

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

**Band:** 8 (1947)

**Artikel:** Sur la stabilité des plaques rectangulaires renforcées par des raidisseurs et sollicitées à la flexion et au cisaillement

**Autor:** Milosavljevitch, Miodrag

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-8889>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# **SUR LA STABILITÉ DES PLAQUES RECTANGULAIRES RENFORCÉES PAR DES RAIDISSEURS ET SOLICITÉES À LA FLEXION ET AU CISAILLEMENT**

**ÜBER DIE STABILITÄT RECHTECKIGER AUSGESTEIFTER PLATTEN  
UNTER BIEGUNGS- UND SCHUBBEANSPRUCHUNG**

**ON THE STABILITY OF RECTANGULAR SLABS REINFORCED BY  
STIFFENERS AND SUBJECTED TO BENDING AND SHEARING**

MIODRAG MILOSAVLJEVITCH, Ingénieur, Belgrade.

La contrainte critique au flambage d'une plaque mince, telle que l'âme des poutres composées, peut être augmentée sensiblement par une disposition convenable des raidisseurs transversaux et longitudinaux, la position ainsi que la rigidité de ces raidisseurs ayant une grande influence sur sa valeur.

Le problème de la stabilité des plaques rectangulaires minces renforcées par des raidisseurs, que de nombreux auteurs ont traité entre les deux guerres, n'a pas trouvé encore une solution satisfaisante dans le cas de poutres composées pleines de grande hauteur.

C'est le professeur S. TIMOSHENKO qui le premier en 1921<sup>1)</sup> résolut le problème dans le cas d'une plaque rectangulaire renforcée par un nombre de raidisseurs transversaux ou longitudinaux de 1 à 3, et uniformément comprimée ou sollicitée au cisaillement sur ses bords, en se basant sur le critère de l'énergie.

H. FRÖHLICH a donné en 1937<sup>2)</sup> une solution du problème dans le cas particulier des plaques renforcées par des raidisseurs croisés et sollicitées à la compression uniformément répartie. Cette solution de H. FRÖHLICH est, également, basée sur le critère de l'énergie.

Le présent article donne une solution de ce problème dans le cas d'une plaque rectangulaire, renforcée par des raidisseurs longitudinaux et transversaux, sollicitée simultanément à la flexion composée et au cisaillement; cette solution étant basée sur l'étude de l'équation différentielle de la surface élastique de la plaque, s'applique aux cas général.

Comme application, on traite une plaque munie de raidisseurs suivant des considérations pratiques, sollicitée dans un cas à la flexion pure et dans l'autre cas simultanément à la flexion et au cisaillement, en fournissant des tables de valeurs des contraintes critiques en fonction de la rigidité des raidisseurs.

**I. Plaque rectangulaire renforcée par deux raidisseurs transversaux et un raidisseur longitudinal, sol-**

<sup>1)</sup> TIMOSHENKO, S.: Über die Stabilität versteifter Platten. Eisenbau 1921, S. 147.

<sup>2)</sup> Dr. Ing. FRÖHLICH: Stabilität der gleichmäßig gedrückten Rechteckplatten mit Steifenkreuz. Bauingenieur 1937, S. 673.

sollicitée dans son plan par une charge linéairement variable  $p_y$  et par des efforts de cisaillement  $T$ . Relation entre les contraintes critiques et la rigidité des raidisseurs.

La plaque rectangulaire dont les côtés  $a$  et  $b$  sont dans le rapport  $\alpha = \frac{a}{b}$  repose sur ses quatre bords sans encastrement. Dans son plan, elle est sollicitée par une charge linéairement variable  $p_y = p_0 \left(1 - \varphi \cdot \frac{y}{b}\right)$ , sur les bords  $x = 0$  et  $x = a$  et par des efforts de cisaillement  $T$  sur son contour. La plaque est renforcée par deux raidisseurs transversaux de rigidité  $E I_b$  placés aux distances  $x = c_1$  et  $x = c_2$  et par un raidisseur longitudinal de rigidité  $E I_a$  placé à la distance  $y = h$  (voir fig. 1). La liaison entre les raidisseurs

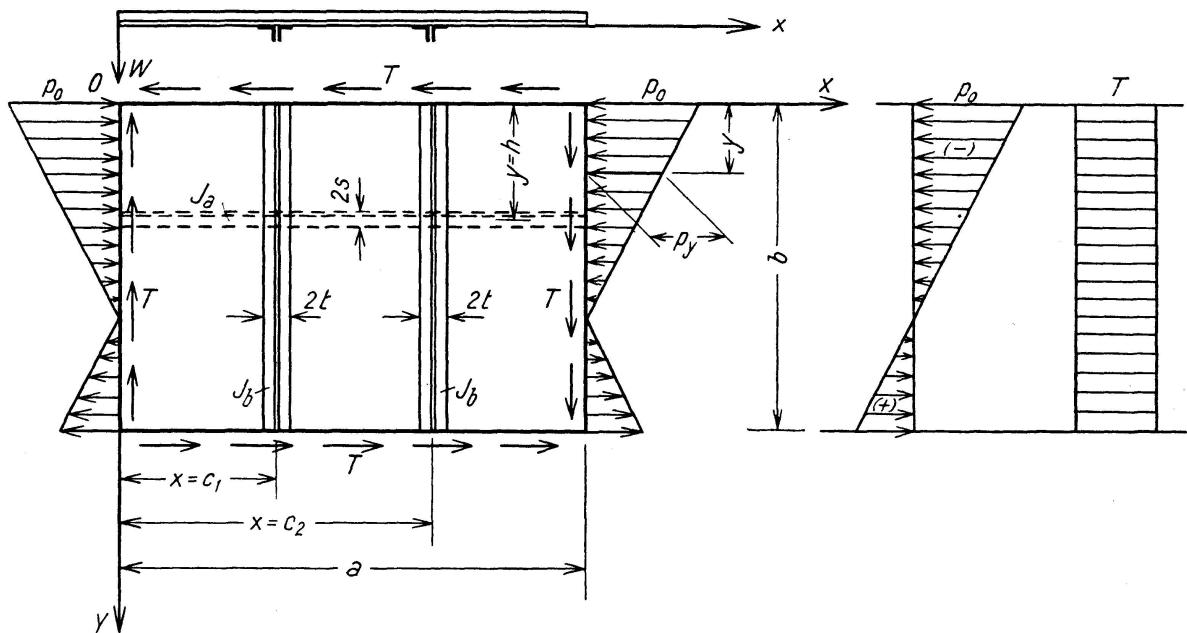


Fig. 1.

et la plaque est assurée par rivetage ou soudage de façon que les raidisseurs participent aux déformations de la plaque lors du flambage. Dans cette étude, on fera les suppositions suivantes:

1. Le matériel constituant la plaque est homogène, isotrope et se soumet sans limite à la loi de HOOKE.
2. Le raidisseur longitudinal ne participe pas à la résistance de la plaque à la flexion.
3. La rigidité à la torsion des raidisseurs n'est pas introduite dans le calcul des contraintes critiques au flambage.

L'équation de la surface flambée peut être représentée sous forme d'une série trigonométrique double:

$$w = \sum_m \sum_n A_{mn} \sin \frac{m \bar{u} x}{a} \sin \frac{n \bar{u} y}{b} \quad (1)$$

satisfaisant aux conditions suivantes sur le contour de la plaque:

1. Déformation de la plaque  $w = 0$  pour  $x = 0$ ,  $x = a$  et  $y = 0$ ,  $y = b$ .
2. Moments fléchissants  $M_y$  et  $M_x$  nuls pour  $x = 0$ ,  $x = a$ ,  $y = 0$  et  $y = b$

$$M_y = D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{\substack{x=0 \\ x=a}} = 0$$

$$M_x = D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{\substack{y=0 \\ y=b}} = 0$$

Soient  $q_a$ ,  $q_{b_1}$ ,  $q_{b_2}$  les efforts par unité de surface transmis par les raidisseurs à la plaque et réciproquement lors du flambage (fig. 2).

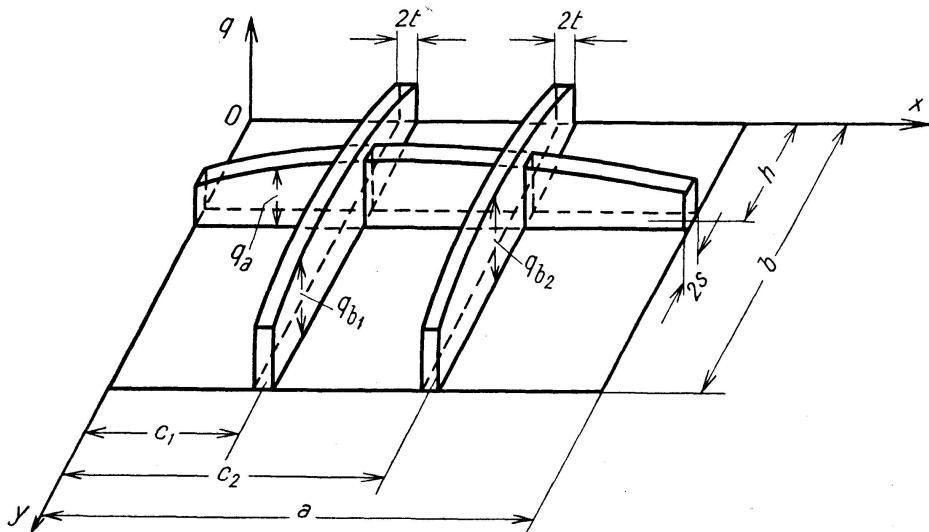


Fig. 2.

