

Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 9 (1949)

Artikel: Théorie de la détermination expérimentale des contraintes par une méthode n'exigeant pas la connaissance précise du module d'élasticité
Autor: Coutinho, A.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-9696>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 28.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Théorie de la détermination expérimentale des contraintes par une méthode n'exigeant pas la connaissance précise du module d'élasticité

Theorie einer experimentellen Spannungsbestimmungsmethode, in der der Elastizitätsmodul nicht genau bekannt sein muß

Theory of an experimental method for determining stresses, not requiring an accurate knowledge of the modulus of elasticity

A. COUTINHO, ingénieur civil I.S.T., Lisbonne

1. Méthode classique de la détermination expérimentale des contraintes

Les contraintes dans les solides sont déterminées expérimentalement au moyen de la mesure des déformations. Le module d'élasticité et le coefficient de Poisson étant connus, on calcule les contraintes à l'aide de la loi de Hooke.

C'est le seul procédé de détermination des contraintes, étant donné *qu'il est impossible de les mesurer directement*. Celles-ci ne peuvent être évaluées que par l'intermédiaire de leur effet, les déformations, et par la connaissance des constantes élastiques du solide.

Dans ces conditions, l'erreur affectant la détermination des contraintes est égale à l'erreur dont est entaché le module d'élasticité, sans tenir compte des erreurs commises dans l'évaluation des déformations et de l'erreur sur le coefficient de Poisson.

Quand le module d'élasticité n'est pas bien défini, comme c'est le cas pour le béton, l'erreur sur les contraintes est alors très grande. Lorsqu'on détermine les contraintes d'ouvrages en béton pendant un laps de temps relativement long, il n'est pas rare d'opérer avec des erreurs de 50 et 100 % sur le module d'élasticité de ce matériau.

2. Difficultés dans la connaissance du module d'élasticité du béton

Les principales propriétés du béton qui rendent difficile la connaissance de ses constantes élastiques sont: le fluage, l'hydratation progressive des grains de ciment, les déformations initiales et l'influence de l'effet de paroi pendant le bétonnage.

Les deux premières causes dépendent directement de la distribution de l'humidité à l'intérieur du béton.

Le fluage est dû principalement au mouvement de l'eau dans les capillaires, mouvement qui est provoqué par la tendance de l'eau à annuler les contraintes qui agissent sur elle. Il en résulte un écoulement de l'eau vers les régions où elle ne subit pas de contraintes. Il y a alors une redistribution des contraintes entre la phase liquide et la phase solide ce qui provoque une variation des déformations dans le solide ¹⁾).

La variation du module d'élasticité du béton avec le degré d'hydratation du ciment provient du contact plus ou moins prolongé de l'eau remplissant les capillaires avec le ciment. Il résulte de ce contact que l'eau pénètre progressivement à l'intérieur des particules de ciment.

Comme le mouvement et la distribution de l'eau à l'intérieur d'un solide poreux obéissent à des lois très complexes et qu'ils sont très difficiles à déterminer, il est pratiquement impossible de transposer les résultats des essais de fluage et de vieillissement obtenus en laboratoire sur des échantillons de béton maintenus dans des conditions bien définies, aux observations réalisées sur les constructions en béton, sur lesquelles agissent les conditions les plus variées de température et d'humidité

L'effet de paroi pendant le bétonnage, rend les pièces plus riches en éléments fins dans les régions extérieures que dans les régions intérieures. Il en résulte que les propriétés varient d'un point à l'autre de la section des pièces.

Par exemple, le module d'élasticité des couches superficielles d'un cylindre en béton de 10 cm de diamètre peut atteindre 0,80 environ du module d'élasticité des couches intérieures ²⁾).

L'existence des déformations permanentes dans les premiers cycles de charge du béton est due principalement à la mise en place des constituants du béton. Ceux-ci, dans le béton pris à l'état vierge, n'occupent pas encore des positions qui conduisent à des réactions mutuelles tout à fait réversibles. Il faut exécuter un tassement préalable de ces éléments pour obtenir une réversibilité parfaite du diagramme contrainte-déformation ³⁾).

Ainsi, par exemple, un béton peut avoir un module d'élasticité initial égal à la moitié du module d'élasticité obtenu après quelques cycles de charge et de décharge, c'est à dire, au stade de réversibilité parfaite du diagramme contrainte-déformation.

3. Détermination expérimentale des contraintes par la méthode des inclusions

Les difficultés que l'on rencontre pour connaître le module d'élasticité des matériaux où le liant et le ciment ont incité à rechercher une méthode de

¹⁾ LORMAN, "The Theory of creep in concrete", *Proc. A.S.T.M.*, 1940, p. 1082.

²⁾ L'HERMITE, „Nouvelles recherches dans le domaine de la résistance des matériaux“, *C. R. Rech. Eff. 1942*, Lab. Bat. Tr. Pub., Paris, p. 3.

³⁾ L'HERMITE, "De la résistance des matériaux considérée comme une science expérimentale", *C. R. Rech. Eff. 1940—1941*, Lab. Bat. Tr. Pub., Paris, p. 6.

détermination expérimentale des contraintes ne nécessitant pas une connaissance précise du module d'élasticité.

Bien que l'on ne sache pas s'il est plus important de connaître les contraintes ou les déformations (puisque l'on ne sait pas si la rupture d'un matériau dépend de certains états limites de contrainte, ou de certains états limites de déformation, ou si elle dépend des deux états à la fois), on pourra éclaircir maintes questions sur le comportement des ouvrages en béton si l'on mesure simultanément les contraintes et les déformations.

Or, il est possible d'imaginer une méthode de détermination des contraintes dans les solides, dans laquelle il n'est pas nécessaire de connaître le module d'élasticité avec précision. Nous avons appelé cette méthode, *la méthode des inclusions*.

Introduisons au point du solide où l'on veut déterminer les contraintes, une sphère, un disque ou un cylindre d'un matériau différent du matériau constituant le solide, et de module d'élasticité bien défini (métal, par exemple). Ceci doit être fait de façon à obtenir un parfait ajustement et une solidarité rigoureuse des surfaces en contact.

Dans le cas du béton, cette opération peut se faire facilement pendant le bétonnage.

Les points choisis pour faire ces inclusions doivent être des points où les contraintes ne varient pas dans une zone ayant trois fois la dimension de l'inclusion. En effet, la présence de l'inclusion trouble à son tour une zone du solide d'une épaisseur égale au diamètre de l'inclusion⁴⁾.

Si les constantes élastiques de l'inclusion et du solide sont égales, il est évident que les contraintes dans l'inclusion sont égales aux contraintes dans le point du solide qui la contient. Toutefois, s'il y a une variation du module d'élasticité du solide, les contraintes ne sont plus égales.

Au cas où il y a une égalité initiale des constantes élastiques, si le module d'élasticité du solide diminue, de moitié, par exemple, les contraintes dans l'inclusion peuvent augmenter de 20 à 40 %, comme on le verra (§ 5, § 7 et § 9).

Quand on craint des variations du module d'élasticité du solide, il n'est pas convenable d'utiliser des inclusions ayant le même module d'élasticité, puisque l'erreur dans la détermination des contraintes est encore très importante, bien qu'elle soit déjà inférieure à l'erreur sur le module d'élasticité.

Aux paragraphes 5, 7 et 9 on démontrera que quand le *module d'élasticité de l'inclusion est plus grand que celui du solide, une variation du module d'élasticité du solide a une influence d'autant plus petite sur les contraintes dans l'inclusion que le module d'élasticité de l'inclusion est plus grand.*

⁴⁾ GOODIER, "Concentration of stress around spherical and cylindrical inclusions and flaws", *J. App. Mech., Trans. A.S.M.E.*, 1933, vol. 55, p. 39.

K. SEZAWA and G. NISHIMURA, "Stresses under tension in a plate with a heterogeneous insertion", *Rep. Aeron. Res. Inst., Tokio Imp. Univ.*, Avril 1931, vol. 6, p. 25.

