

Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

Band: 7 (1943-1944)

Artikel: Décomposition des coefficients d'influence dans les problèmes de vibration et de flambage: détermination approchée de fréquences ou de charges critiques

Autor: Buckens, Félix

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-7994>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 18.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

DÉCOMPOSITION DES COEFFICIENTS D'INFLUENCE DANS LES PROBLÈMES DE VIBRATION ET DE FLAMBAGE.¹⁾

[DÉTERMINATION APPROCHÉE DE FRÉQUENCES OU DE CHARGES CRITIQUES]

ZERLEGUNG DER EINFLUSSKOEFFIZIENTEN IN DEN
SCHWINGUNGS- UND KNICKPROBLEMEN.

RESOLUTION OF THE INFLUENCE COEFFICIENTS IN PROBLEMS
OF VIBRATION AND BUCKLING.

FÉLIX BUCKENS, Ing. civ. Mécanicien-Electricien U. I. Lv., Docteur en Sciences Appliquées,
Charge de Recherches au Fonds National de la Recherche Scientifique Belge, Héverlé (Louvain).

Les systèmes physiques dont s'occupe la théorie de l'élasticité se définissent complètement par la répartition des coefficients d'influence et par la distribution des masses.

Nous conserverons dans la suite de cet article le sens ordinaire attaché au mot coefficient d'influence en Résistance des Matériaux, celui d'un coefficient de proportionnalité entre l'effort agissant en un point d'un système et le déplacement résultant en un autre de ses points.

On conçoit qu'un système à n degrés de liberté se caractérise par un tableau de n^2 coefficients d'influence. Ce tableau est symétrique par rapport à la diagonale principale, dont les éléments sont dits « locaux »; en effet le coefficient « mutuel » e^{pq} , qui mesure le déplacement suscité en p par une force unitaire agissant en q , suivant des directions données, ce coefficient est égal à son symétrique e^{qp} , selon le théorème de réciprocité de MAXWELL.

Lorsqu'il s'agit d'un problème de dynamique, par exemple de vibration, il faut joindre à ce tableau la répartition massique, de manière à disposer de toutes les données nécessaires à la résolution. Si cette répartition se prête à une décomposition en systèmes « partiels », que l'on obtient en y faisant figurer successivement certains groupes de masses, tout en conservant la structure élastique primitive, on peut se réclamer de la formule de DUNKERLEY²⁾ pour calculer une borne inférieure de la première fréquence propre du système. En appelant f_i les fréquences fondamentales des systèmes partiels, nous avons :

$$f^{-2} \leq \sum f_i^{-2}$$

¹⁾ Cet article résume l'essentiel d'une thèse de Doctorat en Sc. Appl. présentée aux Ec. Spéc. de l'Univ. Cath. de Louvain. Nous nous limitons à une décomposition linéaire des coefficients d'influence, pratiquement la plus importante, et évitons toute discussion de possibilité des décompositions. Nous nous sommes servi de cette théorie dans un travail qui obtint le Prix Scientifique Interfacultaire L. EMPAIN, en 1941.

²⁾ Obtenue empiriquement par DUNKERLEY (Phil. Trans. R. S. London A Vol. 185, 1894) cette formule fut démontrée par E. HAHN (Schweiz. Bauz., Vol. 72, 1918) et par F. H. VAN DEN DUNGEN (C. R. Acad. Sc. Paris, Vol. 177, 1923).

En général l'inégalité entre les deux membres est peu prononcée; elle doit plutôt servir à indiquer le sens de l'approximation obtenue en la remplaçant par une égalité.

Nous allons montrer qu'il est possible d'utiliser une formule analogue en procédant à une décomposition, non plus des masses, mais de l'élasticité, ou pour être plus précis, des coefficients d'influence du système. En nous limitant à des problèmes de stabilité et de vibration de systèmes élastiques, nous pouvons éviter la question délicate de la possibilité générale d'une telle décomposition. Il nous suffit de montrer que les différents systèmes partiels soumis à un type quelconque de sollicitations extérieures reproduisent par superposition des déformations respectives la déformation du système primitif.

Nous verrons que cette vérification se fait en général directement dans toute décomposition des coefficients d'influence. Quant à la décomposition et à la manière correcte et efficace d'y procéder, c'est de façon très intuitive et toute naturelle que l'on y arrivera par la suite.

Démonstration de la formule de décomposition.

Nous prenons pour point de départ le théorème de RAYLEIGH. Rapelons-en le principe. On sait que pour chaque mode normal de vibration, les amplitudes de variation des énergies potentielle (U) et cinétique (T) sont égales en vertu du principe de conservation de l'énergie totale, en l'absence de frottements et de sollicitations extérieures. Ces énergies s'expriment en fonction des données massiques et élastiques du problème, mais aussi en fonction des déformations et fréquences, grandeurs qu'il s'agit de déterminer.

Ces deux inconnues peuvent toutefois se déterminer grâce à une propriété extrême de l'équation énergétique

$$T = U.$$

Supposons en effet que nous adoptions une déformation arbitraire qui soit une fonction sinusoïdale du temps. Dès lors, la fréquence de cette fonction découlera de l'équation précédente.

La fréquence «forcée» ainsi obtenue diffère généralement de la ou des fréquences naturelles du système. On montre cependant facilement que si l'on fait varier de manière très générale la déformée arbitraire adoptée, cette fréquence «forcée» passe par un extremum chaque fois qu'il se produit une coïncidence avec l'un des modes normaux.

Cet extremum est évidemment égal dans ce cas à la fréquence naturelle qui correspond à ce mode. Tel est le théorème de RAYLEIGH: on voit immédiatement que le minimum absolu de la fréquence forcée se situe au niveau de la fréquence propre fondamentale³⁾.

Il suffit donc de se donner une déformation arbitraire, toutefois pas trop différente du premier mode normal, pour obtenir une fréquence «forcée» peu différente de la fondamentale, et qui peu servir de borne supérieure à celle-ci.

Nous appliquons ce théorème à une décomposition linéaire des coefficients d'influence, et cela de la manière suivante.

Soit λ le carré de la pulsation, z_p l'amplitude correspondant à l'élément de masse dm_p , enfin e^{pq} le coefficient d'influence; le maximum de l'énergie cinétique vaut

³⁾ Dans le cas des modes normaux supérieurs, il existe un théorème de maximum minimorum dû à Courant.

$$\lambda \int z_p^2 dm_p$$

l'intégrale étant étendue au système entier (éventuellement au sens de STIELTJES). L'énergie potentielle maxima s'écrit

$$\lambda^2 \iint e^{pq} z_p z_q dm_p dm_q$$

de sorte que l'équation énergétique donne

$$\lambda^{-1} = \frac{\iint e^{pq} z_p z_q dm_p dm_q}{\int z_p^2 dm_p}$$

D'après cela, l'inverse du carré de la pulsation est une fonction linéaire du coefficient d'influence $\lambda^{-1} = L(e^{pq})$

Une décomposition linéaire de e^{pq} donne dès lors

$$\lambda^{-1} = L \left(\sum_k e_k^{pq} \right) = \sum_k L(e_k^{pq})$$

Nous avons vu que nous obtenons la pulsation fondamentale en adoptant pour déformée arbitraire le premier mode normal z_1 et dans ce cas

$$\lambda^{-1} = L_1(e^{pq}) = \sum_k L_1(e_k^{pq})$$

A chaque terme e_k^{pq} de la décomposition de e^{pq} correspond un système partiel qui conserve la répartition massique primitive, mais présente une structure élastique différente de celle du système proposé. Soit λ_{1k} le carré de la pulsation fondamentale du k ème système; comme la fonction z_1 diffère en général du premier mode de chacun des systèmes partiels, nous aurons, suivant le théorème de RAYLEIGH

$$\lambda_{1k}^{-1} \geq L_1(e_k^{pq})$$

En effet, l'équation énergétique ne fournit dans ce cas qu'une borne supérieure de la première pulsation propre de ce système partiel.

