Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 8 (1947)

Artikel: Solution statique et dynamique des pylônes d'antenne haubanés
Autor: Koloušek, Vladimir
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-8888

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SOLUTION STATIQUE ET DYNAMIQUE DES PYLÔNES D'ANTENNE HAUBANÉS

STATISCHE UND DYNAMISCHE BERECHNUNG ABGESPANNTER ANTENNENTÜRME

STATIC AND DYNAMIC CALCULATION OF STAYED ANTENNAE MASTS

Ing. Dr. VLADIMÍR KOLOUŠEK, Prague

Introduction

Le calcul des pylônes haubanés était suffisamment étudié pour les surcharges stables et l'article suivant n'apporte dans sa première partie qui traite les questions statiques des pylônes aucune conclusion nouvelle. Cependant, l'auteur a considéré comme favorable de sortir dans ses réflexions, se rapportant à la dynamique des pylônes, de la théorie statique et pour cette raison il a cité au début les rélations fondamentales de la statique des pylônes haubanés et simultanément il a appliqué pour ces constructions la théorie du flambage bien connue pour le cas du flambage des portiques.

Dans la deuxième et principale partie du traité on a essayé de résoudre le problème de la vibration propre des pylônes haubanés et — au moins approximativement — la question de leur vibration forcée.

Des vibrations observées sur les pylônes réalisés sont souvent dangereuses pour la stabilité de la construction et par conséquant il sera intéressant d'envisager la solution de ce problème dynamique [1]). Par suite de la hauteur considérable des pylônes, de leur profil mince et de leur surcharge engendrée par le vent qui varie en fonction du temps et de la hauteur au-dessus du sol, les déformations dynamiques peuvent dépasser les déformations provoquées par les charges stables. Pour le moment, il n'a pas été possible de traiter le problème de la façon la plus générale car il deviendrait très complexe en tenant compte de la charge variable qui dépend non seulement de la forme de la construction et de la vitesse changeante du vent mais aussi du mouvement propre de la construction. Pour simplifier le problème nous avons introduit dans le calcul quelques suppositions qui ne correspondent que très approximativement à la réalité. Malgré cela l'auteur espère que la solution qu'il donne dans le présent article contribuera à calculer plus exactement les pylônes haubanés.

I. Le calcul statique des pylônes haubanés et leur flambage

1. Le calcul statique.

Le pylône haubané représente une poutre continue sur appuis élastiques. Mais la solution des pylônes haubanés est plus complexe que le calcul habituel des poutres continues parce qu'il faut d'avance déterminer la souplesse des appuis en tenant compte de l'élasticité et de la flèche des haubans.

---

[1]) Nous avons pris en considération des barres à section constante, mais il serait possible de généraliser la méthode pour la section variable.

a) La souplesse des appuis.

Chaque appui du mât est preservé contre le déplacement outre mesure par trois, quatre ou plusieurs haubans. Sous la charge uniforme par unité de longueur, le hauban prend la forme de la chaînette, qui ne diffère pas beaucoup de la parabole. On peut accepter la forme parabolique (en accord avec la pratique habituelle de calcul) d'autant plus, que le hauban est chargé non seulement par le poids propre et le vent mais aussi par les charges isolées comme par les isolateurs, tendeurs etc. ainsi que la chaînette ne correspond plus a l'état réel.

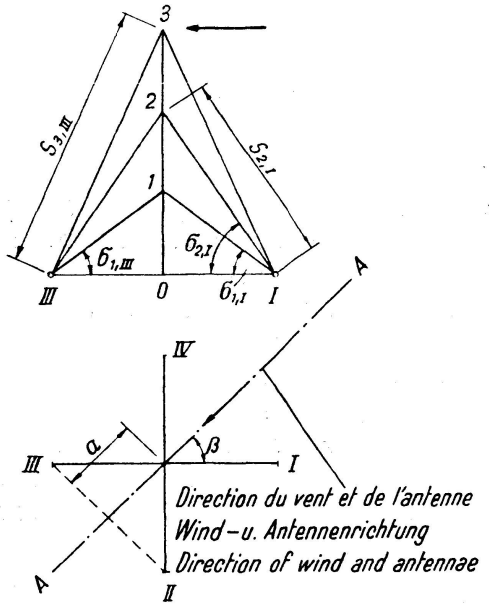

Fig. 1

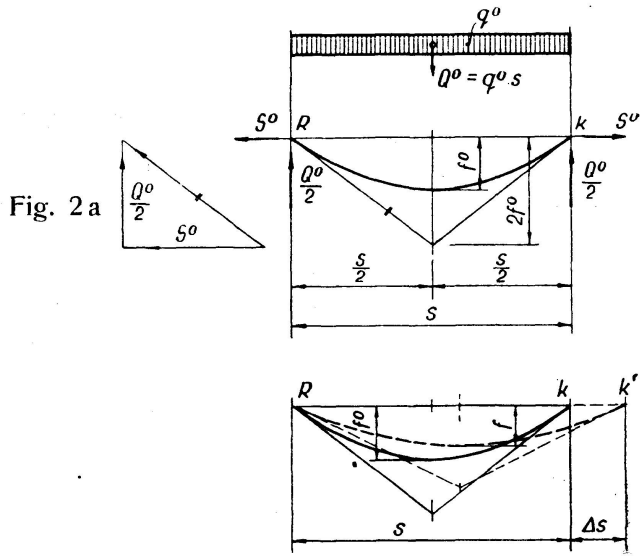

Fig. 2a

Fig. 2b

Si le pylône n'est chargé que par les charges permanentes, le hauban est tendu par la force S^0 et sollicité par la charge uniforme dont la composante perpendiculaire à la corde a la valeur Q^0, la flèche maximum étant en ce cas f^0 (fig. 2a). Si le pylône est chargé par la poussée du vent, il se produit dans le câble la traction S, la composante transversale de la charge étant Q et la flèche f (fig. 2b). On peut exprimer la variation de la longueur de la corde par l'équation:

$$\Delta s = -\frac{8}{3}\frac{f^2}{s} + \frac{Ss}{UE} + \frac{8f^{0^2}}{3s} - \frac{S^0 s}{UE}. \tag{1}$$

Dans la formule (1) le premier et le troisième membre à droite répresentent la différence entre la longueur de l'arc parabolique et celle de la corde, le deuxième et quatrième membre l'allongement élastique produit par la force S resp. S^0.

$$\text{Avec } \frac{2f}{\frac{s}{2}} = \frac{Q}{2S} \quad \text{on a} \quad \Delta s = -\frac{Q^2 s}{24 S^2} + \frac{Ss}{UE} + \frac{Q^{0^2} s}{24 S^{0^2}} - \frac{S^0 s}{UE}. \tag{2}$$

Si on examine le pylône symétriquement haubané (fig. 1) qui est chargé dans le plan de symétrie A—A, les appuis 1, 2, 3 se déplacent dans le même plan de la distance horizontale v. Pour v et Δs on a la relation

$$v = \frac{\Delta s}{\cos\sigma \cdot \cos\beta} \tag{3}$$

Il s'en suit

$$v = \frac{A}{S^2} + BS + C, \tag{4}$$

où

$$A = -\frac{Q^2 s}{24 \cos\sigma \cos\beta}, \tag{5}$$

$$B = \frac{s}{UE \cos\sigma \cos\beta}, \tag{6}$$

$$C = \left(\frac{Q^{02} s}{24 S^0} - \frac{S^0 s}{UE}\right) \frac{1}{\cos\sigma \cdot \cos\beta} \tag{7}$$

La réaction d'appui de la poutre continue — du mât — doit être égale à la composante horizontale de la résultante de forces de tous les haubans qui sont attachés a l'appui. Il vaut pour le pylône de la fig. 1

$$V_k = 2(S_{k,\mathrm{I}} - S_{k,\mathrm{II}}) \frac{a}{s_{k,\mathrm{I}}} \tag{8}$$

Cette réaction V agit de même dans le plan de symétrie A—A. Les équations (4) et (8) déterminent la rélation entre la réaction V et le déplacement v. Cette relation n'est pas linéaire, parceque l'équation (4) qui est graphiquement représentée par une courbe ne l'est pas. Pour pouvoir traiter le pylône comme une poutre continue sur appuis élastiques on suppose la relation linéaire:

$$v = K + \varkappa V \tag{9}$$

(K, $\varkappa$ étant des constantes) et graphiquement on remplace la courbe par une droite. Cette supposition est juste, si la droite touche la courbe dans le point déterminé par la réaction V (respectivement par le déplacement v). Parce qu'on ne connaît pas d'avance V (v), on doit résoudre par tâtonnement.

b) Solution statique de la poutre continue sur appuis élastiques par la méthode de déformation.

Pour le calcul du flambage et des vibrations des pylônes haubanés on emploie la méthode de déformation et c'est pourquoi on se sert de la même méthode aussi pour le calcul statique bien que le nombre des équations à résoudre soit plus grand que dans les autres méthodes.

Les conditions d'équilibre dans un noeud quelconque k sont exprimées par des équations

$$M_{k,k-1} + M_{k,k+1} = 0 \tag{10}$$

$$V_{k,k-1} + V_{k,k+1} + V_{k,p} = 0 \tag{11}$$

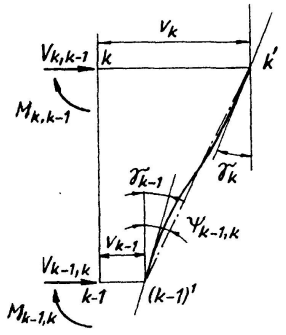

Fig. 3

Si la section du mât dans chaque travée est constante, on a pour les forces et les moments aux extrémités d'une barre rigidement attachée aux deux bouts les relations connues (notations après la figure 3):

$$M_{k,k-1} = \frac{2EJ}{l}\left(2\gamma_k + \gamma_{k-1} - 3\frac{v_k - v_{k-1}}{l}\right) + \mathfrak{M}_{k,k-1}, \tag{12}$$

$$V_{k,k-1} = \frac{6EJ}{l^2}\left(-\gamma_k - \gamma_{k-1} + 2\frac{v_k - v_{k-1}}{l}\right) + \mathfrak{W}_{k,k-1}, \tag{13}$$

Si l'une des extrémités $(k-1)$ est articulée, on a

$$M_{k,k-1} = \frac{3EJ}{l}\left(\gamma_k - \frac{v_k - v_{k-1}}{l}\right) + \mathfrak{M}_{k,k-1}, \tag{14}$$

$$V_{k,k-1} = \frac{3EJ}{l^2}\left(-\gamma_k + \frac{v_k - v_{k-1}}{l}\right) + \mathfrak{W}_{k,k-1}. \tag{15}$$

$\mathfrak{M}_{k,k-1}$ est le moment fléchissant, $\mathfrak{W}_{k,k-1}$ la réaction de la barre parfaitement encastrée (aux deux extrémités resp. à l'extrémité k) qui sont produites par la charge extérieure.

La force $V_{k,p}$ qui agit à l'appui élastique est donnée par la formule

$$V_{k,p} = \frac{v_k}{\varkappa_k} - \frac{K_k}{\varkappa_k}. \tag{16}$$

c) Exemple numérique.

Les dimensions du mât et des haubans. Les dimensions du pylône sont reproduites dans la figure 4. Le mât est construit en tubes d'acier. Le modul d'élasticité est $E = 2\,150\,000$ kg/cm².

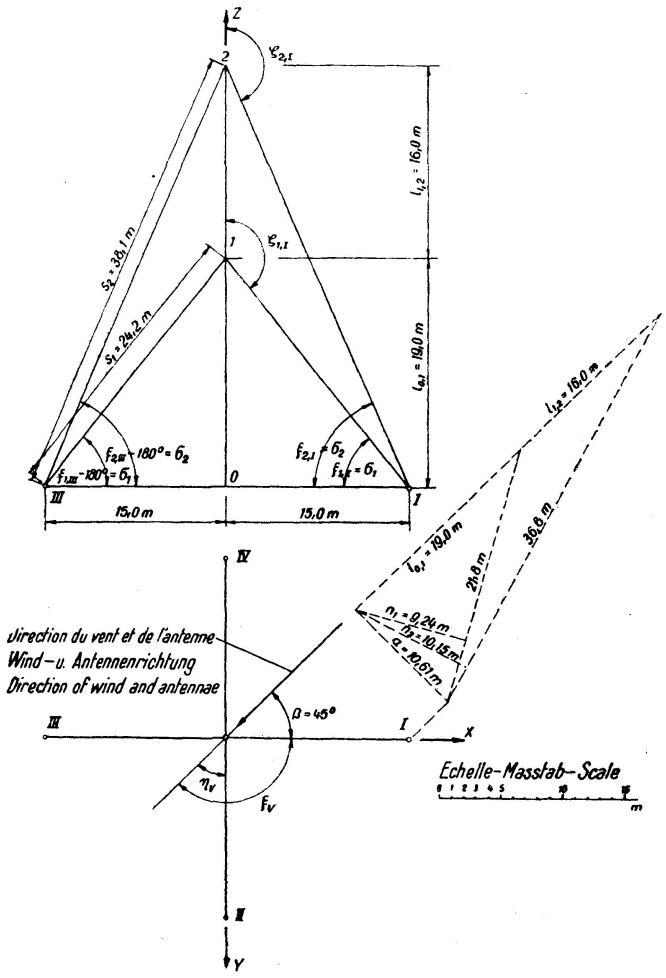

Fig. 4

Les dimensions des tubes

	Travée 0—1	Travée 1—2
Diamètre extérieur	$D_{0,1} = 279$ mm	$D_{1,2} = 229$ mm
Diamètre intérieur	$d_{0,1} = 264$ mm	$d_{1,2} = 216$ mm
Épaisseur de la paroi du tube	$\delta_{0,1} = 7{,}5$ mm	$\delta_{1,2} = 6{,}5$ mm
Surface de la section	$U_{0,1} = 63{,}971$ cm²	$U_{1,2} = 45{,}435$ cm²
Moment d'inertie	$J_{0,1} = 5898{,}77$ cm⁴	$J_{1,2} = 2814{,}06$ cm⁴
Rayon de giration	$i_{0,1} = 9{,}60$ cm	$i_{1,2} = 7{,}87$ cm
Modul de résistance	$W_{0,1} = 422$ cm³	$W_{1,2} = 246$ cm³
Poids par mètre courant	$g_{0,1} = 49{,}90$ kg/m'	$g_{1,2} = 35{,}44$ kg/m'

Chaque hauban se compose de 6 brins dont chacun a 19 fils d'acier; la résistance à la traction est de 130 kg/mm² et le modul d'élasticité $\bar{E} = 1\,600\,000$ kg/cm².

Les dimensions des câbles

	Haubans 1	Haubans 2
Diamètre extérieur	$\Phi_1 = 8$ mm	$\Phi_2 = 11$ mm
Diamètre du fil	$= 0{,}5$ mm	$= 0{,}7$ mm
Surface de la section	$U_1 = 22{,}4$ mm²	$U_2 = 43{,}9$ mm²
Poids par mètre courant	$\bar{g}_1 = 0{,}21$ kg/m'	$\bar{g}_2 = 0{,}41$ kg/m'

La charge. Le pylône est chargé par la pression du vent dans la direction donnée dans la figure, par la tension d'antenne $H = 700$ kg de la même direction, par son poids propre et les tensions des haubans. La pression du vent est supposée dans la travée 0,1 $q^v_{0,1} = 28$ kg/m', dans la travée 1,2 $q^v_{1,2} = 23$ kg/m'.

Nous ne voulons pas reproduire le calcul de la pression du vent sur les haubans, qui est assez complexe et qui dépend des reglements différents dans les divers pays. Sur les haubans 1—I et 1—III on a supposé la pression du vent $q^v_{1,I} = 0{,}645$ kg/m', sa direction étant donnée par les cosinus: $\cos\xi_{R_{1,I}} = -0{,}484$, $\cos\eta_{R_{1,I}} = 0{,}786$, $\cos\zeta_{R_{1,I}} = -0{,}383$. La charge totale du hauban 1—I se compose de la pression du vent et du poids propre. Les composantes de la charge totale $\bar{r}$ dans les directions des axes des coordonnées par mètre courant du câble sont

$$\bar{r}^x = \bar{q}^v \cdot \cos\xi_{R_{1,I}} = -0{,}645 \cdot 0{,}484 = -0{,}312 \text{ kg/m}',$$
$$\bar{r}^y = \bar{q}^v \cdot \cos\eta_{R_{1,I}} = 0{,}645 \cdot 0{,}786 = 0{,}507 \text{ kg/m}',$$
$$\bar{r}^z = \bar{q}^v \cdot \cos\zeta_{R_{1,I}} - \bar{g}_1 = -0{,}645 \cdot 0{,}383 - 0{,}21 = -0{,}457 \text{ kg/m}',$$

et leur résultante

$$\bar{r} = \sqrt{\bar{r}^{x2} + \bar{r}^{y2} + \bar{r}^{z2}} = \sqrt{0{,}0973 + 0{,}257 + 0{,}209} = 0{,}750 \text{ kg/m}'.$$

et les cosinus directeurs de la résultante $R_{1,I} (= \bar{r} \cdot s)$ de la charge totale

$$\cos\xi_{\bar{R}_{1,I}} = -\frac{0{,}312}{0{,}750} = -0{,}416, \qquad \cos\eta_{\bar{R}_{1,I}} = \frac{0{,}507}{0{,}750} = 0{,}676,$$

$$\cos\zeta_{\bar{R}_{1,I}} = -\frac{0{,}457}{0{,}750} = -0{,}609.$$

La résultante $\bar{R}_{1,I}$ et la corde du hauban forment entre eux l'angle $90 - \varphi_{1,I}$, pour lequel on a

$$\cos(90 - \varphi_{1,I}) = \cos\xi_{1,I} \cdot \cos\xi_{\bar{R}_{1,I}} + \cos\eta_{1,I} \cdot \cos\eta_{\bar{R}_{1,I}} + \cos\zeta_{1,I} \cdot \cos\zeta_{\bar{R}_{1,I}}$$
$$= -0{,}620 \cdot 0{,}416 + 0{,}785 \cdot 0{,}609 = 0{,}220.$$

Il s'en suit $\cos\varphi_{1,I} = \sqrt{1-0{,}220^2} = 0{,}976$.