Soit  $J_a$  le moment d'inertie du raidisseur longitudinal et  $2s$  sa largeur,  $J_b$  celui d'un raidisseur transversal dont la largeur est  $2t$  (voir fig. 1).

La plaque et le raidisseur se déformant de la même manière lors du flambage, il résulte que l'équation de la ligne élastique des raidisseurs est définie par l'équation différentielle suivante:

$$q_a \cdot 2s = EJ_a \frac{d^4(w)_{y=h}}{dx^4} = EJ_a \sum_m \sum_n A_{mn} \left( \frac{m \bar{u}}{a} \right)^4 \sin \frac{m \bar{u} x}{a} \sin \frac{n \bar{u} h}{b}. \quad (2)$$

$$q_{b_1} \cdot 2t = EJ_b \frac{d^4(w)_{x=c_1}}{dy^4} = EJ_b \sum_m \sum_n A_{mn} \left( \frac{n \bar{u}}{b} \right)^4 \sin \frac{m \bar{u} c_1}{a} \sin \frac{n \bar{u} y}{b}. \quad (3)$$

$$q_{b_2} \cdot 2t = EJ_b \frac{d^4(w)_{x=c_2}}{dy^4} = EJ_b \sum_m \sum_n A_{mn} \left( \frac{n \bar{u}}{b} \right)^4 \sin \frac{m \bar{u} c_2}{a} \sin \frac{n \bar{u} y}{b}. \quad (4)$$

La charge transmise par les raidisseurs à la plaque lors du flambage peut être également représentée par une série double trigonométrique:

$$q = \sum_m \sum_n C_{mn} \sin \frac{m \bar{u} x}{a} \sin \frac{n \bar{u} y}{b}. \quad (5)$$

Les valeurs inconnues des coefficients  $C_{mn}$  de la série de FOURIER seront déterminées par le procédé connu de multiplication de l'équation (5) par le facteur  $\sin \frac{i \bar{u} x}{a} \sin \frac{j \bar{u} y}{b}$  et par intégration en  $x$  et en  $y$  entre les limites

$x = 0$ ,  $x = a$  et  $y = 0$ ,  $y = b$ , en rappelant que lorsque  $s$  et  $t$  tendent vers 0, les expressions  $\sin \frac{i \bar{u} t}{a}$  et  $\sin \frac{j \bar{u} s}{b}$  sont respectivement équivalentes à  $\frac{i \bar{u} t}{a}$  et  $\frac{j \bar{u} s}{b}$ .

Il résulte

$$C_{ij} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q \sin \frac{i \bar{u} x}{a} \sin \frac{j \bar{u} y}{b} dx dy = \frac{2 E J_a \bar{u}^4 i^4}{a^4 b} \sin \frac{j \bar{u} h}{b} \sum_n A_{in} \sin \frac{n \bar{u} h}{b} + \\ + \frac{2 E J_b \bar{u}^4 j^4}{a b^4} \sin \frac{i \bar{u} c_1}{a} \sum_m A_{mj} \sin \frac{m \bar{u} c_1}{a} + \frac{2 E J_b \bar{u}^4 j^4}{a b^4} \sin \frac{i \bar{u} c_2}{a} \sum_m A_{mj} \sin \frac{m \bar{u} c_2}{a} \quad (5a)$$

$i$ ,  $j$ ,  $m$  et  $n$  étant des nombres entiers quelconques peuvent être échangés mutuellement, ce qui mène à écrire suivant l'équation (5) l'expression de la charge de la façon suivante:

$$q = \frac{2 E J_b \bar{u}^4}{a b^4} \sum_m \sum_n \sum_i A_{in} n^4 \sin \frac{m \bar{u} c_1}{a} \sin \frac{i \bar{u} c_1}{a} \sin \frac{m \bar{u} x}{a} \sin \frac{n \bar{u} y}{b} + \\ + \frac{2 E J_b \bar{u}^4}{a b^4} \sum_m \sum_n \sum_i A_{in} n^4 \sin \frac{m \bar{u} c_2}{a} \sin \frac{i \bar{u} c_2}{a} \sin \frac{m \bar{u} x}{a} \sin \frac{n \bar{u} y}{b} + \\ + \frac{2 E J_a \bar{u}^4}{a^4 b} \sum_m \sum_n \sum_j A_{mj} m^4 \sin \frac{n \bar{u} h}{b} \sin \frac{j \bar{u} h}{b} \sin \frac{m \bar{u} x}{a} \sin \frac{n \bar{u} y}{b} \quad (6)$$

Afin de déterminer la relation entre les contraintes critiques au flambage et la rigidité des raidisseurs, nous utiliserons l'équation différentielle de la surface élastique, qui d'après la théorie de l'élasticité<sup>3)</sup>, a l'expression suivante:

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = -q - p_0 \left( 1 - \varphi \frac{y}{b} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 T \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (7)$$

où l'on a:

$$D = \frac{E \delta^3}{12(1-\mu^2)} = \text{rigidité de la plaque dont l'épaisseur est } \delta;$$

$q$  = charge unitaire de la plaque normalement à son plan;

$$p_y = p_0 \left( 1 - \varphi \frac{y}{b} \right) = \text{charge linéairement variable dans le plan de la plaque} \quad (\text{voir fig. 1});$$

$T$  = effort de cisaillement dans le plan de la plaque s'exerçant sur son contour;

$w$  = déformation de la plaque par flambage en un point  $(x, y)$ .

En substituant à  $w$  dans l'équation différentielle (7) son expression donnée par l'équation (1) et en la multipliant par  $\sin \frac{k \bar{u} x}{a} \sin \frac{r \bar{u} y}{b}$ , on obtient une expression qui, après intégration en  $x$  et en  $y$  et les limites étant respectivement 0 et  $a$ , 0 et  $b$ , nous donne une relation générale entre les contraintes critiques et les rigidités des raidisseurs (fig. 1).

Les nombres entiers  $m$ ,  $n$  et  $k$ ,  $r$  pouvant être permutés, on obtient la forme suivante pour l'équation (7):

<sup>3)</sup> TIMOSHENKO, S.: Theory of Elastic Stability, 1936.

$$\begin{aligned}
& A_{mn}(m^2 + n^2 \alpha^2)^2 + \frac{2EJ_b}{D \cdot b} \alpha^3 n^4 \sin \frac{m \bar{u} c_1}{a} \sum_i A_{in} \sin \frac{i \bar{u} c_1}{a} + \\
& + \frac{2EJ_b}{D \cdot b} \alpha^3 n^4 \sin \frac{m \bar{u} c_2}{a} \sum_i A_{in} \sin \frac{i \bar{u} c_2}{a} + \frac{2EJ_a}{D \cdot b} m^4 \sin \frac{n \bar{u} h}{b} \sum_j A_{mj} \sin \frac{j \bar{u} h}{b} = \\
& = \frac{p_0}{D} \left( \frac{ma}{\bar{u}} \right)^2 \left[ A_{mn} \left( 1 - \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{8\varphi}{\bar{u}^2} \sum_r A_{mr} \frac{rn}{(r^2 - n^2)^2} \right] + \frac{32a^2 T}{D \bar{u}^4} \alpha \sum_k \sum_r A_{kr} \frac{k r m n}{(m^2 - k^2)(n^2 - r^2)} \quad (8) \\
& \text{pour } \{r \pm n\} \text{ impairs} \quad \frac{k+m}{r \pm n} \text{ impairs}
\end{aligned}$$

Pour simplifier les expressions, posons

$$\frac{2EJ_b}{D \cdot b} = \beta; \quad \frac{2EJ_a}{D \cdot b} = \gamma$$

et écrivons les efforts  $p_0$  et  $T$  de la façon suivante:

$$p_0 = \delta \sigma_k, \quad T = \delta \tau_k$$

avec

$\sigma_k$  = contrainte critique de compression lors du flambage.

$\tau_k$  = » » » cisaillement » » » .

Prenons pour coefficients de gondolement  $k_1 = \frac{\sigma_k}{\sigma_0}$ ,  $k_2 = \frac{\tau_k}{\sigma_0}$  les rapports des contraintes critiques  $\sigma_k$  et  $\tau_k$  à la grandeur de référence  $\sigma_0 = \frac{D \bar{u}^2}{b^2 \delta}$ .

Il résulte de ce qui précède que l'équation (8) prend la forme

$$\begin{aligned}
& A_{mn}(m^2 + n^2 \alpha^2)^2 + \beta \alpha^3 n^4 \sin \frac{m \bar{u} c_1}{a} \sum_i A_{in} \sin \frac{i \bar{u} c_1}{a} + \beta \alpha^3 n^4 \sin \frac{m \bar{u} c_2}{a} \sum_i A_{in} \sin \frac{i \bar{u} c_2}{a} + \\
& + \gamma m^4 \sin \frac{n \bar{u} h}{b} \sum_j A_{mj} \sin \frac{j \bar{u} h}{b} = k_1 \alpha^2 m^2 \left[ A_{mn} \left( 1 - \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{8\varphi}{\bar{u}^2} \sum_r A_{mr} \frac{rn}{(r^2 - n^2)^2} \right] + \\
& + \frac{32 k_2 \alpha^3}{\bar{u}^2} \sum_k \sum_r A_{kr} \frac{k r m n}{(m^2 - k^2)(n^2 - r^2)} \quad (8a) \\
& \text{pour } \{r \pm n\} \text{ impairs} \\
& \text{pour } \{m \pm k\} \text{ impairs}
\end{aligned}$$

Pour les valeurs quelconques de 1 à  $l$  des nombres entiers  $m, n, i, j, k$  et  $r$ , nous formons un système de  $l^2$  équations linéaires homogènes dont le déterminant des coefficients doit être nul pour que l'on obtienne des valeurs non nulles pour les coefficients  $A_{mn}$  (c'est-à-dire pour que la plaque soit effectivement flambée,  $w \neq 0$ ). Donc, l'équation  $\Delta = 0$  représente la relation entre les contraintes critiques et la rigidité correspondante des rai-disseurs et peut être symboliquement exprimée par

$$\Delta = \psi(\alpha, k_1, k_2, \gamma, \beta, \varphi) = 0. \quad (9)$$

De l'équation (9) on peut, pour des valeurs données de  $\alpha, \gamma, \beta, \varphi$  et pour un rapport  $\eta = \frac{\sigma_k}{\tau_k} = \frac{k_1}{k_2}$  déterminé, calculer les coefficients de gondolement  $k_1$  et  $k_2$  comme les plus petites racines réelles de l'équation (9). Les valeurs minima de ces coefficients peuvent être tirées du déterminant d'ordre  $l$  quand  $l \rightarrow \infty$ . Cependant, comme on le verra plus loin, on obtiendra une solution approchée satisfaisante pour les besoins techniques si l'on ne considère que les coefficients  $A_{mn}$  pour lesquels  $m$  et  $n$  prennent les valeurs 1, 2, 3.