Rapprochons cette inégalité de l'égalité précédente, nous obtenons

$$\lambda_1^{-1} \leq \sum_k \lambda_{1k}^{-1}$$

ou encore

$$\lambda_1 \geq \left(\sum_k \lambda_{1k}^{-1} \right)^{-1}, \quad (1)$$

d'où le théorème important: si une décomposition des coefficients d'influence fournit des systèmes partiels dont on peut évaluer les pulsations fondamentales, la formule précédente permet de fixer une borne inférieure de la fréquence fondamentale du système proposé. De plus, les conditions extrêmes dans lesquelles joue le théorème de RAYLEIGH garantissent en même temps une bonne valeur approchée de λ_1 .

En fait, le théorème de RAYLEIGH traduit un principe bien connu de la théorie des valeurs propres; c'est ce qui explique qu'on peut formuler son équivalent dans l'étude des charges critiques d'un système dont la stabilité dépend de charges statiques extérieures. En général, il s'agit d'un problème de flexion ordinaire et il se fait que le cisaillement n'a souvent pas grande influence sur la valeur de la charge de flambage P_{cr} . C'est en tout cas ce que nous supposons ici, quitte à faire subir aux résultats les corrections voulues pour tenir compte de l'élancement fini des différentes parties du système.

Soit δ^{pq} le coefficient d'influence angulaire (angle de déformation en p sous l'action d'un moment unitaire en q); y^p est la variation angulaire de la tangente à la «fibre neutre» en p .

La part du travail extérieur qui intéresse la stabilité vaut

$$P \int y_p^2 dl_p;$$

c'est la somme des travaux effectués par les moments élémentaires

$$dM_p = P y_p dl_p$$

dl_p se rapportant à la fibre neutre.

La variation d'énergie potentielle correspondante est

$$\int P y_p dl_p \int \delta^{pq} \cdot P \cdot y_q dl_q,$$

de sorte que l'équation énergétique donne enfin

$$P^{-1} = \frac{\iint \delta^{pq} y_p y_q dl_p dl_q}{\int y_p^2 dl_p},$$

la suite du raisonnement est analogue à celui qui précède. Pareillement, une décomposition linéaire du coefficient angulaire

$$\delta^{pq} = \sum_k \delta_k^{pq}$$

permet, si l'on connaît les charges critiques «partielles» correspondant aux systèmes (k), d'évaluer une borne inférieure de la charge critique P_{cr} par la formule

$$P_{cr} \geq (\sum_k P_k^{-1})^{-1} \quad (2)$$

Remarque.

Il ne manque pas d'intérêt de noter qu'il correspond à ces inégalités des formules qui tiennent compte des différentes harmoniques des valeurs propres λ et P . Désignons par λ_i le carré de la $i^{\text{ème}}$ pulsation propre du système; on peut montrer en toute généralité que

$$\int e^{pp} dm_p = \sum_i \lambda_i^{-1},$$

la somme s'étendant à tous les modes normaux.

D'après cela, une simple décomposition des coefficients d'influence locaux suffit à donner

$$\sum_i \lambda_i^{-1} = \sum_k \sum_i \lambda_{ik}^{-1} \quad (3)$$

en notant par λ_{ik} le carré de la $i^{\text{ème}}$ pulsation propre du système partiel (k). De même, les charges critiques «harmoniques» du système proposé et de systèmes partiels vérifient la formule suivante

$$\sum_i P_i^{-1} = \sum_k \sum_i P_{ik}^{-1} \quad (4)$$

Pareilles formules peuvent s'avérer utiles si l'on dispose tout au moins de formules asymptotiques des valeurs propres d'ordre supérieur.

Décomposition généralisée des masses et des coefficients d'influence.

On aura relevé la parfaite similitude qui relie les formules (1) et (3) avec les résultats que l'on obtient par décomposition des masses. En fait, on peut toujours effectuer une décomposition ultérieure des systèmes par-

tiels, indifféremment du point de vue des coefficients d'influence ou des masses, sans changer le sens de l'inégalité (1). Pour résumer ceci, notons qu'une décomposition quelconque du produit $e^{pp}dm_p$ dans l'intégrale écrite plus haut conduit directement à la formule (3), qui se trouve ainsi validée pour une décomposition généralisée et des masses et des coefficients d'influence.

Application des formules de décomposition.

Nous allons éprouver l'efficacité de ces formules dans quelques exemples de vibration et de flambage, ce qui va nous permettre de fixer les meilleures conditions d'application de la nouvelle méthode.

Problèmes de vibration.

Poutre sur appuis élastiques.

Envisageons le cas simple d'une poutre de masse m par unité de longueur et de caractéristiques constantes; soient K_1 et K_2 les constantes de rigidité des appuis⁴⁾.

La résolution exacte conduit à une équation aux fréquences contenant des fonctions circulaires et hyperboliques, dont la solution peut s'obtenir par tâtonnement dans chaque cas particulier.

Nous pouvons considérer ici deux systèmes partiels qui décomposent les coefficients d'influence; le premier suppose les appuis rigides, tandis que le second comporte une poutre inélastique, à la différence des appuis. Dans le premier cas, le carré de la pulsation d'ordre n se retrouve dans la formule classique

$$\lambda'_n = \frac{EI}{m} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4$$

tandis que les deux fréquences propres du second système (à deux degrés de liberté) résultent d'un calcul élémentaire; on trouve

$$\lambda''_2 = \frac{2}{ml} (K_1 + K_2 \mp \sqrt{K_1^2 - K_1 K_2 + K_2^2});$$

la formule (1) fournit une borne inférieure de la première pulsation naturelle

$$\lambda_1 \geq \lambda_i = (\lambda'^{-1}_1 + \lambda''^{-1}_2)^{-1} = \frac{EI}{m} \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \cdot \gamma_i$$

Le facteur γ_i fait ressortir l'influence de l'élasticité des appuis sur la fréquence fondamentale de la poutre; il vaut

$$\gamma_i = \frac{1}{1 + \frac{s^2}{6} \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{1+3\beta} \right)}$$

formule dans laquelle nous avons posé

$$s = \frac{EI\pi^2}{l^3} \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \right) \quad \text{et} \quad \beta = \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right)^2$$

Ces paramètres mesurent respectivement l'élasticité de l'ensemble des deux appuis vis-à-vis de celle de la poutre, et la différence de raideur relative entre les appuis.

⁴⁾ Nous entendons par là qu'une force agissant sur l'appui dont la constante est K provoque un déplacement F/K .

Il s'agit maintenant d'évaluer le degré d'approximation atteint par cette formule. Plaçons-nous au point de vue de l'ingénieur et cherchons une borne supérieure de la première pulsation par la méthode dite de RAYLEIGH⁵). D'après le théorème rappelé plus haut, on obtient une valeur approchée par excès en adoptant une déformée proche du premier mode normal, par exemple

$$z = a + (b - a) \frac{x}{l} + c \sin \frac{\pi x}{l}$$

L'abscisse x se compte à partir de l'un des appuis. Les constantes a , b et c sont déterminées par les conditions aux limites. Introduisons z dans l'équation énergétique

$$T = U$$

nous obtenons

$$\lambda_s = \frac{EI}{m} \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \cdot \gamma_s$$

le facteur valant cette fois

$$\gamma_s = \frac{1 + 2s}{1 + 4s + \frac{\pi^2 s^2}{2} \left(1 + \frac{\beta}{3} \right)}$$

Le diagramme (Pl. I, fig. a) donne les courbes de γ_i et γ_s en fonction de s , dans les cas extrêmes où $\beta = 0$ (appuis également élastiques) et $\beta = 1$ (l'un des appuis est rigide). On notera la modeste influence de β sur la valeur de γ ; c'est donc surtout l'élasticité d'ensemble des appuis (s) qui modifie la fréquence fondamentale de la poutre.