La charge totale transversale du hauban 1—I est ensuite

$$Q_{1,I} = \bar{r}_{1,I} \cdot s_{1,I} \cdot \cos\varphi_{1,I} = 0{,}750 \cdot 24{,}2 \cdot 0{,}976 = 17{,}7 \text{ kg}.$$

Analogiquement on détermine la charge du hauban 1—II qui est diminuée par le vent et a la valeur $Q_{1,II} = 13{,}9$ kg.

Si le vent n'agit pas, les haubans ne sont chargés que par le poids propre, dont la composante transversale a la valeur

$$Q_1^0 = \bar{g}_1 \cdot s_1 \cdot \cos\xi_{1,I} = 0{,}21 \cdot 24{,}2 \cdot 0{,}620 = 3{,}15 \text{ kg}.$$

La tension initiale des haubans est supposée: $S_1^0 = 500$ kg.

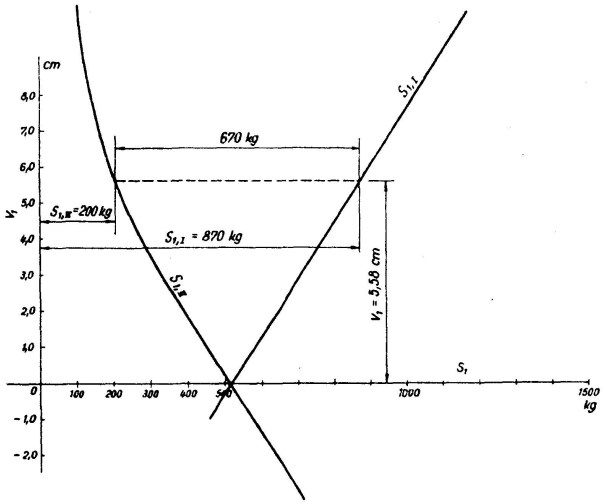

Fig. 5

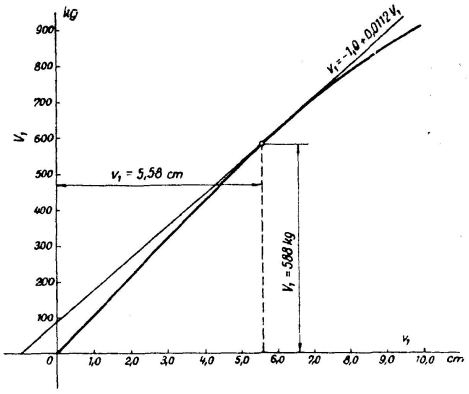

Fig. 6
Variation de la réaction V_1
Verlauf der Auflagerkraft V_1
Variation in the reaction V_1.

L'élasticité des appuis. Si l'on substitue les valeurs numériques déterminées ci-dessus, dans les formules (5), (6), (7) il vient

$$A_{1,I} = -\frac{Q_{1,I}^2 \cdot s_1 \cdot \sqrt{2}}{24 \cos\xi_{1,I}} = -\frac{1}{24}\,\frac{17{,}7^2 \cdot 24{,}2\sqrt{2}}{0{,}620} = -720 \text{ kg}^2 \cdot \text{m},$$

$$B_{1,I} = \frac{s_1 \cdot \sqrt{2}}{\bar{U}_1 \bar{E} \cos\xi_{1,I}} = \frac{24{,}2\sqrt{2}}{22{,}4 \cdot 16000 \cdot 0{,}620} = 0{,}000154 \text{ m/kg},$$

$$A_{1,II} = \frac{Q_{1,II}^2 \cdot s_1 \cdot \sqrt{2}}{24 \cdot \cos\eta_{1,II}} = 445 \text{ kg}^2 \cdot \text{m}, \qquad B_{1,II} = -B_{1,I} = -0{,}000154 \text{ m/kg},$$

$$C_{1,I} = -C_{1,II} = \left[\frac{Q_1^{0^2} s_1}{24\, S_1^{0^2}} - \frac{S_1^0 s_1}{\bar{U}_1 \bar{E}}\right] \frac{\sqrt{2}}{\cos\xi_{1,I}} = \frac{2{,}30 \cdot 3{,}15^2}{500^2} - \frac{500 \cdot 24{,}2 \cdot \sqrt{2}}{22{,}4 \cdot 16000 \cdot 0{,}620} = -0{,}0770 \text{ m}.$$

L'équation (4) pour le hauban 1—I aura ensuite la forme (exprimé en mètres):

$$v_1 = -\frac{720}{S_{1,I}^2} + 0{,}000154\, S_{1,I} - 0{,}0770$$

et pour le hauban 1—II:

$$v_1 = \frac{445}{S_{1,II}^2} - 0{,}000154\, S_{1,II} + 0{,}0770.$$

Les deux fonctions sont graphiquement représentées dans la figure 5. La réaction horizontale dans la direction du vent a la grandeur (d'après l'équation (8))

$$V_1 = 2(S_{1,I} - S_{1,II})\frac{10,6}{24,2} = 0,877(S_{1,I} - S_{1,II}).$$

La figure 6 montre V_1 en fonction du v_1.

Par le procédé analogue on obtient les formules pour les haubans 2. L'équation (4) a pour le hauban 2—I la forme

$$v_2 = -\frac{10630}{S_{2,I}^2} + 0,000195\, S_{2,I} - 0,195,$$

et pour le hauban 2—II

$$v_2 = \frac{6980}{S_{2,II}^2} - 0,000195\, S_{2,II} + 0,195.$$

Les fonctions sont graphiquement représentées dans la figure 7. La réaction horizontale (dans la direction du vent) de l'appui est d'après l'équation (8):

$$V_2 = 2(S_{2,I} - S_{2,II})\frac{10,61}{38,1} = 0,556(S_{2,I} - S_{2,II}).$$

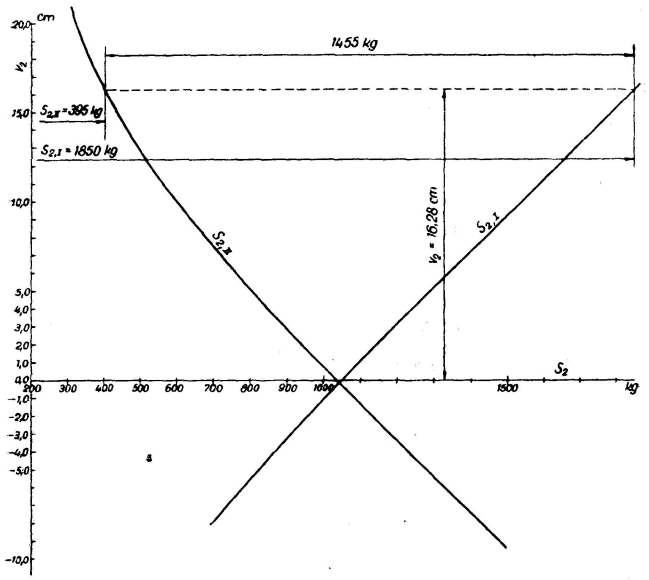

Fig. 7.
Variation des tensions des haubans 2
Verlauf der Abspannkräfte S_2
Stress variation in the stays 2.

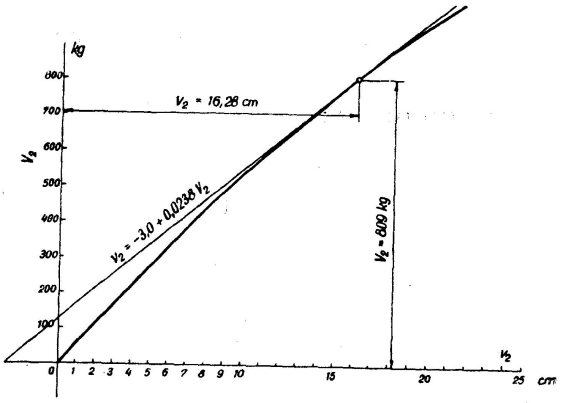

Fig. 8.
Variation de la réaction V_2
Verlauf der Auflagerkraft V_2
Variation in the reaction V_2.

D'après les figures 6 et 8 et la formule (9) on peut évaluer la relation entre le déplacement et la réaction

$$\text{à l'appui 1:} \quad v_1 = -0,01 + 0,112\, V_1, \tag{17a}$$

$$\text{à l'appui 2:} \quad v_2 = -0,03 + 0,238\, V_2. \tag{17b}$$

Dans les formules on substitue V en tonnes et v résulte en mètres.

La solution du pylône par la méthode de déformation. Si l'on résout l'exemple par la méthode de déformation, on obtient

3 équations exprimant l'équilibre des moments dans l'appui 1 et l'équilibre des forces dans les appuis 1 et 2 (Tab. I).

Tab. I.

	γ_1	ν_1	ν_2	
I	$\frac{3EJ_{0,1}}{l_{0,1}} + \frac{3EJ_{1,2}}{l_{1,2}}$	$-\frac{3EJ_{0,1}}{l_{0,1}^2} + \frac{3EJ_{1,2}}{l_{1,2}^2}$	$-\frac{3EJ_{1,2}}{l_{1,2}^2}$	$= -\mathfrak{M}_{1,0} - \mathfrak{M}_{1,2}$
II	$-\frac{3EJ_{0,1}}{l_{0,1}^2} + \frac{3EJ_{1,2}}{l_{1,2}^2}$	$\frac{3EJ_{0,1}}{l_{0,1}^3} + \frac{3EJ_{1,2}}{l_{1,2}^3} + \frac{1}{\varkappa_1}$	$-\frac{3EJ_{1,2}}{l_{1,2}^3}$	$= \frac{K_1}{\varkappa_1} - \mathfrak{W}_1$
III	$-\frac{3EJ_{1,2}}{l_{1,2}^2}$	$-\frac{3EJ_{1,2}}{l_{1,2}^3}$	$\frac{3EJ_{1,2}}{l_{1,2}^3} + \frac{1}{\varkappa_2}$	$= \frac{K_2}{\varkappa_2} - \mathfrak{W}_2$

Si l'on substitue les valeurs numériques on a

$$\frac{3EJ_{0,1}}{l_{0,1}} = \frac{3 \cdot 21{,}5 \cdot 10^6 \cdot 0{,}5899 \cdot 10^{-4}}{19} = 200{,}5 \text{ tm},$$

$$\frac{3EJ_{1,2}}{l_{1,2}} = \frac{3 \cdot 21{,}5 \cdot 10^6 \cdot 0{,}2814 \cdot 10^{-4}}{16} = 113{,}5 \text{ tm},$$

$$\frac{3EJ_{0,1}}{l_{0,1}^2} = 10{,}54 \text{ t}, \quad \frac{3EJ_{1,2}}{l_{1,2}^2} = 7{,}10 \text{ t}, \quad \frac{3EJ_{0,1}}{l_{0,1}^3} = 0{,}554 \text{ t/m}, \quad \frac{3EJ_{1,2}}{l_{1,2}^3} = 0{,}443 \text{ t/m},$$

$$\frac{1}{\varkappa_1} = \frac{1}{0{,}112} = 8{,}93 \text{ t/m}, \quad \frac{1}{\varkappa_2} = \frac{1}{0{,}238} = 4{,}20 \text{ t/m}.$$

Les membres absolus ont la valeur

$$\frac{K_1}{\varkappa_1} = -\frac{0{,}01}{0{,}112} = -0{,}0893 \text{ t}, \quad \frac{K_2}{\varkappa_2} = -\frac{0{,}03}{0{,}238} = -0{,}126 \text{ t}$$

$$\mathfrak{M}_{1,0} = \frac{1}{8} \cdot 0{,}028 \cdot 19{,}0^2 = 1{,}264 \text{ tm},$$

$$\mathfrak{M}_{1,2} = -\frac{1}{8} \cdot 0{,}023 \cdot 16{,}0^2 = -0{,}736 \text{ tm},$$

$$\mathfrak{W}_1 = -\left(0{,}450 + \frac{1{,}264}{19{,}0} + \frac{0{,}736}{16{,}0}\right) = -(0{,}450 + 0{,}0665 + 0{,}0460) = -0{,}563 \text{ t},$$

$$\mathfrak{W}_2 = -(0{,}700 + 0{,}184 - 0{,}046) = -0{,}838 \text{ t}.$$

Ainsi, on obtient (Tab. II)

Tab. II.

	γ_1	ν_1	ν_2	
I	314,0	-3,44	-7,10	= -0,528
II	-3,44	9,93	-0,443	= 0,474
III	-7,10	-0,443	4,643	= 0,712

D'où

$$\gamma_1 = 0{,}00262\,,$$
$$v_1 = 0{,}0558 \text{ m}\,,$$
$$v_2 = 0{,}1628 \text{ m}\,,$$

et d'après (14) et (15)

$$M_1 = -M_{1,0} = -1{,}264 - 200{,}5 \cdot 0{,}00262 + 10{,}54 \cdot 0{,}0558$$
$$= -1{,}264 - 0{,}526 + 0{,}590 = -1{,}200 \text{ tm}\,,$$
$$M_1 = M_{1,2} = -0{,}736 + 113{,}5 \cdot 0{,}00262 - 7{,}10\,(0{,}1628 - 0{,}0558) = -1{,}199 \text{ tm}\,,$$
$$V_1 = -V_{10} - V_{12} = 3{,}44 \cdot 0{,}00262 - 0{,}997 \cdot 0{,}0558 + 0{,}443 \cdot 0{,}1628 + 0{,}563$$
$$= 0{,}00902 - 0{,}0556 + 0{,}0722 + 0{,}563 = 0{,}589 \text{ t}\,,$$
$$V_2 = -V_{2,1} = 7{,}10 \cdot 0{,}00262 + 0{,}443\,(0{,}0558 - 0{,}1628) + 0{,}838$$
$$= 0{,}0186 - 0{,}0475 + 0{,}838 = 0{,}809 \text{ t}\,.$$

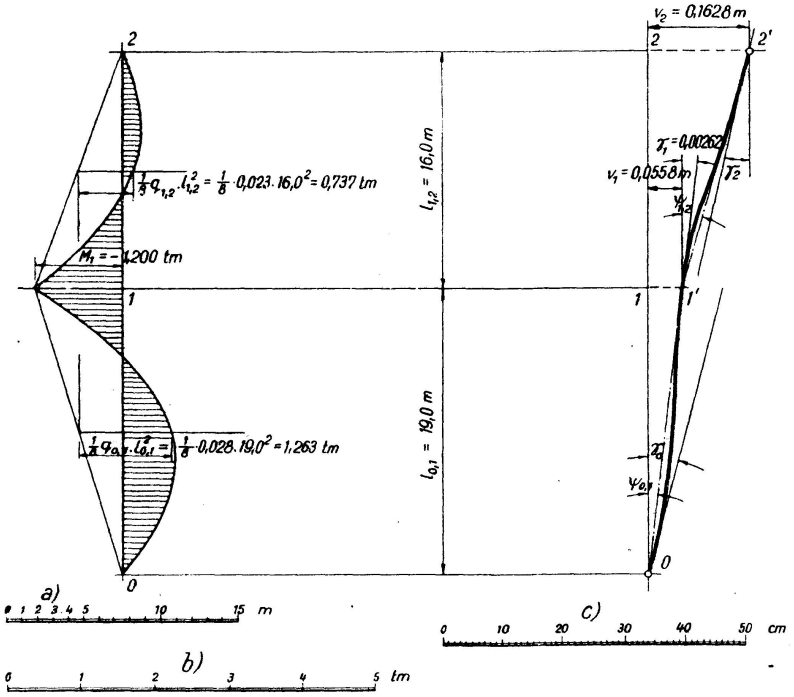

Fig. 9.

