Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

Band: 7 (1943-1944)

Artikel: Berechnung der verankerten Hängebrücken für vertikale und horizontale Belastung

Autor: Aas Jakobsen, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-7992

BERECHNUNG DER VERANKERTEN HÄNGEBRÜCKEN FÜR VERTIKALE UND HORIZONTALE BELASTUNG.

SUR LE CALCUL DES PONTS SUSPENDUS POUR DES CHARGES VERTICALES ET HORIZONTALES.

CALCULATING ANCHORED SUSPENSION BRIDGES FOR VERTICAL AND HORIZONTAL LOADING.

Dr. Ing. A. AAS-JAKOBSEN, Oslo.

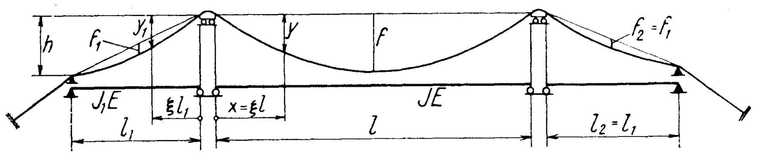
TEIL I. VERTIKALE BELASTUNG.

1. Einleitung.

Die verankerte Hängebrücke besteht einerseits aus primären Baugliedern, nämlich den Verankerungen, den Kabeln, den Türmen, den Hängeseilen mit Fahrbahn und anderseits aus den sekundären Baugliedern, d. h. den senkrechten Versteifungsträgern und den horizontalen Windträgern. Um unangenehme Schwingungen zu vermeiden, werden die Hängebrücken immer mit irgendeiner Windaussteifung versehen, während die senkrechten Versteifungsträger bei einfachen oder bei sehr schweren Hängebrücken ganz fehlen können. Da die Tragfähigkeit der Hängebrücken nicht von den Versteifungsträgern abhängt, ist es nicht möglich, diese durch gewöhnliche statische Berechnungen zu bestimmen. Durch diesen Umstand wird die Berechnung der verankerten Hängebrücken wesentlich verschieden von den gewöhnlichen statischen Berechnungen.

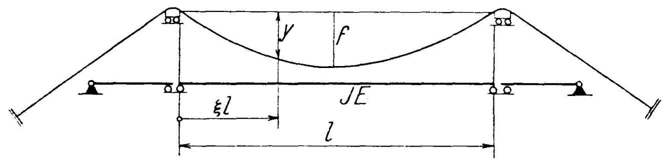
Die Lösung des Hängebrückenproblems führt zu einer Differentialgleichung 4. Ordnung mit variablen Koeffizienten. Diese Differentialgleichung kann mit sehr guter Annäherung durch eine Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten ersetzt werden, und die genaue Lösung wird durch eine einfache Korrekturberechnung erhalten. Die Lösung bietet darum keine theoretischen Schwierigkeiten. Durch die Eigenart der Bauweise können mehrere Größen frei gewählt werden, wie Spannweiteverhältnis, Pfeilverhältnis, Eigengewicht (schwere oder leichte Fahrbahn) und Steifigkeit der Versteifungsträger. Um den Einfluß dieser Größen auf die Steifigkeit der Brücke und die Baukosten leicht ermitteln zu können, werden große Anforderungen an die Übersichtlichkeit und Einfachheit des Berechnungsverfahrens gestellt. Die Ergebnisse müssen in Zahlentafeln oder in einfachen Formeln dargestellt werden können, aus denen der Einfluß der verschiedenen Größen leicht ersichtlich ist, und man muß mit einem Minimum an Rechenarbeit mehrere Ausführungen untersuchen können, um aus den verschiedenen Lösungen, die den gestellten Anforderungen an Steifigkeit genügen, das Kostenminimum zu erhalten. Ein solches Berechnungsverfahren für die zwei wichtigsten Typen der Hängebrücken (Fig. 1a und 1b) zu geben, ist der Zweck dieser Arbeit.

Bei der Berechnung haben wir die bei den Hängebrückenberechnungen gewöhnlichen Voraussetzungen gemacht, wie gleichmäßig verteiltes Eigengewicht und haben ferner angenommen, daß keine Momente aus Eigengewicht in den Versteifungsträgern auftreten (d. h. parabolisch geformte Tragkabel), und daß die Abstände zwischen den Hängeseilen klein sind.



Type I: *Pont suspendu à 3 ouvertures*
Dreifeldrige Hängebrücke
Suspension bridge with 3 openings

Fig. 1 a



Type II: *Pont suspendu à 1 ouverture*
Einfeldrige Hängebrücke
Suspension bridge with 1 opening

Fig. 1 b

2. Aufstellung der Differentialgleichungen.

Die Berechnung der Hängebrücken für senkrechte Belastung ist von zahlreichen Verfassern behandelt und entwickelt worden. Wir verweisen hier auf das erschöpfende Literaturverzeichnis von S. O. ASPLUND [1]). Die Differentialgleichung zur Bestimmung der Durchbiegung v des Versteifungsträgers wird durch Aufstellung des Gleichgewichts eines Brückenelementes

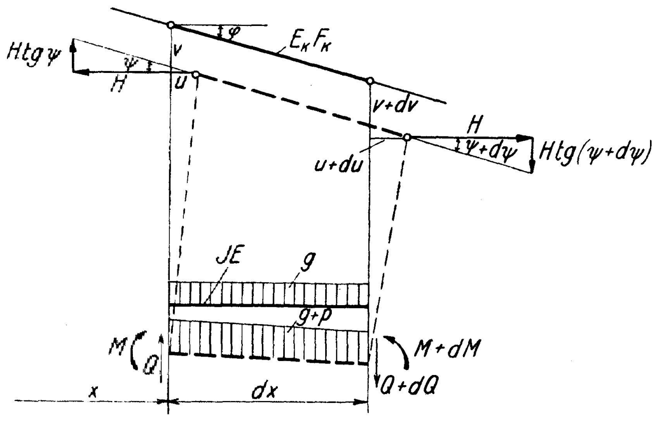


Fig. 2

Belastungen, Schnittkräfte und Verschiebungen eines Brückenelementes *dx*.