Nous y joignons une courbe donnant le pour-cent d'erreur possible e au cas où l'on adopte une valeur moyenne de λ :

$$e = \frac{\lambda_s - \lambda_i}{\lambda_s + \lambda_i}$$

On remarquera que cette marge d'erreur est très faible pour les valeurs de s , soit très petites, soit très grandes. c. à d. suivant la prépondérance de l'élasticité de la poutre ou des appuis. En effet, le système donné tend dans ce cas à se confondre avec l'un des systèmes partiels formés, les fréquences de l'autre système deviennent très grandes, de sorte que leurs inverses peuvent être négligées dans la formule (1).

Remarque.

Il est intéressant d'observer ce que donne la formule (3) dans cet exemple: on a

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda'_n{}^{-1} + \sum_{1,2} \lambda''{}^{-1}$$

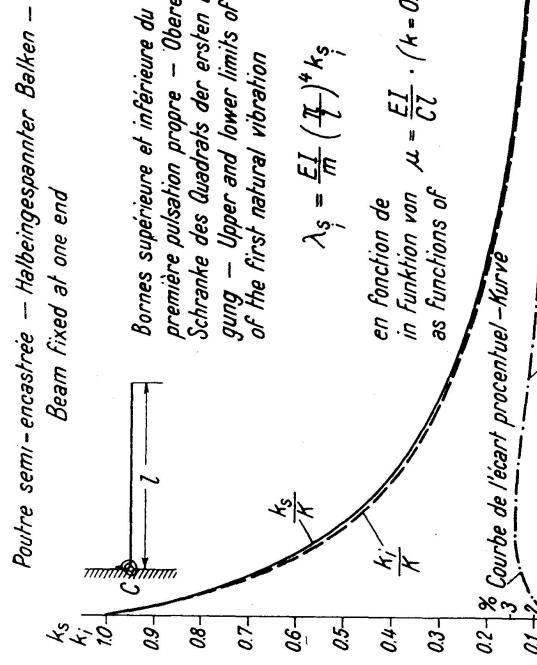
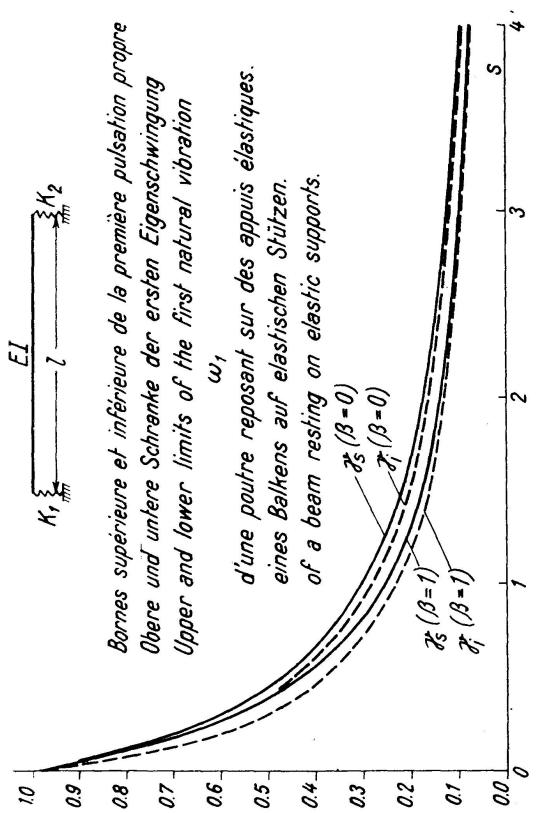
Les expressions de λ'_n et de λ'' donnent au second membre

$$\frac{ml^4}{90EI} + \frac{ml}{3} \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \right)$$

Poutre semi-encastrée.

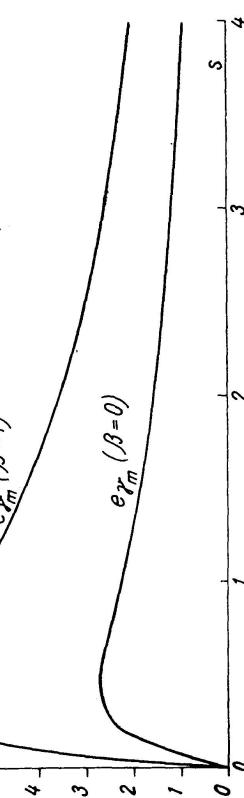
Nous supposons qu'un moment M agissant au droit de l'enca斯特rement imparfait produise une rotation M/C de la tangente à l'élastique en ce point. La poutre est supposée homogène sur toute sa longueur.

⁵⁾ Voir par ex. DEN HARTOG, «Mechanical Vibration».



dans les cas limites où
 in the limiting cases where
 $\beta = \left(\frac{K_1}{EI} + \frac{1}{l^2}\right)^2$
 in den Grenzen wo $\beta = \left(\frac{K_1}{EI} + \frac{1}{l^2}\right)^2$

vaut 0 et 1.
 gleich 0 und 1 beträgt
 equals 0 and 1.



Courbes de l'écart procentuel - Courve de l'écart procentuel
 Kurven der prozentualen Abweichung - Kurve der prozentualen Abweichung
 Curves of percentage deviation - Curve of percentage deviation

Fig. a

Planche I

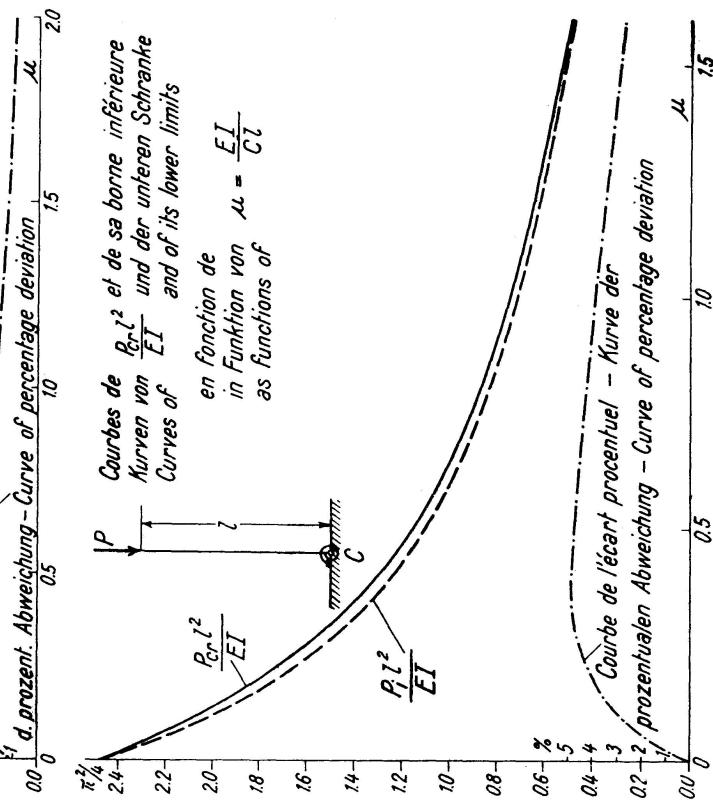


Fig. b

L'équation aux fréquences ou «determinante» comporte également des fonctions circulaires et hyperboliques et peut se résoudre par tâtonnements. Une décomposition des coefficients d'influence conduit cependant immédiatement à une valeur approchée, par défaut, de la première fréquence propre.