Variation du moment fléchissant — Verlauf des Biegungsmomentes — Variation in bending moment.

Déformation statique du mât — Statische Formänderung des Mastes — Static deformation of the mast.

a) Echelle des longueurs — Maßstab der Längen — Scale of lengths.
b) Echelle des moments — Maßstab der Momente — Scale of moments.
c) Echelle des déformations — Maßstab der Formänderungen — Scale of deformations.

Il ressort des figures 6 et 8 que les déplacements évalués satisfont les équations (16) et (17). La figure 9 montre la déformation du mât et la variation du moment fléchissant.

Les forces axiales du mât. Le poids propre du mât est insignifiant en comparaison avec les composantes verticales des tensions des haubans. On peut alors considérer la force axiale du mât comme constante dans chaque travée et égale à la force axiale au milieu de la travée corres-

pondante. On peut évaluer la composante verticale des tensions des haubans d'après la formule:

$$N = 2 \cos \zeta_{k,\mathrm{I}} (S_{k,\mathrm{I}} + S_{k,\mathrm{II}}) .$$

La force axiale est alors dans la travée 1—2:

La composante verticale des tensions des haubans 1	$-2 \cdot 0{,}919\,(1850 + 395)$	=	-4130 kg
du poids propre du mât	$-\frac{1}{2} \cdot 16{,}00 \cdot 35{,}44$	=	-280 »
	$N_{1,2}$	=	-4410 kg
		=	~ -4500 »

et dans la travée 0—1:

La force $N_{1,2}$		=	-4500 kg
du poids propre de la moitié de la travée 1–2		=	-280 »
des tensions des haubans 1, 2	$-2 \cdot 0{,}785\,(870 + 200)$	=	-1680 «
du poids propre de la travée 0–1	$-\frac{1}{2} \cdot 19{,}0 \cdot 49{,}90$	=	-470 »
			-6930 kg
	$N_{0,1}$	=	~ -7000 ».

On ne peut évaluer les contraintes dans les tubes du mât qu'après la solution du flambage, qui est traité dans le chapitre suivant.

Les tensions dans les haubans ressortent directement des figures 5 et 7. On a $S_{1,\mathrm{I}} = 870$ kg, $S_{1,\mathrm{II}} = 200$ kg, $S_{2,\mathrm{I}} = 1850$ kg, $S_{2,\mathrm{II}} = 395$ kg.

2. Solution du flambage.

L'étude exacte du flambage des pylônes haubanés serait un problème très complexe parce qu'on ne peut pas exprimer l'élasticité des appuis par la relation linéaire et parce que les déplacements des appuis produisent le changement des tensions des haubans et alors de même des forces axiales du mât.

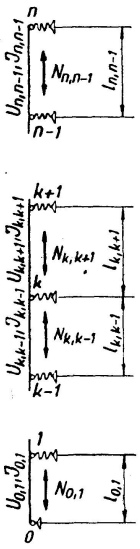

Fig. 10

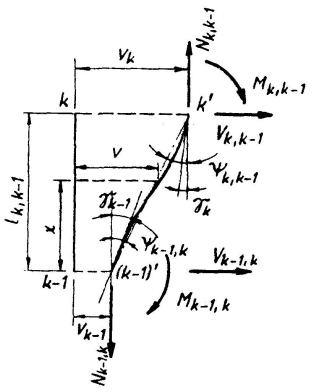

Fig. 11

En résolvant le flambage des portiques on néglige l'influence de la charge portée sur les déformations des membrures et on n'envisage que les forces axiales. De cette façon le calcul de la sécurité contre le flambage par la méthode de déformation est relativement facile [2]). D'après les mêmes prin-

[2]) Chwalla Jokisch: Stahlbau 1941, p. 33.

cipes on peut déterminer la sécurité des pylônes d'antenne haubanés. On ne conserve de la charge que les forces axiales et au surplus on ne se soucie pas de l'influence du déplacement des appuis sur les forces axiales du mât et on fait l'abstraction de la circonstance que la relation entre les déplacements des appuis et leurs réactions n'est pas linéaire. Dans ces conditions le pylône est considéré comme une poutre continue sur appuis élastiques. L'idée qu'on se fera sur le flambage des pylônes haubanés sera certainement assez inexacte, mais la question pourra être traitée par le calcul.

Dans la figure 10 est représentée la poutre continue sur appuis élastiques, chargée seulement par les forces axiales (dans la travée $k-1$, k par la force $N_{k-1,k}$ qui est négative comme traction). Aux extrémités de la barre $k-1,k$ dont les bouts peuvent subir les rotations γ_{k-1}, γ_k et les déplacements v_{k-1}, v_k (fig. 11), naissent les moments et les forces dont la valeur dépend de la grandeur de la force axiale de la barre. Si le système flambe, les conditions d'équilibre des forces et des moments pour tous les appuis doivent être satisfaites

$$M_{k(k-1)} + M_{k(k+1)} = 0\,, \tag{18}$$

$$V_{k(k-1)} + V_{k(k+1)} + V_{k,p} = 0\,. \tag{19}$$

On obtient les forces V et les moments M aux extrémités d'une barre à section constante, en résolvant l'équation différentielle

$$v'''' - \frac{mN}{EJ} v'' = 0 \tag{20}$$

N étant la force axiale dans la barre (négative comme traction), m le coefficient de sécurité. Après l'intégration de l'équation (20) dans le cas de la barre comprimée on a

$$v = \bar{C}_1 + \bar{C}_2 x + \bar{C}_3 \cos z \frac{x}{l} + \bar{C}_4 \sin z \frac{x}{l}\,. \tag{21}$$

où

$$z = l\sqrt{\frac{-mN}{EJ}}\,. \tag{22}$$

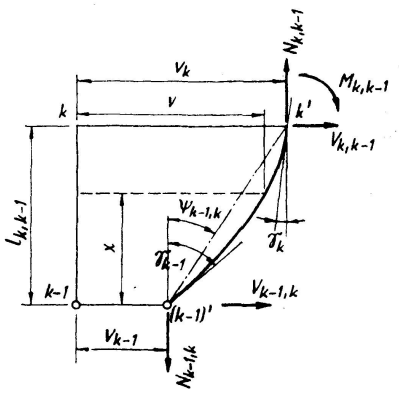

Fig. 12

De l'équation (21) et des conditions d'appui on peut calculer les forces et les moments fléchissants d'une barre, dont les déformations aux extrémités sont connues. Si par exemple une barre est attachée rigidement à une extrémité (point k) et par une articulation à l'autre (point $k-1$) (fig. 12), les conditions d'appui sont données par les valeurs v_{k-1}, $M_{k-1,k} = -EJv''(0)$, v_k, γ_k et les constantes d'intégrations auront la forme suivante

$$\bar{C}_3 = 0, \quad \bar{C}_1 = v_{k-1}, \quad \bar{C}_2 = \gamma_k \frac{\sin z}{\sin z - z\cos z} - \frac{v_k - v_{k-1}}{l} \cdot \frac{z\cos z}{\sin z - z\cos z},$$
$$\bar{C}_4 = \frac{-l\gamma_k + v_k - v_{k-1}}{\sin z - z\cos z}, \tag{23}$$

et, partant, pour la déformation on a $\left[\text{avec } \frac{v_k - v_{k-1}}{l} = \psi\right]$

$$v = v_{k-1} + \psi x + (\gamma_k - \psi)\frac{\sin z}{\sin z - z\cos z}\left(x - \frac{l}{\sin z}\cdot \sin z\frac{x}{l}\right). \tag{24}$$

Pour les forces et les moments aux extrémités d'une barre on peut écrire ensuite

$$\left.\begin{aligned}
M_{k,k-1} &= \gamma_k \frac{z^2 \sin z}{l'(\sin z - z\cos z)} + v_{k-1}\cdot\frac{z^2\sin z}{ll'(\sin z - z\cos z)} - v_k \frac{z^2 \sin z}{ll'(\sin z - z\cos z)},\\
V_{k-1,k} &= \gamma_k \frac{z^2 \sin z}{ll'(\sin z - z\cos z)} + v_{k-1}\cdot\frac{z^3\cos z}{l^2l'(\sin z - z\cos z)} - v_k \frac{z^3 \cos z}{l^2l'(\sin z - z\cos z)},\\
V_{k,k-1} &= -\gamma_k \frac{z^2 \sin z}{ll'(\sin z - z\cos z)} - v_{k-1}\cdot\frac{z^3\cos z}{l^2l'(\sin z - z\cos z)} + v_k \frac{z^3 \cos z}{l^2l'(\sin z - z\cos z)}.
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

L'élasticité des appuis est exprimée par la formule

$$V_{k,p} = \frac{1}{\varkappa_k} v_k. \tag{26}$$

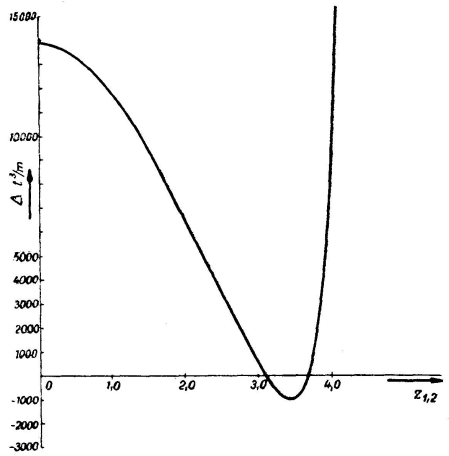

Fig. 13.
Variation du déterminant Δ en fonction de la force axiale — Verlauf der Determinante Δ in Funktion der Axialkraft — Variation of the determinant Δ as a function of the axial force.

Si l'on substitue les expressions pour les forces et les moments aux extrémités dans les formules (18) et (19), on obtient un système d'équations pour la solution du flambage de la poutre continue. Le nombre des équations et égal à celui des déformations cherchées. En absence de membres absolus, on aura la solution non triviale, si le déterminant des coefficients des inconnues s'annule. La sécurité au flambage du mât est déterminée par m correspondant à cette solution.

Exemple numérique.

Pour le pylône de la fig. 4 du chapitre I. l. c. nous obtenons des équations

Tab. III.

	γ_1	ν_1	ν_2	
I	$\frac{z_{0,1}^2 \sin z_{0,1}}{l'_{0,1}(\sin z_{0,1} - z_{0,1}\cos z_{0,1})} + \frac{z_{1,2}^2 \sin z_{1,2}}{l'_{1,2}(\sin z_{1,2} - z_{1,2}\cos z_{1,2})}$	$-\frac{z_{0,1}^2 \sin z_{0,1}}{l_{0,1} l'_{0,1}(\sin z_{0,1} - z_{0,1}\cos z_{0,1})} + \frac{z_{1,2}^2 \sin z_{1,2}}{l_{1,2} l'_{1,2}(\sin z_{1,2} - z_{1,2}\cos z_{1,2})}$	$\frac{-z_{1,2}^2 \sin z_{1,2}}{l_{1,2} l'_{1,2}(\sin z_{1,2} - z_{1,2}\cos z_{1,2})}$	$=0$
II	$\frac{-z_{0,1}^2 \sin z_{0,1}}{l_{0,1} l'_{0,1}(\sin z_{0,1} - z_{0,1}\cos z_{0,1})} + \frac{z_{1,2}^2 \sin z_{1,2}}{l_{1,2} l'_{1,2}(\sin z_{1,2} - z_{1,2}\cos z_{1,2})}$	$\frac{z_{0,1}^3 \cos z_{0,1}}{l_{0,1}^2 l'_{0,1}(\sin z_{0,1} - z_{0,1}\cos z_{0,1})} + \frac{z_{1,2}^3 \cos z_{1,2}}{l_{1,2}^2 l'_{1,2}(\sin z_{1,2} - z_{1,2}\cos z_{1,2})} + \frac{1}{\varkappa_1}$	$\frac{-z_{1,2}^3 \cos z_{1,2}}{l_{1,2}^2 l'_{1,2}(\sin z_{1,2} - z_{1,2}\cos z_{1,2})}$	$=0$
III	$\frac{-z_{1,2}^2 \sin z_{1,2}}{l_{1,2} l'_{1,2}(\sin z_{1,2} - z_{1,2}\cos z_{1,2})}$	$\frac{-z_{1,2}^3 \cos z_{1,2}}{l_{1,2}^2 l'_{1,2}(\sin z_{1,2} - z_{1,2}\cos z_{1,2})}$	$\frac{z_{1,2}^3 \cos z_{1,2}}{l_{1,2}^2 l'_{1,2}(\sin z_{1,2} - z_{1,2}\cos z_{1,2})} + \frac{1}{\varkappa_2}$	$=0$

où $\frac{1}{l'_{0,1}} = \frac{EJ_{0,1}}{l_{0,1}} = \frac{21{,}5 \cdot 10^6 \cdot 0{,}5899 \cdot 10^{-4}}{19{,}0} = 66{,}8$ tm,

$$\frac{1}{l_{0,1} l'_{0,1}} = \frac{66{,}8}{19{,}0} = 3{,}51 \text{ t}, \quad \frac{1}{l_{0,1}^2 l'_{0,1}} = \frac{3{,}51}{19{,}0} = 0{,}1850 \text{ t/m},$$

$$\frac{1}{l'_{1,2}} = \frac{EJ_{1,2}}{l_{1,2}} = \frac{21{,}5 \cdot 10^6 \cdot 0{,}2814 \cdot 10^{-4}}{16{,}0} = 37{,}8 \text{ tm},$$

$$\frac{1}{l_{1,2} l'_{1,2}} = \frac{37{,}8}{16{,}0} = 2{,}36 \text{ t}, \quad \frac{1}{l_{1,2}^2 l'_{1,2}} = \frac{2{,}36}{16{,}0} = 0{,}1477 \text{ t/m}.$$

Pour les forces axiales: $-N_{1,2} = 4500$ kg et $-N_{0,1} = 7000$ kg on a:

$$z_{1,2} = 16{,}0 \sqrt{\frac{4{,}500 \cdot m}{21{,}5 \cdot 10^6 \cdot 2814{,}06 \cdot 10^{-8}}} = \sim 1{,}38 \sqrt{m},$$

$$z_{0,1} = 19{,}0 \sqrt{\frac{7{,}000 \cdot m}{21{,}5 \cdot 10^6 \cdot 5898{,}77 \cdot 10^{-8}}} = \sim 1{,}41 \sqrt{m}.$$

On substitue à m successivement différentes valeurs et on calcule chaque fois $z_{0,1}$ et $z_{1,2}$ et les coefficients correspondants du système des équations (Tab. III). La variation du déterminant Δ est représenté graphiquement en fonction de $z_{1,2}$ dans la figure 13 et dans la figure 14 où est ajoutée la variation des déterminants mineurs. ($S\gamma_{1,I}$ étant le déterminant mineur correspondant au coefficient de la ligne I et de la collone γ_1 etc.).

Il ressort de la figure 13 que le premier cas du flambage est donné par $z_{1,2} = 3{,}10$. De cela il résulte le coefficient de sécurité $m_1 = \left(\frac{3{,}10}{1{,}38}\right)^2 = \sim 5{,}05$, la force axiale critique dans la travée 1—2 $m_1 N_{1,2} = 4{,}5 \cdot 5{,}05 = 22{,}7$ t,

dans la travée 0—1 $-m_1 N_{0,1} = 7{,}0 \cdot 5{,}05 = 35{,}2$ t, et les longueurs au flambage

$$l_{1,2} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{(-m_1 N_{1,2})}{E J_{1,2}}}} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{22{,}7}{21{,}5 \cdot 10^6 \cdot 0{,}2814 \cdot 10^{-4}}}} = 16{,}2 \text{ m},$$

$$l_{0,1} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{35{,}2}{21{,}5 \cdot 10^6 \cdot 0{,}5899 \cdot 10^{-4}}}} = 18{,}9 \text{ m}.$$

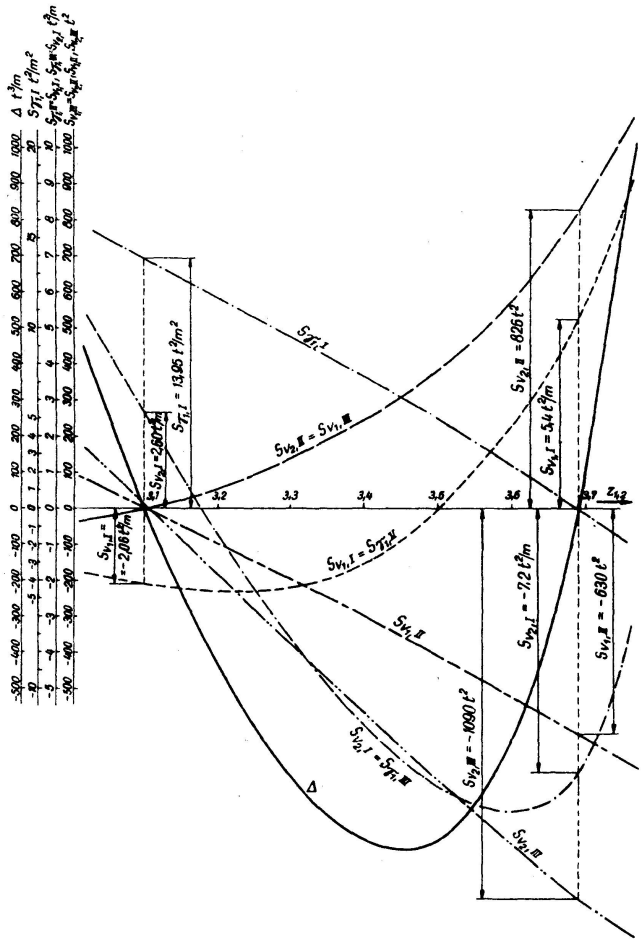

Fig. 14.

