalente à  $\sin \beta l = 0$ , d'où

$$\beta^{(2n+1)} l \cong (2n+1)\pi.$$

Recherchons à présent l'équation des déformées propres du pont. On tire des relations (39) et (40) les égalités

$$\frac{B}{C} = \frac{\sin \beta l}{1 - \cos \beta l} \quad \text{et} \quad \frac{A}{B} = \frac{1 - \operatorname{ch} \beta l}{\operatorname{sh} \beta l}, \quad \text{d'où} \quad \frac{A}{C} = \frac{\sin \beta l}{1 - \cos \beta l} \cdot \frac{1 - \operatorname{ch} \beta l}{\operatorname{sh} \beta l}.$$

Les déformées propres n'étant définies qu'à un facteur près, nous fixerons leur échelle en prenant, dans l'expression (41), le coefficient  $C$  égal à l'unité. Il vient dès lors

$$f(x) = \frac{\sin \beta l}{1 - \cos \beta l} \frac{1 - \operatorname{ch} \beta l}{\operatorname{sh} \beta l} \operatorname{sh} \beta x + \frac{\sin \beta l}{1 - \cos \beta l} (\operatorname{ch} \beta x + \cos \beta x - 2) + \sin \beta x \quad (49)$$

Pour  $\beta^{(3)} l = 9,1815$ , on trouve

$$\frac{1 - \operatorname{ch} \beta l}{\operatorname{sh} \beta l} = - \frac{4857}{4858} = - 0,99979; \quad \frac{\sin \beta l}{1 - \cos \beta l} = \frac{0,2409}{1,9705} = 0,12225$$

d'où

$$f^{(3)}(x) = - 0,122227 \operatorname{sh} \beta^{(3)} x + 0,12225 (\operatorname{ch} \beta^{(3)} x + \cos \beta^{(3)} x - 2) + \sin \beta^{(3)} x$$

cette déformée étant symétrique par rapport au milieu du pont, il suffit de calculer ses ordonnées pour la moitié gauche; on trouve ainsi

$$\begin{array}{ccccccc} x/l & = & 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,5 \\ f^{(3)}(x) & = & 0 & + 0,6732 & + 0,7081 & + 0,0279 & - 0,8525 & - 1,2494 \end{array}$$

Pour la cinquième déformée propre, on trouve de même

$$f^{(5)}(x) = - 0,06853 \operatorname{sh} \beta^{(5)} x + 0,06853 (\operatorname{ch} \beta^{(5)} x + \cos \beta^{(5)} x - 2) + \sin \beta^{(5)} x$$