Le premier système suppose l'encastrement parfait ($C = \infty$). On dispose du résultat classique⁶⁾

$$\lambda' = k \frac{EI}{m} \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \quad \text{avec} \quad k = (0,597\dots)^4 = 0,127$$

Le second système suppose la poutre rigide mais semi-encastrée; on trouve aisément pour le carré de la pulsation

$$\lambda'' = \frac{3C}{ml^3}$$

L'approximation par défaut (1) devient ici

$$\lambda_1 \geq \lambda_i = (\lambda'^{-1} + \lambda''^{-1})^{-1} = \frac{EI}{m} \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \cdot k_i$$

avec

$$k_i = \frac{k}{1 + \frac{k\mu\pi^4}{3}}$$

Le paramètre $\mu = \frac{EI}{Cl}$ mesure l'élasticité relative du semi-encastrement et de la poutre. Une borne supérieure de λ_1 s'obtient de manière moins simple par la méthode de RAYLEIGH. Adoptons cette fois la déformée approximative

$$z = n + px + q \frac{x^2}{2} - r \cos \frac{\pi x}{l}$$

et fixons n, p, q, r conformément aux conditions aux limites, nous obtenons suivant l'équation énergétique une pulsation approchée par excès dont le carré vaut

$$\lambda_s = \frac{EI}{m} \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \cdot k_s$$

avec

$$k_s = \frac{3 + 8\mu}{7 + \frac{\lambda^2\pi^2}{3} + \frac{\pi^4}{10} + \mu(16 + 4\pi^2 + \pi^4) + \mu^2 \cdot \frac{8\pi^4}{3}}$$

A l'encontre de la borne inférieure, λ_s ne se confond pas avec λ_1 pour l'encastrement parfait ($\mu = 0$). On a dans ce cas $k_s = 0,1284$, supérieur de 1,1 % à $k = 0,1270$.

La borne inférieure semble donc fournir une meilleure approximation malgré sa forme plus simple. L'erreur maxima qu'offre l'adoption d'une valeur moyenne de λ_1 correspond à la moitié du pourcentage de l'écart indiqué sur le diagramme de la planche I, fig. b, ce qui met en évidence l'excellente approximation de ces résultats. En pratique, on pourrait adopter ici sans plus l'expression plus simple de λ_i que fournit une décomposition des coefficients d'influence.

⁶⁾ LORD RAYLEIGH, «Theory of Sound».

Systèmes de poutres à noeuds rigides.

Les vibrations de pareils systèmes font intervenir l'inertie d'oscillation aussi bien angulaire que linéaire; le théorème de décomposition des coefficients d'influence pourra être appliqué, à condition de définir un coefficient d'influence généralisé qui englobe les coefficients linéaires et angulaires. Nous ne reprenons pas ce sujet ici; qu'il nous suffise de remarquer que pareille définition se fait fort simplement⁷⁾. La recherche d'une borne inférieure peut donc se faire suivant notre méthode; nous en trouvons un exemple dans le cas du poteau en forme de *T*.

Poteau en T.

Soit à chercher la pulsation propre fondamentale d'un poteau en *T*, oscillant dans son plan (Fig. 1a). Nous faisons ici abstraction des charges extérieures éventuelles que portent les bras, ainsi que de l'influence du poids de la superstructure sur la fréquence du poteau vertical. Notons cependant que la marche à suivre en cas de charges extérieures n'est pas différente.

Nous supposons pour simplifier l'exemple que le système puisse être assimilé à deux poutres de caractéristiques (EI, m) et (EI', m') constantes sur leurs longueurs (Fig. 1b). La résolution exacte conduit à une équation difficile à résoudre. Une décomposition des coefficients d'influence est ici tout indiquée.

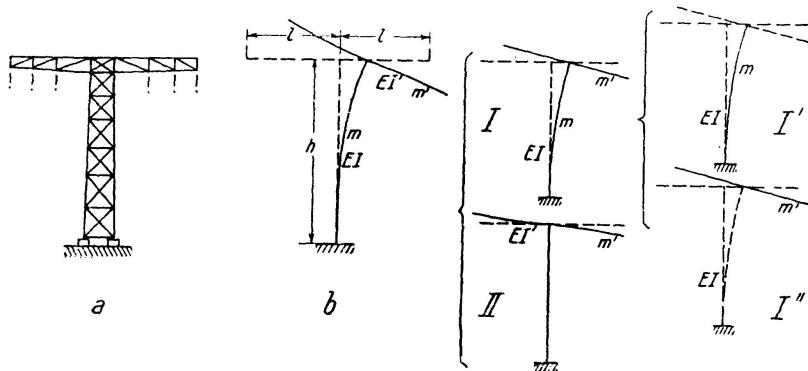


Fig. 1

Un premier système comporte des bras rigides (I), le second suppose ces bras flexibles, mais encastrés rigidement à leur naissance. Ce système (II) se résoud immédiatement; on a

$$\lambda_H = k \frac{EI'}{m'} \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \quad (k = 0,127)$$

La résolution du premier système: poutre encastrée munie à l'extrémité libre d'une masse $2m'l$, d'inertie polaire $\frac{2m'l^3}{3}$, peut se faire de manière exacte⁸⁾. Mais l'équation déterminante ne peut se résoudre sans tâtonnements; il est donc utile de pousser plus loin la décomposition, cette fois, du point de vue des masses, en considérant deux sous-systèmes dérivés du système (I) par séparation des masses $m'h$ et $2m'l$ (Fig. 1).

⁷⁾ Voir par exemple: HOHENEMSER, «Die Meth. z. angenäh. Lös. v. Eigenwertpr. in der Elastokinetik» (Ergebn. d. Math. u. ihrer Grenzgeb.) 1932 ou BIEZENO und GRAMMEL, «Technische Dynamik».

⁸⁾ WILH. HORT, «Techn. Schwingungslehre».

La première fréquence du système (I') est celle d'une poutre simple encastrée; elle provient de la formule

$$\lambda'_I = k \frac{EI}{m} \left(\frac{\pi}{h} \right)^4 \quad (k = 0,127)$$

Le système I'' comporte une masse rigide $2m'l$ à l'extrémité d'une poutre h dépourvue de masse. La première fréquence se calcule sans difficulté; on obtient

$$\lambda''_I = \frac{3EI\gamma}{m'h^4} (1 + \gamma^2 - \sqrt{\gamma^4 + \gamma^2 + 1})$$

où γ remplace h/l . D'après la formule de DUNKERLEY on a

$$\lambda_I \geq (\lambda'^{-1}_I + \lambda''^{-1}_I)^{-1} = k \frac{EI}{m} \left(\frac{\pi}{h} \right)^4 \frac{1}{1 + \frac{k\mu\pi^4}{3\gamma} (1 + \gamma^2 - \sqrt{\gamma^4 + \gamma^2 + 1})^{-1}}$$

Il reste à réunir les résultats obtenus, suivant la formule (1):

$$\lambda \geq (\lambda_I^{-1} + \lambda_{II}^{-1})^{-1} \geq \lambda_i = (\lambda'^{-1}_I + \lambda''^{-1}_I + \lambda_{II}^{-1})^{-1}$$

En fait, nous avons réalisé ici une décomposition généralisée des masses et des coefficients d'influence.