Le déterminant et les déterminants mineurs formés des coefficients des inconnues dans les équations du flambage — Determinante und Unterdeterminanten der Koeffizienten der Unbekannten aus den Knickgleichungen — Determinant and sub-determinants of the coefficients of the unknowns in the equations of buckling.

Les rapports des déformations sont déterminés par les rapports des déterminants mineurs correspondants

$$\frac{\gamma_1}{\nu_2} = \frac{S_{\gamma_1,\mathrm{I}}}{S_{\nu_2,\mathrm{I}}} = \frac{13{,}95}{2{,}60} = 5{,}37 \text{ m}^{-1} \qquad \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{S_{\nu_1,\mathrm{I}}}{S_{\nu_2,\mathrm{I}}} = \frac{-2{,}06}{2{,}60} = -0{,}793.$$

La courbe élastique dans le cas du flambage est representée dans la figure 15.

Tensions dans le mât. Si l'on connaît les longueurs au flambage dans chaque travée on peut calculer les contraintes de la façon habituelle. Si l'on a dans la travée 1—2 $\frac{l_{1,2}}{i_{1,2}} = \frac{1620}{7,87} = 206$, on suppose (d'après les réglements tchécoslovaques) $c = \sim 8,28$ et pareillement dans la travée 0—1 $\frac{l_{0,1}}{i_{0,1}} = 197$, $c = \sim 7,58$. Au point 1 dont la section est sollicitée par le moment $M_1 = -1,2$ tm et par les forces axiales $-N_{1,2} = 4500$ kg resp. $-N_{0,1} = 7000$ kg (les dimensions des tubes étant les mêmes que dans l'exemple du chapitre I 1 c) on a les contraintes:

dans la travée 1–2 $\nu = -\frac{120000}{246} - \frac{4500}{45,435} \cdot 8,28 = -489 - 821 = -1310$ kg/cm²,

dans la travée 0–1 $\nu = -\frac{120000}{422} - \frac{7000}{63,971} \cdot 7,58 = -284 - 830 = -1114$ kg/cm².

II. La solution dynamique des pylônes haubanés

Les pylônes d'antenne sont exposés aux influences du vent qui représentent, à coté du poids propre et des tensions initiales des haubans, la partie essentielle de leur charge. L'étude dynamique y'est d'importance éminente. Les vibrations peuvent prendre naissance dans le sens de la direction du vent, si la valeur de la poussée du vent varie plus ou moins régulièrement et peut ainsi produire une charge périodique du moins pour un court intervalle de temps.

Cependant, les constructions minces, exposées à la poussée du vent peuvent osciller même dans le plan perpendiculaire à la direction du vent. Ces oscillations peuvent être causées par le tourbillonnement de KARMÁN, si le mât est cylindrique, ou peuvent être provoquées automatiquement par le tourbillonnement qui est produit à son tour par le mouvement de la construction de certaines formes. Alors, les deux dernières vibrations peuvent se produire particulièrement dans le courant d'air d'intensité constante.

La construction se met à vibrer dangereusement, si la période des forces variables s'accorde avec celle de la vibration propre de la construction. Une telle résonnance apparaît tout à fait accidentellement, si la vibration est causée par la poussée variable du vent. La deuxième cause possible de la vibration, le tourbillonnement de KARMÁN, dépend de la vitesse du vent et la vibration importante ne se produit que dans certaines limites de la vitesse du vent. Enfin, si la forme de la construction est telle, que le mouvement même provoque les forces qui augmentent les oscillations on ne peut parler de la résonnance proprement dite. L'amplitude des vibrations croît régulièrement avec la vitesse du vent.

Il faudrait accorder l'attention surtout aux deux derniers cas de vibration. Malheureusement, nous ne possédons pas assez de bases expérimentales, qui rendraient possible le calcul des forces engendrées. La valeur de l'amplitude des vibrations dépend en outre de l'amortissement qu'on peut déterminer seulement empiriquement. Au point de vue mathématique, le calcul des vibrations forcées est extrèmement difficile, parce que les vibrations aux grandes amplitudes ne sont plus harmoniques.

On analyse, ci-dessous, surtout la vibration propre dont la période ne dépend pas beaucoup de l'amortissement. En supposant l'amplitude infiniment petite la vibration demeurera harmonique. Au chapitre II 1 l'on étudie

la vibration propre approximativement sans tenir compte de la masse vibrante des haubans, au chapitre II 2 l'influence du mouvement de la masse des haubans est envisagée et au chapitre II 3 on traite l'influence de la force statique axiale sur la période et sur les formes de la vibration propre.

Les vibrations forcées sont étudiées sous des suppositions simplifiées au chapitre II 4.

1. La solution approximative de la vibration propre des pylônes haubanés par la méthode de déformation.

Si l'on suppose les amplitudes des oscillations infiniment petites et si l'on fait l'abstraction de l'influence de la vibration des haubans, le pylône haubané représente (comme on l'a déjà supposé pour la solution du flambage) la poutre continue sur appuis élastiques. Pour sa solution dynamique on peut appliquer la méthode de déformation [3]).

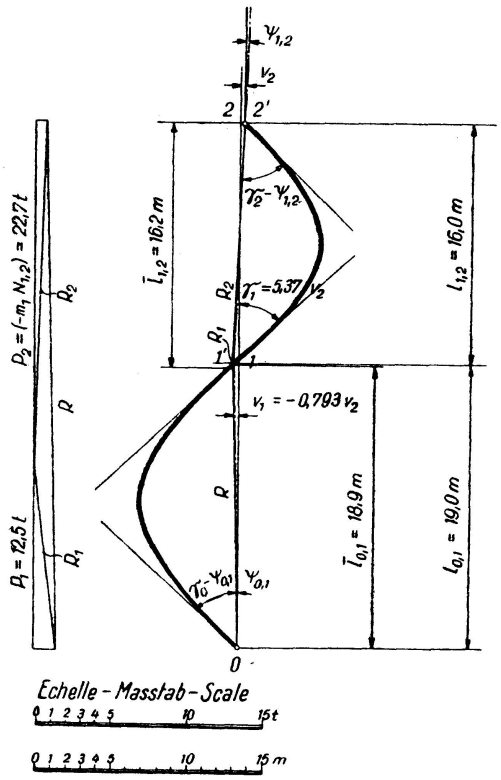

Fig. 15.

La première forme du flambage — Erste Knickform — First form of buckling.

On part de l'équation de la vibration transversale

$$EJ \frac{d^4 v}{dx^4} - \mu \omega^2 v = 0 \tag{27}$$

dont l'intégrale générale est

$$v = C_1 \cos h \frac{\lambda}{l} x + C_2 \sin h \frac{\lambda}{l} x + C_3 \cos \frac{\lambda}{l} x + C_4 \sin \frac{\lambda}{l} x \tag{28}$$

[3]) V. Koloušek: Stahlbau 1943, p. 5.

Les conditions d'extrémités étant données, on peut déterminer les constantes d'intégration et d'après les équations

$$M = -EJ\frac{d^2 v}{dx^2} \quad (29), \qquad T = -EJ\frac{d^3 v}{dx^3} \quad (30)$$

déterminer les moments et les forces aux extrémités. Si les deux extrémités de la barre à section constante sont rigidement attachées (voir fig. 11 où cependant les symboles signifient les amplitudes correspondantes) on a

$$M_{k-1,k} = \frac{1}{l'} F_2(\lambda)\cdot\gamma_{k-1} + \frac{1}{l'} F_1(\lambda)\cdot\gamma_k - \frac{1}{ll'} F_4(\lambda)\, v_{k-1} - \frac{1}{ll'} F_3(\lambda)\, v_k, \quad (31)$$

$$M_{k,k-1} = \frac{1}{l'} F_1(\lambda)\cdot\gamma_{k-1} + \frac{1}{l'} F_2(\lambda)\cdot\gamma_k + \frac{1}{ll'} F_3(\lambda)\, v_{k-1} + \frac{1}{ll'} F_4(\lambda)\, v_k, \quad (32)$$

$$V_{k-1,k} = -\frac{1}{ll'} F_4(\lambda)\cdot\gamma_{k-1} + \frac{1}{ll'} F_3(\lambda)\cdot\gamma_k + \frac{1}{l^2 l'} F_6(\lambda)\, v_{k-1} + \frac{1}{l^2 l'} F_5(\lambda)\, v_k, \quad (33)$$

$$V_{k,k-1} = -\frac{1}{ll'} F_3(\lambda)\cdot\gamma_{k-1} + \frac{1}{ll'} F_4(\lambda)\cdot\gamma_k + \frac{1}{l^2 l'} F_5(\lambda)\, v_{k-1} + \frac{1}{l^2 l'} F_6(\lambda)\, v_k \quad (34)$$

où signifie

$$\lambda = l\sqrt[4]{\frac{\mu\omega^2}{EJ}} \quad (35)$$

(où μ est la masse par mètre courant, ω la vitesse angulaire de vibration)

et

$$F_1(\lambda) = -\lambda\,\frac{\sin h\lambda - \sin\lambda}{\cos h\lambda\cos\lambda - 1}, \quad (36)$$

$$F_2(\lambda) = -\lambda\,\frac{\cos h\lambda\sin\lambda - \sin h\lambda\cos\lambda}{\cos h\lambda\cos\lambda - 1}, \quad (37)$$

$$F_3(\lambda) = -\lambda^2\,\frac{\cos h\lambda - \cos\lambda}{\cos h\lambda\cos\lambda - 1}, \quad (38)$$

$$F_4(\lambda) = \lambda^2\,\frac{\sin h\lambda\sin\lambda}{\cos h\lambda\cos\lambda - 1}, \quad (39)$$

$$F_5(\lambda) = \lambda^3\,\frac{\sin h\lambda + \sin\lambda}{\cos h\lambda\cos\lambda - 1}, \quad (40)$$

$$F_6(\lambda) = -\lambda^3\,\frac{\cos h\lambda\sin\lambda + \sin h\lambda\cos\lambda}{\cos h\lambda\cos\lambda - 1}. \quad (41)$$

Si la barre $k-1$, k est dans le point $k-1$ articulée le moment $M_{k-1,k}$ doit être égal à zéro, ainsi, qu'il vient de l'équation (31) pour l'angle γ_{k-1} la relation:

$$\gamma_{k-1} = -\frac{F_1(\lambda)}{F_2(\lambda)}\gamma_k + \frac{F_4(\lambda)}{l\cdot F_2(\lambda)} v_{k-1} + \frac{F_3(\lambda)}{l\cdot F_2(\lambda)} v_k. \quad (42)$$

Si l'on substitue l'expression (42) dans les formules (31)...(34), on a

$$M_{k,k-1} = \frac{1}{l'} F_7(\lambda)\,\gamma_k + \frac{1}{ll'} F_8(\lambda)\, v_{k-1} + \frac{1}{ll'} F_9(\lambda)\, v_k, \quad (43)$$

$$V_{k-1,k} = \frac{1}{ll'} F_8(\lambda)\,\gamma_k + \frac{1}{l^2 l'} F_{12}(\lambda)\, v_{k-1} + \frac{1}{l^2 l'} F_{10}(\lambda)\, v_k, \quad (44)$$

$$V_{k,k-1} = \frac{1}{ll'} F_9(\lambda)\gamma_k + \frac{1}{l^2 l'} F_{10}(\lambda) v_{k-1} + \frac{1}{l^2 l'} F_{11}(\lambda) v_k . \tag{45}$$

où:

$$F_7(\lambda) = F_2(\lambda) - \frac{F_1^2(\lambda)}{F_2(\lambda)} = \lambda \frac{2 \sin h\lambda \sin\lambda}{\cos h\lambda \sin\lambda - \sin h\lambda \cos\lambda}, \tag{46}$$

$$F_8(\lambda) = F_3(\lambda) + \frac{F_1(\lambda)F_4(\lambda)}{F_2(\lambda)} = \lambda^2 \frac{\sin h\lambda + \sin\lambda}{\cos h\lambda \sin\lambda - \sin h\lambda \cos\lambda}, \tag{47}$$

$$F_9(\lambda) = F_4(\lambda) + \frac{F_1(\lambda)F_3(\lambda)}{F_2(\lambda)} = -\lambda^2 \frac{\cos h\lambda \sin\lambda + \sin h\lambda \cos\lambda}{\cos h\lambda \sin\lambda - \sin h\lambda \cos\lambda}, \tag{48}$$

$$F_{10}(\lambda) = F_5(\lambda) + \frac{F_4(\lambda)F_3(\lambda)}{F_2(\lambda)} = -\lambda^3 \frac{\cos h\lambda + \cos\lambda}{\cos h\lambda \sin\lambda - \sin h\lambda \cos\lambda}, \tag{49}$$

$$F_{11}(\lambda) = F_6(\lambda) - \frac{F_3^2(\lambda)}{F_2(\lambda)} = \lambda^3 \frac{2 \cos h\lambda \cos\lambda}{\cos h\lambda \sin\lambda - \sin h\lambda \cos\lambda}, \tag{50}$$

$$F_{12}(\lambda) = F_6(\lambda) - \frac{F_4^2(\lambda)}{F_2(\lambda)} = \lambda^3 \frac{\cos h\lambda \cos\lambda + 1}{\cos h\lambda \sin\lambda - \sin h\lambda \cos\lambda}. \tag{51}$$

Si l'on envisage les déplacements infiniment petits, l'élasticité des appuis des pylônes (non chargés) symétriquement haubanés est la même dans toutes les directions et alors les vibrations restent aussi les mêmes quel-que soit le plan de vibration. Le plus facilement on étudie l'oscillation dans le plan des haubans. De (4), il s'en suit pour le déplacement horizontal de l'extrémité supérieur du hauban

$$v = -\frac{Q^{02} s}{24 S^2 \cos\sigma} + \frac{Ss}{EU \cos\sigma} + \frac{Q^{02} s}{24 S^{02} \cos\sigma} - \frac{S_0 s}{EU \cos\sigma}. \tag{52}$$

Parce que $V = 2(S - S_0)\cos\sigma$, il vient après la différentiation en substituant $S = S_0$:

$$\frac{dv}{dS} = \frac{2 Q^{02} s}{24 S^{03} \cos\sigma} + \frac{s}{EU \cos\sigma}, \tag{53}$$

$$\frac{dV}{dS} = 2 \cdot \cos\sigma \tag{54}$$

et pour l'élasticité des appuis

$$\varkappa^0 = \frac{dv}{dV} = \frac{Q^{02} s}{24 S^{03} \cos^2\sigma} + \frac{s}{2 EU \cos^2\sigma}. \tag{55}$$

Si le premier membre dans l'expression (55) est petit, il vient après le développement en série de TAYLOR

$$\frac{1}{\varkappa^0} = \frac{dV}{dv} = \sim \frac{2 EU \cos^2\sigma}{s} - \left(\frac{2 EU \cos^2\sigma}{s}\right)^2 \frac{Q^{02} s}{24 S^{03} \cos^2\sigma}. \tag{56}$$

Avec $\frac{Q^0 s}{8 S^0} = f^0$ et $\frac{1}{\varrho^0} = \sim \frac{8 f^0}{s^2}$ (où ϱ est le rayon de courbure de la parabole de flexion) on peut écrire l'équation (56) en forme suivante

$$\frac{1}{\varkappa^0} = \frac{dV}{dv} = \sim \frac{2EU\cos^2\sigma}{s} + 2\frac{EU}{s}\cos\sigma \cdot \frac{1}{\varrho^0} \cdot \left(-\frac{2}{3} f^0 \cdot s \cdot \frac{\frac{EU}{s}\cos\sigma}{S^0} \right)$$

$$= \sim \frac{2EU}{s}\cos\sigma \left[\cos\sigma + \frac{\Delta F}{\varrho^0} \right] \qquad (57)$$

ΔF étant la variation de la superficie entre la corde et la parabole de flexion correspondante au déplacement horizontal d'appui égal a l'unité (fig. 16). L'amplitude de la force d'appui est exprimée par la formule

$$V_{k,p} = \frac{1}{\varkappa_k^0} v_k . \qquad (58)$$

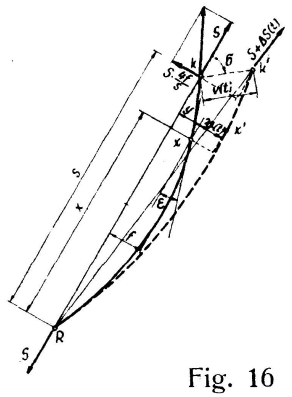

Fig. 16

Les équations pour le calcul des amplitudes des déformations ressortent des conditions d'équilibre dans les noeuds singuliers. Nous les obtiendrons en substituant les expressions de (31) jusqu'à (34), de (43) jusqu'à (45) et (58) aux équations (18) et (19). En absence de la charge extérieure variable périodiquement, les membres absolues n'apparaissent pas dans les équations et la solution non triviale n'est possible que si le déterminant des coefficients d'inconnues est égal à zéro. La fréquence où cela survient est la fréquence de la vibration propre. La forme de la vibration propre est donnée par les rapports des déformations qui sont égales à ceux des déterminants mineurs.