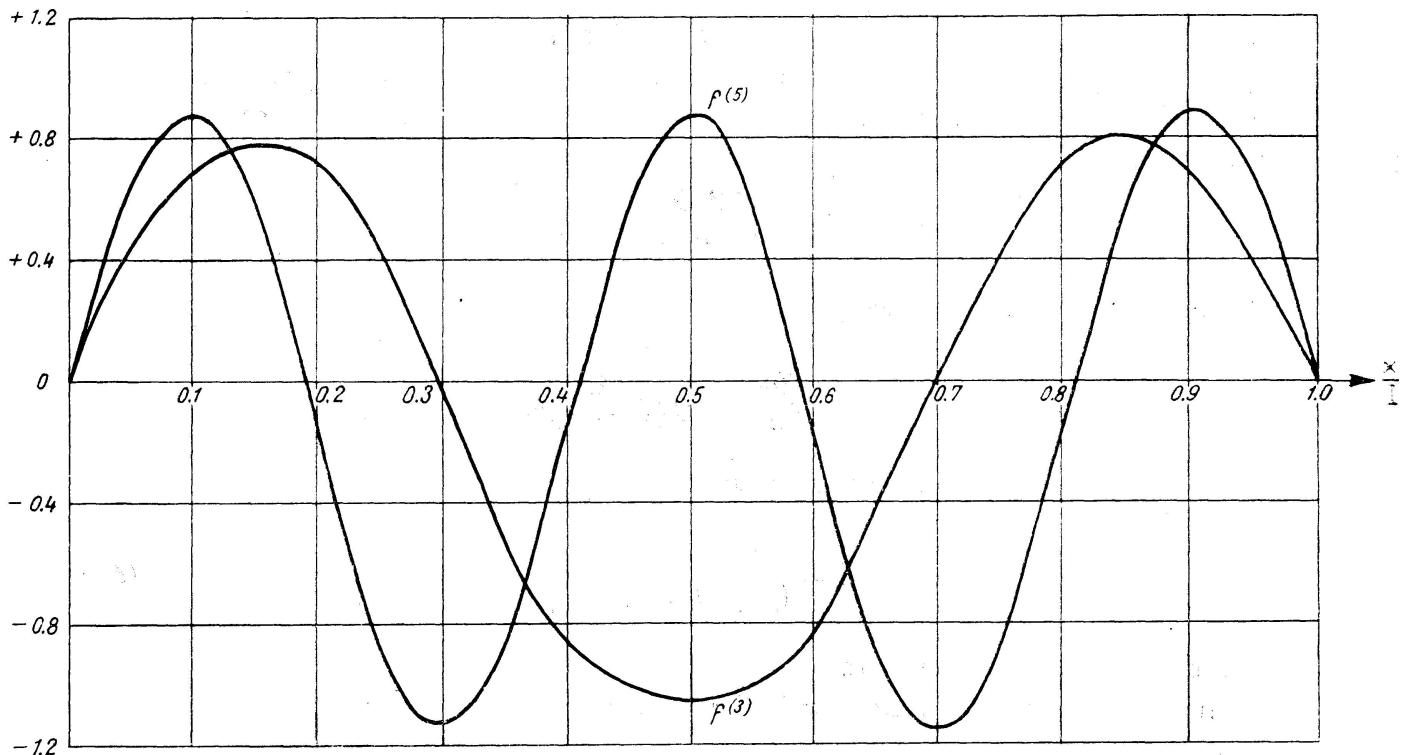


Fig. 4

les ordonnées de cette fonction pour la moitié gauche du pont sont données dans le tableau suivant:

$$\begin{array}{ccccccc} x/l & = & 0 & 0,05 & 0,10 & 0,15 & 0,20 & 0,25 \\ f^{(5)}(x) & = & 0 & +0,6422 & +0,8787 & +0,5547 & -0,1554 & -0,8511 \end{array}$$

$$x/l = 0,30 \quad 0,35 \quad 0,40 \quad 0,45 \quad 0,50$$

$$f^{(5)}(x) = -1,1400 \quad -0,8556 \quad -0,1630 \quad +0,5445 \quad +0,8641$$

Les déformées  $f^{(3)}(x)$  et  $f^{(5)}(x)$  sont représentées à la figure 4.

### B. Déformée transversale du pont.

Il nous faut maintenant étudier la déformée transversale  $g(y)$  du pont.

Chaque entretoise élémentaire de largeur  $dx$  se comporte comme une poutre continue sur appuis élastiques (fig. 5). Le coefficient de déformabilité des appuis vaut

$$d = \frac{w}{p_k dx} = \frac{f(x) g(y)}{A_k \rho_E f(x) dx} = \frac{g(y_k)}{A_k \rho_E dx}.$$

Dans la théorie des poutres continues à travées égales sur appuis élastiques, on introduit d'habitude le paramètre sans dimensions

$$\delta = \frac{E I d}{l^3},$$

où  $E I$  est la rigidité de la poutre et  $l$  la longueur d'une travée. Si l'on remplace dans cette formule  $d$  par sa valeur ci-dessus,  $E I$  par  $\rho_E dx$  et  $l$  par  $b_1$ , entre distance des arcs, on trouve, dans l'hypothèse que tous les arcs sont identiques,

$$\delta = \frac{\rho_E dx g(y_k)}{b_1^3 A_k \rho_E dx} = \frac{g(y_k)}{b_1^3 A_k}$$

Mais on tire de la formule (30)

$$\frac{g(y_k)}{A_k} = \frac{\rho_E}{E(I+J)\beta^4},$$

d'où, en remplaçant dans l'expression de  $\delta$ , il vient

$$\delta = \frac{1}{(\beta l)^4} \frac{\rho_E l}{E(I+J)} \left( \frac{l}{b_1} \right)^3 \quad (50)$$

Pour chaque déformée propre, on connaît, par le littéra  $A$ , la valeur correspondante de  $\beta l$ ; on peut donc, par la formule ci-dessus, calculer la valeur adéquate du paramètre  $\delta$ .

Il est aisément, dès lors, de déterminer comment les forces extérieures appliquées au tablier se répartissent entre les différents arcs, en se servant des lignes d'influence des réactions d'appui d'une poutre sur appuis élastiques. Ces lignes d'influence sont généralement des courbes à faible courbure; pour les construire, il suffit de connaître les ordonnées qu'elles prennent au droit des appuis. On trouvera les valeurs de ces ordonnées pour le cas de 3 à 9 appuis dans le mémoire sur les ponts à poutres multiples de Leonhardt<sup>4)</sup>.

On remarquera que le paramètre  $z$  de Leonhardt est lié à notre paramètre  $\delta$  par la relation  $z = 6\delta$ .

Si le pont comporte plus de 5 arcs, on peut assimiler les appuis des entretoises à un appui continu et utiliser les lignes d'influence des réactions d'appui d'une poutre sur fondation élastique.

De telles lignes ont été calculées par M. Guyon<sup>5)</sup>. Cet auteur considère un pont formé de poutres et d'entretoises jointives en très grand nombre. Il appelle:

- i Le moment d'inertie des poutres par mètre courant de section transversale.
- j Le moment d'inertie des entretoises par mètre courant de longueur de pont.
- 2a La longueur du pont.
- 2b La largeur du pont.

---

<sup>4)</sup> F. Leonhardt, Anleitung für die vereinfachte Trägerrostberechnung, Berlin, Ernst u. Sohn, 1940

<sup>5)</sup> Y. Guyon, Ann. P. et Ch., sept.-oct. 1946, pp. 553 à 612.

M. Guyon admet que le pont à poutres multiples se déforme longitudinalement suivant la demi-onde de sinusoïde

$$w = K \sin \frac{\pi x}{l},$$

ce qui correspond à la première valeur propre  $\beta^{(1)}l = \pi$ , absente dans le cas des ponts à arcs multiples.