Nous avons ainsi obtenu

$$\lambda_i = \frac{EI}{m} \left(\frac{\pi}{h} \right)^4 \frac{k}{1 + \frac{k\mu\pi^4}{3\gamma} (1 + \gamma^2 - \sqrt{\gamma^4 + \gamma^2 + 1})^{-1} + \frac{\beta\mu}{\gamma^4}}$$

avec

$$\beta = \frac{EI}{EI'}, \quad \gamma = \frac{h}{l} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{m'}{m}.$$

A titre de contrôle, nous avons recherché une borne supérieure par la méthode de RAYLEIGH, en adoptant par approximation un mode de vibration de la forme (v. fig. 2)

$$y = \frac{x^2}{l^2} \left(p + n \frac{x}{h} \right)$$

$$z = 1 - \cos \frac{\pi\mu}{l} + \gamma \frac{u}{l} \left(b + c \frac{u}{h} \right)$$

Les coefficients p, n, b, c sont déterminés par les conditions géométriques aux limites. Nous trouvons de cette manière, après d'assez longs calculs, une borne supérieure

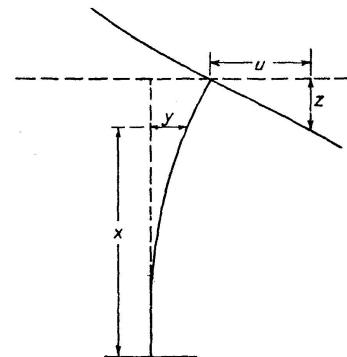


Fig. 2

$$\lambda_s = \frac{EI}{m} \left(\frac{\pi}{h} \right)^4 \cdot \frac{\frac{4p}{\beta\pi^2} + \frac{6n^2}{\pi^4} + \frac{3}{2\beta}}{\frac{p\gamma\pi^2}{5} - \frac{3pn}{15} + \frac{\gamma n^2}{14} + \frac{\mu C'}{\gamma^4} + \frac{\mu Cb}{\gamma^3} + \frac{\mu b^2}{3\gamma^2} + \mu p^2 + 2\mu pn + \mu n^2}$$

où

$$n = \frac{C}{4\gamma} - \frac{2}{3}\pi^2(\gamma^2 - 1) - \sqrt{\left[\frac{C}{4\gamma} - \frac{2}{3}\pi^2(\gamma^2 - 1) \right]^2 + \frac{4\pi^4\gamma^2}{3\beta^2}}$$

$$p = \frac{2\pi^2}{\beta} - 3n$$

$$b = \frac{2\pi^2}{\beta} + p \quad \text{et} \quad C = \frac{\pi^2}{4} + 1 + \frac{4}{\pi^2} \quad C' = 7 + \frac{2\pi^2}{3} + \frac{\pi^4}{10}.$$

La comparaison entre les bornes supérieure et inférieure est suggestive; leur aspect rend un compte assez exact des calculs qu'exige leur obtention. En écrivant

$$\frac{\lambda_i}{s} = \frac{EI}{m} \left(\frac{\pi}{h} \right)^4 \cdot k_i$$

on peut comparer les valeurs de k_i et de k_s dans un cas donné; par exemple pour

$$\gamma = 2, \quad \mu = 0,5 \quad \text{et} \quad \beta = 4$$

nous trouvons $k_i = 0,0350$ et $k_s = 0,0354$

c'est à dire un écart entre les deux bornes de l'ordre de 1 pour-cent.

Si on adopte une valeur moyenne, l'erreur est certainement inférieure au demi-pour-cent, écart qui se réduit encore à sa moitié pour la pulsation, racine carrée de λ .

On voit par cet exemple qu'il est en même temps avantageux et suffisant d'évaluer λ par sa borne inférieure, donc par une simple décomposition en systèmes partiels.

Remarque.

Il est des problèmes de vibrations tournantes qui se prêtent également à une résolution rapide par décomposition des coefficients d'influence. Un exemple remarquable est celui du couplage des vibrations d'une hélice avec les oscillations de torsion de l'arbre coudé qui l'entraîne. Il s'agit ici des vibrations de flexion de l'hélice dans le plan de rotation. On pourrait tenir compte de la présence d'engrenages réducteurs en appliquant aux fréquences le rapport de transmission réalisé. Soit f' la fréquence fondamentale de l'arbre coudé, calculé en supposant l'hélice non flexible. Soit f'' celle de l'hélice supposée accouplée à un arbre inélastique. Notons qu'en général on adapte une hélice de marque connue, de sorte qu'on peut le plus aisément déterminer f'' en accouplant une masse de moment d'inertie équivalent à celui de l'arbre. D'après le théorème de décomposition on a

$$f \geq (f'^{-2} + f''^{-2})^{-1/2}$$

le second membre donnant une bonne valeur approchée de la fréquence fondamentale f .

Problèmes de stabilité.

La méthode de décomposition des coefficients d'influence semble devoir prendre dans les problèmes de vibration une importance égale à celle de la décomposition des masses; par contre, dans les problèmes de stabilité, il ne peut être question de décomposer des masses.

Seule une décomposition des coefficients d'influence permet de simplifier la recherche de charges critiques par la formation de systèmes partiels plus facilement résolubles. Donnons-en quelques exemples.

Poutre semi-encastree, sollicitée axialement.

Le coefficient C de semi-encastrement conserve la signification qui lui a été donnée précédemment. L'équation déterminante prend la forme

$$l \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot \operatorname{tg} \cdot l \sqrt{\frac{P}{EI}} = \frac{Cl}{EI};$$

la courbe en trait plein (Pl. I, fig. b) donne la première racine $\frac{P_{cr} l^2}{EI}$ en fonction de $\mu = EI/Cl$. Une décomposition des coefficients d'influence angulaires peut s'effectuer dans ce cas avec les systèmes partiels adoptés dans le problème des fréquences.

Le premier système suppose l'encastrément parfait; on a

$$P'_n = \frac{\pi^2 n^2 EI}{4 l^2}$$

Le second suppose la poutre non flexible, ce qui donne

$$P'' = \frac{C}{l}$$

La formule (4) permet d'écrire

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} P'_n^{-1} + \frac{C}{l} = \frac{2l^2}{3EI} + \frac{C}{l}$$

La borne inférieure de la charge critique résulte de (2)

$$P_{cr} \geq P_i = (P'^{-1} + P''^{-1})^{-1} = \frac{\pi^2 EI}{4 l^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\mu \pi^2}{4}}$$

La courbe en trait interrompu donne l'allure de P_i ; on constate que dans les conditions les moins favorables elle s'écarte de moins de 5 % de la valeur exacte. Sa détermination par décomposition des coefficients d'influence suffit donc en général aux besoins de la technique.

Poutres à sections discontinues sur la longueur.

Soit une colonne encastrée à sa base, comportant un certain nombre de sections différentes, par exemple deux, dans les parties *a* et *b* (Pl. II, fig. a). L'équation déterminante du problème de la stabilité sous l'action de charges axiales, est

$$\operatorname{tg} a \sqrt{\frac{P}{EI_a}} \cdot \operatorname{tg} b \sqrt{\frac{P}{EI_b}} = \sqrt{\frac{EI_a}{EI_b}}$$