Exemple numérique.

Considérons de nouveau le pylône d'après la figure 4, dont les dimensions sont contenues dans le chapitre I 1 c. Nous obtenons le système de trois équations exprimant les conditions d'équilibre dans les noeuds de la construction.

Les données numériques sont les mêmes que dans le chapitre I 1 c. En outre on a

$$\lambda_{0,1} = l_{0,1} \sqrt[4]{\frac{\mu_{0,1}\,\omega^2}{EJ_{0,1}}} = 19{,}0 \sqrt[4]{\frac{0{,}04990}{9{,}81 \cdot 21{,}5 \cdot 10^6 \cdot 0{,}5899 \cdot 10^{-4}}} \cdot \sqrt{\omega} = 0{,}850 \sqrt{\omega} ,$$

$$\lambda_{1,2} = l_{1,2} \sqrt[4]{\frac{\mu_{1,2}\,\omega^2}{EJ_{1,2}}} = 16{,}0 \sqrt[4]{\frac{0{,}03544}{9{,}81 \cdot 21{,}5 \cdot 10^6 \cdot 0{,}2814 \cdot 10^{-4}}} \cdot \sqrt{\omega} = 0{,}791 \sqrt{\omega} .$$

Tab. IV.

	γ_1	ν_1	ν_2	
I	$\frac{1}{l'_{0,1}} F_7(\lambda_{0,1}) + \frac{1}{l'_{1,2}} F_7(\lambda_{1,2})$	$\frac{1}{l_{0,1} l'_{0,1}} F_9(\lambda_{0,1}) - \frac{1}{l_{1,2} l'_{1,2}} F_9(\lambda_{1,2})$	$-\frac{1}{l_{1,2} l'_{1,2}} F_8(\lambda_{1,2})$	$=0$
II	$\frac{1}{l_{0,1} l'_{0,1}} F_9(\lambda_{0,1}) - \frac{1}{l_{1,2} l'_{1,2}} F_9(\lambda_{1,2})$	$\frac{1}{l^2_{0,1} l'_{0,1}} F_{11}(\lambda_{0,1}) + \frac{1}{l^2_{1,2} l'_{1,2}} F_{11}(\lambda_{1,2}) + \frac{1}{\varkappa_1^0}$	$\frac{1}{l^2_{1,2} l'_{1,2}} F_{10}(\lambda_{1,2})$	$=0$
III	$-\frac{1}{l_{1,2} l'_{1,2}} F_8(\lambda_{1,2})$	$\frac{1}{l^2_{1,2} l'_{1,2}} F_{10}(\lambda_{1,2})$	$\frac{1}{l^2_{1,1} l'_{1,2}} F_{12}(\lambda_{1,2}) + \frac{1}{\varkappa_2^0}$	$=0$

D'après (56) où

$$\frac{Q_1^{02}}{\cos^2 \sigma_1} = (g_1 s_1)^2 = (0{,}21 \cdot 10^{-3} \cdot 24{,}2)^2 = 25{,}8 \cdot 10^{-6}\, t^2, \qquad S_1^0 = 0{,}500\ \mathrm{t},$$

$$\frac{Q_2^{02}}{\cos^2 \sigma_2} = (g_2 s_2)^2 = (0{,}41 \cdot 10^{-3} \cdot 38{,}1)^2 = 244 \cdot 10^{-6}\, t^2, \qquad S_2^0 = 1{,}0\ \mathrm{t},$$

il vient

$$\frac{dV_1}{d\nu_1} = \frac{1}{\varkappa_1^0} = \frac{2 \cdot 16{,}0 \cdot 10^6 \cdot 0{,}224 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}620^2}{24{,}2} -$$

$$-\left(\frac{2 \cdot 16{,}0 \cdot 10^6 \cdot 0{,}224 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}620^2}{24{,}2}\right)^2 \frac{25{,}8 \cdot 24{,}2 \cdot 10^{-6}}{24 \cdot 0{,}5^3} = 11{,}38 - 0{,}0270 = 11{,}35\ \mathrm{tm}$$

$$\frac{dV_2}{d\nu_2} = \frac{1}{\varkappa_2^0} = \frac{2 \cdot 16{,}0 \cdot 10^6 \cdot 0{,}439 \cdot 10^{-4} \cdot 0.394^2}{38{,}1} -$$

$$-\left(\frac{2 \cdot 16{,}0 \cdot 10^6 \cdot 0{,}439 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}394^2}{38{,}1}\right)^2 \frac{244 \cdot 38{,}1 \cdot 10^{-6}}{24 \cdot 1{,}0^3} = 5{,}72 - 0{,}01275 = 5{,}71\ \mathrm{tm}$$

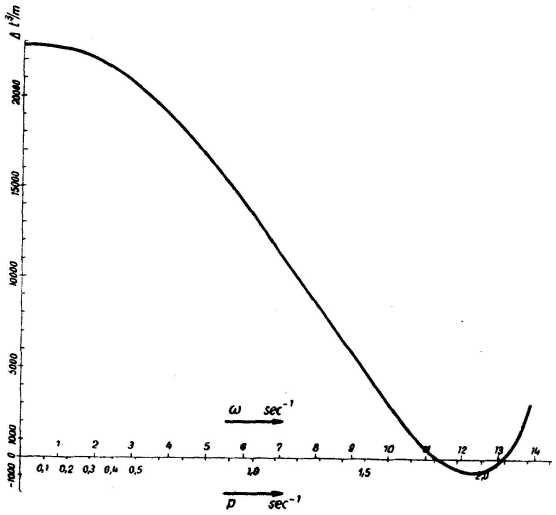

Fig. 17

Variation du déterminant Δ en fonction de la fréquence.

Verlauf der Determinante Δ in Funktion der Frequenz.

Variation of the determinant Δ as a function of the frequency.

Nous évaluons les coefficients des équations du Tab. IV successivement pour les différentes valeurs de la vitesse angulaire, calculons le déterminant Δ des coefficients et le représentons graphiquement (fig. 17). Les points

où la courbe coupe l'axe des abscisses déterminent la vitesse angulaire de la vibration propre. Dans la fig. 18 sont en plus représentés les déterminants mineurs.

La première vitesse angulaire propre est $\omega_I = \sim 11{,}28\ \text{sec}^{-1}$, la fréquence propre est alors 1,80 par seconde ($\lambda_{0,1} = 2{,}856$, $\lambda_{1,2} = 2{,}657$). Pour les rapports des déformations on a

$$\frac{\gamma_1}{v_2} = \frac{S_{\gamma_1,\mathrm{I}}}{S_{v_2,\mathrm{I}}} = \frac{S_{\gamma_1,\mathrm{II}}}{S_{v_2,\mathrm{II}}} = \frac{S_{\gamma_1,\mathrm{III}}}{S_{v_2,\mathrm{III}}} = \sim\left(\frac{0{,}8}{-5{,}8}\right) = \sim\frac{-20{,}0}{143} = \sim\left(\frac{-5{,}8}{42}\right) = \sim -0{,}140\,\mathrm{m}^{-1},$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_{v_1,\mathrm{I}}}{S_{v_2,\mathrm{I}}} = \frac{S_{v_1,\mathrm{II}}}{S_{v_2,\mathrm{II}}} = \frac{S_{v_1,\mathrm{III}}}{S_{v_2,\mathrm{III}}} = \sim\left(\frac{-20{,}0}{-5{,}8}\right) = \sim\frac{478}{143} = \sim\left(\frac{143}{42}\right) = \sim 3{,}35\,.$$

La formule (42) donne les rotations au point 0 et 2:

$$\frac{\gamma_0}{v_2} = \frac{F_1(2{,}856)}{F_2(2{,}856)}\,0{,}140 + \frac{F_3(2{,}856)}{19{,}0\cdot F_2(2{,}856)}\,3{,}35 = 0{,}780\cdot 0{,}140 + 0{,}135\cdot 3{,}35$$
$$= 0{,}109 + 0{,}453 = 0{,}562\ \mathrm{m}^{-1},$$

$$\frac{\gamma_2}{v_2} = \frac{F_1(2{,}657)}{F_2(2{,}657)}\,0{,}140 - \frac{F_3(2{,}657)}{16{,}0\cdot F_2(2{,}657)}\,3{,}35 - \frac{F_4(2{,}657)}{16{,}0\cdot F_2(2{,}657)}$$
$$= 0{,}689\cdot 0{,}140 - 0{,}139\cdot 3{,}35 + 0{,}0573 = 0{,}0965 - 0{,}467 + 0{,}0573 = -0{,}313\,\mathrm{m}^{-1}$$

La figure 19 montre la première forme de la vibration propre. Les moments aux extrémités sont évalués à l'aide de la formule (43):

$$M_{1,0} = \sim -88\cdot 0{,}140\,v_2 + 15{,}5\cdot 3{,}35\,v_2 = \sim 39{,}7\,v_2\ \mathrm{t}\,,$$
$$M_{1,2} = \sim -69\cdot 0{,}140\,v_2 - 5{,}1\cdot 3{,}35\,v_2 - 13{,}1\,v_2 = \sim -39{,}9\,v_2\ \mathrm{t} = \sim -M_{1,0}\,.$$

Analogiquement on détermine les forces d'après (44) et (45).

Pour $\omega_{II} = \sim 13{,}12\ \text{sec}^{-1}$, c. à d. pour la fréquence 2,09 par seconde ($\lambda_{0,1} = 3{,}080$, $\lambda_{1,2} = 2{,}865$) on a le deuxième cas de la vibration propre. Pour les rapports des déformations on a

$$\frac{\gamma_1}{v_2} = \sim\frac{-20{,}8}{-118} = \sim\frac{-21{,}3}{-120} = \sim\frac{-118}{-665} = \sim 0{,}178\ \mathrm{m}^{-1},$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \sim\frac{-21{,}3}{-118} = \sim\left(\frac{-22}{-120}\right) = \sim\frac{-120}{-665} = \sim 0{,}181$$

et d'après (42)

$$\frac{\gamma_0}{v_2} = -0{,}940\cdot 0{,}178 + 0{,}167\cdot 0{,}181 = \sim -0{,}137\ \mathrm{m}^{-1},$$

$$\frac{\gamma_2}{v_2} = -0{,}784\cdot 0{,}178 - 0{,}162\cdot 0{,}181 + 0{,}034 = \sim -0{,}135\ \mathrm{m}^{-1}.$$

La deuxième forme est représentée dans la figure 20. Les moments aux extrémités sont d'après (43)

$$M_{1,0} = 24\cdot 0{,}178\,v_2 + 29{,}5\cdot 0{,}181\,v_2 = \sim 9{,}6\,v_2\ \mathrm{t}\,,$$
$$M_{1,2} = 48\cdot 0{,}178\,v_2 - 10{,}8\cdot 0{,}181\,v_2 - 16{,}2\,v_2 = \sim -9{,}6\,v_2\ \mathrm{t} = \sim -M_{0,1}\,.$$

2. L'influence du mouvement de la masse des haubans.

Si nous envisageons l'influence du mouvement de la masse des haubans, l'élasticité des appuis dépend de la vitesse de la vibration. Pour pouvoir

calculer les pylônes par la méthode de déformation nous devons déterminer les forces agissant à l'extrémité supérieure du câble en fonction de la fréquence en cas d'oscillation du point d'attache du hauban.

Considérons un hauban vibrant (fig. 16) et supposons encore que les amplitudes des oscillations sont infiniment petites. Nous faisons ci-après l'abstraction de l'influence de la vibration longitudinale sur les tensions des haubans et nous n'envisageons que leur vibration transversale.

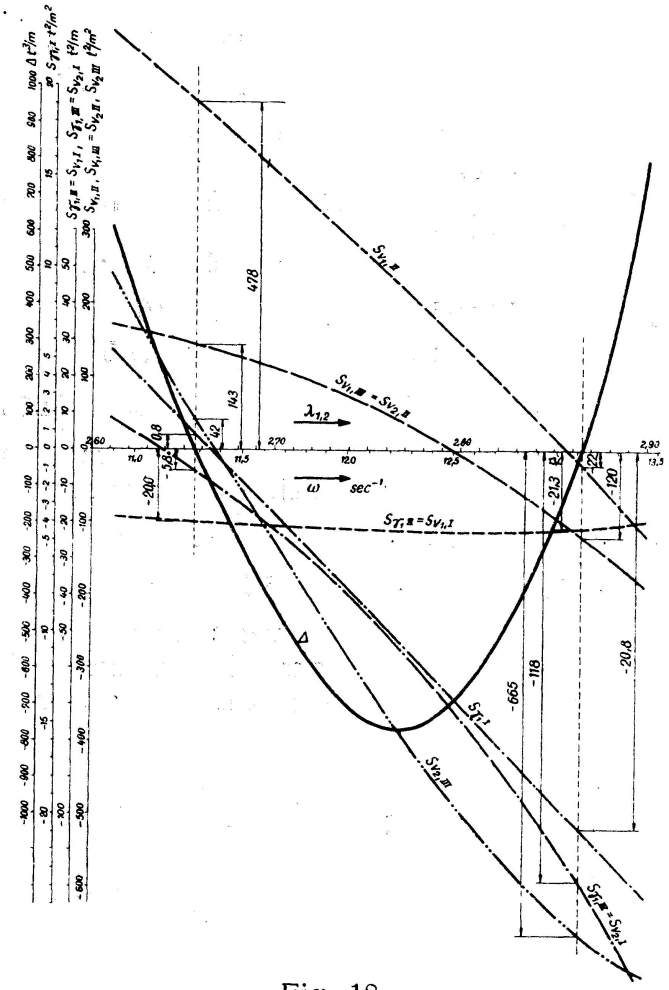

Fig. 18.
Déterminant et déterminants mineurs formés des coefficients des inconnues dans les équations de la vibration — Determinante und Unterdeterminanten der Koeffizienten der Unbekannten aus den Schwingungsgleichungen — Determinant and sub-determinants of the coefficients of the unknowns in the equations of vibration.