Il montre que les lignes d'influence des réactions des poutres sur les entretoises dépendent uniquement de la quantité

$$\theta = \frac{b}{2a} \sqrt[4]{\frac{i}{j}},$$

qu'il appelle paramètre d'entretoisement.

On peut appliquer au problème actuel les résultats numériques donnés par M. Guyon, en remarquant que, pour les charges propres d'ordre supérieur, la souplesse de l'entretoisement augmente proportionnellement aux valeurs correspondantes de  $\beta l$ , ce qui conduit à multiplier le paramètre  $\theta$  par  $\beta l/\pi$ .

D'autre part, pour adapter la formule de M. Guyon à nos notations, nous remplaçons  $2a$  par  $l$ ,  $i$  par  $i_A = (i + j)$ ,  $j$  par  $i_E = \rho_E/l$ . Le paramètre d'entretoisement prend alors la forme

$$\theta = \frac{b}{l} \frac{\beta l}{\pi} \sqrt[4]{\frac{i_A}{i_E}}. \quad (51)$$

### C. Charges propres.

Pour terminer notre étude des déformées propres, il nous faut encore déterminer comment sont réparties les forces extérieures qui produisent ces déformées. Nous nous bornerons, à ce point de vue, à considérer des forces extérieures concentrées sur une parallèle à l'axe du pont d'excentricité  $e$ , (fig. 1 et 5), étant entendu que toute mise en charge peut s'obtenir par superposition de telles distributions de forces.

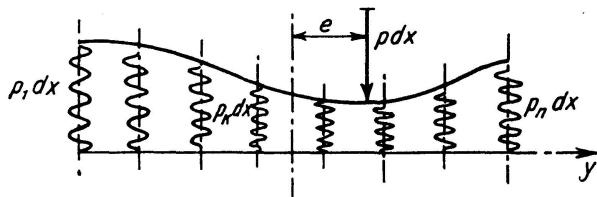


Fig. 5

Dans ces conditions, la force extérieure  $p dx$  appliquée à une entretoise élémentaire de largeur  $dx$  est équilibrée par les réactions élémentaires  $p_k dx$  des longerons (fig. 5). On a donc

$$p = \sum_1^n p_k = \rho_E f(x) \sum_1^n A_k = \beta^4 E (I + J) f(x) \sum_1^n g(y_k).$$

On constate ainsi que les charges propres  $p(x)$  ont des ordonnées proportionnelles aux déformées propres  $f(x)$ . Leur variation longitudinale est donc encore représentée par les courbes des figures 3 et 4.

### 8. Deux propriétés fondamentales des déformées et charges propres

*A. L'aire totale comprise sous une déformée (ou une charge) propre est égale à zéro.*

En effet, en intégrant l'expression (41) des déformées propres on trouve

$$\int_0^l f(x) dx = \frac{1}{\beta} [A(\operatorname{ch} \beta l - 1) + B(\operatorname{sh} \beta l + \sin \beta l - 2\beta l) + C(1 - \cos \beta l)]$$

Le terme entre crochets est identique au premier membre de l'expression (44) changé de signe; il est donc nul et l'on a

$$\int_0^l f(x) dx = 0 \quad \text{C.Q.F.D.} \quad (52)$$

le théorème s'applique directement aux charges propres, qui sont de la forme  $p(x) = k f(x)$ .

*B. Les déformées ou charges propres forment une suite de fonctions orthogonales, c'est-à-dire qu'on a, quels que soient les indices différents  $m$  et  $n$ ,*

$$\int_0^l f^{(m)}(x) f^{(n)}(x) dx = 0 \quad (m \neq n)$$

En effet, les fonctions  $f^{(m)}(x)$  et  $f^{(n)}(x)$  sont des solutions de l'équation différentielle (33), de sorte qu'on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^4 f^{(m)}}{dx^4} - [\beta^{(m)}]^4 f^{(m)} + [\beta^{(m)}]^4 K^{(m)} = 0 \\ \frac{d^4 f^{(n)}}{dx^4} - [\beta^{(n)}]^4 f^{(n)} + [\beta^{(n)}]^4 K^{(n)} = 0 \end{array} \right.$$

Si nous soustrayons ces équations membre à membre, après les avoir multipliées par  $f^{(n)}$  et  $f^{(m)}$  respectivement et intégrées de 0 à  $l$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} & \{ [\beta^{(n)}]^4 - [\beta^{(m)}]^4 \} \int_0^l f^{(m)} f^{(n)} dx + [\beta^{(m)}]^4 K^{(m)} \int_0^l f^{(n)} dx - [\beta^{(n)}]^4 K^{(n)} \int_0^l f^{(m)} dx \\ & + \int_0^l \left[ f^{(n)} \frac{d^4 f^{(m)}}{dx^4} - f^{(m)} \frac{d^4 f^{(n)}}{dx^4} \right] dx = 0 \end{aligned} \quad (53)$$

Les deuxième et troisième intégrales du premier membre sont immédiatement nulles, en vertu de la propriété A démontrée au début de ce paragraphe.