Mais, d'autre part, plus grand est le module d'élasticité de l'inclusion, plus petites y sont les contraintes et plus difficile est leur mesure.

Nous verrons que, pratiquement, on peut utiliser des inclusions ayant un module d'élasticité de 3 à 5 fois celui du solide.

Dans les paragraphes suivants nous allons faire la démonstration de ce que nous venons d'énoncer.

4. Théorie de la détermination des contraintes à l'aide d'une inclusion sphérique

Considérons un solide indéfini de module d'élasticité E_1 et de coefficient de Poisson ν_1 où l'on a placé une inclusion sphérique massive de module d'élasticité E_2 et de coefficient de Poisson ν_2 .

Supposons que le solide soit soumis à l'action d'une contrainte unidirectionnelle σ_{11} (Fig. 1).

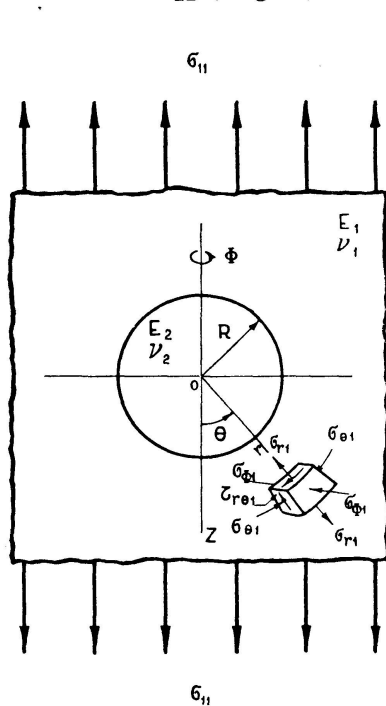


Fig. 1

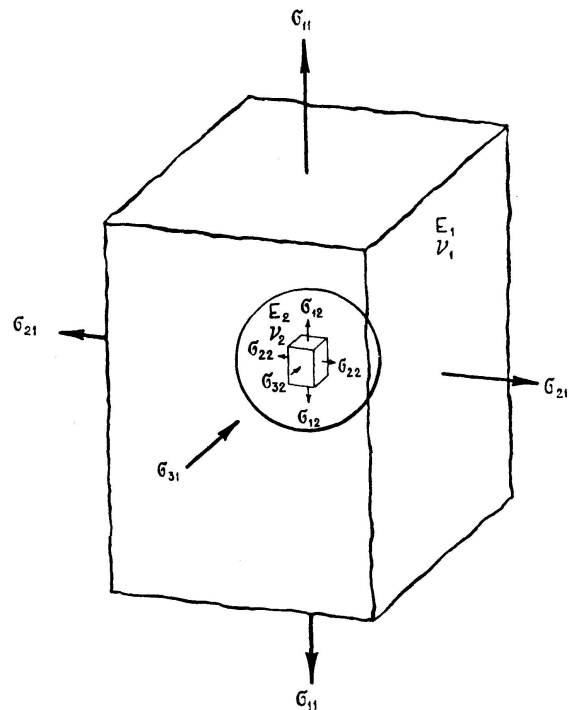


Fig. 2

Le problème de la distribution des contraintes dans le solide et dans l'inclusion a été résolu par plusieurs auteurs ⁵⁾.

Les contraintes dans le solide qui contient la sphère sont, en coordonnées polaires sphériques,

⁵⁾ B. F. MIDDLETON, „Distribution of stress in the vicinity of a spherical inclusion“, *Roy. Air. Estab., Tech. Note No. 9546*, Sept. 1945.

GOODIER, „Concentration of stress around spherical and cylindrical inclusions and flaws“, *J. App. Mech., Trans. A.S.M.E.*, 1933, vol. 55, p. 39.

K. SEZAWA and B. MIYAZAKI, „Spherical problems of elasticity solved in polar coordinates, with applications“, *J. Soc. Mech. Eng., Tokio*, 1928, vol. 31, p. 625.

$$\begin{aligned}
\sigma_{r1} &= \sigma_{11} \left[\cos^2 \Theta - \frac{2A}{r^3} (1 + \nu_1) \left(-1 + \frac{5 - \nu_1}{1 + \nu_1} \cos^2 \Theta \right) + \frac{B}{r^3} + \frac{12C}{r^5} (3 \cos^2 \Theta - 1) \right] \\
\sigma_{\theta 1} &= \sigma_{11} \left[\sin^2 \Theta - \frac{A}{r^3} (1 - 2\nu_1) (1 + \cos^2 \Theta) - \frac{B}{2r^3} + \frac{3C}{r^5} (3 - 7 \cos^2 \Theta) \right] \\
\sigma_{\phi 1} &= \sigma_{11} \left[-\frac{A}{r^3} (1 - 2\nu_1) (1 - 3 \cos^2 \Theta) - \frac{B}{2r^3} + \frac{3C}{r^5} (1 - 5 \cos^2 \Theta) \right] \\
\tau_{r\theta 1} &= \sigma_{11} \sin \Theta \cos \Theta \left[-1 - \frac{2A}{r^3} (1 + \nu_1) + \frac{24C}{r^5} \right],
\end{aligned} \tag{1}$$

Θ et r étant les coordonnées du point du solide où se produit l'état de contrainte σ_{r1} , $\sigma_{\theta 1}$, $\sigma_{\phi 1}$, et $\tau_{r\theta 1}$ (fig. 1).

Les contraintes dans l'inclusion sphérique sont:

$$\begin{aligned}
\sigma_{r2} &= \sigma_{11} (T \cos^2 \Theta + F) \\
\sigma_{\theta 2} &= \sigma_{11} (T \sin^2 \Theta + F) \\
\sigma_{\phi 2} &= \sigma_{11} F \\
\tau_{r\theta 2} &= -\sigma_{11} T \sin \Theta \cos \Theta.
\end{aligned} \tag{1'}$$

Les valeurs des constantes A , B , C , T et F , sont données par le système d'équations suivant,

$$\begin{aligned}
-\frac{2(1 + \nu_1)}{5E_1} \frac{A}{R^3} - \frac{1 + \nu_1}{2E_1} \frac{B}{R^3} + \frac{\nu_2}{E_2} T - \frac{1 - 2\nu_2}{E_2} F &= \frac{\nu_1}{E_1} \\
\frac{4(1 + \nu_1)}{E_1} \left(\frac{4}{5} - \nu_1 \right) \frac{A}{R^3} - \frac{1 + \nu_2}{E_2} T &= -\frac{1 + \nu_1}{E_1} \\
\left(-\frac{2}{5} + 2\nu_1 \right) \frac{A}{R^3} + \frac{B}{R^3} - F &= 0 \\
\left(\frac{14}{5} - 2\nu_1 \right) \frac{A}{R^3} + T &= 1 \\
A - \frac{5C}{R^2} &= 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

R étant le rayon de la sphère.

Ce système d'équations a été obtenu en partant des hypothèses qu'il est habituel de faire pour résoudre les problèmes d'élasticité dans les milieux hétérogènes: à la surface de contact de la sphère avec le solide, la contrainte normale à cette surface, σ_r , la contrainte tangentielle, $\tau_{r\theta}$, et les trois composantes du déplacement d'un point de cette surface de contact, u , v , et w , sont continues.

Supposons maintenant que le solide soit soumis à l'action de trois contraintes σ_{11} , σ_{21} et σ_{31} , normales entre elles (fig. 2).

Les contraintes dans l'inclusion peuvent être très aisément calculées par superposition.

Il est facile de voir que les contraintes principales dans l'inclusion sont parallèles aux contraintes σ_{11} , σ_{21} et σ_{31} , puisque dans ces directions $\tau_{r\theta 2} = 0$.