L'équation du mouvement de l'élément du hauban devient

$$\bar{\mu}\, dx \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{y}(t)}{\partial t^2} = [S\mathfrak{y}''(t) + \Delta S(t)\, y'']\, dx\,, \tag{59}$$

$\bar{\mu}$ étant la masse du hauban par mètre courant, y la flèche dans la position x, dx la longueur de l'élément, S la tension du hauban immobile, $\mathfrak{y}(t)$ variation de la flèche en vibration, ΔS variation de la force S, $y'' = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. Dans l'équation (59) on a supprimé la composante infiniment petite du deuxième

ordre $\Delta S(t)\mathfrak{y}''(t)$. Si l'extrémité supérieure du hauban se déplace à la distance $v(t)$ dépendante tu temps (fig. 16), on peut écrire d'après le théorème des travaux virtuels, qu'on applique au travail des tensions du hauban immobile sur les déplacements en vibration:

$$S v(t) \cos\sigma - S v(t) \frac{4f}{s} \sin\sigma = \int_0^s \frac{S}{\cos\varepsilon} \frac{\Delta S(t)}{\overline{EU}\cos\varepsilon} \frac{dx}{\cos\varepsilon} + \int_0^s S y'' \cdot \mathfrak{y}(t) \cdot dx,$$

d'où il vient

$$\Delta S(t) = \overline{EU} \frac{v(t) \cdot \cos\sigma - \frac{4f}{s} \sin\sigma\, v(t) - y'' \int_0^s \mathfrak{y}(t) \cdot dx}{\int_0^s \frac{dx}{\cos^3\varepsilon}}.$$

En substituant

$$\mathfrak{y}(t) = v(t) \frac{x}{s} \sin\sigma + \bar{\mathfrak{y}}(t), \quad (60) \qquad y'' = -\frac{8f}{s^2} \simeq -\frac{1}{\varrho}, \quad (61)$$

où ϱ désigne le rayon de courbure de la parabole de flexion du hauban immobile et avec

$$y'' \int_0^s \mathfrak{y}(t)\, dx = -\frac{8f}{s^2} \frac{v(t)}{s} \sin\sigma \int_0^s x\, dx + y'' \int_0^s \bar{\mathfrak{y}}(t)\, dx = -\frac{4f}{s} v(t) \sin\sigma + y'' \int_0^s \bar{\mathfrak{y}}(t)\, dx,$$

$$\int_0^s \frac{dx}{\cos^3\varepsilon} = \sim s$$

on a

$$\Delta S(t) = \sim v(t) \frac{\overline{EU}}{s} \cos\sigma + \frac{\overline{EU}}{s} \frac{1}{\varrho} \int_0^s \bar{\mathfrak{y}}(t)\, dx. \quad (62)$$

Il résulte de (62) que l'équation (59) est linéaire pour $\mathfrak{y}$ et x. C'est pourquoi la vibration du hauban (précisément dit sa partie stationnaire) est harmonique avec la vitesse angulaire ω, si $v(t)$ est harmoniquement variable ($v(t) = v \cos\omega t$). En substituant $\mathfrak{y}(t) = \mathfrak{y} \cos\omega t$, $\Delta S(t) = \Delta S \cos\omega t$ on obtient de l'équation (59)

$$\bar{\mu}\omega^2 \mathfrak{y} + S\mathfrak{y}'' + \Delta S y'' = 0 \quad (63)$$

et après la substitution de (60) et (62)

$$\bar{\mu}\omega^2 \cdot v \frac{x}{s} \sin\sigma + \bar{\mu}\omega^2 \bar{\mathfrak{y}} + S\bar{\mathfrak{y}}'' + v \frac{\overline{EU}}{s} \cos\sigma \cdot y'' - \frac{\overline{EU}}{s} y''^2 \int_0^s \bar{\mathfrak{y}}\, dx = 0. \quad (64)$$

On peut écrire l'équation (64) en forme

$$\bar{A}\bar{\mathfrak{y}} + \bar{B}\bar{\mathfrak{y}}'' + \bar{C} \int_0^s \bar{\mathfrak{y}}\, dx + v\bar{D} + v\bar{F}x = 0, \quad (65)$$

où

$$\bar{A} = \bar{\mu}\omega^2, \quad (66) \qquad \bar{D} = \frac{\overline{EU}}{s} \cos\sigma \cdot y'', \quad (69)$$

$$\bar{B} = S, \quad (67)$$

$$\bar{C} = -\frac{\overline{EU}}{s} y''^2, \quad (68) \qquad \bar{F} = \frac{\bar{\mu}\omega^2}{s} \sin\sigma. \quad (70)$$

Si l'on développe $\bar{\mathfrak{y}}$, $\int_0^s \bar{\mathfrak{y}}\, dx$, $\bar{D}$ et $\bar{F}x$ d'après la série de FOURRIER, on peut écrire

$$\bar{\eta} = v\left(L_1 \sin\frac{\pi x}{s} + L_2 \sin\frac{2\pi x}{s} + L_3 \sin\frac{3\pi x}{s} + \dots\right), \tag{71}$$

$$\bar{\eta}'' = -v\frac{\pi^2}{s^2}\left(L_1 \sin\frac{\pi x}{s} + 4L_2 \sin\frac{2\pi x}{s} + 9L_3 \sin\frac{3\pi x}{s} + \dots\right), \tag{72}$$

$$\int_0^s \bar{\eta}\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^s \bar{\eta}\,dx \cdot \left(\sin\frac{\pi x}{s} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{s} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{s} + \dots\right) =$$

$$= v\frac{8s}{\pi^2}\left(L_1 + \frac{1}{3}L_3 + \frac{1}{5}L_5 + \dots\right)\left(\sin\frac{\pi x}{s} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{s} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{s} + \dots\right), \tag{73}$$

$$\bar{D} = \frac{4\bar{D}}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{s} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{s} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{s} + \dots\right), \tag{74}$$

$$\bar{F}x = \frac{2\bar{F}s}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{s} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{s} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{s} - \dots\right). \tag{75}$$

Après la substitution des expressions (71) ... (75) dans l'équation (65) on a

$$\bar{A}\left(L_1 \sin\frac{\pi x}{s} + L_2 \sin\frac{2\pi x}{s} + \dots\right) - \frac{\bar{B}\pi^2}{s^2}\left(L_1 \sin\frac{\pi x}{s} + 4L_2 \sin\frac{2\pi x}{s} + \dots\right) +$$

$$+ \frac{8\bar{C}s}{\pi^2}\left(L_1 + \frac{1}{3}L_3 + \dots\right)\left(\sin\frac{\pi x}{s} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{s} + \dots\right) + \frac{4\bar{D}}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{s} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{s} + \dots\right) +$$

$$+ \frac{2\bar{F}s}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{s} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{s} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{s} - \dots\right) = 0. \tag{76}$$

Pour que cette équation ait une solution pour chaque x, il faut que

$$L_1\left(\bar{A} - \frac{\bar{B}\pi^2}{s^2}\right) + \frac{8\bar{C}s}{\pi^2}\left(L_1 + \frac{1}{3}L_3 + \frac{1}{5}L_5 + \dots\right) + \frac{4\bar{D} + 2\bar{F}s}{\pi} = 0, \tag{77}$$

$$L_3\left(\bar{A} - \frac{9\bar{B}\pi^2}{s^2}\right) + \frac{8\bar{C}s}{3\pi^2}\left(L_1 + \frac{1}{3}L_3 + \frac{1}{5}L_5 + \dots\right) + \frac{4\bar{D} + 2\bar{F}s}{3\pi} = 0, \tag{78}$$

$$L_k\left(\bar{A} - \frac{k^2\bar{B}\pi^2}{s^2}\right) + \frac{8\bar{C}s}{k\pi^2}\left(L_1 + \frac{1}{3}L_3 + \frac{1}{5}L_5 + \dots\right) + \frac{4\bar{D} + 2\bar{F}s}{k\pi} = 0, \tag{79}$$

pour tous les k impairs. Pour les k pairs on a

$$L_2\left(\bar{A} - \frac{4\bar{B}\pi^2}{s^2}\right) - \frac{1}{2}\,\frac{2\bar{F}s}{\pi} = 0, \tag{80}$$

$$L_k\left(\bar{A} - \frac{k^2\bar{B}\pi^2}{s^2}\right) - \frac{1}{k}\,\frac{2\bar{F}s}{\pi} = 0. \tag{81}$$

Si nous multiplions l'équation (79) par k et la soustrayons de (77), nous obtenons pour k quelconque impair

$$L_k = \frac{1}{k}L_1\frac{\bar{A} - \dfrac{\bar{B}\pi^2}{s^2}}{\bar{A} - k^2\dfrac{\bar{B}\pi^2}{s^2}}. \tag{82}$$

De l'équation (81) il vient pour k pair

$$L_k = \frac{1}{k\pi} \frac{2\bar{F}s}{\bar{A} - \frac{k^2 \bar{B}\pi^2}{s^2}}. \tag{83}$$

Après la substitution de (82) à (77) on a

$$L_1\left[\left(\bar{A} - \frac{\bar{B}\pi^2}{s^2}\right) + \frac{8\bar{C}s}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{9}\frac{\bar{A} - \frac{\bar{B}\pi^2}{s^2}}{\bar{A} - \frac{9\bar{B}\pi^2}{s^2}} + \frac{1}{25}\frac{\bar{A} - \frac{\bar{B}\pi^2}{s^2}}{\bar{A} - \frac{25\bar{B}\pi^2}{s^2}} + \ldots\right)\right] + \frac{2}{\pi}(2\bar{D} + \bar{F}s) = 0 \tag{84}$$

d'où

$$L_1 = -\frac{2}{\pi} \frac{2\bar{D} + \bar{F}s}{\bar{A} - \frac{\bar{B}\pi^2}{s^2} + \frac{8\bar{C}s}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{9}\frac{\bar{A} - \frac{\bar{B}\pi^2}{s^2}}{\bar{A} - \frac{9\bar{B}\pi^2}{s^2}} + \ldots + \frac{1}{k^2}\frac{\bar{A} - \frac{\bar{B}\pi^2}{s^2}}{\bar{A} - k^2\frac{\bar{B}\pi^2}{s^2}}\right)}. \tag{85}$$

La courbe de flexion est déterminée par l'équation (71) après la substitution des expressions (85), (83), (82). On peut calculer l'amplitude ΔS de la formule (62) où on remplace $\Delta S(t)$, $v(t)$, $\bar{\eta}(t)$ par les amplitudes correspondantes:

$$\Delta S = v\frac{\overline{EU}}{s}\cos\sigma + \frac{\overline{EU}}{s}\frac{1}{\varrho}\int_0^s \bar{\eta}\,dx = v\frac{\overline{EU}}{s}\cos\sigma + v\frac{\overline{EU}}{s}\frac{1}{\varrho}\frac{2s}{\pi}\left(L_1 + \frac{1}{3}L_3 + \frac{1}{5}L_5 + \ldots\right). \tag{86}$$

Si le pylône est haubané symétriquement en quatre directions et s'il oscille dans le plan des haubans (soit I et III), nous obtenons pour l'amplitude de la force d'appui

$$\frac{V}{v} = \frac{2\Delta S \cdot \cos\sigma}{v} = 2\frac{\overline{EU}}{s}\cos\sigma\left[\cos s + \frac{1}{\varrho}\frac{2s}{\pi}\left(L_1 + \frac{1}{3}L_3 + \ldots\right)\right] = \frac{1}{\varkappa^0}. \tag{87}$$

On procède ensuite de la même manière qu'au chapitre précédent avec la seule différence qu'on substitue aux équations de déformation pour $\frac{1}{\varkappa^0}$ l'expression (87), qui dépend de ω.

Comme nous avons mentionné, nous ne pouvons faire aucune abstraction du membre $\Delta S(t)\eta''(t)$ dans l'équation (59) que si l'amplitude des oscillations est infiniment petite. Si les oscillations ont la grandeur finie l'équation du mouvement n'est pas linéaire et la vibration n'est pas harmonique.

L'exemple numérique.

Envisageons de nouveau le pylône du chapitre I 1 c comme au chapitre précédant. Pour les haubans attachés au premier appui on a

$$\sin\sigma = 0{,}785, \quad \cos\sigma = 0{,}620, \quad Q^0 = 0{,}21 \cdot 24{,}2 \cdot 0{,}620 = 3{,}15\ \text{kg},$$

$$\bar{\mu}_1 = \frac{g_1}{9{,}81} = \frac{0{,}21}{9{,}81} = 0{,}0214\ \text{kg/m}^2 \cdot \text{sec}^2,$$

$$\bar{A} = \bar{\mu} \cdot \omega^2 = 0{,}0214\,\omega^2\ \text{kg/m}^2 \cdot \text{sec}^2,$$

$$\bar{B} = S_1{}^0 = 500 \text{ kg},$$

$$y'' = -\frac{8f}{s^2} = -\frac{Q^0}{S \cdot s} = -\frac{3{,}15}{500 \cdot 24{,}2} = -0{,}000260 \text{ m}^{-1} = -\frac{1}{\varrho},$$

$$\frac{\overline{EU}}{s} = \frac{16 \cdot 10^6 \cdot 0{,}224 \cdot 10^{-4}}{24{,}2} = 14{,}8 \text{ t/m},$$

$$\bar{C} = -\frac{\overline{EU}}{s} y''^2 = -14800 \cdot 0{,}000260^2 = -0{,}001000 \text{ kg/m}^3,$$

$$\bar{D} = \frac{\overline{EU}}{s} \cos\sigma \cdot y'' = -14800 \cdot 0{,}620 \cdot 0{,}000260 = -2{,}385 \text{ kg/m}^2,$$

$$\bar{F}s = \bar{\mu}\,\omega^2 \cdot \sin\sigma = 0{,}0168\,\omega^2 \text{ kg/m}^2 \cdot \text{sec}^2,$$

$$\frac{\bar{B}\pi^2}{s^2} = \frac{500 \cdot \pi^2}{24{,}2^2} = 8{,}42 \text{ kg/m}^2,$$

$$\frac{8\bar{C}s}{\pi^2} = -\frac{8 \cdot 0{,}001000 \cdot 24{,}2}{\pi^2} = -0{,}01965 \text{ kg/m}^2,$$

$$\frac{2s}{\pi} = 15{,}4 \text{ m}.$$

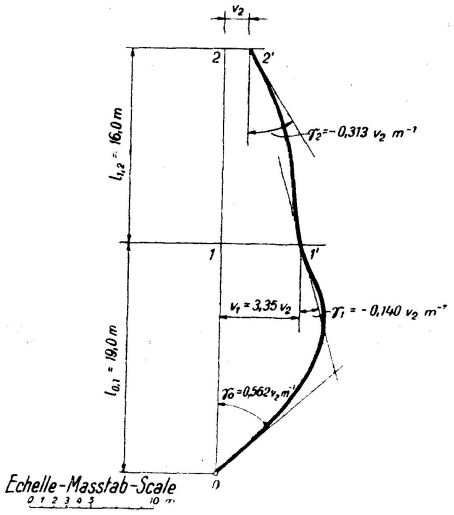

Fig. 19
La première forme de la vibration propre
Grundschwingungsform
Fundamental form of natural vibration.

Avant tout nous voulons calculer la force V correspondante au déplacement v égal à l'unité, si la vitesse angulaire ω est égale à zéro. Cette force doit être égale à la valeur de $\frac{dV_1}{dv_1}$ du chapitre II 1 (exemple numérique), que nous fournit la controlle du calcul. On a

$$\omega = 0,$$
$$\bar{A} = 0,$$

$$L_1 = \frac{2}{\pi} \frac{2 \cdot 2{,}385}{-8{,}42 - 0{,}01965\left(1 + \frac{1}{81} + \ldots\right)} = -0{,}360, \qquad L_3 = \frac{1}{27} L_1 = -0{,}01335,$$

$$L_2 = 0$$

et d'après (87)

$$\frac{V}{v} = 2 \cdot 14{,}800 \cdot 0{,}620\,[0{,}620 + 0{,}000260 \cdot 15{,}4\,(-0{,}360 - \tfrac{1}{3}\,0{,}01335 \ldots)] =$$

$$= 11{,}380 - 0{,}0738 \cdot 0{,}365 = 11{,}380 - 0{,}0269 = \sim 11{,}35 \text{ t/m}.$$

Pour la première vitesse angulaire de la vibration propre (d'après le calcul approximatif du chapitre II 1 $\omega_I = \sim 11{,}28$ sec^{-1}) il vient

$$\bar{A} = 0{,}0214 \cdot 11{,}28^2 = \sim 2{,}71 \text{ kg/m}^2,$$
$$\bar{F}s = 0{,}0168 \cdot 11{,}28^2 = \sim 2{,}13 \text{ kg/m}^2,$$

$$L_1 = -\frac{2}{\pi}\,\frac{2(-2{,}385)+2{,}13}{2{,}71-8{,}42-0{,}01965\left(1+\frac{1}{9}\,\frac{2{,}71-8{,}42}{2{,}71-9\cdot 8{,}42}+\dots\right)} = -0{,}293\,,$$

$$L_3 = \frac{L_1}{3}\,\frac{2{,}71-8{,}42}{2{,}71-9\cdot 8{,}42} = -0{,}00762\,,$$

$$L_2 = \frac{1}{2\pi}\,\frac{2\cdot 2{,}13}{2{,}71-4\cdot 8{,}42} = -0{,}0218$$

et $\frac{V}{v} = 11{,}380 + 0{,}0738(-0{,}293 - \frac{1}{3}0{,}00762\dots) = 11{,}380 - 0{,}0218 = 11{,}36$ t/m.

Pour la deuxième fréquence propre ($\omega = \sim 13{,}12$ sec^{-1}) on a

$$\bar{A} = 0{,}0214\cdot 13{,}12^2 = 3{,}70 \text{ kg/m}^2\,,$$

$$\bar{F}s = 0{,}0168\cdot 13{,}12^2 = 2{,}90 \text{ kg/m}^2\,,$$

$$L_1 = -\frac{2}{\pi}\,\frac{2(-2{,}385)+2{,}90}{3{,}70-8{,}42-0{,}01965\left(1+\frac{1}{9}\,\frac{3{,}70-8{,}42}{3{,}70-9\cdot 8{,}42}+\dots\right)} = -0{,}251\,,$$

$$L_3 = \frac{L_1}{3}\,\frac{3{,}70-8{,}42}{3{,}70-9\cdot 8{,}42} = -0{,}00547\,,$$

$$L_2 = \frac{1}{2\pi}\,\frac{2\cdot 2{,}90}{3{,}70-4\cdot 8{,}42} = -0{,}0307\,,$$

$$\frac{V}{v} = 11{,}380 + 0{,}0738(-0{,}251 - \tfrac{1}{3}0{,}00547\dots) = 11{,}380 - 0{,}0186 = 11{,}36 \text{ t/m}\,.$$

Il résulte de cela, que l'élasticité de l'appui 1 reste à peu près la même entre les limites de la fréquence dans lesquelles nous avons étudié les vibrations du pylône.