La dernière intégrale peut se transformer comme suit: en intégrant deux fois de suite par parties, on obtient

$$\int_0^l f^{(n)} \frac{d^4 f^{(m)}}{dx^4} dx = \left[ f^{(n)} \frac{d^3 f^{(m)}}{dx^3} \right]_0^l - \left[ \frac{d f^{(n)}}{dx} \frac{d^2 f^{(m)}}{dx^2} \right]_0^l + \int_0^l \frac{d^2 f^{(n)}}{dx^2} \frac{d^2 f^{(m)}}{dx^2} dx$$

i'expression de l'intégrale  $\int_0^l f^{(n)} d^4 f^{(m)}/dx^4 dx$  se déduit de cette formule en intervertissant les indices  $m$  et  $n$ . En faisant la différence des deux égalités obtenues, on trouve

$$\int_0^l \left[ f^{(n)} \frac{d^4 f^{(m)}}{dx^4} - f^{(m)} \frac{d^4 f^{(n)}}{dx^4} \right] dx = \left[ f^{(n)} \frac{d^3 f^{(m)}}{dx^3} - f^{(m)} \frac{d^3 f^{(n)}}{dx^3} + \frac{d f^{(n)}}{dx} \frac{d^2 f^{(m)}}{dx^2} - \frac{d f^{(m)}}{dx} \frac{d^2 f^{(n)}}{dx^2} \right]_0^l$$

Or, tous les termes intégrés du crochet ci-dessus s'annulent séparément puisqu'on a, pour  $x = 0$  et  $x = l$ ,

$$f^{(m)} = f^{(n)} = 0; \quad \frac{d^2 f^{(m)}}{dx^2} = \frac{d^2 f^{(n)}}{dx^2} = 0 \quad (37)$$

L'égalité (53) se réduit donc à son premier terme, c'est-à-dire, puisque  $\beta^{(n)}$  et  $\beta^{(m)}$  sont différents par hypothèse, à

$$\int_0^l f^{(m)}(x) f^{(n)}(x) dx = 0 \quad \text{C.Q.F.D.} \quad (54)$$

Cette propriété d'orthogonalité s'applique de suite aux charges propres, puisque  $p(x) = k f(x)$ .

Remarquons en terminant que la démonstration précédente resterait valable si les longerons du pont étaient parfaitement encastrés à leurs extrémités; car on aurait dans ce cas

$$f = 0 \quad \text{et} \quad \frac{df}{dx} = 0 \quad \text{pour } x = 0 \text{ et } l,$$

et les termes intégrés seraient encore tous nuls.

## 9. Décomposition d'une mise en charge quelconque en série de charges propres

On démontre en analyse que, sous des conditions très générales qui sont satisfaites ici, on peut représenter une fonction *quelconque* par une série de fonctions orthogonales de la forme

$$p(x) = C_1 p^{(1)}(x) + C_2 p^{(2)}(x) + \dots, \quad (55)$$

pourvu que ces fonctions forment une suite complète.

Les coefficients  $C_1, C_2, C_3, \dots$  de la série se déterminent tout à fait comme ceux d'une série de Fourier. Pour obtenir le coefficient  $C_n$ , il suffit de multiplier les deux membres de l'égalité (55) par  $p^{(n)}(x)$ , puis d'intégrer de 0 à  $l$ ; il vient ainsi

$$\int_0^l p(x) p^{(n)}(x) dx = C_1 \int_0^l p^{(1)} p^{(n)} dx + C_2 \int_0^l p^{(2)} p^{(n)} dx + \dots + C_n \int_0^l [p^{(n)}]^2 dx + \dots$$

Par suite de l'orthogonalité des charges propres (formule 54), toutes les intégrales du second membre sont nulles, sauf celle qui contient  $[p^{(n)}]^2$ . On obtient donc

$$C_n = \frac{\int_0^l p(x) p^{(n)}(x) dx}{\int_0^l [p^{(n)}(x)]^2 dx} \quad (56)$$

A vrai dire, la suite des charges propres étudiées aux §§ 7 et 8 ne constitue pas une suite complète; il y manque la fonction fondamentale en demi-onde qui devrait remplacer ici le terme fondamental  $\sin \pi x/l$  des séries de Fourier<sup>6)</sup>.

D'ailleurs, puisque les charges propres obéissent toutes à la condition (52)

$$\int_0^l p^{(n)}(x) dx = 0, \quad (52)$$

on ne peut développer en série de charges propres qu'une charge  $p(x)$  satisfaisant à la même condition

$$\int_0^l p(x) dx = 0.$$

Enfin, il est évident directement qu'une charge uniforme  $p(x) = \text{constante}$  ne saurait être décomposée en série de charges propres, puisque les coefficients de cette série vaudraient

$$C = \frac{p \int_0^l p^{(n)} dx}{\int_0^l [p^{(n)}]^2 dx}$$

et seraient tous nuls en vertu de la formule (52).

Si la charge  $p$  appliquée au pont a une résultante  $\int_0^l p dx$  différente de zéro, il faut donc commencer par en soustraire la charge uniforme  $p_0$  de même résultante, qui est définie par l'égalité

$$p_0 l = \int_0^l p(x) dx.$$

En d'autres termes, il faut rapporter le diagramme des charges  $p$  à son ordonnée moyenne. Celà fait, on peut décomposer les charges restantes en série de charges propres.