Les valeurs des contraintes principales dans la sphère sont alors:

$$\begin{aligned}\sigma_{12} &= (T + F) \sigma_{11} + F (\sigma_{21} + \sigma_{31}) \\ \sigma_{22} &= (T + F) \sigma_{21} + F (\sigma_{11} + \sigma_{31}) \\ \sigma_{32} &= (T + F) \sigma_{31} + F (\sigma_{11} + \sigma_{21}).\end{aligned}\quad (3)$$

Supposons maintenant que le solide indéfini considéré jusqu'ici se réduise à un élément de volume du solide où l'on veut déterminer les contraintes. Les dimensions de cet élément de volume sont considérées suffisamment grandes, non seulement pour que les contraintes qui y existeraient s'il n'y avait pas d'inclusion soient constantes, mais aussi pour que les valeurs de ces contraintes σ_{11} , σ_{21} , et σ_{31} ne soient pas affectées par la présence de l'inclusion.

Il est facile de constater qu'il suffit que cet élément de volume ait des dimensions d'environ trois fois le diamètre de la sphère (§ 3).

Les contraintes σ_{11} , σ_{21} et σ_{31} peuvent alors être considérées comme étant les contraintes principales que l'on veut déterminer au point considéré du solide.

Ayant déterminé expérimentalement les valeurs des contraintes principales dans la sphère, σ_{12} , σ_{22} , et σ_{32} , le système (3) permet donc de déterminer la valeur des contraintes cherchées σ_{11} , σ_{21} et σ_{31}

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= K_1 \sigma_{12} + K_2 (\sigma_{22} + \sigma_{32}) \\ \sigma_{21} &= K_1 \sigma_{22} + K_2 (\sigma_{12} + \sigma_{32}) \\ \sigma_{31} &= K_1 \sigma_{32} + K_2 (\sigma_{12} + \sigma_{22}).\end{aligned}\quad (4)$$

K_1 et K_2 sont deux constantes, *constantes de l'inclusion sphérique*, qui ont les valeurs:

$$\begin{aligned}K_1 &= \frac{T + 2F}{T(T + 3F)} \\ K_2 &= -\frac{F}{T(T + 3F)}.\end{aligned}\quad (4')$$

Nous allons voir maintenant quelles sont les propriétés des ces constantes de l'inclusion, constantes qui permettent d'établir la relation entre les contraintes cherchées et les contraintes mesurées.

5. Propriétés des constantes de l'inclusion sphérique

Les valeurs de ces constantes sont représentées fig. 3a et 3b en fonction du rapport entre les modules d'élasticité du solide, E_1 , et de l'inclusion, E_2 . On déduit de ces figures que:

- a) Les valeurs de K_1 et K_2 varient très peu pour des rapports $\frac{E_2}{E_1} \geq 4$ ou 5.
 b) L'influence des coefficients de Poisson sur les valeurs de K_1 est très petite.
 c) La valeur de K_2 est à peu près 0,1 de celle de K_1 , en valeur absolue.

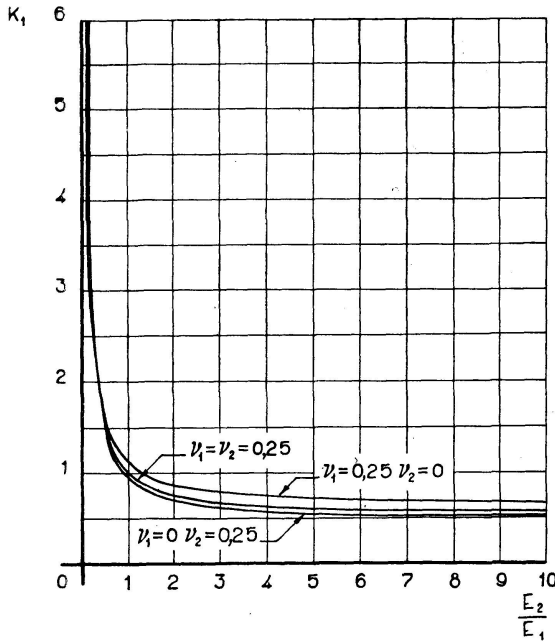


Fig. 3a

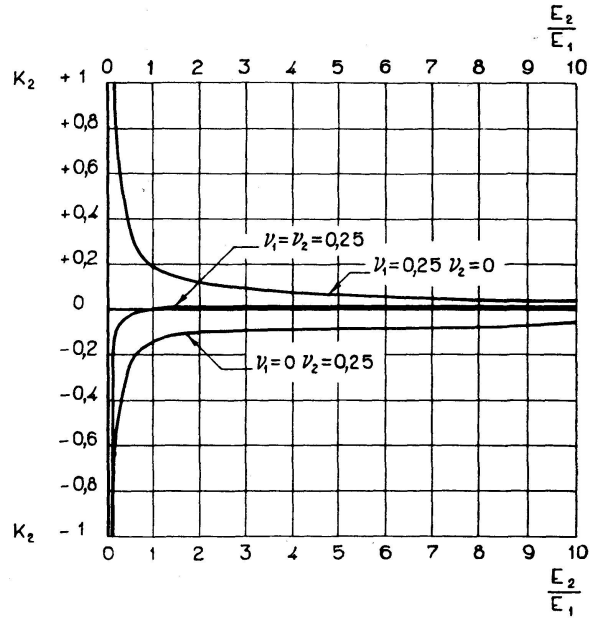


Fig. 3b

La première propriété est vraiment remarquable; c'est à elle que l'on doit l'existence de la méthode des inclusions.

Voyons en détail, comment varient les contraintes dans l'inclusion sphérique quand le rapport $\frac{E_2}{E_1}$ subit une certaine variation.

Supposons, pour simplifier, que les trois contraintes principales agissant dans l'élément de volume du solide soient égales entre elles,

$$\sigma_{11} = \sigma_{21} = \sigma_{31} = \sigma. \quad (a)$$

Les contraintes agissant dans l'inclusion sphérique (3) sont alors

$$\sigma_{12} = \sigma_{22} = \sigma_{32} = (T + 3F)\sigma, \quad (b)$$

et, en portant ces valeurs dans (4) on obtient:

$$\sigma_{11} = \sigma_{21} = \sigma_{31} = (T + 3F)(K_1 + 2K_2)\sigma. \quad (c)$$

Supposons que E_1 varie, prenant la valeur E_1' , les contraintes σ_{11} , σ_{21} et σ_{31} restant constantes et égales à σ .

Les contraintes dans l'inclusion sont alors:

$$\sigma'_{12} = \sigma'_{22} = \sigma'_{32} = (T' + 3F')\sigma, \quad (d)$$

T' et F' étant les valeurs de T et F (2) où l'on a remplacé E_1 par E_1' .

Quand on ignore cette variation du module d'élasticité, les contraintes au point considéré du solide, calculées à partir des contraintes déterminées expérimentalement dans la sphère, sont:

$$\sigma'_{11} = \sigma'_{21} = \sigma'_{31} = (T' + 3 F') (K_1 + 2 K_2) \sigma. \quad (e)$$

Or, par hypothèse les contraintes dans cet élément de volume n'ont pas changé, et alors l'erreur relative commise dans leur évaluation est

$$e_r = \frac{\sigma_{11} - \sigma'_{11}}{\sigma_{11}} = 1 - \frac{T' + 3 F'}{T + 3 F}. \quad (5)$$

Les valeurs de cette erreur sont représentées, fig. 4, dans l'hypothèse où le module d'élasticité du solide E_1 subit une diminution de $0,5 E_1$.