Une borne inférieure de la première racine P_{cr} peut être déterminée en envisageant deux systèmes partiels. Dans le premier, nous supposons la partie *a* rigide; nous avons immédiatement

$$P' = \frac{\pi^2 EI_b}{4 b^2}$$

Le second système est formé en supposant la partie *b* rigide à son tour ($EI_b = \infty$). L'équation déterminante

$$a \sqrt{\frac{P}{EI_a}} \operatorname{tg} a \sqrt{\frac{P}{EI_a}} = \frac{r}{1-r} \quad (r = \frac{a}{h} = \frac{a}{a+b})$$

se résoud plus facilement que l'équation précédente. Soit P'' la première racine, on a

$$P_{cr} \geq (P'^{-1} + P''^{-1})^{-1}$$

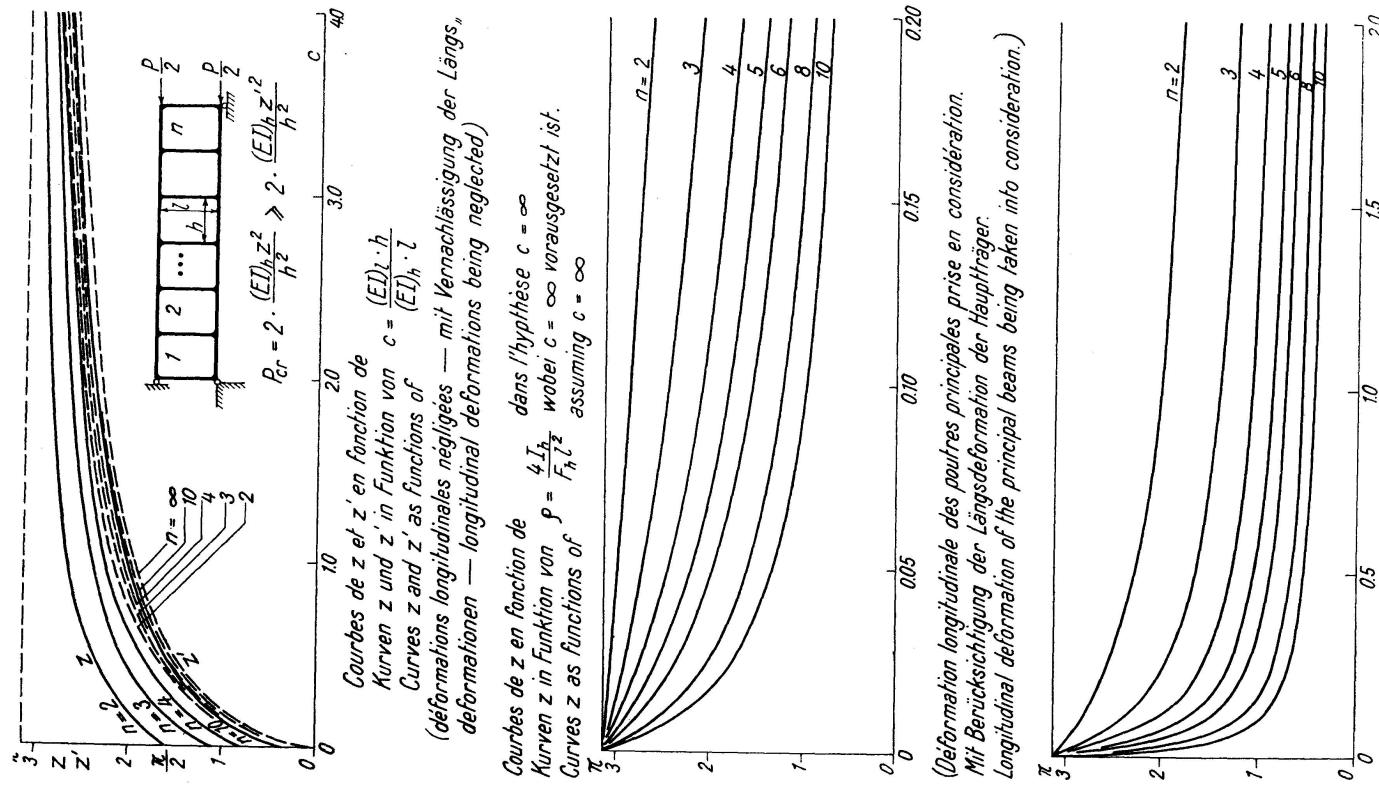
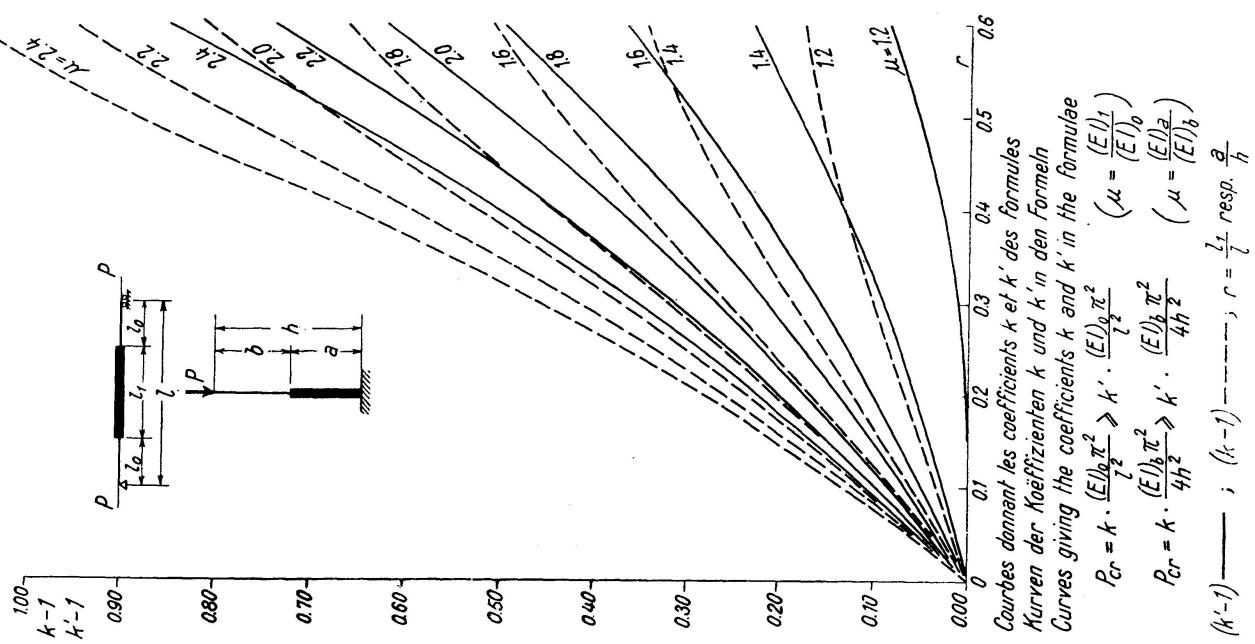


Fig. b

Planche II

Fig. a



Ce problème est équivalent à l'étude de la stabilité d'une poutre renforcée à sa partie centrale, soumise à l'action de deux charges axiales (Pl. II, fig. a). Ce dernier problème a été résolu exactement⁹⁾, de sorte que nous pouvons comparer les valeurs exactes de P_{cr} aux bornes inférieures fixées par notre méthode. Dans ce but, nous avons écrit

$$P_{cr} = k \frac{\pi^2 EI_b}{4 h^2}$$

Le facteur k exprime l'augmentation de la stabilité due au renforcement central. La borne inférieure a été affectée du facteur k' . Un diagramme reproduit les variations de k et de k' (Pl. II, fig. a).

Remarque.

L'exemple précédent nous a révélé qu'une valeur approchée par défaut de la première racine de l'équation

$$x \operatorname{tg} x = \nu$$

est donnée par l'expression

$$x^2 = \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{1 + \frac{\pi^2}{4\nu}}$$

Nous pourrions appliquer ceci au second système partiel et écrire

$$P'' \geq \frac{2EI_a}{4a^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1-r}{r} \frac{\pi^2}{4}}$$

de sorte que

$$P_{cr} \geq k'' \frac{\pi^2 EI_b}{4 h^2} \quad \text{avec} \quad k'' = \frac{1}{(1-r)^2 + \frac{r}{\mu} \left[r + (1+r) \frac{\pi^2}{4} \right]}$$

Cadre à trois articulations.

Une charge P agit au droit du noeud rigide C (Fig. 3). Le problème de la charge critique a déjà été résolu¹⁰⁾, ce qui permet un contrôle des résultats que va nous livrer très rapidement une décomposition des coefficients d'influence.