Charges, forces et déplacements d'un élément d'un pont *dx*.

Loads, forces and displacements of a bridge element *dx*.

von der Länge dx (Fig. 2) gefunden. Durch Vernachlässigung der Kabelverschiebung u in horizontaler Richtung erhalten wir die bekannte Differentialgleichung zur Bestimmung des Biegungsmomentes M im Versteifungsträger

[1]) S. O. Asplund: On the Deflection Theory of Suspension Bridges. Stockholm 1943.

(1 a) $$M'' - \frac{H l^2}{JE} M - 8 H_s f + p l^2 = 0\,,$$

wo $$\frac{dM}{d\xi} = M', \qquad \xi = \frac{x}{l}, \qquad H_s = H_p + H_t + \Delta H, \qquad H = H_s + H_g\,.$$

H_g ist die Horizontalkomponente des Kabelzuges aus Eigengewicht, H_p aus Nutzlast, H_t aus Temperaturänderung $+t$ und ΔH aus der Normalkraftverlängerung des Kabels.

Mit $\lambda = \sqrt{\frac{Hl^2}{JE}}$ lautet die Lösung für M

(1 b) $$M = A \operatorname{Sin} \lambda \xi + B \operatorname{Cos} \lambda \xi - \frac{8f}{\lambda^2}\left(H_s - \frac{p l^2}{8f}\right).$$

In Gleichung (1a) wird $M = -\frac{JE}{l^2} v''$ eingeführt und durch zweimalige Integration erhalten wir die senkrechte Durchbiegung

(1 c) $$v = \frac{1}{H}(M_0 - M - H_s y)$$

wo M_0 das Moment inf. Nutzlast im Versteifungsträger als frei aufliegender Balken ist.

Die Horizontalkomponente im Kabel wird am einfachsten aus der Bedingung, daß die Horizontalverschiebungen u des Kabels an den Ankerklötzen verschwinden sollen, d. h. $\int_{(k)} du = 0$, bestimmt. Dies ergibt

$$\frac{H_s}{E_k F_k} L_s + \varepsilon t L_t = -\frac{y''}{l^2} \int_{(k)} (v_p + v_t + \Delta v)\, dx$$

$v_p + v_t + \Delta v$ sind die zu $H_s = H_p + H_t + \Delta H$ gehörigen Vertikalverschiebungen, $\varepsilon =$ Temperaturkoeffizient,

$$L_s = \int_{(k)} \frac{dx}{\cos^3 \varphi}, \qquad L_t = \int_{(k)} \frac{dx}{\cos^2 \varphi}\,.$$

Sämtliche Integrale sind über das ganze Kabel zu erstrecken. Aus obiger Gleichung erhalten wir zur Bestimmung

(1 d) von H_p: $$\int_{(k)} v_p\, dx = 0\,,$$

(1 e) von H_t: $$-\frac{y''}{l^2} \int_{(k)} v_t\, dx = \varepsilon t L_t\,,$$

(1 f) von ΔH: $$-\frac{y''}{l^2} \int_{(k)} \Delta v\, dx = \frac{H_s}{E_k F_k} L_s\,.$$

3. Dreifeldrige, symmetrische Hängebrücke mit freiaufliegendem Versteifungsträger von öffnungsweise konstantem Trägheitsmoment nach Fig. 1a.

Zur Bestimmung der Pfeilhöhe in den verschiedenen Feldern gilt die Bedingung, daß die Horizontalkomponente H_g aus Eigengewicht in allen Öffnungen gleich ist, oder

$$H_g = \frac{g l^2}{8 f} = \frac{g_1 l_1^2}{8 f_1}.$$

Gewöhnlich wird das Eigengewicht in sämtlichen Feldern gleich sein, und wir erhalten (Fig. 1a)

$$\frac{f}{l^2} = \frac{f_1}{l_1^2}.$$

Die Nutzlast für Straßenbrücken ist in den Belastungsvorschriften der verschiedenen Länder in Form von Autolastzügen mit festgelegten Achsdrücken angegeben. Bei größeren Spannweiten wird gewöhnlich auch die äquivalente gleichmäßig verteilte Nutzlast angegeben, so daß es genügen würde, die Maximalschnittkräfte für diese Belastung zu untersuchen. In einigen Ländern wird die Nutzlast als gleichmäßig verteilte Belastung samt einer Einzellast angegeben. Bei weichen Hängebrücken ist eine Einzellast in dem betrachteten Punkt von ausschlaggebender Bedeutung, und es ist darum außer der verteilten Belastung p auch von Interesse, eine Einzellast P im betreffenden Punkt zu untersuchen.

a) *Maximalmomente aus Nutzlast.*

Das Maximalmoment für einen beliebigen Schnitt im Mittelfeld erhalten wir für unbelastete Außenfelder und teilweise belastetes Mittelfeld.