A titre d'exemple, nous allons décomposer en série de charges propres une charge uniforme  $p$  s'étendant depuis l'extrémité gauche du pont jusqu'à l'abscisse  $x = a l$ . (fig. 6)

Les coefficients d'ordre pair de la série s'obtiennent immédiatement. Car, d'après la formule (48),

$$p^{(2n)}(x) = \sin \frac{2n\pi x}{l},$$

---

<sup>6)</sup> C'est pour souligner ce fait qu'au paragraphe 7A, on a donné le numéro 2 à la première charge propre.

d'où, en appliquant la formule (56),

$$C_{2n} = \frac{p}{n\pi} (1 - \cos 2n\pi a) \quad (57)$$

La détermination des coefficients d'ordre impair est plus difficile. On a d'abord

$$\int_0^l p^{(n)} dx = p \int_0^{\alpha l} \left[ \frac{A}{C} \operatorname{sh} \beta x + \frac{B}{C} (\operatorname{ch} \beta x + \cos \beta x - 2) + \sin \beta x \right] dx.$$

Cette intégrale s'effectue immédiatement. Ensuite,

$$\int_0^l [p^{(n)}]^2 dx = \int_0^l \left[ \frac{A}{C} \operatorname{sh} \beta x + \frac{B}{C} (\operatorname{ch} \beta x + \cos \beta x - 2) + \sin \beta x \right]^2 dx.$$

Cette intégrale nécessite de longs calculs. Après de nombreuses simplifications, elle se réduit à l'expression

$$\frac{l}{2} \left[ 1 - \left( \frac{A}{C} \right)^2 \right].$$

On aboutit ainsi à la formule générale suivante, dont (57) n'est qu'un cas particulier:

$$C_n = \frac{2p}{\beta l} \frac{\frac{A}{C} (\operatorname{ch} \alpha \beta l - 1) + \frac{B}{C} (\operatorname{sh} \alpha \beta l + \sin \alpha \beta l - 2 \alpha \beta l) + (1 - \cos \alpha \beta l)}{1 - \left( \frac{A}{C} \right)^2} \quad (58)$$

Pour fixer les idées, effectuons l'étude numérique complète pour une charge uniforme couvrant les quatre dixièmes du pont ( $a = 0,4$ ).

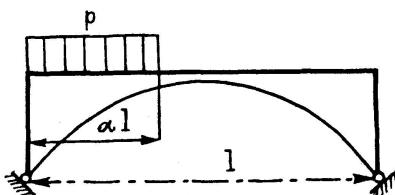


Fig. 6

La partie de cette charge décomposable en série de charges propres est représentée à la figure 7. Elle se compose d'une charge uniforme  $0,6p$  suivie d'une charge uniforme  $-0,4p$ .

Les premiers coefficients  $C$  d'ordre pair, calculés par la formule (57) valent respectivement

$$\begin{aligned} C_2 &= 0,5755, \\ C_4 &= 0,1100, \\ C_6 &= 0,0733, \\ &\dots \end{aligned}$$

Les deux premiers coefficients d'ordre impair, calculés par la formule (58), valent

$$\begin{aligned} C_3 &= +0,2260 \\ C_5 &= -0,0969. \end{aligned}$$

On a dessiné en trait plein à la figure 7 la courbe représentant la série

$$p(x) = C_2 p^{(2)} + C_3 p^{(3)} + \dots + C_6 p^{(6)},$$

limitée aux 5 premiers termes. On constate qu'il subsiste une différence assez forte entre cette courbe et la ligne en escalier représentant la partie décomposable de la charge. La convergence de la série est donc relativement lente.

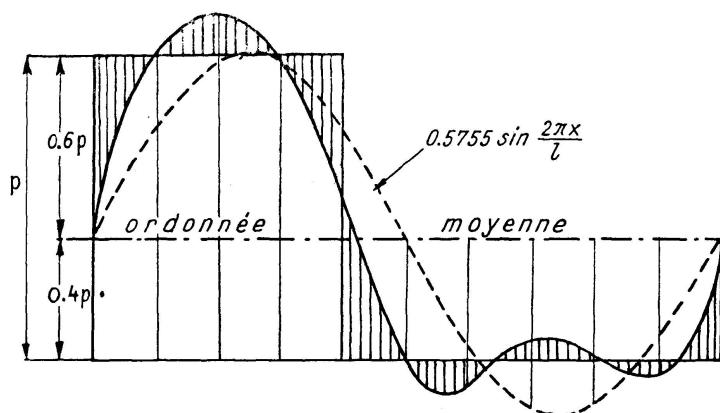


Fig. 7

#### 10. Méthode pratique de calcul des ponts à arcs multiples

La méthode qui précède contient tous les éléments nécessaires pour analyser aussi exactement qu'on le veut l'effet d'une charge quelconque — concentrée par exemple — appliquée en un endroit arbitraire du tablier. Mais il est visible qu'elle conduit à des calculs impraticables.

Il faut donc simplifier. La simplification à faire s'indique d'elle-même si l'on examine un instant les lignes d'influence des moments fléchissants dans l'arc. On a représenté à la figure 8 ces lignes pour 5 sections équidistantes de la moitié gauche de l'arc. ( $x/l = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4$  et  $0,5$ ).