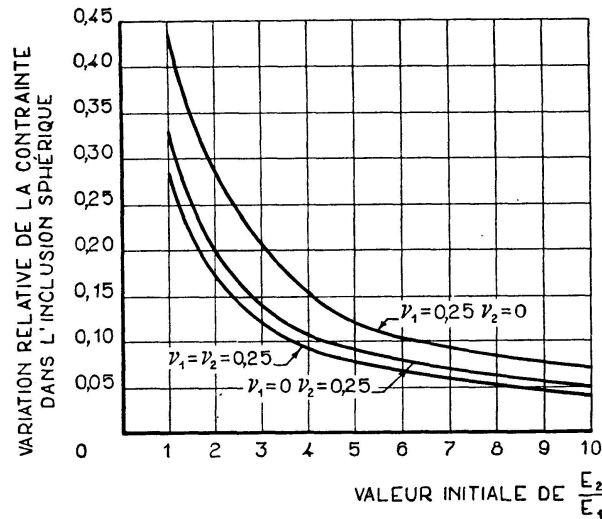


Fig. 4

Ces diagrammes montrent que pour des rapports initiaux $\frac{E_2}{E_1}$ de l'ordre de 4, les erreurs commises dans l'évaluation des contraintes, quand le module d'élasticité varie de moitié, sont de l'ordre de 0,10 excepté dans le cas limite où le coefficient de Poisson de l'inclusion est égal à zéro. Dans ce cas l'erreur est plus grande, elle est de l'ordre de 0,15. Ceci signifie que l'on doit éviter d'utiliser des inclusions ayant un coefficient de Poisson très bas par rapport à celui du solide.

6. Théorie de la détermination des contraintes à l'aide d'une inclusion circulaire

Dans les cas où l'une des trois contraintes principales est nulle, il n'est pas nécessaire d'utiliser une inclusion de forme sphérique. On peut alors utiliser une inclusion circulaire. C'est le cas, par exemple, pour la détermination des

contraintes à la surface d'un solide, et d'une manière générale, pour la détermination des contraintes dans les champs à deux dimensions.

Considérons une plaque indéfinie, avec une inclusion circulaire de rayon R (fig. 5), soumise à l'action d'une contrainte uniforme et unidirectionnelle, σ_{11} . Soit E_1 et ν_1 le module d'élasticité et le coefficient de Poisson du matériau de la plaque, et E_2 et ν_2 le module d'élasticité et le coefficient de Poisson du matériau de l'inclusion.

Le problème de la distribution des contraintes dans la plaque et dans l'inclusion a été résolu par Sezawa et Nishimura⁶⁾.

Les contraintes en un point de la plaque, de coordonnées polaires (r, Θ) , sont :

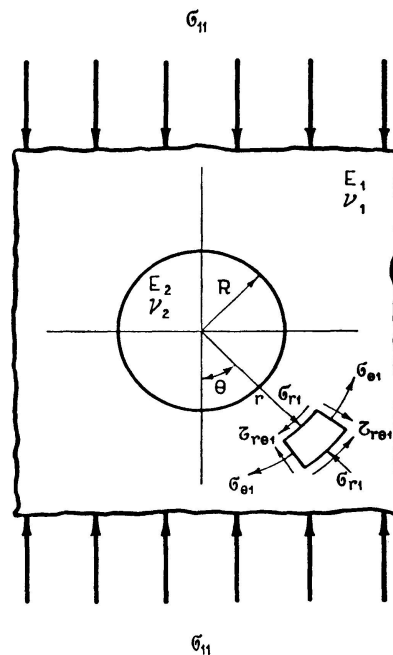


Fig. 5

$$\begin{aligned}\sigma_{r1} &= \frac{\sigma_{11}}{2} \left[1 + L \frac{R^2}{r^2} + \cos 2\Theta \left(1 + 2M \frac{R^2}{r^2} + N \frac{R^4}{r^4} \right) \right] \\ \sigma_{\theta1} &= \frac{\sigma_{11}}{2} \left[1 - L \frac{R^2}{r^2} - \cos 2\Theta \left(1 + N \frac{R^4}{r^4} \right) \right] \\ \tau_{r\theta1} &= - \frac{\sigma_{11}}{2} \sin 2\Theta \left(1 - M \frac{R^2}{r^2} - N \frac{R^4}{r^4} \right).\end{aligned}\quad (6)$$

Les contraintes en un point quelconque de l'inclusion sont:

$$\begin{aligned}\sigma_{r2} &= \frac{\sigma_{11}}{2} (D + H \cos 2\Theta) \\ \sigma_{\theta2} &= \frac{\sigma_{11}}{2} (D - H \cos 2\Theta) \\ \tau_{r\theta2} &= - \frac{\sigma_{11}}{2} H \sin 2\Theta.\end{aligned}\quad (6')$$

Les constantes L , M , N , D et H ont les valeurs suivantes:

$$\begin{aligned}L &= \frac{\mu_1 (\lambda_2 + \mu_2 - \lambda_1 - \mu_1)}{(\lambda_1 + \mu_1) (\lambda_2 + \mu_2 + \mu_1)} \\ M &= (\lambda_1 + \mu_1) \frac{\Delta_M}{\Delta} \\ N &= 6 \mu_1 \frac{\Delta_N}{\Delta}\end{aligned}\quad (7)$$

⁶⁾ K. SEZAWA and G. NISHIMURA, "Stresses under tension in a plate with a heterogeneous insertion", *Rep. Aeron. Res. Inst.*, Tokio Imp. Univ., Avril 1931, vol. 6, p. 25.

$$D = \frac{(\lambda_2 + \mu_2)(\lambda_1 + 2\mu_1)}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2 + \mu_1)}$$

$$H = 2\mu_2 \frac{\Delta_H}{\Delta}$$

où μ_1 et λ_1 sont les constantes de Lamé du matériau de la plaque

$$\mu_1 = \frac{E_1}{2(1 + \nu_1)}$$

$$\lambda_1 = \frac{\nu_1 E_1}{(1 + \nu_1)(1 - 2\nu_1)},$$

et μ_2 et λ_2 sont celles du matériau de l'inclusion.

Les valeurs de Δ , Δ_M , Δ_N et Δ_H sont les déterminants

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} -\frac{\lambda_1}{2\mu_1} - 1 & +1 & +\frac{\lambda_2}{6\mu_2} & +1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & +\frac{\lambda_2 + \mu_2}{6\mu_2} & +1 \\ +2(\lambda_1 + \mu_1) & -6\mu_1 & 0 & +2\mu_2 \\ -\lambda_1 - \mu_1 & +6\mu_1 & +\lambda_2 + \mu_2 & +2\mu_2 \end{vmatrix} \\ \Delta_M &= \begin{vmatrix} +1 & +\frac{\lambda_2}{6\mu_2} & +1 & +\frac{1}{2\mu_1} \\ -1 & +\frac{\lambda_2 + \mu_2}{6\mu_2} & +1 & +\frac{1}{2\mu_1} \\ -6\mu_1 & 0 & +2\mu_2 & +1 \\ +6\mu_1 & +\lambda_2 + \mu_2 & +2\mu_2 & +1 \end{vmatrix} \\ \Delta_N &= \begin{vmatrix} -\frac{\lambda_1}{2\mu_1} - 1 & +\frac{\lambda_2}{6\mu_2} & +1 & +\frac{1}{2\mu_1} \\ -\frac{1}{2} & +\frac{\lambda_2 + \mu_2}{6\mu_2} & +1 & +\frac{1}{2\mu_1} \\ +2(\lambda_1 + \mu_1) & 0 & +2\mu_2 & +1 \\ -\lambda_1 - \mu_1 & +\lambda_2 + \mu_2 & +2\mu_2 & +1 \end{vmatrix} \\ \Delta_H &= \begin{vmatrix} -\frac{\lambda_1}{2\mu_1} - 1 & +1 & +\frac{\lambda_2}{6\mu_2} & +\frac{1}{2\mu_1} \\ -\frac{1}{2} & -1 & +\frac{\lambda_2 + \mu_2}{6\mu_2} & +\frac{1}{2\mu_1} \\ +2(\lambda_1 + \mu_1) & -6\mu_1 & 0 & +1 \\ -\lambda_1 - \mu_1 & +6\mu_1 & +\lambda_2 + \mu_2 & +1 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (7')$$

Ces constantes ont été calculées avec les mêmes hypothèses que celles que l'on a admises à propos de l'inclusion sphérique, c'est à dire qu'on a supposé la continuité des contraintes σ_r et $\tau_{r\theta}$ et des déplacements u et v .