Conformément, nous calculons les haubans de l'appui 2. Les constantes ont la valeur

$$\sin\sigma = 0{,}919\,, \qquad \cos\sigma = 0{,}394\,,$$

$$Q^0 = 0{,}41\cdot 38{,}1\cdot 0{,}394 = 6{,}15 \text{ kg}\,,$$

$$\bar{\mu} = \frac{0{,}41}{9{,}81} = 0{,}0418 \text{ kg/m}^2\cdot\text{sec}^2\,,$$

$$\bar{A} = 0{,}0418\cdot\omega^2 \text{ kg/m}^2\cdot\text{sec}^2\,,$$

$$\bar{B} = S_2{}^0 = 1000 \text{ kg}\,,$$

$$y'' = -\frac{6{,}15}{1000\cdot 38{,}1} = -0{,}0001615\ m^{-1}\,,$$

$$\frac{\overline{EU}}{s} = \frac{16\cdot 10^6\cdot 0{,}439\cdot 10^{-4}}{38{,}1} = 18{,}450 \text{ t/m}\,,$$

$$\bar{C} = -18450\cdot 0{,}0001615^2 = -0{,}000482 \text{ kg/m}^3\,,$$

$$\bar{D} = -18450\cdot 0{,}394\cdot 0{,}0001615 = -1{,}174 \text{ kg/m}^2\,,$$

$$\bar{F}s = 0{,}0418\cdot 0{,}919\cdot\omega^2 = 0{,}0384\,\omega^2 \text{ kg/m}^2\cdot\text{sec}^2\,,$$

$$\frac{\bar{B}\pi^2}{s^2} = \frac{1000\cdot\pi^2}{38{,}1^2} = 6{,}79 \text{ kg/m}^2\,,$$

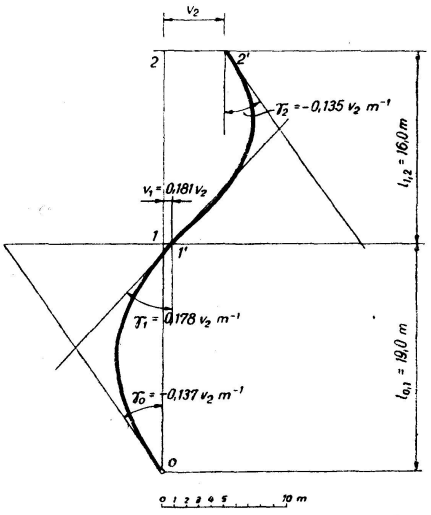

Fig. 20
La deuxième forme de la vibration propre.
Zweite Eigenschwingungsform.
Second form of natural vibration.

$$\frac{8\bar{C}s}{\pi^2} = -\frac{8\cdot 0{,}000482\cdot 38{,}1}{\pi^2} = -0{,}0149 \text{ kg/m}^2,$$

$$\frac{2s}{\pi} = \frac{2\cdot 38{,}1}{\pi} = 24{,}2 \text{ m}.$$

Il vient, si $\omega = 0$,

$$L_1 = \frac{2}{\pi}\,\frac{2\cdot 1{,}174}{-6{,}79-0{,}0149\left(1+\frac{1}{81}+\ldots\right)} = -0{,}220, \qquad L_3 = \frac{1}{27}L_1 = -0{,}00815$$

et d'après (87)

$$\frac{V}{v} = 2\cdot 18{,}450\cdot 0{,}394\,[0{,}394 + 0{,}0001615\cdot 24{,}2\,(-0{,}220 - \tfrac{1}{3}\,0{,}00815\ldots)] =$$

$$= 5{,}720 - 0{,}0568\cdot 0{,}223 = 5{,}720 - 0{,}0127 = 5{,}71 \text{ t/m},$$

ce qui répond à la valeur déterminée pour $\frac{dV_2}{dv_2}$ au chapitre II 1. Pour $\omega_1 = \sim 11{,}28$ nous obtenons

$$\bar{A} = 0{,}0418\cdot 11{,}28^2 = 5{,}32 \text{ kg/m}^2,$$

$$\bar{F}s = 0{,}0384\cdot 11{,}28^2 = 4{,}88 \text{ kg/m}^2,$$

$$L_1 = -\frac{2}{\pi}\,\frac{2(-1{,}174)+4{,}88}{5{,}32-6{,}79-0{,}0149\left(1+\frac{1}{9}\,\frac{5{,}32-6{,}79}{5{,}32-9\cdot 6{,}79}+\ldots\right)} = 1{,}087$$

$$L_3 = \frac{L_1}{3}\,\frac{5{,}32-6{,}79}{5{,}32-9\cdot 6{,}79} = 0{,}00955,$$

$$L_2 = \frac{1}{2\pi}\,\frac{2\cdot 4{,}88}{5{,}32-4\cdot 6{,}79} = -0{,}0708,$$

$$\frac{V}{v} = 5{,}720 + 0{,}0568\,(1{,}087 + \tfrac{1}{3}\,0{,}00955 + \ldots) = 5{,}720 + 0{,}062 = 5{,}78 \text{ tm}.$$

Pour $\omega = \sim 12{,}76 \text{ sec}^{-1}$

$$\bar{A} = 0{,}0418\cdot 12{,}76^2 = 6{,}81 \text{ kg/m}^2,$$

$$\bar{F}s = 0{,}0384\cdot 12{,}76^2 = 6{,}26 \text{ kg/m}^2,$$

$$L_1 = -\frac{2}{\pi}\,\frac{-2{,}348+6{,}26}{6{,}81-6{,}79-0{,}0149\,(1+\ldots)} = \sim \pm\infty,$$

$$\frac{V}{v} = \sim \pm\infty.$$

Pour $\omega = \sim 13{,}12 \text{ sec}^{-1}$

$$\bar{A} = 0{,}0418\cdot 13{,}12^2 = \sim 7{,}27 \text{ kg/m}^2,$$

$$\bar{F}s = 0{,}0384\cdot 13{,}12^2 = \sim 6{,}68 \text{ kg/m}^2,$$

$$L_1 = -\frac{2}{\pi}\,\frac{-2{,}348+6{,}68}{7{,}27-6{,}79-0{,}0149\left(1+\frac{1}{9}\,\frac{7{,}27-6{,}79}{7{,}27-9\cdot 6{,}79}+\ldots\right)} = -5{,}83,$$

$$L_3 = \frac{L_1}{3}\,\frac{7{,}27-6{,}79}{7{,}27-9\cdot 6{,}79} = -0{,}0173,$$

$$L_2 = \frac{1}{2\pi} \frac{2 \cdot 6{,}68}{7{,}27 - 4 \cdot 6{,}79} = -0{,}107\,,$$

$$\frac{V}{v} = 5{,}720 + 0{,}0568\,(-5{,}83 - \tfrac{1}{3}\,0{,}0173) = 5{,}720 - 0{,}332 = 5{,}39 \text{ t/m}\,.$$

Il est évident que le mouvement de la masse du hauban influence considérablement l'élasticité de l'appui 2 dans l'intervalle étudié de la fréquence.

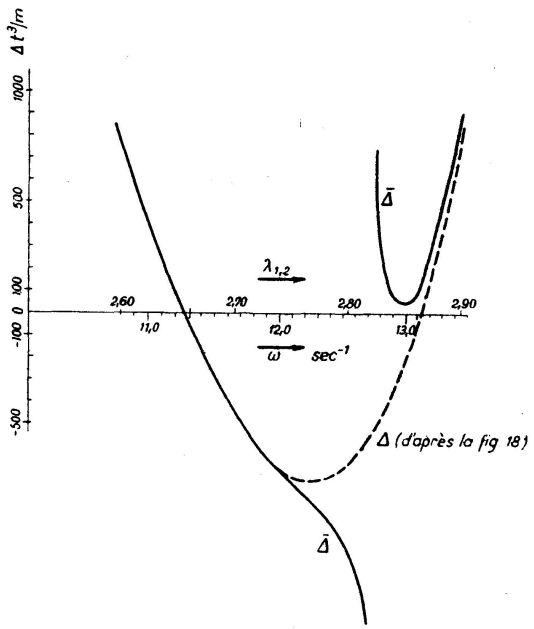

Fig. 21.
L'Influence du mouvement des haubans sur le déterminant Δ — Einfluß der Bewegungen der Abspannseile auf die Determinante Δ — Influence of the movement of the stays on the determinant Δ.

Les équations du tableau IV valent avec la seule différence, qu'on substitue pour $\frac{1}{\varkappa^0}$ les valeurs de $\frac{V}{v}$ déterminées ci-dessus. Le déterminant $\bar{\Delta}$ est graphiquement représenté dans la figure 21 en fonction de ω. Il résulte de la figure 21 que la première fréquence a resté à peu près la même qu'au calcul approximatif. Au contraire à la vitesse angulaire $\omega \approx 13{,}12$ sec^{-1}, la vibration propre n'intervient pas du tout. A $\omega = 12{,}76$ sec^{-1} intervient la vibration propre des haubans 2.

3. L'influence de la force axiale statique à la vibration.

Le poids propre et surtout les composantes verticales des tensions des haubans provoquent des forces axiales considérables, qui restent à peu près constantes, si nous ne considérons que les petites oscillations. Telles forces axiales ralentissent la vibration propre du système.

La vibration de la barre à la section constante, qui est sollicitée par une force axiale statique est exprimée par l'équation

$$EJ \frac{d^4 v}{dx^4} - N \frac{d^2 v}{dx^2} - \mu \omega^2 v = 0 \tag{88}$$

avec l'intégrale

$$v = C_1 \cos h \frac{bx}{l} + C_2 \sin h \frac{bx}{l} + C_3 \cos \frac{ax}{l} + C_4 \sin \frac{ax}{l}, \tag{89}$$

où

$$a = l\sqrt{-\frac{N}{2EJ} + \sqrt{\left(\frac{N}{2EJ}\right)^2 + \frac{\mu\omega^2}{EJ}}}, \tag{90} \qquad b = l\sqrt{\frac{N}{2EJ} + \sqrt{\left(\frac{N}{2EJ}\right)^2 + \frac{\mu\omega^2}{EJ}}} \tag{91}$$

(N étant la force axiale, négative comme la pression; $a\,b = \lambda^2$). On peut résoudre l'équation (89) pour les différentes conditions aux extrémités. Après la détermination des constantes d'intégration on peut obtenir les formules pour les moments et les forces aux extrémités de la barre dont les deux bouts sont soit rigidement attachés, soit l'un d'eux est pourvu de l'articulation.

Si la barre est attachée par l'articulation au point $k-1$ et rigidement au point k (comme dans la figure 12), on obtient

$$M_{k,k-1} = \frac{1}{l'}\,\mathfrak{F}_7(a,b)\,\gamma_k + \frac{1}{ll'}\,\mathfrak{F}_8(a,b)\,v_{k-1} + \frac{1}{ll'}\,\mathfrak{F}_9(a,b)\,v_k, \tag{92}$$

$$V_{k-1,k} = \frac{1}{ll'}\,\mathfrak{F}_8(a,b)\,\gamma_k + \frac{1}{l^2 l'}\,\mathfrak{F}_{12}(a,b)\,v_{k-1} + \frac{1}{l^2 l'}\,\mathfrak{F}_{10}(a,b)\,v_k, \tag{93}$$

$$V_{k,k-1} = \frac{1}{ll'}\,\mathfrak{F}_9(a,b)\,\gamma_k + \frac{1}{l^2 l'}\,\mathfrak{F}_{10}(a,b)\,v_{k-1} + \frac{1}{l^2 l'}\,\mathfrak{F}_{11}(a,b)\,v_k, \tag{94}$$

où

$$\mathfrak{F}_7(a,b) = \frac{(a^2+b^2)\sin hb \sin a}{f(a,b)}, \tag{95}$$

$$\mathfrak{F}_8(a,b) = \frac{ab(b \sin hb + a \sin a)}{f(a,b)}, \tag{96}$$

$$\mathfrak{F}_9(a,b) = -\frac{ab(a \cos hb \sin a + b \sin hb \cos a)}{f(a,b)}, \tag{97}$$

$$\mathfrak{F}_{10}(a,b) = -\frac{ab(b^2 \cos hb + a^2 \cos a)}{f(a,b)}, \tag{98}$$

$$\mathfrak{F}_{11}(a,b) = \frac{ab(a^2+b^2)\cos hb \cdot \cos a}{f(a,b)}, \tag{99}$$

$$\mathfrak{F}_{12}(a,b) = \frac{ab\,[2a^2b^2 + ab(b^2-a^2)\sin hb \sin a + (a^4+b^4)\cos hb \cos a]}{(a^2+b^2)\cdot f(a,b)}; \tag{100}$$

$$f(a,b) = b \cos hb \sin a - a \sin hb \cos a. \tag{101}$$

Le reste du calcul par la méthode de déformation ne diffère de celui au chapitre précédent.

Exemple numérique.

Pour le même pylône que dans les exemples précédents (voir fig. 4), nous obtenons les équations du Tab. V qui ne diffère du Tab. IV qu'en cela que les fonctions $F(\lambda)$ sont remplacées par les fonctions $\mathfrak{F}(a, b)$.

Tab. V [4]).

	γ_1	ν_1	ν_2	
I	$\frac{1}{l'_{0,1}}\mathfrak{F}_7(a,b)+\frac{1}{l'_{1,2}}\mathfrak{F}_7(a,b)$	$\frac{1}{l_{0,1}l'_{0,1}}\mathfrak{F}_9(a,b)-\frac{1}{l_{1,2}l'_{1,2}}\mathfrak{F}_9(a,b)$	$-\frac{1}{l_{1,2}l'_{1,2}}\mathfrak{F}_8(a,b)$	$=0$
II	$\frac{1}{l_{0,1}l'_{0,1}}\mathfrak{F}_9(a,b)-\frac{1}{l_{1,2}l'_{1,2}}\mathfrak{F}_9(a,b)$	$\frac{1}{l^2_{0,1}l'_{0,1}}\mathfrak{F}_{11}(a,b)+\frac{1}{l^2_{1,2}l'_{1,2}}\mathfrak{F}_{11}(a,b)+\frac{1}{\varkappa^0_1}$	$\frac{1}{l^2_{1,2}l'_{1,2}}\mathfrak{F}_{10}(a,b)$	$=0$
III	$-\frac{1}{l_{1,2}l'_{1,2}}\mathfrak{F}_8(a,b)$	$\frac{1}{l^2_{1,2}l'_{1,2}}\mathfrak{F}_{10}(a,b)$	$\frac{1}{l^2_{1,2}l'_{1,2}}\mathfrak{F}_{12}(a,b)+\frac{1}{\varkappa^0_2}$	$=0$

La force axiale dans les barres du pylône non surchargé a pour valeur:

dans la travée 1,2

la composante verticale des tensions des haubans	$4\cdot 1000\cdot 0{,}919 = 3680$ kg
le poids propre (d'après le chapitre I 1 c)	$= 280$ »
	$-N_{1,2} = 3960 = \sim 4000$ kg

dans la travée 0,1

la composante verticale des tensions	$-N_{1,2} = 4000$ kg
des haubans	$4\cdot 500\cdot 0{,}785 = 1580$ »
le poids propre	$= 750$ »
	$-N_{0,1} = 6330 = \sim 6400$ kg

Pour a, b on a à la travée 0,1

$$\frac{-N_{0,1}}{2EJ_{0,1}} = \frac{6{,}4}{2\cdot 21{,}5\cdot 10^6\cdot 0{,}5899\cdot 10^{-4}} = 0{,}00252\ \mathrm{m}^{-2},$$

$$\frac{\mu_{0,1}\omega^2}{EJ_{0,1}} = \frac{0{,}04990\,\omega^2}{9{,}81\cdot 21{,}5\cdot 10^6\cdot 0{,}5899\cdot 10^{-4}} = 0{,}00000401\,\omega^2\ \mathrm{m}^{-4},$$

$$a_{0,1} = 19{,}0\sqrt{0{,}00252+\sqrt{0{,}00000636+0{,}00000401\,\omega^2}},$$

$$b_{0,1} = 19{,}0\sqrt{-0{,}00252+\sqrt{0{,}00000636+0{,}00000401\,\omega^2}},$$

à la travée 1,2

$$\frac{-N_{1,2}}{2EJ_{1,2}} = \frac{4{,}0}{2\cdot 21{,}5\cdot 10^6\cdot 0{,}2814\cdot 10^{-4}} = 0{,}00330\ \mathrm{m}^{-2},$$

$$\frac{\mu_{1,2}\omega^2}{EJ_{1,2}} = \frac{0{,}03544\,\omega^2}{9{,}81\cdot 21{,}5\cdot 10^6\cdot 0{,}2814\cdot 10^{-4}} = 0{,}00000597\,\omega^2\ \mathrm{m}^{-4},$$

$$a_{1,2} = 16{,}0\sqrt{0{,}00330+\sqrt{0{,}00001093+0{,}00000597\,\omega^2}},$$

$$b_{1,2} = 16{,}0\sqrt{-0{,}00330+\sqrt{0{,}00001093+0{,}00000597\,\omega^2}}.$$

Nous calculons les coefficients des équations du tableau V pour les différentes valeurs de ω et déterminons la variation de leurs déterminant Δ

[4]) Les indices de la barre sont supprimés dans les symboles $\mathfrak{F}(a, b)$; ils seraient les mêmes comme ceux du l.

en fonction de ω. Elle est graphiquement représentée avec les déterminants mineurs dans la figure 22. Les forces axiales diminuent la première vitesse angulaire de la vibration propre à $\omega_I^* = \sim 10{,}8$ ($\lambda_{1,2} = 2{,}595$). Pour les rapports des déformations on a

$$\frac{\gamma_1}{v_2} = \frac{S_{\gamma_1,\mathrm{I}}}{S_{v_2,\mathrm{I}}} = \frac{S_{\gamma_1,\mathrm{II}}}{S_{v_2,\mathrm{II}}} = \frac{S_{\gamma_1,\mathrm{III}}}{S_{v_2,\mathrm{III}}} = \sim -1{,}17\,\mathrm{m}^{-1}, \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{S_{v_1,\mathrm{I}}}{S_{v_2,\mathrm{I}}} = \frac{S_{v_1,\mathrm{II}}}{S_{v_2,\mathrm{II}}} = \frac{S_{v_1,\mathrm{III}}}{S_{v_2,\mathrm{III}}} = \sim 13{,}1.$$

La figure 23 montre la forme de la vibration propre.