Les valeurs effectivement obtenues pour  $k_1$  et  $k_2$  à la suite de ce calcul approché ne diffèrent que très peu des valeurs exactes.

De même, pour des valeurs données de  $\alpha$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $\varphi$  et  $\varrho = \frac{\gamma}{\beta}$  on peut déterminer les valeurs  $\gamma$  et  $\beta$  comme les plus petites racines réelles de l'équation (9).

Dans ce cas nous obtiendrons, également, des résultats suffisamment approchés en prenant le déterminant des coefficients des  $A_{mn}$  pour  $m$  et  $n$  variant de 1 à 3; les approximations suivantes donnent, il est vrai, des valeurs plus grandes pour  $\gamma$  et  $\beta$ , mais la différence, comme le calcul le montre, est insignifiante.

Remarquons qu'en poursuivant ces approximations, les valeurs de  $k_1$  et  $k_2$  diminuent tandis que celles  $\gamma$  et  $\beta$  augmentent, tendant vers les valeurs extrêmales des solutions des équations (9).

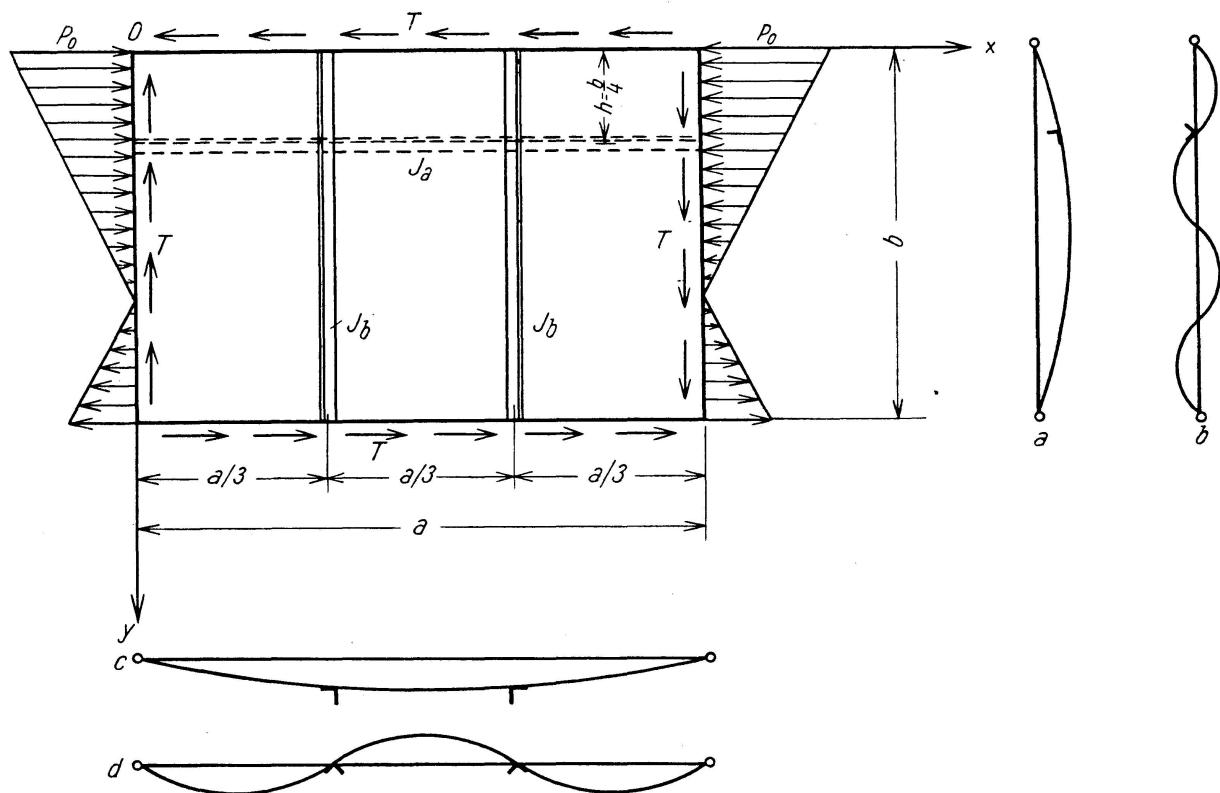


Fig. 3.

Dans la suite, et en nous basant sur des considérations pratiques, nous placerons le raidisseur longitudinal à la distance  $h/4$  du bord supérieur et les raidisseurs transversaux aux distances  $a/3$  et  $2/3a$  des bords latéraux.

II. Relation entre les coefficients de gondolement d'une plaque rectangulaire et la rigidité de ses raidisseurs pour une position du raidisseur longitudinal donnée par  $h = b/4$  et pour les positions  $c_1 = a/3$ ,  $c_2 = 2/3a$  des raidisseurs transversaux.

Dans ce cas, l'équation (8a) prend la forme:

De l'expression générale (10) nous obtenons un système d'équations linéaires homogènes :

avec  $m = 1, 2, 3, 4 \dots$   
 $n = 1, 2, 3, 4 \dots$

$$\begin{aligned}
& A_{11} \left[ (1+\alpha^2)^2 + \frac{3\beta\alpha^3}{2} + \frac{\gamma}{2} - k_1\alpha^2 \left(1 - \frac{\varphi}{2}\right) \right] + A_{12} \left( \frac{\gamma\sqrt{2}}{2} - \frac{16k_1\alpha^2\varphi}{9\bar{u}^2} \right) + A_{22} \left( -\frac{128k_2\alpha^3}{9\bar{u}^2} \right) + \\
& \quad + A_{13} \frac{\gamma}{2} + A_{15} \left( -\frac{\gamma}{2} \right) + \dots = 0 \\
& A_{11} \left( \frac{\gamma\sqrt{2}}{2} - \frac{16k_1\alpha^2\varphi}{9\bar{u}^2} \right) + A_{12} \left[ (1+4\alpha^2)^2 + 24\beta\alpha^3 + \gamma - k_1\alpha^2 \left(1 - \frac{\varphi}{2}\right) \right] + A_{21} \cdot \frac{128k_2\alpha^3}{9\bar{u}^2} + \\
& \quad + A_{13} \left( \frac{\gamma\sqrt{2}}{2} - \frac{48k_1\alpha^2\varphi}{25\bar{u}^2} \right) + A_{15} \left( -\frac{\gamma\sqrt{2}}{2} \right) + \dots = 0 \\
& A_{12} \frac{128k_2\alpha^3}{9\bar{u}^2} + A_{21} \left[ (4+\alpha^2)^2 + \frac{3\beta\alpha^3}{2} + 8\gamma - 4k_1\alpha^2 \left(1 - \frac{\varphi}{2}\right) \right] + A_{22} \left( 8\gamma\sqrt{2} - \frac{64k_1\alpha^2\varphi}{9\bar{u}^2} \right) + \\
& \quad + A_{41} \left( -\frac{3\beta\alpha^3}{2} \right) + \dots = 0 \\
& A_{11} \left( -\frac{128k_2\alpha^3}{9\bar{u}^2} \right) + A_{21} \left( 8\gamma\sqrt{2} - \frac{64k_1\alpha^2\varphi}{9\bar{u}^2} \right) + A_{22} \left[ 16(1+\alpha^2)^2 + 24\beta\alpha^3 + \right. \\
& \quad \left. + 16\gamma - 4k_1\alpha^2 \left(1 - \frac{\varphi}{2}\right) \right] + A_{13} \frac{128k_2\alpha^3}{5\bar{u}^2} + A_{31} \frac{128k_2\alpha^3}{5\bar{u}^2} + A_{23} 8\gamma\sqrt{2} + \dots = 0 \tag{10a} \\
& A_{11} \frac{\gamma}{2} + A_{12} \left( \frac{\gamma\sqrt{2}}{2} - \frac{48k_1\alpha^2\varphi}{25\bar{u}^2} \right) + A_{22} \frac{128k_2\alpha^3}{5\bar{u}^2} + \\
& \quad + A_{13} \left[ (1+9\alpha^2)^2 + \frac{243\beta\alpha^3}{2} + \frac{\gamma}{2} - k_1\alpha^2 \left(1 - \frac{\varphi}{2}\right) \right] + A_{15} \left( -\frac{\gamma}{2} \right) + \dots = 0 \\
& A_{22} \frac{128k_2\alpha^3}{5\bar{u}^2} + A_{31} \left[ (9+\alpha^2)^2 + \frac{81\gamma}{2} - 9k_1\alpha^2 \left(1 - \frac{\varphi}{2}\right) \right] + A_{32} \frac{81\gamma\sqrt{2}}{2} + \dots = 0
\end{aligned}$$

Pour que la plaque soit flambée, c'est-à-dire que  $w \neq 0$ , le déterminant du système d'équations homogènes (10a) doit être égal à zéro

$$A = 0.$$

Tableau I.