Les systèmes partiels s'obtiennent en supposant successivement les parties DC et CB rigides. Dans le premier système, nous nous trouvons, en mouvement relatif, dans le cas d'une poutre CB encastrée-libre, c. à. d.

$$P' = \frac{\pi^2 EI_h}{4 h^2}$$

Le second système se résoud facilement. Soit M le moment agissant en C ; l'angle de déformation en ce point vaut (Fig. 3)

$$\alpha = \frac{Ml}{3EI_l};$$

or ce moment vaut

$$M = Ph \alpha$$

⁹⁾ V. RATZERSDORFER, «Die Knickfestigkeit von Stäben und Stabwerken».

¹⁰⁾ WILH. BÜLTMANN, «Die Stabilität des Dreigelenkrechtckrahmens» (Der Stahlbau, 14, 1941, S. 3).

de sorte qu'on trouve

$$P'' = \frac{3EI_l}{hl}.$$

On dispose enfin d'une borne inférieure grâce à la formule (2)

$$P_{cr} \geq P_i = (P'^{-1} + P''^{-1})^{-1} = \frac{\pi^2 EI_h}{(q' h)^2}$$

nous y posons

$$q' = 2 \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{12c}} \quad \text{avec} \quad c = \frac{EI_l h}{EI_h l}.$$

Or il se fait que CHWALLA (DIN. E. 4114) a indiqué une formule approximative reproduisant les résultats d'une solution rigoureuse, «Faust-formel», dont l'expression est la suivante

$$q = 2 \sqrt{1 + \frac{0,7}{c} + \frac{0,035}{c^2}} \quad \text{pour } c \leq 2, \quad \text{sinon } q = 2 \sqrt{1 + \frac{0,7}{c}}$$

dans la formule

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_h}{(q h)^2}$$

Notons que $\frac{\pi^2}{12} = 0,82 > 0,7$ ce qui vérifie le sens de l'inégalité

$$P_{cr} \geq P_i$$

Le tableau suivant renseigne l'approximation atteinte par notre borne inférieure.

$c = EI_l \cdot h / EI_h \cdot l$	q'	q	approx.
1	2,635	2,696	6,6%
2	2,320	2,375	4,3%
3	2,220	2,555	3,2%
4	2,170	2,195	2,5%

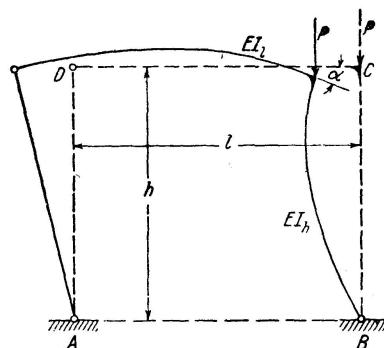


Fig. 3

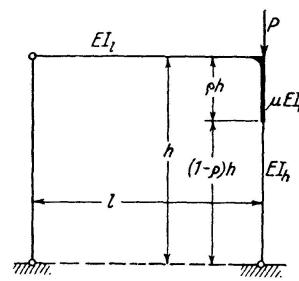


Fig. 4

Remarque.

C'est la partie supérieure du montant h qui se trouve la plus sollicitée. Il est naturel de chercher à augmenter la stabilité du système en renforçant cette région (Fig. 4). Soit $\mu \cdot h$ la portion de h renforcée, et soit μEI_h sa caractéristique élastique.

Nous pouvons envisager trois systèmes partiels, définis en ne conservant successivement que la flexibilité des parties DC , CC' et $C'B$ et nous avons dans ce cas $P_{cr} = (P'^{-1} + P''^{-1} + P'''^{-1})^{-1}$

Toutefois l'ensemble CC' , $C'B$ a déjà été traité dans le cas d'une colonne présentant deux sections différentes. Nous avions trouvé

$$P_{cr}^{CC'B} = k \frac{\pi^2 EI_h}{4h^2}$$

Le facteur k (ou k' , $k''\dots$) traduit le renforcement du montant. Nous obtenons de cette manière

$$P_{cr} \geq \frac{\pi^2 EI_h}{(q'h)^2} \quad \text{avec} \quad q' = 2 \sqrt{\frac{1}{k} + \frac{\pi^2}{12c}};$$

ceci concorde absolument avec la formule approchée donnée par BÜLTmann après une résolution rigoureuse, mais plus longue, du même problème.

Problème de stabilité de la poutre Vierendeel.

Remarquons d'abord qu'un cadre à noeuds rigides, que nous considérons comme la cellule de la poutre Vierendeel, peut être étudié à partir du problème précédent. En fait, le cadre sollicité en ses quatre sommets peut, au point de vue déformation, être supposé articulé en A , B , C et D et relié à une articulation centrale O (Fig. 5); ceci nous restitue le problème du cadre à trois articulations, de sorte qu'on a

$$\frac{P_{cr}}{2} \geq \frac{\pi^2 EI_h}{\left(q \frac{h}{2}\right)^2} \quad \text{ou} \quad P_{cr} \geq \frac{8\pi^2 EI_h}{(qh)^2}$$

$$\text{avec} \quad q = 2 \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{12c}} \quad \text{et} \quad c = EI_l \cdot h / EI_h \cdot l$$

D'ailleurs, une décomposition des coefficients d'influence nous mènerait directement au même résultat (Fig. 6). Il est plus intéressant d'opérer

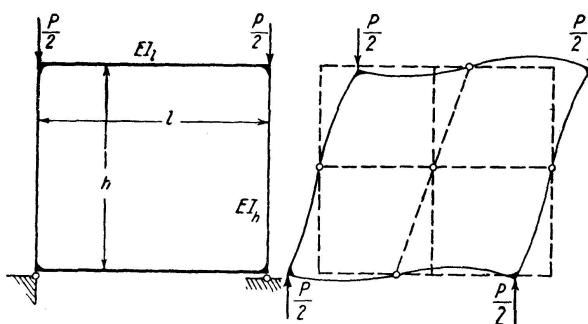


Fig. 5

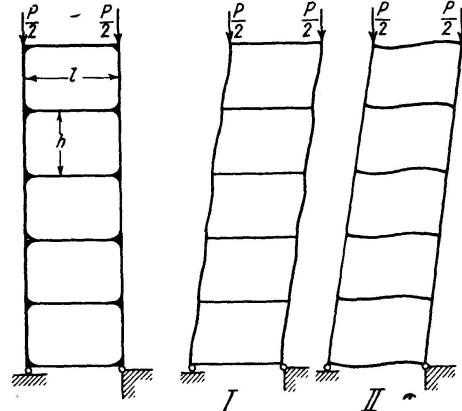


Fig. 6

cette décomposition dans le cas général de la poutre à n cellules. Le système partiel I suppose les barres transversales rigides; la charge critique partielle peut être évaluée sans peine à

$$\frac{1}{2} P' = \frac{\pi^2 EI_h}{4 \left(\frac{h}{2}\right)^2} \quad \text{c. à d.} \quad P' = \frac{2\pi^2 EI_h}{h^2}$$

elle ne dépend pas du nombre d'étages, car nous faisons momentanément

abstraction de toute déformation longitudinale des poutres. Le second système partiel suppose les poutres principales inélastiques; d'après la fig. 7:

$$\propto = \frac{Ml}{6EI_l}$$

et comme

$$M = \frac{1}{1+n} \cdot \frac{1}{2} P \cdot nh \propto$$

on a

$$P'' = \frac{n+1}{n} \cdot 12 \frac{EI_l}{lh}$$

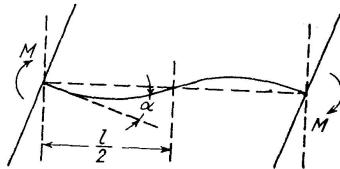


Fig. 7

La formule de composition (2) donne

$$P_{cr} \geq (P'^{-1} + P''^{-1})^{-1} = \frac{8\pi^2 EI_h}{(q h)^2}$$

avec

$$q = 2 \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{6 \frac{n+1}{n} c}}$$

ce qui constitue une généralisation de la formule trouvée pour une cellule. Notons que pour des valeurs de n suffisamment grandes, nous pouvons écrire

$$q_\infty = 2 \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{6c}}$$

Sous des hypothèses identiques, la même formule peut s'appliquer au cas donné Pl. II, fig. b. Ceci nous amène à faire une comparaison entre nos résultats et ceux que l'on obtient dans ce dernier cas¹¹⁾ dans les mêmes conditions d'indéformabilité longitudinale des poutres (v. courbes Pl. II, fig. b).