4. La vibration forcée.

Puisque la résolution précise du problème est extrèmement difficile si non tout à fait impossible, nous simplifions les suppositions du calcul. Envisageons le pylône d'antenne comme une poutre continue sur appuis élastiques — conformément à l'étude de flambage — faisons l'abstraction d'influence du mouvement de la masse des haubans et supposons que la charge est uniforme et harmoniquement variable.

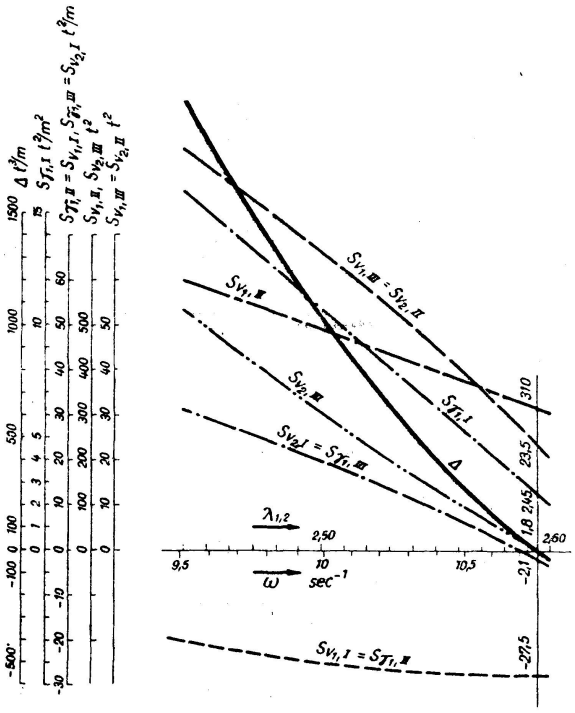

Fig. 22

L'Influence des forces axiales statiques sur le déterminant Δ et les déterminants mineurs.

Einfluß der statischen Axialkräfte auf die Determinante Δ und die Unterdeterminanten.

Influence of the static axial forces on the determinant Δ and on the minor determinants.

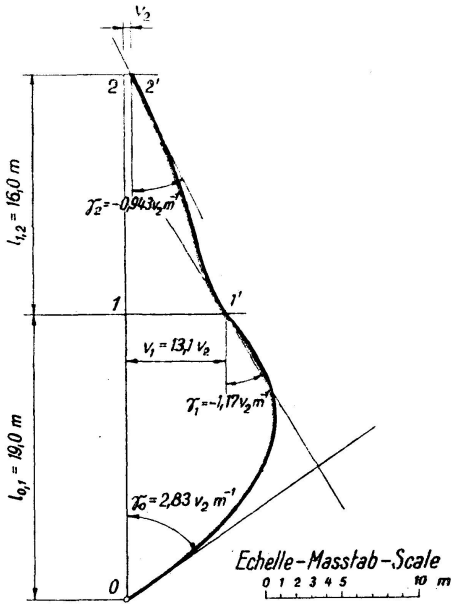

Fig. 23

Influence des forces axiales statiques sur la première forme de la vibration propre.

Einfluß der statischen Längskräfte auf die Grundschwingungsform.

Influence of the static axial forces on the first form of natural vibration.

La vibration forcée stationnaire peut dès lors être analysée d'après les formes de la vibration propre. Nous développons la charge et la déformation dans la série infinie ($\mathfrak{v}_{(\mathrm{I})}(x)$, $\mathfrak{v}_{(\mathrm{II})}(x)$ désigne la première (deuxième) forme de la vibration propre, $v_{(\mathrm{I})}(t)$, $v_{(\mathrm{II})}(t)$, $v_{(\mathrm{III})}(t)$ etc. exprime la participation de la vibration propre correspondante)

$$p(x,t) = \mu\,[p_{(\mathrm{I})}(t)\cdot \mathfrak{v}_{(\mathrm{I})}(x) + p_{(\mathrm{II})}(t)\cdot \mathfrak{v}_{(\mathrm{II})}(x) + \ldots.] \tag{102a}$$

$$v(x,t) = v_{(\mathrm{I})}(t)\cdot \mathfrak{v}_{(\mathrm{I})}(x) + v_{(\mathrm{II})}(t)\cdot \mathfrak{v}_{(\mathrm{II})}(x) + v_{(\mathrm{III})}(t)\cdot \mathfrak{v}_{(\mathrm{III})}(x) + \ldots. \tag{102b}$$

où

$$p_{(\mathrm{I})}(t) = \frac{\int p(x,t)\,\mathfrak{v}_{(\mathrm{I})}(x)\,dx}{\int \mu\,\mathfrak{v}^2_{(\mathrm{I})}(x)\,dx}, \qquad p_{(\mathrm{II})}(t) = \frac{\int p(x,t)\,\mathfrak{v}_{(\mathrm{II})}(x)\,dx}{\int \mu\,\mathfrak{v}^2_{(\mathrm{II})}(x)\,dx}.\ ^{5)} \tag{103}$$

Si la charge est en résonnance avec la première vibration propre, il suffit de considérer le premier membre de la série (102a) et (102b).

La vibration harmonique amortie est ensuite déterminée par l'équation:

$$\frac{d^2 v_{(\mathrm{I})}(t)}{dt^2} + 2\,\omega_b \frac{d\,v_{(\mathrm{I})}(t)}{dt} + \omega_{\mathrm{I}}^2\, v_{(\mathrm{I})}(t) = p_{(\mathrm{I})} \sin \omega_{\mathrm{I}}\, t \tag{104}$$

ω_b étant coefficient de l'amortissement, $p_{(I)}(t) = p_{(I)} \sin \omega_I t$; d'où l'amplitude de la vibration $v_{(I)}(t)$:

$$v_{(\mathrm{I})} = \frac{p_{(\mathrm{I})}}{2\,\omega_{\mathrm{I}}\,\omega_b} \tag{105}$$

Exemple numérique.

Supposons le pylône du chapitre I 1 c, la charge uniforme $p(x,t) = 0{,}00934 \sin \omega t$ (tonnes par mètre courant) dans la travée 0—1, $p(x,t) = 0{,}00767 \sin \omega t$ dans la travée 1—2, ω égale à la première vitesse angulaire de la vibration propre $\omega_I = 11{,}28\ \mathrm{sec}^{-1}$ et $\omega_b = 2\pi \cdot 0{,}1\ \mathrm{sec}^{-1}$. La première forme de la vibration propre soit donné par les valeurs $\gamma_{(I)1} = -0{,}140$, $\mathfrak{v}_{(I)1} = 3{,}35$ m, $\mathfrak{v}_{(I)2} = 1$ m (voir l'exemple numérique du chapitre II 1).

On évalue les intégrales (soit par la sommation graphique) et l'on obtient

$$\int p(x,t)\,\mathfrak{v}_{(\mathrm{I})}(x)\,dx = 0{,}870 \sin \omega_{\mathrm{I}}\, t$$

$$\int \mu\,\mathfrak{v}^2_{(\mathrm{I})}(x)\,dx = 1{,}488$$

d'où, d'après (103)

$$p_{(\mathrm{I})}(t) = p_{(\mathrm{I})} \sin \omega_{\mathrm{I}}\, t = \frac{0{,}870}{1{,}488} \sin \omega_{\mathrm{I}}\, t = 0{,}583 \sin \omega\, t$$

et d'après (105) il vient

$$v_{(\mathrm{I})} = \frac{0{,}583}{2\cdot 11{,}28\cdot 0{,}628} = 0{,}0411$$

et il s'ensuit que l'amplitude du déplacement d'après (102b) est

au point 1: $v_1 = v_{(\mathrm{I})}\cdot \mathfrak{v}_{(\mathrm{I})1} = 0{,}0411\cdot 3{,}35 = 0{,}138$ m

au point 2: $v_2 = v_{(\mathrm{I})}\cdot \mathfrak{v}_{(\mathrm{I})2} = 0{,}0411$ m.

Table alphabétique des notations utilisées [6])

a	distance d'après la figure 1
a, b	valeurs d'après les formules (90), (91)
c	coefficient du flambage
d	diamètre intérieur du tube

[5]) Hohenemser-Prager: Dynamik der Stabwerke, Berlin 1933, p. 284.

[6]) La signification des symboles utilisés dans la partie II 4 est expliquée a l'endroit même.

f	la flèche du hauban, mesurée au milieu du hauban perpendiculairement à la corde
$f(a, b)$	fonctions d'après (101)
g	poids propre du mât par mètre courant
$\bar{g}$	poids propre du hauban par mètre courant
i	rayon de giration
k	désignation d'un appui
k'	désignation d'un appui déplacé
l	portée de travée
$l' = \frac{l}{EJ}$	
$\bar{l}$	longueur au flambage
m	coefficient de sécurité
n	longueur de la normale
n	nombre totale des appuis
p	fréquence; ($V_{k,p}$ désigne la force agissant sur l'appui élastique)
q	charge transversale par mètre courant du mât
$\bar{q}$	charge transversale par mètre courant du hauban
$\bar{r}$	charge totale par mètre courant du hauban
s	portée du hauban
Δs	variation de la portée du hauban
t	temps
v	déplacement, amplitude du déplacement
v	comme indice signifie: vent
x	direction de l'axe X (comme l'indice)
x	abscisse d'une section
y	direction de l'axe Y (l'indice)
y	flèche du hauban mesurée en position x perpendiculairement à la corde
$\mathfrak{y}$	variation de la flèche du hauban pendant la vibration
$\bar{\mathfrak{y}}$	variation de la flèche mesurée de la corde
z	d'après (22)
A, B, C	constantes d'après (5) jusqu'à (7)
$\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{D}$, $\bar{F}$	constantes d'après (66) jusqu'à (70)
C_1, C_2, C_3, C_4	constantes dans l'équation de vibration
$\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3, \bar{C}_4$	constantes dans l'équation de flambage
D	diamètre extérieur du tube
$E = 21{,}5 \cdot 10^6$ t/m²	module d'élasticité d'acier
$\bar{E} = 16 \cdot 10^6$ t/m²	module d'élasticité des câbles
$F(\lambda)$	fonctions d'après (36) jusqu'à (41), (46) jusqu'à (51)
$\mathfrak{F}(a, b)$	fonctions d'après (95) jusqu'à (100)
ΔF	variation de la surface déterminée par la corde et la courbe du hauban pendant le déplacement horizontal unité du point d'attache supérieur

H	tension d'antenne
J	moment d'inertie du mât.
K	constante d'élasticité de l'appuis d'après (9)
L	constantes d'après (82) jusqu'à (85)
M	moment fléchissant; amplitude du moment
$\mathfrak{M}$	moment d'encastrement de la barre chargée
N	force axiale
P	force
Q	charge transversale de la portée entière
R	désignation de l'extrémité inférieure d'un hauban
R	résultante
$\bar{R}$	résultante de la charge totale d'un hauban
S	tension dans le hauban
ΔS	variation de la force S
$S_{\gamma,\mathrm{I}}, S_{\gamma,\mathrm{II}} \ldots$ etc.	déterminants mineurs
T	effort tranchant
U	surface de la section du mât
$\bar{U}$	surface de la section du hauban
V	force à l'extrémité de la barre, force agissant à l'appui; amplitude de ces forces
$\mathfrak{W}$	force à l'extrémité d'une barre encastrée
X, X, Z	axes de coordonnées
β	angle entre la direction du vent et le plan du hauban
γ	rotation du noeud
δ	l'épaisseur de la paroi du tube
ε	angle de la tangente au point x d'après la figure 16
ζ	angle avec l'axe Z
η	angle avec l'axe Y
$\varkappa$	constante d'élasticité de l'appui d'après (9)
$\lambda = l\sqrt[4]{\frac{\mu\omega^2}{EJ}}$	
μ	masse du mât par mètre courant
$\bar{\mu}$	masse du hauban par mètre courant
ν	tension normale
ξ	angle avec l'axe X
ϱ	rayon de courbure
σ	angle entre la corde du hauban et le plan horizontal
$90^0 - \varphi$	angle de la résultante de la charge totale sur la direction du hauban
$\psi = \frac{v_k - v_{k-1}}{l_{k-1,k}}$	
ω	vitesse angulaire de vibration (fréquence circulaire)
ω_b	coefficient d'amortissement
$\Delta, \bar{\Delta}$	déterminant des coefficients des équations
Φ	diamètre du hauban

Indices. Les chiffres arabes désignent le numéro du noeud du mât (généralement k), les chiffres romaines le numéro de l'ancrage du hauban. Les indices des noeuds et des ancrages sont écrites en bas; tous les deux désignent la travée du mât ou le hauban, le premier d'eux le point d'application. Par exemple, $M_{1,2}$ est le moment sur la barre 1—2 au point 1,

$v_{1,I}$ le déplacement du point 1 du hauban 1—I. L'indice v désigne le vent (q^v la charge transversale du vent), o la charge permanente (S^0 la tension du hauban correspondante à la charge permanente).

Convention des signes. Dans les calculs par la méthode de déformation, les rotations et les moments agissants aux extrémités de la barre sont supposés positives dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre, les forces et les déplacements dans le sens de gauche a droite.

Résumé

La première partie de l'article contient le calcul statique des pylônes d'antenne haubanés et la solution de leur flambage.

La deuxième partie étudie les problèmes dynamiques de ces constructions. Par suite de la hauteur considérable des pylônes, de leur profile mince et de leur surcharge engendrée par le vent qui varie en fonction du temps et de la hauteur au dessus du sol, les déformations dynamiques peuvent dépasser les déformations provoquées par les charges stables. L'étude dynamique y est alors d'importance éminente.

On analyse dans ce mémoire les vibrations propres, l'influence du mouvement des haubans et des forces axiales du mât à la vibration et approximativement la vibration forcée des pylônes haubanés.

Zusammenfassung

Im ersten Teil der Abhandlung wird die statische Berechnung abgespannter Antennenmaste und ihre Stabilität behandelt. Im zweiten Teil werden die dynamischen Probleme dieser Bauwerke untersucht. Infolge der beträchtlichen Höhe und der Schlankheit dieser Maste und ihrer durch den nach Zeit und Höhe veränderlichen Winddruck verursachten Belastung können die dynamischen Formänderungen die statischen übersteigen. Die dynamische Untersuchung erhält dadurch wesentliche Bedeutung. Es werden die Eigenschwingungen, der Einfluß der Bewegung der Abspannseile und der Axialkräfte des Mastes auf die Schwingungen und angenähert auch die erzwungene Schwingung des abgespannten Systems untersucht.

Summary

The first part of the paper deals with the static calculation of stayed antennae masts and their stability. In the second part the dynamic problems of these structures are investigated. In consequence of the considerable height and the slenderness of these masts, and because of the loading caused by wind pressure varying with time and height, the dynamic deformations may exceed the static ones. Dynamic investigations are therefore of essential importance. Investigation is here made on natural vibrations, on the influence of movement of the stay ropes and of the axial forces of the mast on the vibrations, and approximately also on the forced vibration of the stayed system.