$mn$	11	12	21	22	13	31
11	$(1+\alpha^2)^2 + \frac{3\beta\alpha^3}{2} + \frac{\gamma}{2} - k_1\alpha^2\left(1 - \frac{\varphi}{2}\right)$	$\frac{\gamma\sqrt{2}}{2} - \frac{16k_1\alpha^2\varphi}{9\bar{u}^2}$	0	$-\frac{128k_2\alpha^3}{9\bar{u}^2}$	$\frac{\gamma}{2}$	0
12	$\frac{\gamma\sqrt{2}}{2} - \frac{16k_1\alpha^2\varphi}{9\bar{u}^2}$	$(1+4\alpha^2)^2 + 24\beta\alpha^3 + \gamma - k_1\alpha^2\left(1 - \frac{\varphi}{2}\right)$	$\frac{128k_2\alpha^3}{9\bar{u}^2}$	0	$\frac{\gamma\sqrt{2}}{2} - \frac{48k_1\alpha^2\varphi}{25\bar{u}^2}$	0
21	0	$\frac{128k_2\alpha^3}{9\bar{u}^2}$	$(4+\alpha^2)^2 + \frac{3\beta\alpha^3}{2} + 8\gamma - 4k_1\alpha^2\left(1 - \frac{\varphi}{2}\right)$	$8\gamma\sqrt{2} - \frac{64k_1\alpha^2\varphi}{9\bar{u}^2}$	0	0
22	$-\frac{128k_2\alpha^3}{9\bar{u}^2}$	0	$8\gamma\sqrt{2} - \frac{64k_1\alpha^2\varphi}{9\bar{u}^2}$	$16(1+\alpha^2)^2 + 24\beta\alpha^3 + 16\gamma - 4k_1\alpha^2\left(1 - \frac{\varphi}{2}\right)$	$\frac{128k_2\alpha^3}{5\bar{u}^2}$	$\frac{128k_2\alpha^3}{5\bar{u}^2}$
13	$\frac{\gamma}{2} - \frac{48k_1\alpha^2\varphi}{25\bar{u}^2}$	0	$\frac{128k_2\alpha^3}{5\bar{u}^2}$	$(1+9\alpha^2)^2 + \frac{243\beta\alpha^3}{2} + \frac{\gamma}{2} - k_1\alpha^2\left(1 - \frac{\varphi}{2}\right)$	0	0
31	0	0	$\frac{128k_2\alpha^3}{5\bar{u}^2}$	$(9+\alpha^2)^2 + \frac{81\gamma}{2} - 9k_1\alpha^2\left(1 - \frac{\varphi}{2}\right)$		

En considérant les coefficients  $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{21}, A_{22}, A_{31}$ , le déterminant s'exprimera sous forme du tableau I.

En développant ce déterminant, on obtient une équation de la forme

$$\psi(\alpha, \beta, \gamma, k_1, k_2, \varphi) = 0, \quad (9a)$$

dans laquelle  $\alpha, \beta, \gamma, k_1, k_2$  et  $\varphi$  sont les variables.

Cette équation permet de dimensionner les raidisseurs ou de déterminer la stabilité de la plaque pour des valeurs données de  $\gamma$  et  $\beta$  et pour tous les cas de charge.

Il existe des valeurs de  $\gamma$  et  $\beta$  telles que les raidisseurs ne subissent aucune flexion lors du flambage, mais représentent des lignes nodales de la plaque gondolée, nous les appellerons „valeurs minima“  $\gamma_{min}$  et  $\beta_{min}$ , car le dépassement de ces valeurs est sans influence sur la valeur des contraintes critiques.

Dans ce cas chaque partie de la plaque comprise entre les raidisseurs (voir fig. 3bd) peut être considérée comme une plaque non raidie appuyée, sur ses quatre bords de telle façon que, pour la charge qui lui est appliquée, il est possible de déterminer les coefficients de gondolement  $k_1$  et  $k_2$ . En introduisant ces coefficients dans l'équation (9a), nous obtiendrons les valeurs correspondantes de  $\gamma_{min}$  et  $\beta_{min}$ .

Le problème étant ainsi posé dans sa forme générale, l'équation (9a) permet l'étude de tous les cas spéciaux de charge.

### 1. Plaque sollicitée à la flexion pure.

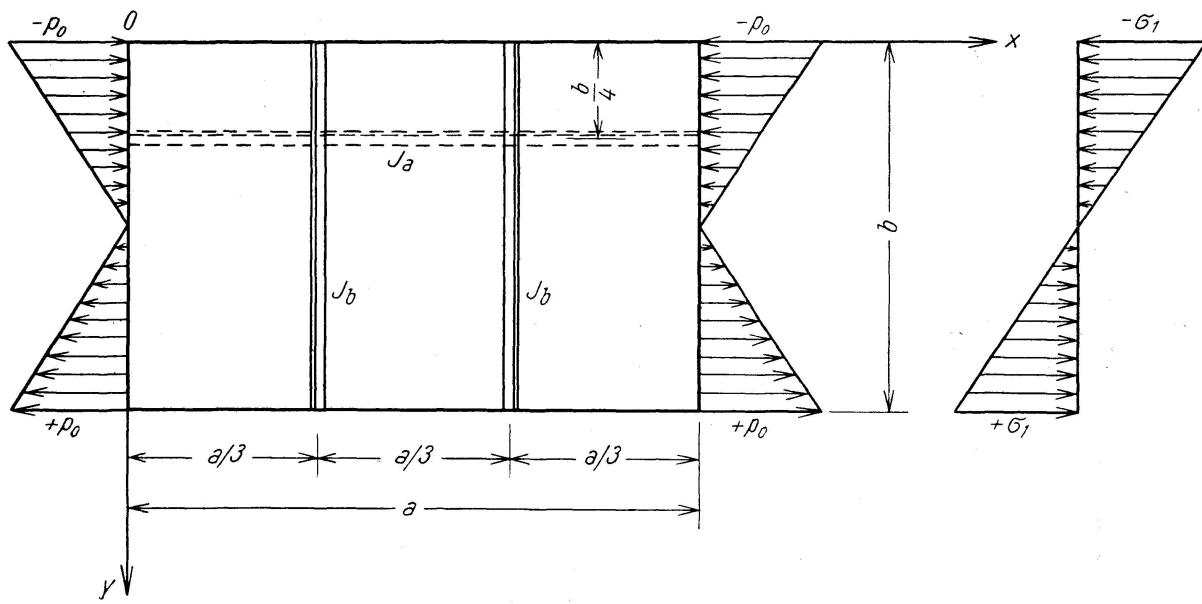


Fig. 4.

Le déterminant du système dans le cas de la flexion pure s'obtient à partir de l'expression générale du déterminant écrite plus haut (tableau I) en y faisant  $\varphi = 2$  et  $k_2 = 0$ .

En première approximation, nous limiterons le déterminant aux coefficients de  $A_{11}, A_{12}$  et  $A_{21}$ . En développant ce déterminant du troisième ordre et en l'égalant à zéro, nous obtenons

$$\left[ (1+\alpha^2)^2 + \frac{3\beta\alpha^3}{2} + \frac{\gamma}{2} \right] \left[ (1+4\alpha^2)^2 + 24\beta\alpha^3 + \gamma \right] - \left( \frac{\gamma\sqrt{2}}{2} - \frac{32k_1\alpha^2}{9\bar{u}^2} \right)^2 = 0. \quad (11)$$

L'équation (11) est du second degré en  $k_1$  de même qu'en  $\beta$  et  $\gamma$ . En la résolvant par rapport à l'une de ces inconnues et en prenant chaque fois la plus petite racine, nous obtiendrons soit les coefficients de gondolement, soit les moments d'inertie des raidisseurs.

Tableau II.

$mn$	11	12	21	22	13	31
11	$(1+\alpha^2)^2 + \frac{3\beta\alpha^3}{2} + \frac{\gamma}{2}$	$\frac{\gamma\sqrt{2}}{2} - \frac{32k_1\alpha^2}{9\bar{u}^2}$	0	0	$\frac{\gamma}{2}$	0
12	$\frac{\gamma\sqrt{2}}{2} - \frac{32k_1\alpha^2}{9\bar{u}^2}$	$(1+4\alpha^2)^2 + 24\beta\alpha^3 + \gamma$	0	0	$\frac{\gamma\sqrt{2}}{2} - \frac{96k_1\alpha^2}{25\bar{u}^2}$	0
21	0	0	$(4+\alpha^2)^2 + \frac{3\beta\alpha^3}{2} + 8\gamma$	$8\gamma\sqrt{2} - \frac{128k_1\alpha^2}{9\bar{u}^2}$	0	0
22	0	0	$8\gamma\sqrt{2} - \frac{128k_1\alpha^2}{9\bar{u}^2}$	$16(1+\alpha^2)^2 + 24\beta\alpha^3 + 16\gamma$	0	0
13	$\frac{\gamma}{2}$	$\frac{\gamma\sqrt{2}}{2} - \frac{96k_1\alpha^2}{25\bar{u}^2}$	0	0	$(1+9\alpha^2)^2 + \frac{243\beta\alpha^3}{2} + \frac{\gamma}{2}$	0
31	0	0	0	0	0	$(9+\alpha^2)^2 + \frac{81\gamma}{2}$

Dans le tableau suivant on donne pour différentes valeurs du rapport  $\alpha = a/b$ , pour  $k_1 = 84, 80$  et  $64$  et en fixant le rapport  $\varrho = \gamma/\beta$  aux valeurs  $1, 0, 75$  et  $0, 50$ , les valeurs résultantes de  $\gamma$  d'après l'équation (11).