Für die Einzellast P im Punkte ϑ ist das Moment des Versteifungsträgers im Punkte ξ durch Gl. (1b) gegeben. Die Integrationskonstanten sind durch die Randbedingungen $M = 0$ für $\xi = 0$ und $\xi = 1$ und aus den Kontinuitätsbedingungen im Lastpunkt $M_l = M_r$ und $\frac{dM_l}{dx} - \frac{dM_r}{dx} = P$ bestimmt. Hieraus erhalten wir für $\xi < \vartheta$.

$$M_\xi = \frac{P l}{\lambda} \frac{\operatorname{Sin} \lambda \xi}{\operatorname{Sin} \lambda} \operatorname{Sin} \lambda (1 - \vartheta) - \frac{8 f}{\lambda^2} H_P \left(1 + \operatorname{Tg} \frac{\lambda}{2} \operatorname{Sin} \lambda \xi - \operatorname{Cos} \lambda \xi\right). \tag{2a}$$

In ähnlicher Weise wird das Moment für $\xi > \vartheta$ im Mittelfeld und das Moment in den Seitenfeldern gefunden. Die zugehörige Horizontalkraft H_P im Kabel ist durch Gl. (1d) bestimmt, wo v_P aus Gl. (1c) zu entnehmen ist. Nach Durchführung der Integration der Gl. (1d) wird

$$H_P = \frac{3 P l}{4 f} \vartheta (1 - \vartheta) \frac{1 - \frac{2}{\lambda^2 \vartheta (1 - \vartheta)} \left(1 + \operatorname{Tg} \frac{\lambda}{2} \operatorname{Sin} \lambda \xi - \operatorname{Cos} \lambda \xi\right)}{(1 + 2 \gamma) \left[1 - \frac{12}{\lambda^2} \left(1 - \frac{2}{\lambda} \operatorname{Tg} \frac{\lambda}{2}\right)\right]}.$$

Hier ist $$1 \gg \frac{2}{\lambda^2 \vartheta (1 - \vartheta)} \left(1 + \operatorname{Tg} \frac{\lambda}{2} \operatorname{Sin} \lambda \xi - \operatorname{Cos} \lambda \xi\right)$$

und wir können für $1+\mathrm{Tg}\frac{\lambda}{2}\,\mathrm{Sin}\,\lambda\xi-\mathrm{Cos}\,\lambda\xi$ den Durchschnittswert $1-\frac{2}{\lambda}\,\mathrm{Tg}\frac{\lambda}{2}$ einführen, entsprechend für $\vartheta(1-\vartheta)$ den Durchschnittswert $\frac{1}{6}$. Mit diesen Vereinfachungen erhalten wir:

(2b) $$H_P=\frac{3\,Pl}{4\,f}\,\frac{\vartheta(1-\vartheta)}{1+2\gamma},$$

wo $$\gamma=\frac{l_1 f_1}{lf}\,\frac{1-\frac{12}{\lambda_1^2}\left(1-\frac{2}{\lambda_1}\,\mathrm{Tg}\frac{\lambda_1}{2}\right)}{1-\frac{12}{\lambda^2}\left(1-\frac{2}{\lambda}\,\mathrm{Tg}\frac{\lambda}{2}\right)}$$

oder $$\gamma=\frac{l_1 f_1}{lf}\,\frac{\varphi(\lambda_1)}{\varphi(\lambda)}=\left(\frac{l_1}{l}\right)^3\frac{\varphi(\lambda_1)}{\varphi(\lambda)}.$$

$\varphi(\lambda_1)$ und $\varphi(\lambda)$ können aus der Tafel 2 entnommen werden.

Für eine Streckenlast p von $\xi=a$ bis $\xi=b$ wird H_p aus Gl. (2b) durch Einführung von $P=pld\vartheta$ und Integration von a bis b erhalten:

(2c) $$H_p=\frac{pl^2}{8f(1+2\gamma)}(3b^2-2b^3-3a^2+2a^3).$$

Das Biegungsmoment im Punkte ξ für eine Streckenlast wird in derselben Weise gefunden

(2d) $$M_\xi=\frac{pl^2}{\lambda^2}\left(1-\frac{\mathrm{Sin}\,\lambda\xi\,\mathrm{Cos}\,\lambda(1-b)+\mathrm{Sin}\,\lambda(1-\xi)\,\mathrm{Cos}\,\lambda a}{\mathrm{Sin}\,\lambda}\right)$$
$$-\frac{8f}{\lambda^2}H_p\left(1+\mathrm{Tg}\frac{\lambda}{2}\,\mathrm{Sin}\,\lambda\xi-\mathrm{Cos}\,\lambda\xi\right).$$

Die Begrenzung a und b der Streckenlast wird durch die Bedingung bestimmt, daß das Moment der Einzellast P hier verschwinden soll. So erhalten wir aus Gl. (2a) zur Bestimmung von b

(2e) $$\frac{\mathrm{Sin}\,\lambda(1-b)}{b(1-b)}=\frac{6}{\lambda}\,\frac{\mathrm{Sin}\,\lambda}{\mathrm{Sin}\,\lambda\xi}\left(1+\mathrm{Tg}\frac{\lambda}{2}\,\mathrm{Sin}\,\lambda\xi-\mathrm{Cos}\,\lambda\xi\right)\frac{1}{1+2\gamma},$$

und eine entsprechende Gleichung zur Bestimmung von a.