Les contraintes principales dans l'inclusion sont parallèles et perpendiculaires à la contrainte σ_{11} , comme il ressort clairement des expressions (6'), étant donné que $\tau_{r\theta 2} = 0$ pour $\Theta = 0$ et $\frac{\pi}{2}$.

Supposons maintenant que la plaque soit soumise à l'action de deux contraintes σ_{11} et σ_{21} normales entre elles (fig. 6). Les valeurs des contraintes principales dans le disque sont alors, en vertu du théorème de la superposition

$$\begin{aligned}\sigma_{12} &= \frac{\sigma_{11}}{2}(D + H) + \frac{\sigma_{21}}{2}(D - H) \\ \sigma_{22} &= \frac{\sigma_{11}}{2}(D - H) + \frac{\sigma_{21}}{2}(D + H).\end{aligned}\quad (8)$$

La perturbation des contraintes dans la plaque due à la présence de l'inclusion s'étend à une distance de son centre de trois fois le rayon du disque (§ 3). On peut donc considérer cette partie de la plaque entourant l'inclusion comme un élément d'aire du solide où l'on veut déterminer les contraintes. Cet élément d'aire est tel que s'il n'y avait pas d'inclusion les contraintes y seraient constantes. Alors, les contraintes σ_{11} et σ_{21} peuvent être considérées comme étant les *contraintes principales* que l'on veut déterminer. On les calcule très facilement en résolvant le système (8). En effet,

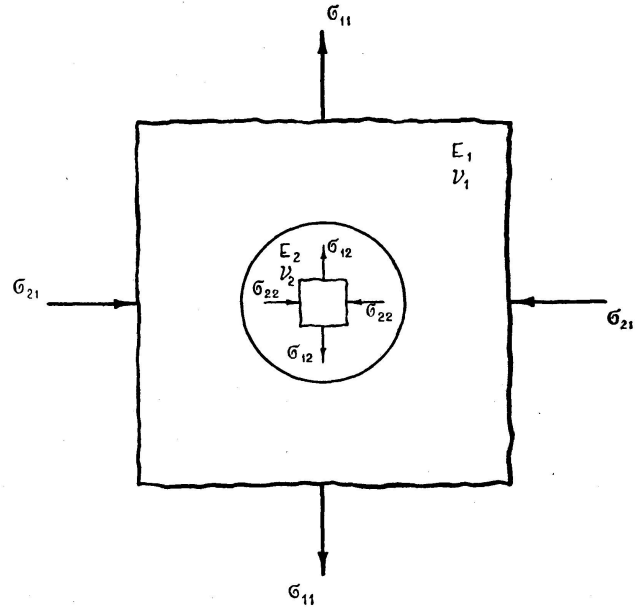


Fig. 6

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= K_1 \sigma_{12} + K_2 \sigma_{22} \\ \sigma_{21} &= K_1 \sigma_{22} + K_2 \sigma_{12},\end{aligned}\quad (9)$$

K_1 et K_2 étant les *constantes de l'inclusion circulaire*, qui ont les valeurs:

$$\begin{aligned}K_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{D} + \frac{1}{H} \right) \\ K_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{H} \right).\end{aligned}\quad (9')$$

Les expressions (9) montrent que, ayant déterminé expérimentalement les contraintes dans l'inclusion, σ_{12} et σ_{22} , on en déduit simplement les contraintes cherchées dans la plaque, σ_{11} et σ_{21} .

7. Propriétés des constantes de l'inclusion circulaire

Sur les fig. 7a et 7b sont représentées les valeurs de K_1 et K_2 en fonction du rapport $\frac{E_2}{E_1}$ entre le module d'élasticité de l'inclusion et celui de la plaque, et pour quelques valeurs des coefficients de Poisson. On déduit de ces courbes que les propriétés de ces constantes sont les mêmes que celles des constantes de l'inclusion sphérique (§ 5).

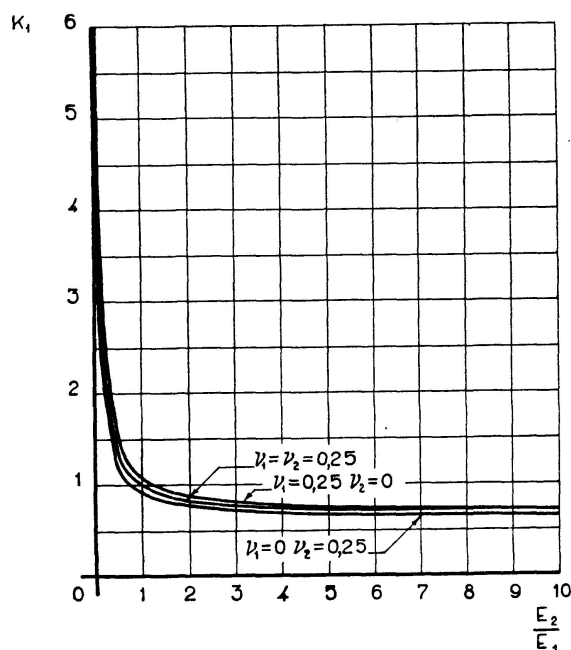


Fig. 7a

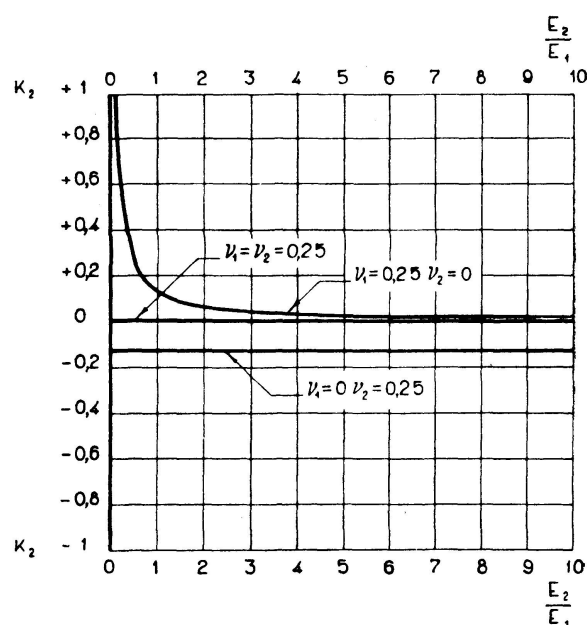


Fig. 7b

On en conclut aussi que K_1 et K_2 sont pratiquement constants pour les rapports $\frac{E_2}{E_1} \geq 4$, ce qui signifie que, dans ces cas, les contraintes développées dans l'inclusion sont pratiquement indépendantes du rapport entre les modules d'élasticité.

Dans une application expérimentale de cette méthode, la détermination des contraintes par la méthode du tensomètre photoélastique⁷⁾ — que dès maintenant on doit appeler plus correctement *méthode des inclusions photoélastiques*

⁷⁾ A. COUTINHO, "Détermination des contraintes dans le béton par la méthode du tensomètre photoélastique", *An. Inst. Tech. Bat. Tr. Pub.*, Série Essais et Mesures No. 4, Mai 1948, § 20 et suiv.

— on a étudié expérimentalement la variation de K_1 avec $\frac{E_2}{E_1}$. La concordance des résultats théoriques avec les résultats expérimentaux a été très satisfaisante.

On a aussi déterminé des valeurs des constantes de l'inclusion de l'ordre de grandeur de celles trouvées théoriquement. Cependant, l'accord n'a pas été parfait, pour des raisons qui ont été données, dans la publication citée⁷).

L'examen de l'erreur commise dans l'évaluation des contraintes σ_{11} et σ_{21} au moyen des expressions (9), quand il y a variation du module d'élasticité du solide, peut être fait de la même manière que pour le cas de la sphère (§ 5).