Tableau III. Valeurs de  $\gamma$ .

$\alpha = a/b$	$k_1 = 84$			$k_1 = 80$			$k_1 = 64$		
	$\varrho = J_a/J_b$			$\varrho = J_a/J_b$			$\varrho = J_a/J_b$		
	1,00	0,75	0,50	1,00	0,75	0,50	1,00	0,75	0,50
1,0	2,56	2,03	1,42	2,38	1,88	1,33	1,64	1,30	0,92
1,1	2,38	1,87	1,30	2,22	1,73	1,21	1,51	1,18	0,82
1,2	2,20	1,70	1,18	2,03	1,57	1,08	1,35	1,05	0,73
1,3	1,98	1,54	1,06	1,84	1,41	0,97	1,19	0,92	0,63
1,4	1,79	1,38	0,94	1,64	1,26	0,86	1,03	0,78	0,54
1,5	1,60	1,23	0,83	1,45	1,11	0,75	0,87	0,65	0,45
1,7	1,22	0,93	0,63	1,10	0,83	0,57	0,56	0,47	0,29
2,0	0,73	0,55	0,36	0,60	0,46	0,30	0,14	0,10	—

La figure 5 nous représente la relation entre les valeurs de  $\gamma$  et  $\alpha = a/b$  pour différentes valeurs de  $k_1$  et  $\varrho = \gamma/\beta = J_a/J_b$ .

Afin d'apprécier l'erreur commise sur les valeurs de  $\gamma$  à la suite de cette première approximation, nous allons effectuer une seconde approximation en prenant cette fois les termes  $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, A_{13}$  et  $A_{31}$ , ce qui nous amènera à écrire un déterminant du sixième ordre.

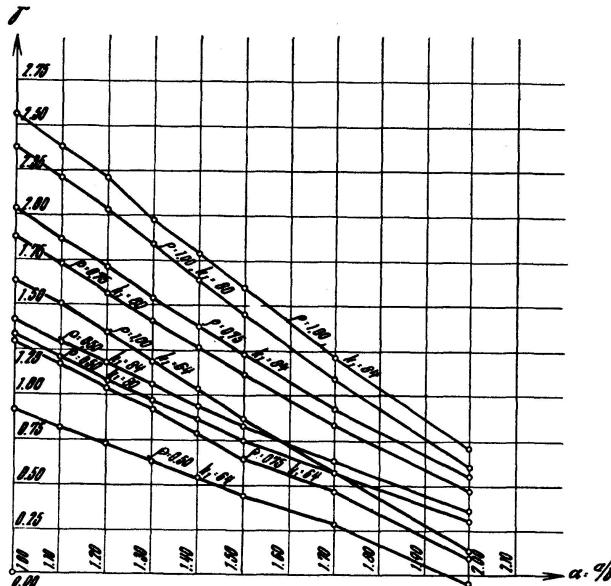


Fig. 5.

Nous pouvons développer ce déterminant sous la forme d'un produit de trois facteurs, chacun de ces facteurs pouvant être nul

$$\left. \begin{aligned}
 a) \quad & (9 + \alpha^2)^2 + \frac{81 \gamma}{2} = 0 \\
 b) \quad & \left[ (4 + \alpha^2)^2 + \frac{3 \beta \alpha^3}{2} + 8 \gamma \right] \left[ 16(1 + \alpha^2)^2 + 24 \beta \alpha^3 + 16 \gamma \right] - \left( 8 \gamma \sqrt{2} - \frac{128 k_1 \alpha^2}{9 \bar{u}^2} \right)^2 = 0 \\
 c) \quad & \left\{ \left[ (1 + \alpha^2)^2 + \frac{3 \beta \alpha^3}{2} + \frac{\gamma}{2} \right] \left[ (1 + 4 \alpha^2)^2 + 24 \beta \alpha^3 + \gamma \right] - \left( \frac{\gamma \sqrt{2}}{2} - \frac{32 k_1 \alpha^2}{9 \bar{u}^2} \right)^2 \right\} \left[ (1 + 9 \alpha^2)^2 + \frac{243 \beta \alpha^3}{2} + \frac{\gamma}{2} \right] + \\
 & + \left\{ \frac{\gamma}{2} \left( \frac{\gamma \sqrt{2}}{2} - \frac{32 k_1 \alpha^2}{9 \bar{u}^2} \right) - \left[ (1 + \alpha^2)^2 + \frac{3 \beta \alpha^3}{2} + \frac{\gamma}{2} \right] \left( \frac{\gamma \sqrt{2}}{2} - \frac{96 k_1 \alpha^2}{25 \bar{u}^2} \right) \right\} \left( \frac{\gamma \sqrt{2}}{2} - \frac{96 k_1 \alpha^2}{25 \bar{u}^2} \right) + \\
 & + \left\{ \left( \frac{\gamma \sqrt{2}}{2} - \frac{32 k_1 \alpha^2}{9 \bar{u}^2} \right) \left( \frac{\gamma \sqrt{2}}{2} - \frac{96 k_1 \alpha^2}{25 \bar{u}^2} \right) - \frac{\gamma}{2} [(1 + 4 \alpha^2)^2 + 24 \beta \alpha^3 + \gamma] \right\} \frac{\gamma}{2} = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

L'équation du second degré (12b) nous donne pour  $\varrho = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{J_a}{J_b} = 1$  et  $k_1 = 84$  les valeurs:

$$\begin{aligned}
 \gamma &= 2,62 & \text{pour } \alpha &= 1 \\
 \gamma &= 4,25 & \text{pour } \alpha &= 2
 \end{aligned}$$

L'équation du troisième degré (12c) nous donne pour  $\varrho = J_a/J_b = 1$  et  $k_1 = 84$  les valeurs:

$$\begin{array}{ll} \gamma = 2,59 & \text{pour } \alpha = 1 \\ \gamma = 0,74 & \text{pour } \alpha = 2 \end{array}$$

En deuxième approximation, les plus petites valeurs pour  $\gamma$  sont données par les racines positives de l'équation (12c) et peuvent nous servir par la suite à calculer les moments d'inertie des raidisseurs.

Les solutions en  $\gamma$  obtenues en première approximation sont entachées d'une erreur par rapport à celles de la deuxième approximation qui, exprimée en %, s'établit comme suit:

$$\begin{array}{ll} \text{pour } \alpha = 1,0 & \text{et } k_1 = 84 \\ & \frac{2,59 - 2,56}{2,59} \cdot 100 = 1,16\% \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{pour } \alpha = 2,0 & \text{et } k_1 = 84 \\ & \frac{0,74 - 0,73}{0,74} \cdot 100 = 1,84\% \end{array}$$

De cela, nous concluerons que la première approximation donne déjà, quand  $\alpha$  varie de 1 à 2 et  $k_1 = 84$ , pour  $\gamma$  des résultats suffisamment précis pour les besoins techniques.

Exemple numérique:

Calculer les moments d'inertie des raidisseurs de l'âme d'une poutre composée dont la coupe transversale est donnée par la figure 6.

$$b = 320 - 2 \cdot \frac{10,0 + 5,5}{2} = 304,5 \text{ cm}$$

L'écartement des pièces de pont est 5,20 m. L'âme de la poutre entre deux pièces de pont est renforcée par des raidisseurs comme le montre la figure 6.

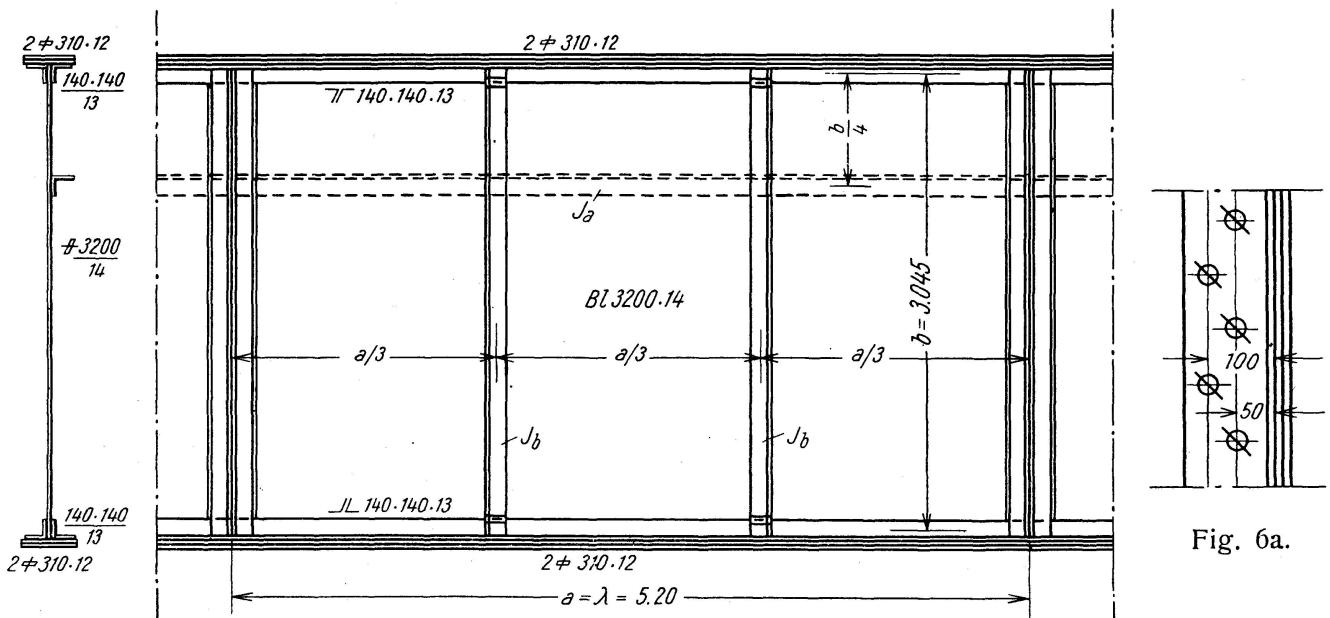


Fig. 6.