Il apparaît immédiatement que, sauf à la clef, on obtient partout les moments maxima en chargeant le pont depuis l'appui de gauche jusqu'au point où la ligne d'influence passe par zéro. Pour toutes les lignes d'influence examinées, ce point est compris entre les abscisses  $x/l = 0,37$  et  $0,55$ . Pratiquement, on peut donc dire que les moments maxima s'obtiennent en plaçant les charges maxima sur la moitié du pont. On disposera d'ailleurs les plus lourdes charges au droit des plus grandes ordonnées des lignes d'influence, qui sont comprises entre les abscisses  $x/l = 0,1$  et  $0,4$ .

Il résulte de là que la distribution des charges aura l'allure générale représentée à la figure 9. La partie de cette charge décomposable en charges propres est représentée à la figure 10. On constate qu'elle diffère très peu de la deuxième charge propre (en onde complète de sinusoïde).

*Nous proposons donc, en vue de la recherche des moments maxima, d'étudier la répartition transversale des charges entre les arcs en supposant qu'elle est la même que sous la deuxième charge propre.*

Nous admettrons, faute de mieux, que la même répartition s'applique à la recherche des efforts tranchants maxima, dont les lignes d'influence présentent également des zones des deux signes. L'importance des efforts tranchants étant beaucoup moindre que celle des moments, on peut admettre sur leur évaluation une erreur relative plus grande.

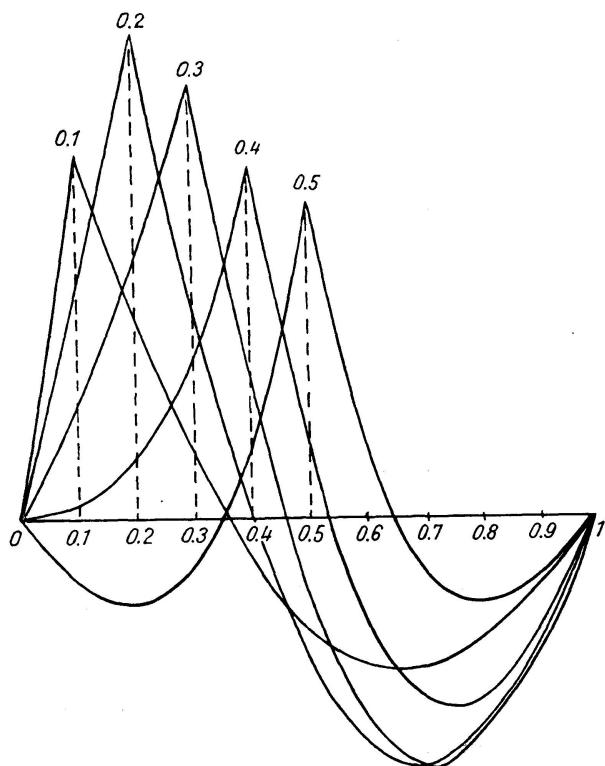


Fig. 8



Fig. 9

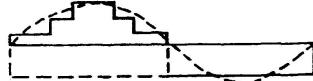


Fig. 10

Par contre, les efforts normaux maxima dans les arcs s'obtiennent en chargeant le pont au maximum sur toute sa longueur. D'après l'étude faite au paragraphe 9, nous savons qu'une faible partie seulement de cette charge est décomposable en charges propres et répartie transversalement. La quasi-totalité de la charge est, au contraire, reprise directement par les arcs sous-jacents. Il est donc prudent de ne tenir compte d'aucune répartition transversale dans l'évaluation des efforts normaux, ce qui sera d'ailleurs favorable à la sécurité.

La règle approchée, que nous venons de justifier dans le cas d'un pont à arcs paraboliques à deux rotules d'inertie réduite constante, peut certainement

s'appliquer avec une bonne approximation à tous les ponts en arc à deux rotules. En l'absence de tout autre procédé de calcul, nous proposons de l'appliquer également aux ponts en arc à trois rotules.

*Nous ne saurions assez souligner que toute l'étude précédente doit servir uniquement à déterminer la répartition transversale la plus défavorable des charges. Une fois cette répartition connue, l'étude du pont doit se poursuivre par les méthodes ordinaires de la stabilité des constructions, indépendamment de la présente étude.*

Il importe d'avoir cette réflexion présente à l'esprit, si l'on veut apprécier sainement la méthode proposée. En effet, quelles que soient les erreurs commises à la suite des nombreuses hypothèses faites au cours de la présente étude, ces erreurs n'entachent, en tout état de cause, que la répartition *transversale* des charges. Il nous paraît préférable de disposer d'une règle même approchée pour apprécier cette répartition que de se livrer à l'empirisme total en répartissant, par exemple, les charges également entre tous les arcs.

Si l'on admet l'hypothèse qui vient d'être énoncée, l'étude d'un pont à arcs multiples ne présente pas plus de difficultés que celle d'un pont à poutres multiples, avec laquelle elle présente d'ailleurs une similitude complète. Pour les détails d'application, nous renvoyons à notre étude à paraître sur les ponts à poutres multiples et nous bornons à résumer ci-après les principaux résultats obtenus.