En effet, en supposant que

$$\sigma_{11} = \sigma_{21} = \sigma,$$

que le module d'élasticité initial est E_1 et que le module d'élasticité final est E_1' , l'erreur relative commise dans la détermination de σ_{11} ou σ_{21} est

$$e_r = 1 - \frac{D'}{D}. \quad (10)$$

D est la valeur, donné par (7) et (7'), correspondant à E_1 et D' celle correspondant à E_1' . Dans le cas où

$$E_1' = 0,5 E_1$$

les erreurs (10) sont portées fig. 8 en fonction du rapport initial $\frac{E_2}{E_1}$.

Ces erreurs sont inférieures à celles relevées dans le cas de l'inclusion sphérique.

Cette courbe montre aussi qu'il est convenable d'utiliser des inclusions ayant un coefficient de Poisson élevé, pour réduire l'influence de la variation du module d'élasticité sur la valeur de la constante de l'inclusion.

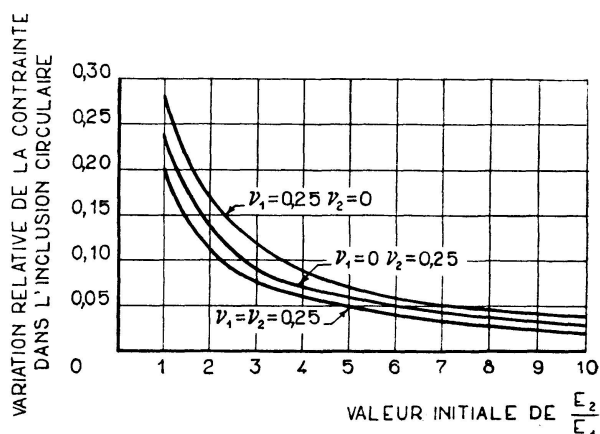


Fig. 8

8. Théorie de la détermination des contraintes à l'aide d'une inclusion cylindrique

Dans les champs de contrainte uniforme et unidirectionnelle où l'on connaît la direction de la contrainte, on peut utiliser, pour déterminer la valeur de cette contrainte, une inclusion cylindrique au lieu d'une inclusion circulaire ou sphérique.

On peut démontrer que dans le cas général d'un champ quelconque de contraintes il est possible de déterminer les trois contraintes principales en employant six inclusions cylindriques disposées en deux groupes, chaque groupe étant constitué par trois cylindres avec leurs axes triorthogonaux. Ces six cylindres doivent être suffisamment éloignés les uns des autres pour éviter qu'ils se troublent mutuellement.

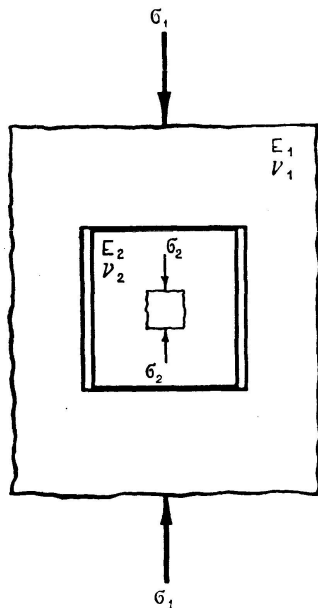


Fig. 9

Considérons un cylindre de diamètre sensiblement égal à sa hauteur, constitué d'un matériau de module d'élasticité E_2 et de coefficient de Poisson ν_2 . Supposons qu'il soit inclus dans un solide de constantes élastiques E_1 et ν_1 , et de manière telle que l'adhérence entre sa surface latérale et le solide soit évitée, la liaison du cylindre au solide ne se faisant que par ses bases (fig. 9).

Supposons que le solide soit soumis à l'action d'une contrainte uniforme σ_1 dirigée suivant la direction de l'axe du cylindre.

La solution rigoureuse du problème de la distribution de contraintes dans le solide et dans l'inclusion n'est pas connue. Néanmoins, Nils Hast⁸⁾ a suggéré une méthode approchée pour résoudre ce problème. Cette méthode conduit à des résultats qui ont été confirmés expérimentalement.

Si le module d'élasticité du cylindre est égal à celui du solide, la contrainte dans le cylindre, σ_2 , est égale à la contrainte agissant sur le solide σ_1 ⁹⁾.

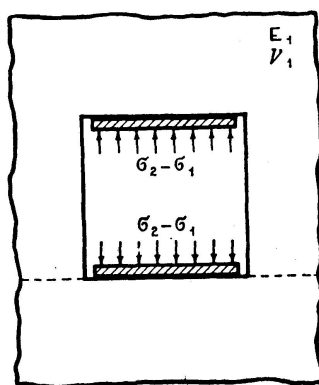


Fig. 10

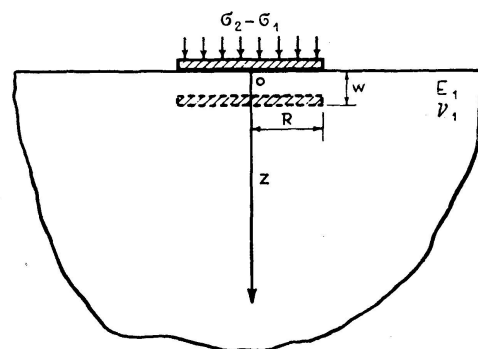


Fig. 11

⁸⁾ NILS HAST, "Measuring stresses and deformations in solid materials", *Ingeniors Venskaps Akademien*, Handlingar Nr. 178, Stockholm, 1943.

⁹⁾ En négligeant les concentrations de contrainte aux arêtes de la cavité, dues au manque de liaison entre les surfaces latérales du cylindre et de la cavité.

Si le module d'élasticité du cylindre est plus grand que celui du solide, il se produira une perturbation au voisinage de l'inclusion qui correspond à l'application de deux contraintes égales et opposées $\sigma_2 - \sigma_1$, à l'intérieur de la cavité qui contient le cylindre (fig. 10).

En coupant le solide par un plan normal à la direction de $\sigma_2 - \sigma_1$ et passant par une des sections où est appliquée cette contrainte (fig. 11), on peut calculer le déplacement de cette section dans la direction oz . En effet, il est alors possible d'appliquer les formules de Boussinesq relatives à un solide semi-indéfini chargé sur le plan limite par une charge uniformément distribuée sur une plaque circulaire (base du cylindre), avec une intensité par unité d'aire de $\sigma_2 - \sigma_1$.

Soit R le rayon de cette plaque; supposons encore qu'elle soit suffisamment rigide pour se déplacer sans se déformer.

Le déplacement de la plaque dans la direction de la force agissante est

$$w = \frac{1 - \nu_1^2}{2 E_1} (\sigma_2 - \sigma_1) \pi R. \quad (a)$$

D'une manière approximative, la variation de longueur de la cavité qui contient le cylindre est alors

$$w' = 2 w. \quad (b)$$

La variation de distance entre les deux bases du cylindre soumis à la contrainte σ_2 est:

$$w_2 = \frac{\sigma_2 l}{E_2}, \quad (c)$$

l étant la longueur du cylindre.

S'il n'y avait pas d'inclusion, la variation de longueur de la cavité serait ¹⁰⁾

$$w_1 = \frac{\sigma_1 l}{E_1}. \quad (d)$$

Pour que la continuité des surfaces en contact soit maintenue, on doit avoir

$$\frac{\sigma_2 l}{E_2} + \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} (\sigma_2 - \sigma_1) \pi R = \frac{\sigma_1 l}{E_1}. \quad (e)$$

Soit K la constante de l'inclusion cylindrique:

$$K = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}. \quad (11)$$

Les expressions (e) et (11) permettent d'écrire

$$K = \frac{(1 - \nu_1^2) \pi R E_2 + l E_1}{E_2 [(1 - \nu_1^2) \pi R + l]}. \quad (f)$$

¹⁰⁾ En négligeant, évidemment, les concentrations de contrainte.