Fig. 6a.

Dans le panneau considéré de la poutre composée on a les valeurs suivantes pour:

- le moment fléchissant  $M = + 926,0 \text{ tm}$
- l'effort tranchant  $Q = \sim 0$
- le module de flexion  $W_n = 60900 \text{ cm}^3$

$$\text{le rapport des côtés } \alpha = \frac{a}{b} = \frac{5,20}{3,045} = \sim 1,7$$

$$\text{la tension normale } \sigma = \frac{92\,600\,000}{60\,900} = 1520 \text{ kg/cm}^2$$

Le matériel qui constitue la poutre composée est un acier dont la résistance à la traction est de  $52 \text{ kg/mm}^2$ .

Posons  $\varrho = J_a/J_b = 1$ .

Le problème peut avoir deux modes de résolution suivant les conditions imposées.

Premier problème: Déterminer les moments d'inertie des raidisseurs  $J_a$  et  $J_b$  de telle façon que le coefficient de sécurité au flambage soit

$$\nu = \frac{\sigma_k}{\sigma_1} = 1,8$$

$$\sigma_1 = 1520 \cdot \frac{304,5}{324,8} = 1425 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_k = 1,8 \cdot 1425 = 2570 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_F = 3600 \text{ kg/cm}^2$$

Le flambage de la plaque est donc dans le domaine des déformations élastiques, car  $\sigma_k < \sigma_F$ .

$$\sigma_0 = 189,9 \left( \frac{100 \cdot \delta}{b} \right)^2 = 189,9 \left( \frac{100 \cdot 1,4}{304,5} \right)^2 = 40 \text{ kg/cm}^2$$

$$k_1 = \frac{\sigma_k}{\sigma_0} = \frac{2570}{40} = 64$$

Le tableau III des valeurs de  $\gamma$  nous donne pour:

$$\varrho = J_a/J_b = 1, \quad k_1 = 64 \quad \text{et} \quad \alpha = 1,7$$

$$\gamma = 0,56$$

$$\gamma = \frac{2EJ_a}{D \cdot b}; \quad J_a = J_b = \frac{Db\gamma}{2E} = \frac{\delta^3 b \gamma}{24(1-\mu^2)} = \frac{1,4^3 \cdot 304,5 \cdot 0,56}{24(1-0,3^2)} = 215 \text{ cm}^4.$$

Lors du choix du profil des raidisseurs, nous pouvons suivre la proposition du professeur TIMOSHENKO (1) et prendre le moment d'inertie par rapport à l'axe qui se trouve entre le raidisseur et la plaque, car une partie de celle-ci participe à la flexion.

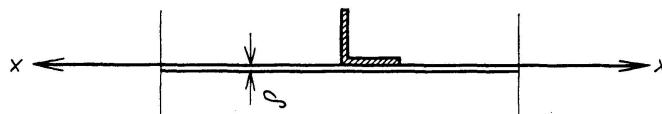


Fig. 7.

Par conséquent, nous pouvons prendre pour les raidisseurs transversaux et longitudinaux  $\square 90. 90. 11$  dont le moment d'inertie est

$$J_x = 138 + 18,7 \cdot 2,62^2 = 264 \text{ cm}^4 > J_a = J_b.$$

Second problème: Déterminer les valeurs des moments d'inertie des raidisseurs,  $J_{a\min}$  et  $J_{b\min}$ , auxquelles correspond le flambage de l'âme avec des lignes nodales confondues avec des raidisseurs.

Comme nous l'avons dit plus haut, pour ce cas de flambage chaque partie de l'âme comprise entre les raidisseurs peut être traitée comme une

plaqué non raidie, librement appuyée sur son contour et sollicitée à la charge correspondante du diagramme représenté par la fig. 4.

Il faut considérer deux éléments rectangulaires de l'âme compris entre des raidisseurs (fig. 8 et 9).

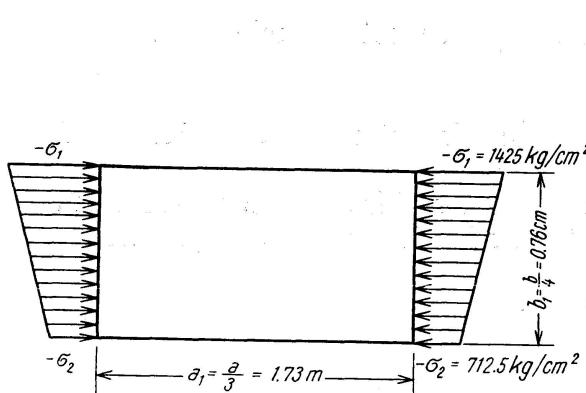


Fig. 8.

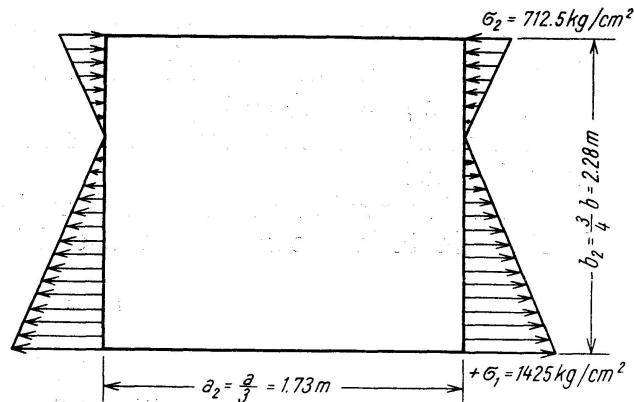


Fig. 9.

Pour chacun de ces éléments il faut déterminer la valeur de la contrainte critique  $\sigma_k$  en le considérant comme une plaque non raidie.

La plus petite valeur  $\sigma_k$  obtenue pour l'un de ces éléments peut être considérée comme la contrainte critique de l'âme raidie d'après la fig. 6, si les moments d'inertie sont  $J_{a \min}$  et  $J_{b \min}$ .

Il est clair par avance que la partie rectangulaire représentée par la figure 8 détermine dans ce cas la contrainte critique.

D'après l'article précité du professeur TIMOSHENKO, pour l'élément rectangulaire de la figure 8 la première approximation nous donne pour le calcul du coefficient de gondolement des valeurs suffisamment exactes.

$$k = \left( \frac{1}{\alpha_1} + \alpha_1 \right)^2 \frac{1}{1 - \varphi/2}; \quad \alpha_1 = \frac{1,73}{0,76} = 2,27; \quad \varphi = 0,5$$

$$k = \left( \frac{1}{2,27} + 2,27 \right)^2 \frac{1}{1 - 0,5/2} = 9,78$$

$$\sigma_k = k \cdot \sigma_0 = 9,78 \cdot 189,9 \left( \frac{100 \cdot 1,4}{76} \right)^2 = 9,78 \cdot 640 = 6260 \text{ kg/cm}^2 > \sigma_F$$

$\sigma_k$  étant plus grand que  $\sigma_F$ , le flambage de l'âme mène au delà de la limite d'élasticité et dans ce cas il faut prendre (DIN Entwurf 2 E 4114).

$$\sigma_k = \sigma_F = 3600 \text{ kg/cm}^2$$

Pour le cas de l'âme dont la hauteur est  $h = 3,045 \text{ m}$  et en prenant  $\sigma_k = 3600 \text{ kg/cm}^2$ , le coefficient de gondolement est

$$k_1 = \frac{\sigma_k}{\sigma_0} = \frac{3600}{189,9 \left( \frac{100 \cdot 1,4}{304,5} \right)^2} = 90$$

L'équation (11) pour  $k_1 = 90$  nous donne la valeur correspondante de  $\gamma_{\min} = 1,41$  d'où

$$J_{a \min} = J_{b \min} = \frac{\delta^3 b \gamma_{\min}}{24(1 - \mu^2)} = \frac{1,4^3 \cdot 304,5 \cdot 1,41}{24(1 - 0,3^2)} = 540 \text{ cm}^4$$

A ces valeurs des moments d'inertie  $J_{a\min}$  et  $J_{b\min}$  correspondent pour les raidisseurs transversaux et longitudinaux les profils

$$80 \cdot 120 \cdot 10$$

dont le moment d'inertie est

$$I_x = 276 + 19,1 \cdot 3,92^2 = 570 \text{ cm}^4 > I_{a\min}.$$

## 2. Plaque sollicitée à la flexion et au cisaillement.

C'est le cas habituel des poutres composées, librement appuyées, et surtout des poutres continues dont les sections transversales voisines des appuis intérieurs sont simultanément sollicitées par les moments fléchissants et par les efforts tranchants maxima.