### *Résumé des principaux résultats*

1. Dans la détermination des efforts normaux maxima, on supposera que chaque arc reprend l'entièreté de la charge y afférente, c'est-à-dire qu'il n'y a aucune répartition transversale.

2. Dans la détermination des moments et efforts tranchants maxima, on tiendra compte de la répartition transversale des charges de la manière suivante:

- a) On calculera  $\rho_E l$ , somme des rigidités de toutes les entretoises des arcs et du tablier.
- b) On calculera ensuite le paramètre

$$\delta = \frac{1}{16\pi^4} \frac{\rho_E l}{E(I+J)} \left( \frac{l}{b_1} \right)^3,$$

où les notations ont les significations suivantes:

*l* longueur du pont (corde de l'arc).

*b*<sub>1</sub> distance entre deux arcs adjacents.

*I* moment d'inertie moyen d'un longeron.

*J* moment d'inertie réduit moyen d'un arc.

- c) On étudiera la répartition transversale des charges en considérant que les arcs jouent pour les entretoises le rôle d'appuis élastiques de paramètre  $\delta$ . Pour ce faire, il suffit de tracer les lignes d'influence des réactions d'appui dans une poutre sur appuis élastiques de coefficient  $\delta$ . Les ordonnées de ces lignes au droit des appuis sont connues par la littérature technique<sup>7)</sup>.

On utilisera avec avantage la notion de coefficient de répartition transversale défini dans notre mémoire cité.

Les effets  $E$  (moments, efforts tranchants, tensions, etc.) produits dans une section ( $x$ ) des longerons, montants ou arcs sont donnés par la formule générale

$$E(x) = r E_0(x), \quad (59)$$

où  $E_0$  représente la grandeur qu'aurait l'effet si la charge était appliquée directement à l'arc.

- d) Si le pont ne comporte qu'un petit nombre d'entretoises, il faudra tenir compte des tensions secondaires dans les longerons dues aux charges appliquées entre les entretoises. Cela se fera exactement comme dans les ponts à poutres multiples, en ajoutant à l'expression (59) un terme  $r' E'_x$ , de sorte qu'on aura au total<sup>8)</sup>

pour les moments dans les longerons

$$M_x = r M_{0x} + r' M'_x$$

pour les efforts tranchants dans les longerons

$$T_x = r T_{0x} + r' T'_x.$$

- e) Si le pont comporte plus de 5 arcs, on peut étudier la répartition transversale des charges en supposant que les arcs jouent vis-à-vis des entretoises le rôle d'un appui élastique continu. On se servira des lignes d'influence des réactions d'appui calculées par Guyon<sup>9)</sup>. Pour la deuxième charge propre, on a  $\beta^{(2)}l = 2\pi$ , de sorte que la formule (51) du paramètre d'entretoisement se réduit à

$$\theta = \frac{2b}{l} \sqrt{\frac{i_A}{i_E}}.$$

Dans cette formule,

$2b$  est la largeur du pont,

$l$  sa longueur,

$i_A = i + j$  est la somme des moments d'inertie des longerons et des arcs par mètre courant de section transversale.

$i_E$  est la somme des moments d'inertie des entretoises des arcs et du tablier par mètre courant de longueur du pont.

<sup>7)</sup> Voir à ce sujet notre étude à paraître sur les ponts à poutres multiples, ainsi que les mémoires cités au bas de la pages 354.

<sup>8)</sup> F. Leonhardt, loc. cit. p. 354.

<sup>9)</sup> Y. Guyon, loc. cit. p. 354.

## 11. Application numérique au pont de Neuilly

Cet important ouvrage soudé a été décrit dans plusieurs revues techniques<sup>10)</sup>. Il comporte en réalité deux arches, de 67 et 82 mètres de portées respectives, que nous désignerons sous les noms de arche Neuilly et arche Courbevoie. Chaque arche comporte 12 arcs parallèles et équidistants à deux rotules et fibre moyenne circulaire, assez surbaissés. On peut y appliquer sans erreur sensible la théorie qui précède. Les sections droites des pièces principales sont définies à la figure 9. Le tableau ci-dessous donne tout d'abord les dimensions principales des deux arches, puis les calculs nécessaires pour évaluer leurs paramètres d'entretoisement respectifs.

		arche Neuilly	arche Courbevoie
portée entre rotules		67	82
flèche		6,75	6,833
nombre d'arcs		12	12
écartement des arcs d'axe en axe		3,22	3,22
largeur: 3,22 · 11 =		35,42	35,42
nombre de montants verticaux		12	16
moment d'inertie réduit d'un arc		$11030 \cdot 10^6$	$23920 \cdot 10^6$
moment d'inertie d'une entretoise d'arc		$6406 \cdot 10^6$	$12122 \cdot 10^6$
moment d'inertie des longrines du tablier		19605	19605
moment d'inertie des entretoises du tablier		19605	19605
somme des moments d'inertie d'un arc et d'une longrine = $A$		$11030 \cdot 10^6$	$23920 \cdot 10^6$
somme des moments d'inertie d'une entretoise d'arc et du tablier = $B$		$6406 \cdot 10^6$	$12122 \cdot 10^6$
moment d'inertie par mètre courant $i_A = \frac{12A}{35,42}$		$3740 \cdot 10^6$	$8100 \cdot 10^6$
moment d'inertie par mètre courant $i_B = \frac{12 \text{ ou } 16B}{\text{portée}}$		$1148 \cdot 10^6$	$2364 \cdot 10^6$
$i_A/i_E$		3,260	3,423
$\sqrt{\frac{i_A}{i_B}}$		1,344	1,360
$2 b/l$		0,5288	0,432
$\theta$		0,7112	0,5876

<sup>10)</sup> Travaux, 1940, pp. 151 à 157. — Le Génie Civil, 1943, p. 15. — L'Ossature Métallique, N° 7—8, 1945, pp. 121—132. — 3ème Congrès de l'A.I.P.C., Publ. Prélim., Liège, 1948, pp. 65 à 74.