Toutes les valeurs figurant dans cette formule sont bien définies, excepté w . Sa valeur est évidemment donnée par (a); mais vis-à-vis des hypothèses faites dans l'application de cette expression il est très douteux qu'elle donne la valeur réelle de w .

Nils Hast¹¹⁾ a déterminé expérimentalement la valeur de w et la valeur trouvée n'a pas été très différente de la valeur calculée.

En effet, dans le cas où

$$\begin{aligned} R &= 0,4 \text{ cm} \\ \nu_1 &= 0,20 \\ E_1 &\text{ de l'ordre de } 300\,000 \text{ kg/cm}^2, \end{aligned}$$

la valeur théorique de w est

$$w = \frac{0,603}{E_1} (\sigma_2 - \sigma_1).$$

La valeur expérimentale trouvée a été

$$w = \frac{0,678}{E_1} (\sigma_2 - \sigma_1).$$

Pour tenir compte de ce fait on peut alors écrire

$$K = \frac{\alpha (1 - \nu_1^2) \pi R E_2 + l E_1}{E_2 [\alpha (1 - \nu_1^2) \pi R + l]}, \quad (12)$$

où α est un coefficient expérimental s'appliquant à la formule (a) pour corriger le degré d'approximation de la formule théorique. Dans le cas présenté, $\alpha = 1,125$.

9. Propriétés de la constante de l'inclusion cylindrique

La figure 12 représente la variation de la constante K avec le rapport $\frac{E_2}{E_1}$, dans le cas où

$$\begin{aligned} \alpha &= 1,125 \\ \nu_1 &= 0,20 \\ R &= 0,4 \text{ cm} \\ l &= 1 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Les valeurs de K , données par l'expression (12), ont été confirmées expérimentalement par Nils Hast¹¹⁾ pour des valeurs de $\frac{E_2}{E_1}$ comprises entre 0,60 et 2,52, E_1 étant de l'ordre de 300 000 kg/cm².

L'erreur relative commise dans le calcul de σ_1 quand le module d'élasticité du solide E_1 prend la valeur E_1' est

$$e_r = 1 - \frac{K'}{K}, \quad (13)$$

¹¹⁾ NILS HAST, *Ouv. cit.*, p. 96.

où K est la valeur de la constante correspondant au rapport initial des modules d'élasticité $\frac{E_2}{E_1}$ et K' celle correspondant au rapport final $\frac{E_2}{E_1'}$.

Dans le cas où E_1 subit une variation de $0,5 E_1$, les erreurs e_r sont représentées fig. 13.

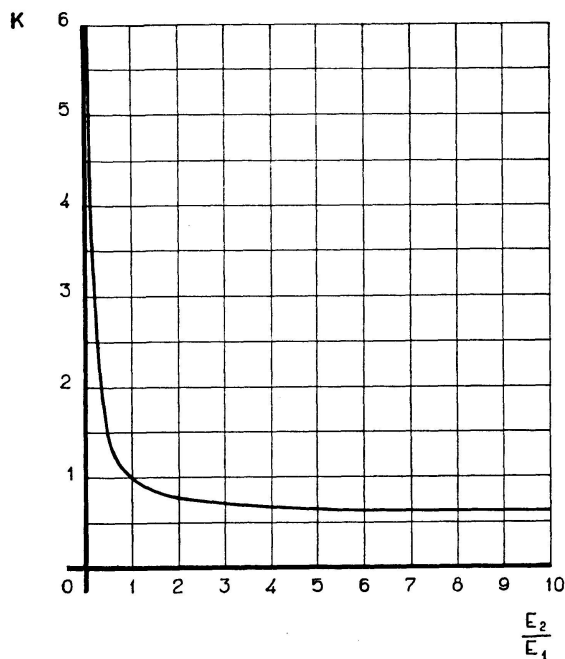


Fig. 12

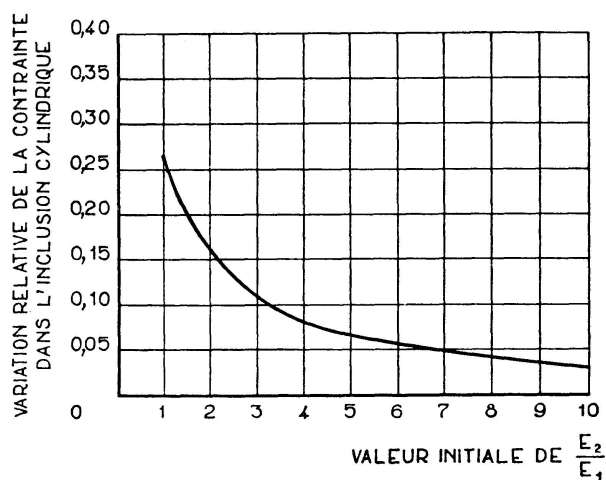


Fig. 13

Comme on le voit, ni la valeur de ces erreurs, ni celle des constantes (fig. 12) ne sont très différentes de celles obtenues pour les inclusions sphériques et circulaires.

10. Possibilités de réalisation expérimentale de la méthode des inclusions

Soient

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= 1 \text{ kg/cm}^2 \\ \sigma_{21} &= \sigma_{31} = 0\end{aligned}$$

les contraintes principales qui agissent dans le solide. Les contraintes principales dans la sphère sont données par (3):

$$\begin{aligned}\sigma_{12} &= T + F \\ \sigma_{22} &= \sigma_{32} = F\end{aligned}$$

et la déformation principale ϵ_{12} est

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{E_2} \left[\sigma_{12} - \nu_2 (\sigma_{22} + \sigma_{32}) \right] = \frac{1}{E_2} [T + F (1 - 2\nu_2)] . \quad (14)$$

Supposons que

$$\begin{aligned} E_1 &= 200\,000 \text{ kg/cm}^2 \\ E_2 &= 1\,000\,000 \text{ kg/cm}^2 \\ \nu_1 &= \nu_2 = 0,25. \end{aligned}$$

L'expression (14) donne

$$\epsilon_{12} = 1,67 \cdot 10^{-6}.$$

Dans le cas de l'inclusion circulaire, on obtiendrait

$$\epsilon_{12} = 1,36 \cdot 10^{-6},$$

et dans le cas de l'inclusion cylindrique

$$\epsilon_{12} = 1,65 \cdot 10^{-6},$$

au cas où $\alpha = 1,125$.

S'il n'y avait pas d'inclusion, la déformation principale dans le solide, ϵ_{11} , correspondant aux contraintes $\sigma_{11} = 1 \text{ kg/cm}^2$ et $\sigma_{21} = \sigma_{31} = 0$, serait

$$\epsilon_{11} = 5 \cdot 10^{-6}.$$

Donc, la méthode des inclusions conduit à une détermination d'une déformation 3 à 4 fois plus petite que la méthode classique de mesure directe des déformations.

Or, la sensibilité des extensomètres dont on dispose dans la pratique se situe entre 10^{-6} et 10^{-7} .

Comme on vient de le voir, à une contrainte de 1 kg/cm^2 dans un solide de module d'élasticité $200\,000 \text{ kg/cm}^2$, correspondent des déformations de l'ordre de $1,6 \cdot 10^{-6}$ dans l'inclusion.

Eu égard aux erreurs de la détermination expérimentale des constantes de l'inclusion, aux erreurs dues aux contraintes initiales dans le béton (dans le cas de l'application à ce matériau), aux différences des coefficients de dilatation thermique des deux matériaux, etc., on peut admettre que l'on détermine des contraintes dans un matériau ayant un module d'élasticité $E_1 = 200\,000 \text{ kg/cm}^2$ par la méthode des inclusions, avec une précision de quelques kg/cm^2 .

En effet, en utilisant la méthode du tensomètre photoélastique, on a obtenu une précision de 2 à 3 kg/cm^2 , dans la détermination des contraintes dans le béton¹²⁾.