C'est précisément dans ce cas que le renforcement de l'âme de la poutre composée est effectué, le plus souvent, par un système de deux raidisseurs transversaux et d'un raidisseur longitudinal placé dans le premier quart de la hauteur de l'âme et ceci dans la zone de compression.

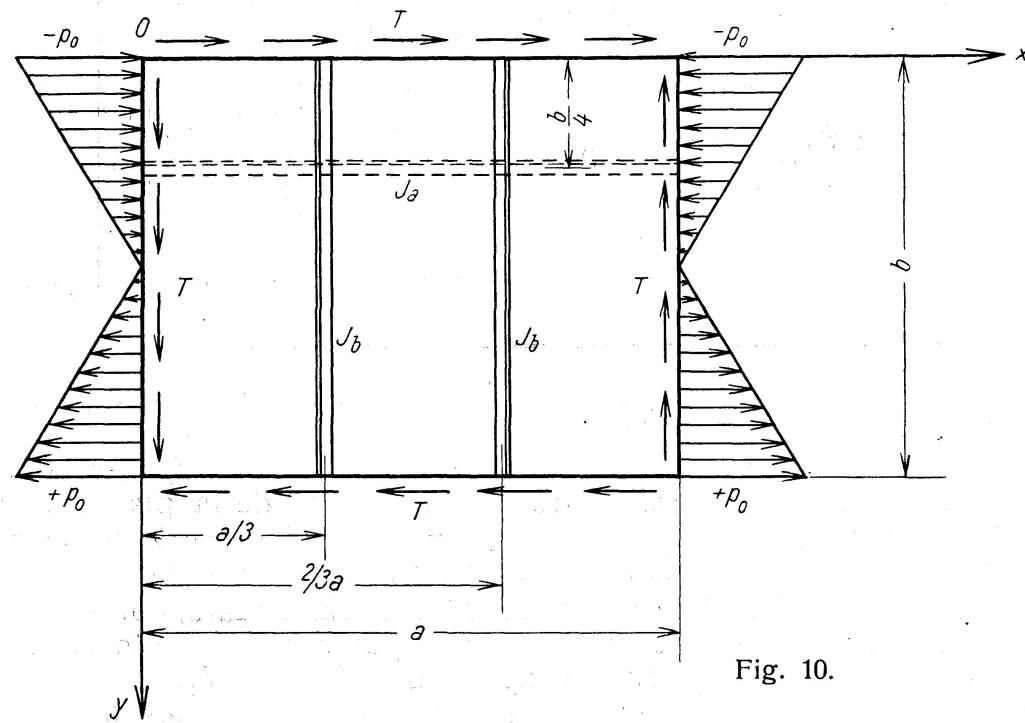


Fig. 10.

La figure 10 représente le cas d'une plaque mince sollicitée dans son plan simultanément à la flexion et au cisaillement et renforcée comme indiqué plus haut. On obtient le déterminant du système d'après l'expression générale du déterminant donné par le tableau I en y faisant  $\varphi = 2$ .

Pour première approximation on peut prendre le déterminant des neuf premiers éléments, c'est-à-dire considérer les coefficients  $A_{mn}$  de la série de FOURIER pour  $m = 1, 2$  et  $n = 1, 2$ .

$$\begin{aligned} & \left[ (1 + \alpha^2)^2 + \frac{3\beta\alpha^3}{2} + \frac{\gamma}{2} \right] \left[ (1 + 4\alpha^2)^2 + 24\beta\alpha^3 + \gamma \right] \left[ (4 + \alpha^2)^2 + \frac{3\beta\alpha^3}{2} + 8\gamma \right] - \\ & - \left[ (1 + \alpha^2)^2 + \frac{3\beta\alpha^3}{2} + \frac{\gamma}{2} \right] \left( \frac{128k_2\alpha^3}{9\bar{u}^2} \right)^2 - \left[ \frac{\gamma\sqrt{2}}{2} - \frac{32k_1\alpha^2}{9\bar{u}^2} \right]^2 \cdot \left[ (4 + \alpha^2)^2 + \frac{3\beta\alpha^3}{2} + 8\gamma \right] = 0 \quad (13) \end{aligned}$$

Tableau IV.

$mn$	11	12	21	22	13	31	
$A =$	$\frac{(1+\alpha^2)^2 + 3\beta\alpha^3}{2} + \frac{\gamma}{2}$	$\frac{\gamma\sqrt{2}}{2} - \frac{32k_1\alpha^2}{9\bar{u}^2}$	0	$-\frac{128k_2\alpha^3}{9\bar{u}^2}$	$\frac{\gamma}{2}$	0	
	$\frac{\gamma\sqrt{2}}{2} - \frac{32k_1\alpha^2}{9\bar{u}^2}$	$(1+4\alpha^2)^2 + 24\beta\alpha^3 + \gamma$	$\frac{128k_2\alpha^3}{9\bar{u}^2}$	0	$\frac{\gamma\sqrt{2}}{2} - \frac{96k_1\alpha^2}{25\bar{u}^2}$	0	
	0	$\frac{128k_2\alpha^3}{9\bar{u}^2}$	$(4+\alpha^2)^2 + \frac{3\beta\alpha^3}{2} + 8\gamma$	$-\frac{8\gamma\sqrt{2}}{9\bar{u}^2} - \frac{128k_1\alpha^2}{9\bar{u}^2}$	0	0	
	$-\frac{128k_2\alpha^3}{9\bar{u}^2}$	0	$-\frac{8\gamma\sqrt{2}}{9\bar{u}^2} - \frac{128k_1\alpha^2}{9\bar{u}^2}$	$16(1+\alpha^2)^2 + 24\beta\alpha^3 + 16\gamma$	$\frac{128k_2\alpha^3}{5\bar{u}^2}$	$\frac{128k_2\alpha^3}{5\bar{u}^2}$	
	$\frac{\gamma}{2}$	$\frac{\gamma\sqrt{2}}{2} - \frac{96k_1\alpha^2}{25\bar{u}^2}$	0	$\frac{128k_2\alpha^3}{5\bar{u}^2}$	$(1+9\alpha^2)^2 + \frac{243\beta\alpha^3}{2} + \frac{\gamma}{2}$	0	
	0	0	0	$\frac{128k_2\alpha^3}{5\bar{u}^2}$	0	$(9+\alpha^2)^2 + \frac{81\gamma}{2}$	

Cette dernière équation (13) nous donne la solution de deux problèmes se présentant dans la pratique:

1<sup>o</sup> Déterminer les moments d'inertie des raidisseurs  $J_{a\min}$  et  $J_{b\min}$  de façon que les raidisseurs soient les lignes nodales de la plaque flambée pour des valeurs données de  $\varrho = J_a/J_b$ ,  $\eta = k_1/k_2$  et  $\alpha = a/b$  et pour une valeur fixée du coefficient de gondolement  $k_1$ , ainsi que de  $k_2$ .

Pour un seul élément de la plaque entre les raidisseurs, qui dans ce cas est une plaque rectangulaire librement appuyée sur son contour, on peut déterminer la valeur de  $k_1$  pour un rapport donné  $\eta = k_1/k_2$ .

2<sup>o</sup> Déterminer les moments d'inertie des raidisseurs pour des rapports fixés  $\varrho = J_a/J_b$ ,  $\alpha = a/b$ ,  $\eta = k_1/k_2$  de telle façon que l'on obtienne un coefficient de sécurité donné par rapport à la contrainte critique.

Tableau V des coefficients  $k_1$  pour  $\varrho = \gamma/\beta = 1,0$  et  $\eta = k_1/k_2 = 1,0$ .

$\gamma$	$\alpha = a/b$							
	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,7	2,0
1,0	25	23	22	21	20	19	18	17
2,0	35	33	30	29	28	26	24	23
3,0	45	42	39	36	35	33	30	28
4,0	55	51	47	44	42	39	36	33
5,0	65	60	55	51	49	46	42	39

Tableau VI des coefficients  $k_1$  pour  $\varrho = \gamma/\beta = 1,0$  et  $\eta = k_1/k_2 = 2$ .

$\gamma$	$\alpha = a/b$							
	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,7	2,0
1,0	38	37	36	36	35	35	34	33
2,0	54	52	51	50	50	47	45	43
3,0	70	67	65	63	61	60	57	54
4,0	85	82	79	77	74	72	68	64
5,0	101	97	93	90	87	84	80	75

Tableau VII des coefficients  $k_1$  pour  $\varrho = \gamma/\beta = 1,0$  et  $\eta = k_1/k_2 = 3$ .

$\gamma$	$\alpha = a/b$							
	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,7	2,0
1,0	44	44	44	45	45	45	45	46
2,0	62	62	62	62	65	62	61	61
3,0	80	80	80	80	79	78	77	76
4,0	99	98	97	97	96	95	93	91
5,0	117	116	115	114	114	111	109	106

Tableau VIII des coefficients  $k_1$  pour  $\varrho = \gamma/\beta = 0,5$  et  $\eta = k_1/k_2 = 1,0$ .

$\gamma$	$\alpha = a/b$							
	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,7	2,0
1,0	32	30	28	26	25	24	23	22
2,0	48	44	41	39	37	36	34	32
3,0	63	58	55	52	49	47	44	41
4,0	78	73	68	64	61	58	54	51
5,0	94	87	81	76	73	69	65	60

Tableau IX des coefficients  $k_1$  pour  $\varrho = 0,5$  et  $\eta = 2$ .

$\gamma$	$\alpha = a/b$							
	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,7	2,0
1,0	49	48	47	46	45	44	43	42
2,0	75	73	71	69	68	66	63	61
3,0	101	98	95	92	90	87	83	80
4,0	126	122	118	114	112	108	103	98
5,0	151	146	139	137	133	129	123	117

Tableau X des coefficients  $k_1$  pour  $\varrho = 0,5$  et  $\eta = 3$ .