Die Maximalmomente für eine gleichmäßig verteilte Belastung p treten bei gewöhnlichen Hängebrücken in $\xi=0{,}1$ bis $\xi=0{,}25$ auf und das Maximalmoment für eine Einzellast P in $\xi\approx 0{,}1$. Da das Maximalmoment aus P und p sich in diesem Gebiet wenig ändert, wollen wir es für $\xi=0{,}1$, $\xi=0{,}2$ und $\xi=0{,}5$ berechnen, und zwar für die beiden Extremwerte $\gamma=0$ und $\gamma=0{,}05$ (siehe Tafel 11). Das Maximalmoment M_p der Streckenlast p wird aus Gl. (2d) erhalten, nachdem a und b bestimmt sind. Die zugehörige Horizontalkraft H_p ergibt sich aus Gl. (2c). Das Maximalmoment M_P der Einzellast P ist durch Gl. (2a) für $\xi=\vartheta$ und die entsprechende Horizontalkraft H_P durch Gl. (2b) bestimmt. Diese Maximalmomente sind für verschiedene Werte λ ausgewertet und in Tafel 1a, 1b und 1c zusammengestellt. Außer den zugehörigen H_p-Werten sind auch die entsprechenden Lastlängen $l_p=l(b-a)$ angegeben.

Tafel 1a. Maximalmoment für $\xi = 0{,}1$ im Mittelfeld, $M_{\xi=0{,}1}$.

	$\gamma \backslash \lambda$	5	10	15	20	30	40	50	Multiplikator
M_p	0 0,05	0,195 0,204	0,440 0,451	0,606 0,618	0,713 0,723	0,827 0,836	0,877 0,885	0,902 0,909	$\frac{p l^2}{\lambda^2}$
H_p	0 0,05	0,250 0,245	0,185 0,176	0,147 0,139	0,124 0,117	0,098 0,092	0,084 0,078	0,075 0,070	$\frac{p l^2}{8 f}$
l_p	0 0,05	0,33 0,34	0,27 0,28	0,24 0,25	0,22 0,22	0,19 0,20	0,18 0,18	0,17 0,17	l
M_P	0 0,05	0,274 0,278	0,398 0,401	0,447 0,450	0,467 0,470	0,482 0,483	0,487 0,488	0,489 0,490	$\frac{P l}{\lambda}$
H_P	0 0,05	0,068 0,061	0,068 0,061	0,068 0,061	0,068 0,061	0,068 0,061	0,068 0,061	0,068 0,061	$\frac{P l}{f}$

$$\lambda = \sqrt{\frac{H l^2}{J E}}, \quad \lambda_1 = \sqrt{\frac{H l_1^2}{J_1 E}}, \quad \gamma = \frac{l_1 f_1}{l f} \, \frac{1 - \frac{12}{\lambda_1^2}\left(1 - \frac{2}{\lambda_1} \mathrm{Tg} \frac{\lambda_1}{2}\right)}{1 - \frac{12}{\lambda^2}\left(1 - \frac{2}{\lambda} \mathrm{Tg} \frac{\lambda}{2}\right)} = \frac{l_1 f_1}{l f} \, \frac{\varphi(\lambda_1)}{\varphi(\lambda)}$$

Für $J = J_1$ ist $\lambda_1 = \frac{l_1}{l} \lambda$.

$\varphi(\lambda_1)$ und $\varphi(\lambda)$ können der Tafel 2 entnommen werden.

Tafel 1b. Maximalmoment für $\xi = 0{,}2$ im Mittelfeld, $M_{\xi=0{,}2}$.

	$\gamma \backslash \lambda$	5	10	15	20	30	40	50	Multiplikator
M_p	0 0,05	0,257 0,276	0,512 0,534	0,638 0,659	0,702 0,722	0,768 0,784	0,810 0,824	0,839 0,850	$\frac{p l^2}{\lambda^2}$
H_p	0 0,05	0,325 0,316	0,273 0,258	0,241 0,226	0,221 0,206	0,176 0,165	0,145 0,136	0,125 0,117	$\frac{p l^2}{8 f}$
l_p	0 0,05	0,38 0,40	0,34 0,35	0,32 0,33	0,30 0,31	0,20 0,21	0,16 0,17	0,13 0,14	l
M_P^{max}	0 0,05	0,314 0,325	0,408 0,415	0,438 0,443	0,453 0,457	0,468 0,471	0,476 0,478	0,481 0,483	$\frac{P l}{\lambda}$
H_P	0 0,05	0,120 0,109	0,120 0,109	0,120 0,109	0,120 0,109	0,120 0,109	0,120 0,109	0,120 0,109	$\frac{P l}{f}$

In Tafel 1a—c wird für H_{p+P} geradlinig interpoliert. Für M wird zuerst in γ geradlinig, danach in λ in folgender Weise parabolisch eingeschaltet: Es sei die Funktion $f(\lambda)$ in den drei Punkten λ_1, λ_2 und λ_3, in gleichem Abstand $\Delta\lambda$, bekannt. Dann ist die Funktion in einem beliebigen Punkt λ gegeben durch

$$f(\lambda) = f_1 + \frac{\lambda - \lambda_1}{2\Delta\lambda}(f_3 - f_1) + \frac{\lambda - \lambda_1}{\Delta\lambda}\left(2 - \frac{\lambda - \lambda_1}{\Delta\lambda}\right)\left(f_2 - \frac{f_1}{2} - \frac{f_3}{2}\right)$$

$f_1 = f(\lambda_1)$ usw. oder mit $s = \dfrac{\lambda - \lambda_1}{\Delta\lambda}$

$$f(\lambda) = f_1 + \frac{s}{2}(4f_2 - 3f_1 - f_3) - \frac{s^2}{2}(2f_2 - f_1 - f_3).$$

Tafel 1c. Das Maximalmoment für $\xi = 0{,}5$ im Mittelfeld, $M_{\xi=0,5}$.