La comparaison se fait en posant

$$P_{cr} = \frac{2EI_h z^2}{h^2}$$

le coefficient z' correspondant à notre formule vaut $z' = \frac{2\pi}{q}$.

Remarque.

L'influence de la déformation longitudinale se fait sentir d'autant plus que n est grand. La théorie qui en a été faite¹²⁾ donne une résolution assez simple dans le cas où les traverses sont supposées rigides. Or ceci correspond à notre premier système partiel.

Les courbes construites dans cette hypothèse¹³⁾, donnent z en fonction du paramètre

$$\varrho = \frac{4 \cdot I_h}{Fl^2}$$

F désignant la section des poutres principales. On trouve ainsi

$$P' = 2z^2 EI_h / h^2$$

¹¹⁾ V. RATZERSDORFER, loc. cit.

¹²⁾ RATZERSDORFER, loc. cit.: Der Rahmenstab, S. 201 u. 210.

¹³⁾ Les courbes en traits continus de la Pl. IV ont été empruntés à l'ouvrage de M. RATZERSDORFER.

Moyennant cette correction, on pourra tenir compte de la flexibilité des traverses en la combinant avec la valeur précédente de P''

$$P'' = \frac{n+1}{n} 12 \frac{EI_t}{lh}$$

grâce à la formule (2)

$$P_{cr} \geq (P'^{-1} + P''^{-1})^{-1}.$$

Conclusion.

Les exemples qui précèdent permettent quelques conclusions. Nous avons vu qu'une décomposition des coefficients d'influence conduit à une valeur approchée (par défaut) du premier nombre propre (fréquence ou charge critique) d'un problème.

L'approximation est meilleure, semble-t-il, dans les problèmes de vibration que dans ceux de flambage, fait qui s'harmonise heureusement avec les exigences de la technique; en effet, ce qui intéresse généralement l'ingénieur, c'est une valeur aussi approchée que possible de la fréquence, tandis qu'il lui suffit de connaître simplement une borne inférieure d'une charge critique. Pourvu que cette borne ne s'écarte pas exagérément de la valeur exacte, une approximation meilleure perd un peu de son intérêt en se noyant dans les corrections «d'élancement» et dans le coefficient de sécurité.

Nous avons pu remarquer que la détermination de valeurs approchées par excès par l'une des méthodes énergétiques, variationnelles itératives etc. exige des calculs plus longs que l'évaluation d'une borne inférieure par notre méthode.

Notons enfin qu'une décomposition des coefficients d'influence n'est pas toujours applicable; elle est par contre indiquée dans les cas où la complexité de la structure élastique permet de former des systèmes partiels plus simples. Joints aux cas de systèmes oscillants, où la complexité de la répartition des masses appelle également une décomposition, ces derniers problèmes sont précisément ceux dont la résolution directe s'avère la plus ingrate.

Résumé.

Il est question de surmonter, en la divisant, la difficulté que présentent certains problèmes de vibration et de stabilité de systèmes à structures élastiques complexes. On montre à cet effet qu'une définition de systèmes partiels par décomposition des coefficients d'influence permet de déterminer une valeur approchée par défaut de la fréquence fondamentale ou de la charge critique, suivant une formule de décomposition quadratique des périodes, respectivement de décomposition linéaire des inverses des charges critiques.

Quelques exemples traitent de vibrations de poutres sur appuis élastiques, de poutres semi-encastrees, également de la stabilité de ces dernières sous charge axiale, ainsi que des charges critiques de poutres à sections discontinues sur la longueur, de cadres à trois articulations, enfin de la poutre Vierendeel.

Ces exemples, choisis de manière à permettre le contrôle des résultats, conduisent aux conclusions suivantes: 1^o l'approximation est en général satisfaisante du point de vue technique. 2^o Elle est meilleure dans les problèmes de vibration que dans ceux de flambage, circonstance fort heureuse

du point de vue pratique. 3^o La nouvelle méthode vient, non pas remplacer d'autres déjà existantes, mais en compléter l'arsenal, quoique les calculs qu'elle demande soient généralement plus réduits que ceux qui surgissent dans l'évaluation de bornes supérieures par des méthodes énergétiques ou autres.

Zusammenfassung.

Die Schwierigkeiten, welche gewisse Schwingungs- und Stabilitätsprobleme von verwickelter Struktur bieten, werden durch Unterteilung behoben. Es wird gezeigt, daß an Hand der Definition von Partialsystemen, die durch Zerlegung der Einflußkoeffizienten möglich ist, ein angenäherter Wert (untere Schranke) der Grundfrequenz oder der kritischen Last bestimmt werden kann; dies geschieht mittels einer quadratischen Zerlegungsformel der Perioden, beziehungsweise durch eine lineare Zerlegung der Reziproken der kritischen Belastungen.

Einige Beispiele behandeln die Schwingungen von elastisch gelagerten, halb eingespannten Balken, sowie auch deren Stabilität unter axialer Belastung; ferner werden die kritischen Lasten von Balken mit veränderlichem Querschnitt von Drei-Gelenkrahmen und Vierendeelträgern untersucht.

Die Beispiele sind so gewählt, daß die Resultate leicht kontrolliert werden können. Die Folgerungen seien kurz zusammengefaßt:

1. Vom technischen Standpunkte aus sind die Näherungen genügend genau.
2. Diese sind in den Schwingungsproblemen besser als in den Knickproblemen, was für die Praxis erfreulich ist.
3. Die neue Methode soll nicht andere, schon bestehende ersetzen, sondern vielmehr ergänzen. Dabei ist der Arbeitsaufwand im allgemeinen kleiner als bei denjenigen Methoden, welche durch eine Energiebetrachtung eine obere Grenze zu bestimmen suchen.

Summary.

The difficulties which are incurred in certain vibration and stability problems in systems of complicated elastic structure, are surmounted by subdividing them. It is shown that a definition of partial systems by resolving the influence coefficients, allows an approximate value of the fundamental frequency or of the critical load to be determined; this is effected by means of a quadratic formula of resolution of the periods, or a linear resolution of the reciprocals of the critical loads.

A few examples are given regarding vibrations in elastically supported beams, in beams fixed at one end, and also regarding the stability of the latter under axial load, as well as the critical loads for beams with variable cross-sections, three-hinged frames and Vierendel girders.

The examples are chosen so that the results can easily be checked. The conclusions reached are briefly as follows:

1. The approximations are sufficiently accurate for practical technical requirements.
2. The approximations are better in the vibration problems than in the buckling problems, a fact which is satisfactory in practice.
3. The new method is not intended to replace existing methods, but rather to amplify them. The amount of work involved in calculating with the new method is in general much less than when an endeavour is made to determine an upper limit from energy considerations or otherwise.

Leere Seite
Blank page
Page vide