Pour l'observation des ouvrages, on doit choisir un système de mesure des déformations dans l'inclusion consistant en des *témoins fixes à l'inclusion* et en un *appareillage de mesure amovible*, servant à mesurer la variation de distance des témoins.

Les extensomètres les plus courants qu'il est possible d'employer dans ce cas sont:

¹²⁾ A. COUTINHO, *Ouv. cit.*, p. 94.

les extensomètres acoustiques	sensibilité $1 \cdot 10^{-6}$
les extensomètres à résistance électrique	sensibilité 5 à $1 \cdot 10^{-6}$
les extensomètres inductifs	sensibilité $0,1 \cdot 10^{-6}$
les extensomètres à magnétostriction	sensibilité $0,2 \cdot 10^{-6}$
les extensomètres à capacité	sensibilité $0,4 \cdot 10^{-6}$.

En ce qui concerne le choix du matériau de l'inclusion, il n'y a pas de difficultés vu que l'on dispose de métaux et d'alliages ayant des modules d'élasticité variant de 700 000 à 2 000 000 kg/cm², donc, convenables pour l'utilisation dans le béton.

D'ailleurs on peut remarquer que la méthode n'exige pas que l'inclusion soit massive; on pourra employer une inclusion creuse. Dans ce cas, l'épaisseur des parois doit donner une déformabilité du corps équivalente à celle d'une inclusion massive d'un matériau ayant un module d'élasticité plus bas.

Par exemple, dans le cas d'un cylindre creux, on peut définir son module d'élasticité de la façon suivante¹³⁾:

Soient: r_e , le rayon extérieur
 r_i , le rayon intérieur
 l , la longueur
 e , l'épaisseur.

Supposons que les bases du cylindre soient constituées par deux plaques continues et rigides, de rayon r_e .

La déformation unitaire de ce cylindre résultant de la force axiale P est

$$\epsilon = \frac{1}{E_2} \frac{P}{\pi(r_e^2 - r_i^2)}, \quad (\text{a})$$

E_2 étant le module d'élasticité du matériau qui compose le cylindre. Le module d'élasticité de l'inclusion est alors

$$E_i = \frac{P}{\frac{\pi r_e^2}{\epsilon}} = E_2 \left(1 - \frac{r_i^2}{r_e^2} \right). \quad (15)$$

Conclusions.

On vient de voir que, pour déterminer les contraintes en un point d'un solide par la méthode des inclusions, on mesure les déformations dans une inclusion. Ces déformations ne sont plus proportionnelles au module d'élasticité du solide et par conséquent la valeur des contraintes n'est pas affectée par une erreur égale à l'erreur relative sur le module d'élasticité du solide.

En effet, aux paragraphes 5, 7 et 9, on a démontré que, dans le cas où le module d'élasticité de l'inclusion E_2 est quatre fois celui du solide E_1 , une

¹³⁾ Ce concept est dû à NILS HAST, *Ouv. cit.*, p. 96.

erreur de 0,50 sur E_1 donne une erreur d'environ 0,10 sur la valeur des contraintes.

La méthode des inclusions ne dispense ni de la connaissance du module d'élasticité du solide ni de la connaissance de l'ordre de grandeur de sa variation. D'une manière générale, la connaissance de ces grandeurs permet, soit de fixer la valeur de E_2 , de telle façon que l'on obtienne une erreur relative, e_r , négligeable, soit de calculer la variation des constantes de l'inclusion et de corriger la valeur des contraintes déterminées.

Les contraintes principales dans l'inclusion sphérique peuvent être déterminées par la mesure de six déformations en six directions différentes, à l'aide d'extensomètres placés à l'intérieur de la sphère.

Dans l'inclusion circulaire les contraintes principales peuvent être déterminées par la méthode bien connue de la rosette dans laquelle on mesure trois déformations en trois directions différentes.

Si l'on dispose six inclusions cylindriques en deux groupes de trois avec leurs axes triorthogonaux entre eux, il est aussi possible de déterminer les trois contraintes principales, comme nous l'avons dit (§ 8).

Résumé

Nous avons commencé par passer en revue les principales difficultés que l'on rencontre pour connaître avec précision le module d'élasticité du béton.

Quand on fait des essais sur les ouvrages en béton, ces difficultés empêchent de déterminer les contraintes de manière précise.

Pour éviter cette imprécision nous proposons une nouvelle méthode de détermination des contraintes dans les solides où le module d'élasticité n'est pas bien défini: *la méthode des inclusions*. Par cette méthode, les contraintes sont déterminées dans une inclusion d'un matériau de constantes élastiques bien définies (métal, par exemple) introduite au point du solide où l'on veut connaître les contraintes. Le module d'élasticité du matériau de l'inclusion doit être de trois à quatre fois, ou encore davantage, celui du matériau constituant le solide.

On peut utiliser des inclusions sphériques, circulaires ou cylindriques dans les champs de contrainte à trois, deux ou une dimension.

On étudie les contraintes développées soit au voisinage de l'inclusion soit dans l'inclusion elle-même. Cette étude permet de conclure, par exemple, qu'il est possible de déterminer les contraintes par la méthode des inclusions avec une erreur de 0,10 quand l'erreur dont est entaché le module d'élasticité est de 0,50.

Enfin on envisage les possibilités d'application expérimentale de cette méthode.

Zusammenfassung

In der Einführung werden die Hauptschwierigkeiten aufgezählt, die sich bei der Bestimmung des Elastizitätsmoduls von Beton ergeben.

Bei Versuchen an Betonbauwerken lassen eben diese Schwierigkeiten keine genaue Bestimmung der Spannungen zu.

Zur Verhütung der Ungenauigkeit wird für die Spannungsbestimmung in Körpern, für die der Elastizitätsmodul nicht genau feststeht, eine neue Methode vorgeschlagen, die die Methode der Einschlüsse genannt wird. Dabei werden die Spannungen in einem Einschluß aus einem Material mit konstanten elastischen Eigenschaften (z. B. Metall) bestimmt. Dieser Einschluß wird gerade an der Stelle eingeführt, an der man die Spannung kennenlernen will. Der Elastizitätsmodul des Einschlußmaterials muß mindestens drei- bis viermal so groß sein wie der des Materials, das den Körper bildet.

Man kann sphärische, kreisförmige oder zylindrische Einschlüsse in den Spannungsfeldern mit drei, zwei oder einer Dimension verwenden.

Die bestehenden Spannungen werden entweder in der Umgebung oder im Einschluß selbst untersucht. Diese Untersuchung gestattet z. B. die Schlußfolgerung, daß es möglich ist, die Spannungen durch die Einschlußmethode mit einem Fehler von 0,10 zu bestimmen, während der Fehler, der dem Elastizitätsmodul anhaftet, 0,50 beträgt.

Schließlich wird noch auf die Anwendungsmöglichkeiten dieses Verfahrens eingegangen.

Summary

The difficulties of knowing the exact modulus of elasticity of concrete are presented. It is due to these difficulties that it is not possible, in testing concrete structures, to obtain an exact knowledge of the stresses.

In order to avoid this inaccuracy the author proposes a new method — *the inclusion method* — for determining stresses in solids whose moduli of elasticity are not well known. In this method an inclusion of a material with well-defined elastic constants (a metal, for instance) is inserted at the point where a knowledge of stresses is desired. The modulus of elasticity of the material of the inclusion must be 3, 4 or more times greater than that of the solid.

Spherical, circular or cylindrical inclusions can be used in three, two or one-dimensional fields of stresses.

The stresses developed both in the vicinity of these inclusions and in the inclusions themselves are discussed.

From this discussion one can conclude that it is possible to determine stresses by the inclusion method, with an accuracy of 0,10 when the error with which the modulus of elasticity of the solid is known is 0,50.

The practical possibilities of the application of this method are discussed.

Leere Seite
Blank page
Page vide