$\gamma$	$\alpha = a/b$							
	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,7	2,0
1,0	57	58	58	59	59	59	59	59
2,0	88	89	89	89	89	88	87	86
3,0	119	120	119	119	119	117	115	113
4,0	150	150	149	149	148	146	143	140
5,0	180	180	179	178	177	174	171	167

Dans ce but, on a établi des tableaux qui donnent les coefficients de gondolement  $k_1$  pour des valeurs déterminées de  $\varrho = J_a/J_b$ ,  $\eta = k_1/k_2$  et ceci pour différentes valeurs de  $\alpha = a/b$  et  $\gamma$ .

### Application numérique.

Déterminer les moments d'inertie des raidisseurs de l'âme d'un panneau quelconque d'une poutre composée dont la section est donnée par la figure 11.

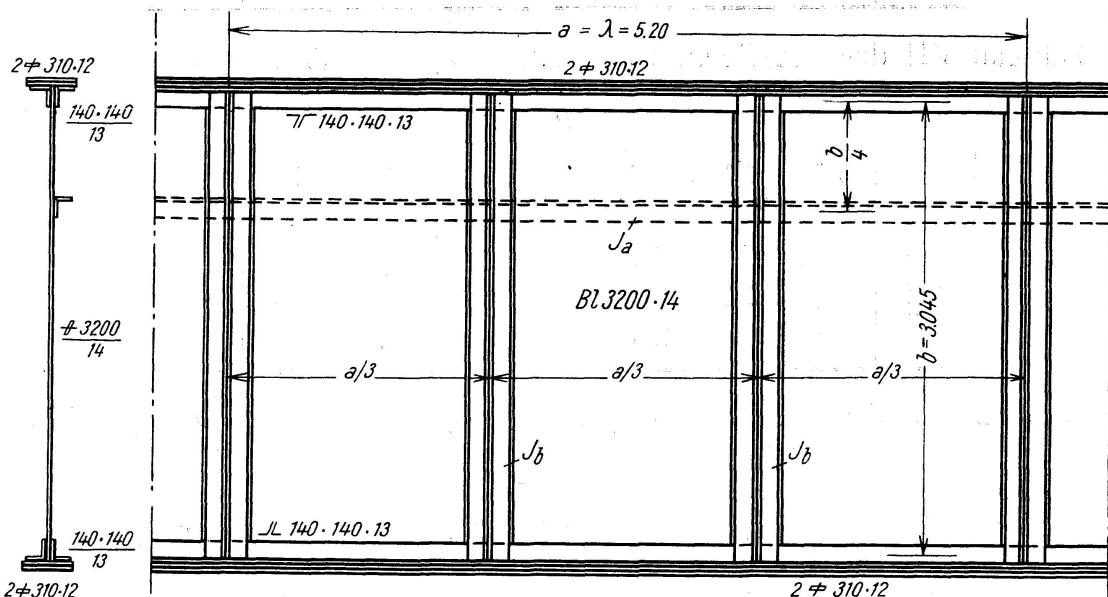


Fig. 11.

$$b = 320 - 2 \frac{10,0 + 5,5}{2} = 304,5 \text{ cm}$$

L'écartement des poutrelles est de 5,20 m. La disposition des raidisseurs est indiquée sur la figure 11. Le matériel de cette poutre est un acier dont la résistance est  $52 \text{ kg/mm}^2$ .

Dans le panneau considéré l'on a

$$M = 926,0 \text{ tm} ; \quad Q = 212 \text{ t}$$

$$W_n = 60900 \text{ cm}^3.$$

Les contraintes dans la section de la poutre sont

$$\sigma = \frac{92600000}{60900} = 1520 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau = \frac{212000}{320 \cdot 1,4} = 473 \text{ kg/cm}^2$$

Le rapport des côtés  $\alpha = a/b = 520/304,5 = \sim 1,7$ .

Posons  $\varrho = J_a/J_b = 0,5$ .

On doit calculer les moments d'inertie  $J_a$  et  $J_b$  de telle façon que le coefficient de sécurité au flambage soit de 1,5.

Nous allons tout d'abord déterminer le coefficient de flambage  $k_1$ . S'agissant du cas d'un état élastique plan, il est nécessaire d'introduire des

expressions qui donnent la contrainte comparative<sup>4)</sup>

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_1^2 + 3\tau^2}$$

où  $\sigma_1$  représente la tension normale de flexion,  
et  $\tau$  représente la tension tangentielle de cisaillement.

L'expression de la contrainte critique au flambage de la plaque dans ce cas est

$$\sigma_{vk} = \frac{\sigma_v}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_k}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_k}\right)^2}} \quad \text{où} \quad \sigma_k = k_1 \sigma_0 \quad \tau_k = k_2 \tau_0$$

Le coefficient de sécurité au flambage est donné par le rapport

$$\nu = \frac{\sigma_{vk}}{\sigma_v} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_k}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_k}\right)^2}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_1}{k_1}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{k_2}\right)^2}}.$$

Des expressions précédentes on peut tirer la valeur  $k_1$  si on introduit le rapport

$$\eta = \frac{k_1}{k_2}$$

$$k_1 = \frac{\nu}{\sigma_0} \sqrt{\sigma_1^2 + \tau^2 \eta^2}$$

Les valeurs  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$ ,  $\tau$  et  $\nu$  sont données tandis que pour le rapport  $\eta$  on peut prendre, si l'on désire le même degré de sécurité pour  $\sigma_k$  ainsi que pour  $\tau_k$

$$\frac{\sigma_k}{\sigma_1} = \frac{\tau_k}{\tau}; \quad \eta = \frac{\sigma_1}{\tau} = \frac{k_1}{k_2}$$

Dans notre cas

$$\sigma_0 = 189,9 \left( \frac{100 \cdot 1,4}{304,5} \right)^2 = 40 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_1 = 1520 \frac{304,5}{324,8} = 1425 \text{ kg/cm}^2; \quad \tau = 473 \text{ kg/cm}^2$$

$$\eta = \frac{\sigma_1}{\tau} = \frac{1425}{473} = \sim 3,0$$

$$k_1 = \frac{1,5}{40} \sqrt{1425^2 + 3,0^2 \cdot 473^2} = 75,5$$

Le tableau X des coefficients  $k_1$  nous donne par interpolation la valeur de  $\gamma$  correspondant à  $k_1 = 75,50$  pour  $\alpha = 1,7$

$$\gamma = 1,0 + 1,0 \cdot \frac{16,50}{28} = 1,59.$$

Par suite on obtient pour le moment d'inertie du raidisseur longitudinal

$$J_a = \frac{\delta^3 b \gamma}{24(1-\mu^2)} = \frac{1,4^3 \cdot 304,5 \cdot 1,59}{24(1-0,3^2)} = 607 \text{ cm}^4$$

<sup>4)</sup> SCHLEICHER, F.: Bauingenieur 1928, S. 253.

A la valeur ci-dessus correspond le profil  $\text{L}_120.120.11$  dont le moment d'inertie est

$$J_x = 341 + 25,4 \cdot 3,36^2 = 628 \text{ cm}^4 > J_a$$

Pour les raidisseurs transversaux, le moment d'inertie est

$$J_b = 2J_a = 2 \times 607 = 1214 \text{ cm}^4$$

auquel correspond le profil  $\text{JL}_120.120.11$  dont le moment d'inertie est

$$J_x = 2 \times 628 = 1256 \text{ cm}^4 > J_b$$

### Résumé

Dans le présent article l'auteur a donné, dans le domaine élastique, une solution du problème de la stabilité des plaques rectangulaires minces renforcées par des raidisseurs horizontaux et verticaux, sollicitée simultanément à la flexion composée et au cisaillement. L'auteur a basé ses études sur l'analyse de l'équation différentielle de la surface élastique de la plaque.

Par cette méthode, l'auteur a résolu le problème dans le cas général quant à la forme et aux sollicitations.

A titre d'application, l'auteur a mentionné deux cas spéciaux: une plaque munie de raidisseurs suivant des considérations pratiques, sollicitée à la flexion pure et de même à la flexion et au cisaillement, en fournissant des tableaux des valeurs des contraintes critiques en fonction de la rigidité des raidisseurs.

### Zusammenfassung

Der Verfasser behandelt das Problem der Stabilität im elastischen Bereich von rechteckigen, dünnen Platten, die durch horizontale und vertikale Versteifungen verstärkt und die gleichzeitig durch Biegung, Druck und Schub beansprucht sind. Der Untersuchung wurde die Differentialgleichung der elastischen Fläche zu Grunde gelegt.

Dadurch war, was die Gestalt und die Beanspruchungen anbelangt, eine allgemeine Behandlung des Problems möglich.

Als Anwendung wurden zwei Sonderfälle behandelt: eine nach praktischen Gesichtspunkten versteifte Platte unter reiner Biegung, sowie unter Biegung und Schub, wobei in Tabellenform die kritischen Spannungswerte in Abhängigkeit der Versteifungen angegeben werden.

### Summary

The author deals with the problem of stability in the elastic region of rectangular, thin slabs which are strengthened with horizontal and vertical stiffeners and stressed simultaneous by bending, compression and shear. The investigation was based on the differential equation of the elastic surface.

In this way, in so far as shape and stresses are concerned, a more general treatment of the problem was possible.

As an application two special cases were treated: a slab reinforced in accordance with practical ideas subjected to pure bending, as well as to bending and shear, the critical values of the stresses being given in tabular form in dependence on the stiffenings.