	$\gamma \backslash \lambda$	5	10	15	20	30	40	50	Multiplikator
M_p	0	0,151	0,354	0,484	0,569	0,672	0,732	0,772	$\frac{p\,l^2}{\lambda^2}$
	0,05	0,187	0,386	0,514	0,596	0,693	0,750	0,788	
H_p	0	0,434	0,377	0,327	0,287	0,231	0,194	0,169	$\frac{p\,l^2}{8f}$
	0,05	0,454	0,370	0,314	0,274	0,218	0,184	0,159	
l_p	0	0,30	0,26	0,22	0,19	0,16	0,13	0,11	l
	0,05	0,35	0,28	0,23	0,20	0,17	0,14	0,12	
M_P	0	0,242	0,352	0,400	0,425	0,450	0,463	0,470	$\frac{P\,l}{\lambda}$
	0,05	0,265	0,365	0,409	0,432	0,455	0,466	0,473	
H_P	0	0,187	0,187	0,187	0,187	0,187	0,187	0,187	$\frac{P\,l}{f}$
	0,05	0,170	0,170	0,170	0,170	0,170	0,170	0,170	

Das Minimalmoment aus der Streckenlast p im Mittelfeld ist gleich dem Maximalmoment, aber λ ist hier verschieden

$$H_{-M} = \frac{p\,l^2}{8f} - H_{+M}.$$

Das Verhältnis $\dfrac{M_{max}}{M_{min}}$ ist bei einem mittleren Wert von $\lambda(\lambda \approx 20)$ $\dfrac{M_{max}}{M_{min}} \approx \dfrac{g + p_2}{g}$. und nähert sich bei großem λ dem Wert $\dfrac{g+p}{g}$.

Das Minimalmoment der Einzellast P wird aus Gl. (2a) und entsprechend H_P aus Gl. (2b) bestimmt. Wenn $p_P = \dfrac{P}{l - l_p}$ klein gegenüber p ist, kann das Minimalmoment für eine Streckenlast $p + p_P$ errechnet werden. Die Momente aus der Kabelverlängerung und Temperatur werden getrennt behandelt.

Das Maximalmoment in den S e i t e n f e l d e r n wird bei gewöhnlichen Werten von $\lambda_1 = \sqrt{\dfrac{H l_1^2}{J_1 E}}$ erhalten, indem man das betrachtete Außenfeld vollbelastet und die anderen Felder nicht belastet. Für $\lambda_1 > 16$ kann eine teilweise Belastung des Außenfeldes größere Momente als bei Vollbelastung ergeben. So findet man für $\lambda_1 = 30$ für eine Belastung von $\xi = 0{,}19$ bis $\xi = 0{,}71$ in Feldmitte 1,7% größere Momente als bei Vollbelastung. Diese Abweichung ist jedoch ohne praktische Bedeutung, da sie erstens klein ist, und zweitens kommen Brücken mit $\lambda_1 > 16$ kaum vor (vergleiche Tafel 11).

Für eine gleichmäßig verteilte Vollast p im betrachteten Seitenfeld sind die Momente aus Gl. (1b) bestimmt. Werden diese Ausdrücke in Gl. (1c) und (1d) eingeführt, so ergibt sich

$$H_p = \frac{\gamma}{1+2\gamma}\,\frac{p\,l^2}{8f} \tag{3a}$$

und die entsprechenden Biegungsmomente im Versteifungsträger

$$M_1^{max} = \frac{p\,l_1^2}{\lambda_1^2}\,\frac{1+\gamma}{1+2\gamma}\,\Phi(\lambda_1\xi), \tag{3b}$$

wo

$$\gamma = \frac{l_1 f_1}{l f}\,\frac{\varphi(\lambda_1)}{\varphi(\lambda)},$$

$$\varphi(\lambda) = 1 - \frac{12}{\lambda^2}\left(1 - \frac{2}{\lambda}\,\mathrm{Tg}\,\frac{\lambda}{2}\right) \text{ und } \Phi(\lambda_1\xi) = 1 + \mathrm{Tg}\,\frac{\lambda_1}{2}\,\mathrm{Sin}\,\lambda_1\xi - \mathrm{Cos}\,\lambda_1\xi =$$

$$= 1 - \frac{\mathrm{Sin}\,\lambda_1(1-\xi) + \mathrm{Sin}\,\lambda_1\xi}{\mathrm{Sin}\,\lambda}$$

können der Tafel 2 entnommen werden.

Tafel 2. Tafel der Funktionen $\Phi(\lambda\xi)$ und $\varphi(\lambda)$.