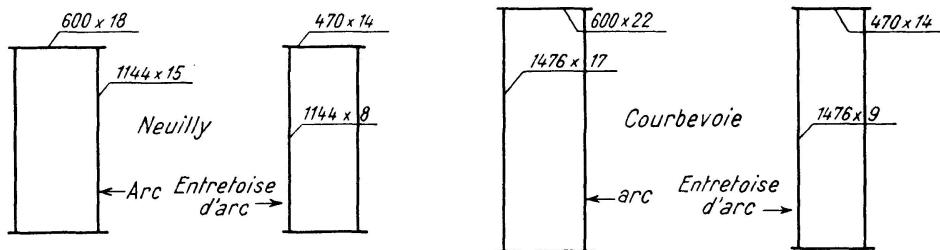


Fig. 11

Lorsque le paramètre  $\theta$  est connu, on peut étudier aisément la répartition transversale des charges entre les arcs à l'aide des lignes d'influence de Guyon. Sans faire cette étude, on peut constater par l'examen des lignes d'influence que les valeurs de  $\theta$  choisies à Neuilly sont assez judicieuses. Les auteurs de l'ouvrage ne donnent aucun renseignement sur la manière dont l'entretoisement des arcs a été effectivement choisi.

### Résumé

On considère un pont en arc à tablier supérieur, soutenu par plus de deux arcs parallèles. On se propose d'analyser comment la charge appliquée au tablier se répartit entre les différents arcs.

On recherche d'abord sous quelles charges le tablier prend une déformée de la forme  $w = f(x) g(y)$ . Dans ce cas, toutes les entretoises prennent des déformations semblables et se comportent comme une poutre sur appuis élastiques; on montre que la distribution des efforts entre les différents arcs dépend d'un seul coefficient appelé coefficient de répartition transversale.

On montre ensuite comment on peut décomposer une charge quelconque appliquée au tablier en une série de telles charges particulières.

Pratiquement, les moments maxima dans les arcs s'obtiennent en surchargeant une moitié du pont; on peut donc admettre que les charges se répartissent comme sous la seconde charge particulière et le calcul d'un pont à arcs multiples devient semblable à celui d'un pont à poutres multiples.

En conclusion, la théorie est appliquée numériquement à un pont existant (pont de Neuilly).

### Zusammenfassung

Es wird eine Brücke mit obenliegender Fahrbahn, abgestützt auf mehr als zwei parallele Bogen, betrachtet, und untersucht, wie sich eine auf der Fahrbahn angebrachte Last auf die verschiedenen Bogen verteilt.

Man sucht zuerst die Lasten, unter denen die Fahrbahn eine Durchbiegung von der Form  $w = f(x) \cdot g(y)$  erhält. In diesem Falle deformieren sich alle

Querträger ähnlich und verhalten sich wie Balken auf elastischen Stützen. Es kann gezeigt werden, daß die Verteilung der Lasten auf die verschiedenen Bogen nur von einem Koeffizienten, genannt Querverteilungskoeffizient, abhängt.

Hierauf zeigt der Verfasser, wie eine beliebige Belastung der Fahrbahn in eine Reihe von solchen ausgewählten Lasten zerlegt werden kann.

Die größten Momente im Bogen werden praktisch genügend genau durch Belastung einer Brückenhälfte erhalten. Man kann daher sagen, daß sich die Lasten verteilen wie unter der zweiten Spezialbelastung. Die Berechnung einer Brücke mit mehreren parallelen Bogen wird daher ähnlich derjenigen einer Brücke mit mehreren nebeneinanderliegenden Balken.

Schließlich wird die Theorie numerisch auf eine bestehende Brücke (Pont de Neuilly) angewendet.

### Summary

A bridge with upper-lying track, supported on more than two parallel arches, is considered, and investigation is made as to how a load applied to the track is distributed on the different arches.

First of all an endeavour is made to find the loads under which the track experiences a bending of the form  $w = f(x) \cdot g(y)$ . In this case transverse beams are deformed similarly and behave as beams on flexible supports. It can be shown that the distribution of the loads on the various arches depends only on one coefficient, termed the coefficient of transverse distribution.

The author then shows how any desired loading of the track can be split up into a series of such particular loads.

The maximum moments in the arch are obtained, sufficiently accurate for practical purposes, by loading one half of the bridge. It can therefore be stated that the loads are distributed as shown under the second special loading. The calculation of a bridge with several parallel arches therefore becomes similar to that of a bridge with several adjacent girders.

Finally the theory is applied numerically to an existing bridge (Pont de Neuilly).