ξ \ λ	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30
	$\Phi(\lambda\xi) = 1 + \mathrm{Tg}\,\frac{\lambda}{2}\,\mathrm{Sin}\,\lambda\xi - \mathrm{Cos}\,\lambda\xi = \Phi(\lambda, 1-\xi)$									
0,5	0,352	0,575	0,734	0,837	0,901	0,963	0,987	0,99	1,0	1,0
0,25 / 0,75	0,269	0,450	0,590	0,692	0,766	0,862	0,917	0,976	0,993	1,0
0,20 / 0,80	0,232	0,391	0,519	0,616	0,691	0,797	0,864	0,950	0,982	0,998
0,10 / 0,90	0,133	0,230	0,315	0,396	0,448	0,550	0,632	0,777	0,865	0,950
	$\varphi(\lambda) = 1 - \frac{12}{\lambda^2}\left(1 - \frac{2}{\lambda}\,\mathrm{Tg}\,\frac{\lambda}{2}\right)$									
	0,285	0,471	0,612	0,709	0,777	0,859	0,904	0,954	0,973	0,988

Das Minimalmoment im Seitenfeld wird erhalten, indem man das betrachtete Feld nicht und die übrigen Felder voll belastet;

$$H_p = \frac{1+\gamma}{1+2\gamma}\,\frac{p\,l^2}{8f},$$

$$M_1^{min} = -\frac{p\,l_1^2}{\lambda_1^2}\,\frac{1+\gamma}{1+2\gamma}\,\Phi(\lambda_1\xi).$$

Das Verhältnis $\dfrac{M_1^{max}}{M_1^{min}}$ wird

$$\frac{M_1^{max}}{M_1^{min}} = \frac{g + \frac{1+\gamma}{1+2\gamma}\,p}{g + \frac{\gamma}{1+2\gamma}\,p} \approx \frac{g+p}{g}\,.$$

Für eine Einzellast P im Punkte ϑ ergibt sich für das Seitenfeld in ähnlicher Weise wie für das Mittelfeld

(3 c) $$H_P = \frac{3\,P l_1}{4 f_1}\,\vartheta\,(1-\vartheta)\,\frac{\gamma}{1+2\gamma}\,,$$

(3 d) $$M_1 = \frac{P l_1}{\lambda_1}\left[\frac{\operatorname{Sin}\lambda_1(1-\vartheta)\,\operatorname{Sin}\lambda_1\vartheta}{\operatorname{Sin}\lambda_1} - \frac{6\,\vartheta\,(1-\vartheta)\,\gamma}{\lambda_1\,(1+2\gamma)}\,\Phi(\lambda_1\vartheta)\right]$$

(3 e) $$M_1^{max} = \frac{P l_1}{2\lambda_1}\operatorname{Tg}\frac{\lambda_1}{2}\left(1 - \frac{3}{\lambda_1}\operatorname{Tg}\frac{\lambda_1}{4}\,\frac{\gamma}{1+2\gamma}\right).$$

Hier ist $\gamma \ll 1$ und für $\lambda_1 \gtreqless 5$ ist

(3 f) $$M_1^{max} = \frac{P l_1}{2\lambda_1}\,.$$

Für P in $\xi = 0{,}5$ im Mittelfeld wird das Moment im Seitenfeld

$$H_P = \frac{3}{16}\,\frac{P l}{f}\,\frac{1}{1+2\gamma}\,,$$

$$M_1 = -\frac{8 f_1}{\lambda_1^2}\,H_P\,\Phi(\lambda_1\xi)\,.$$

b) *Momente aus Temperatur und Kabelverlängerung.*

Aus Gl. (1e) erhalten wir zur Bestimmung der Horizontalkomponente H_t aus einer Temperaturerhöhung $+t$

(4 a) $$H_t = -H\,\varepsilon\,t\,L_t\,\frac{l}{f^2}\,\frac{3}{16\,(1+2\gamma)\,\varphi(\lambda)}\,,$$

ε = Temperaturkoeffizient,

$$L_t = \int\limits_{(k)} \frac{dx}{\cos^2\varphi} = l\left(1 + \frac{16}{3}\,\frac{f^2}{l^2}\right) + 2\,l_1\left(1 + \frac{h^2 + 5{,}3\,f_1^2}{l_1^2}\right).$$

Aus der Kabelverlängerung entsteht eine Horizontalkomponente $\varDelta H$ nach Gl. (1f):

(4 b) $$\varDelta H = -\frac{H H_s L_s}{E_k F_k}\,\frac{l}{f^2}\,\frac{3}{16\,(1+2\gamma)\,\varphi(\lambda)}\,,$$

$$L_s = \int\limits_{(k)} \frac{dx}{\cos^3\varphi} = l\left(1 + 8\,\frac{f^2}{l^2}\right) + 2\,l_1\left(1 + \frac{1{,}5\,h^2 + 8\,f_1^2}{l_1^2}\right).$$

Die entsprechenden Momente im Mittelfeld und Außenfeld sind

(4 c) $$M = -\frac{8 f}{\lambda^2}\,(H_t + \varDelta H)\,\Phi(\lambda\xi)\,,$$

$$M_1 = -\frac{8f}{\lambda_1^2}(H_t + \Delta H)\,\Phi(\lambda_1 \xi), \tag{4d}$$

$\varphi(\lambda)$ und $\Phi(\lambda\xi)$ werden der Tafel 2 entnommen.

Die gesamte Horizontalkraft aus Eigengewicht, Temperatur und Nutzlast ergibt

$$H = \frac{g l^2}{8f} + H_{p+P} + H_t + \Delta H.$$

H wird hier durch Iteration gefunden, indem für die gegebene Lastkombination zuerst ein angenäherter Wert für H und λ angenommen wird (z. B. $H = \frac{g l^2}{8f}$). Mit diesem Wert für λ wird H_{p+P} der Tafel 1a oder 1b entnommen. Mit $H = H_g + H_{p+P}$ wird ein neuer Wert für λ, λ_1 und γ berechnet. Diesen Werten entnehmen wir einen verbesserten Wert für H_{p+P} aus der Tafel 1a und 1b, und aus Gl. (4a) und (4b) erhalten wir H_t und ΔH. Der so gefundene Wert für H ist infolge der guten Konvergenz der Berechnung nur mit Fehlern behaftet, die kleiner als 1 ‰ sind, was bei einer neuen Durchführung des Rechnungsganges leicht gezeigt werden kann.

Beispiel 1.

Als Beispiel berechnen wir das Maximalmoment des Mittelfeldes in $\xi = 0{,}2$ für eine Hängebrücke mit $l = 220$ m, $l_1 = 75$ m, $f = 22$ m, $f_1 = 2{,}55$ m, $E_k F_k = 1{,}72 \cdot 10^6$ t (beide Kabel), $t = \pm 25^0$, $\varepsilon = 10^{-5}$, $EJ = EJ_1 = 1{,}1 \cdot 10^6$ tm^2 (beide Versteifungsträger), $g = 11{,}75$ t/m, $p = 3{,}15$ t/m, $P = 45$ t (für die ganze Fahrbahn).

Als erste Annäherung wird $\gamma = 0{,}025$ und $H = H_g = \frac{g l^2}{8f}$ gewählt.

$$H_g = \frac{11{,}75}{8 \cdot 22} \cdot 220^2 = 3231 \text{ t},$$

$$\lambda = l\sqrt{\frac{H}{EJ}} = 220\sqrt{\frac{3231}{1{,}1 \cdot 10^6}} = 12.$$

Aus Tafel 1b wird für H entnommen

$$H = H_g + 0{,}25\,\frac{3{,}15 \cdot 220^2}{8 \cdot 22} + 0{,}115\,\frac{45 \cdot 220}{22} = 3231 + 217 + 52 = 3500 \text{ t}.$$

Der verbesserte Wert für λ und λ_1 wird

$$\lambda = l\sqrt{\frac{H}{JE}} = 220\sqrt{\frac{3500}{1{,}1 \cdot 10^6}} = 12{,}4$$

$$\lambda_1 = l_1\sqrt{\frac{H}{J_1 E}} = 75\sqrt{\frac{3500}{1{,}1 \cdot 10^6}} = 4{,}2.$$

Für diese λ-Werte werden $\varphi(4,2)$ und $\varphi(12,4)$ der Tafel 2 entnommen und es wird

$$\gamma = \frac{l_1 f_1}{l f}\,\frac{\varphi(4{,}2)}{\varphi(12{,}4)} = \frac{75 \cdot 2{,}55}{220 \cdot 22}\,\frac{0.63}{0{,}92} = 0{,}027.$$

Mit diesen Werten für λ und γ werden:

$$H_g = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3231\ \text{t}$$

Aus Tafel 1b (geradlinig eingeschaltet):

$$H_p = 0{,}252 \cdot \frac{3{,}15 \cdot 220^2}{8 \cdot 22} = \ldots\ldots\ldots 218\ \text{t}$$

$$H_P = 0{,}114 \cdot \frac{45 \cdot 220}{22} = \ldots\ldots\ldots 51\ \text{t}$$

Aus Gl. (4a) und (4b):

$$H_t = -\frac{3450 \cdot 10^{-5} \cdot 25 \cdot 388 \cdot 3 \cdot 220}{16 \cdot 22^2 \cdot 0{,}92 \cdot 1{,}054} = \ldots -29\ \text{t}$$

$$\varDelta H = -\frac{3450\,(3450 - 3231) \cdot 400 \cdot 220 \cdot 3}{1{,}72 \cdot 10^6 \cdot 16 \cdot 22^2 \cdot 0{,}92 \cdot 1{,}054} = -15\ \text{t}$$

$$H = 3456\ \text{t}$$

Für diesen verbesserten Wert H wird

$$\lambda = 12{,}33$$
$$\lambda_1 = 4{,}20$$
$$\gamma = 0{,}027$$

und eine neue Durchführung der Berechnung ergibt $H = 3456$ t. Die 1. Iteration für H ist also genau, und wir erhalten für das Maximalmoment in $\xi = 0{,}2$:

Aus Tafel 1b (parabolisch eingeschaltet):

$$M_p = 0{,}588 \cdot \frac{3{,}15 \cdot 220^2}{12{,}33^2} = \ldots\ldots\ldots 590\ \text{tm}$$

$$M_P = 0{,}422 \cdot \frac{45 \cdot 220}{12{,}33} = \ldots\ldots\ldots 339\ \text{tm}$$

Aus Gleichung (4c):

$$M_{t+\varDelta H} = \frac{8 \cdot 22}{12{,}33^2}(29 + 15) \cdot 0{,}904 = \ldots\ldots 47\ \text{tm}$$

$$M^{max}_{\xi=0{,}2} = 976\ \text{tm}$$

c) *Maximale Querkräfte.*

Die Versteifungsträger sind gewöhnlich als Fachwerkträger, als genietete oder geschweißte Vollwandträger ausgebildet. Bei kleineren Hängebrücken werden auch Walzprofile verwendet. Im ersten Fall werden die Diagonalen, im zweiten Fall die Nietteilung oder Schweißnähte zwischen Gurt und Steg, als auch die Aussteifung des Steges gegen Ausbeulen durch die maximale Querkraft bestimmt. Auch bei Walzprofilen muß die Sicherheit des Steges gegen Ausbeulen untersucht werden.

Da $Q = \frac{dM}{dx}$, wird die Querkraft am einfachsten aus den Momentengleichungen durch Derivation ermittelt. Für eine Einzellast P im Punkte ϑ

Tafel 3. Max. Querkraft Q_p aus gleichmäßig verteilter Belastung p und Querkraft Q_P aus einer Einzellast für $\xi = 0$, $\xi = 0{,}1$, $\xi = 0{,}2$ und $\xi = 0{,}5$ im Mittelfeld.

	$\gamma \backslash \lambda$	5	10	15	20	30	40	50	Multiplikator
					$\xi = 0$				
					$Q_p = P,\ H_P = 0$				
Q_p	0	0,565	0,766	0,848	0,891	0,934	0,954	0,966	$\frac{pl}{\lambda}$
	0,05	0,583	0,778	0,856	0,897	0,938	0,957	0,968	
H_p	0	0,197	0,130	0,092	0,069	0,044	0,032	0,024	$\frac{pl^2}{8f}$
	0,05	0,195	0,124	0,124	0,066	0,042	0,030	0,022	
l_p	0	0,28	0,23	0,19	0,16	0,13	0,11	0,09	l
	0,05	0,30	0,23	0,19	0,16	0,13	0,11	0,09	
					$\xi = 0{,}1$				
Q_P	0	0,620	0,548	0,517	0,506	0,500	0,500	0,500	P
	0,05	0,626	0,550	0,518	0,506	0,500	0,500	0,500	
					$H_P = 0{,}068 \frac{Pl}{f(1+2\gamma)}$				
Q_p	0	0,340	0,431	0,458	0,474	0,491	0,497	0,499	$\frac{pl}{\lambda}$
	0,05	0,357	0,436	0,462	0,477	0,492	0,497	0,499	
H_p	0	0,297	0,245	0,213	0,193	0,168	0,152	0,141	$\frac{pl^2}{8f}$
	0,05	0,298	0,233	0,201	0,181	0,156	0,141	0,130	
l_p	0	0,28	0,24	0,22	0,20	0,18	0,17	0,16	l
	0,05	0,30	0,25	0,23	0,21	0,19	0,17	0,16	
					$\xi = 0{,}2$				
Q_P	0	0,501	0,504	0,502	0,501	0,500	0,500	0,500	P
	0,05	0,507	0,503	0,502	0,501	0,500	0,500	0,500	
					$H_P = 0{,}12 \frac{Pl}{f(1+2\gamma)}$				
Q_p	0	0,305	0,431	0,476	0,492	0,499	0,500	0,500	$\frac{pl}{\lambda}$
	0,05	0,320	0,436	0,478	0,492	0,499	0,500	0,500	
H_p	0	0,460	0,430	0,406	0,388	0,361	0,343	0,331	$\frac{pl^2}{8f}$
	0,05	0,441	0,404	0,379	0,360	0,333	0,315	0,303	
l_p	0	0,34	0,32	0,31	0,29	0,28	0,26	0,26	l
	0,05	0,36	0,33	0,31	0,30	0,28	0,27	0,26	
					$\xi = 0{,}5$				
					$Q_P = 0{,}5\,P,\ H_P = 0{,}1875 \frac{Pl}{f(1+2\gamma)}$				
Q_p	0–0,05	0,424	0,493	0,499	0,500	0,500	0,500	0,500	$\frac{pl}{\lambda}$
					$H_p = \frac{pl^2}{16f(1+2\gamma)},\ l_p = 0{,}5\,l$				

wird die Querkraft im Punkte ξ des Mittelfeldes ($\xi < \vartheta$) aus Gl. (2a) erhalten.

$$(5a) \quad Q_P = P\left[\frac{\operatorname{Cos}\lambda\xi \operatorname{Sin}\lambda(1-\vartheta)}{\operatorname{Sin}\lambda} - \frac{6\vartheta(1-\vartheta)}{\lambda(1+2\gamma)}\left(\operatorname{Tg}\frac{\lambda}{2}\operatorname{Cos}\lambda\xi - \operatorname{Sin}\lambda\xi\right)\right].$$

Aus Gl. (5a) kann der Nullpunkt $\vartheta = d$ der Querkraft gefunden werden, und durch Belasten des betrachteten Schnittes ξ bis $\xi = d$, wird die maximale Querkraft für die Streckenlast p durch Einführung von $P = pld\vartheta$ in Gl. (5a) und Integration von ξ bis d erhalten. Diese ist zusammen mit Q_P für die Einzellast P in dem betrachteten Schnitt in Tafel 3 zusammengestellt.

Die minimale Querkraft aus der Streckenlast p wird durch Vollast aller Felder und Entlastung der positiven Einflußflächen erhalten, d. h. $Q_p^{min} = -Q_p^{max}$ und die entsprechende Horizontalkraft wird $H_p = \frac{pl^2}{8f} - H_p^{max}$. Die minimale Querkraft aus der Einzellast P wird $Q_P^{min} = P - Q_P^{max}$.

Die Querkraft im Mittelfeld aus Temperatur und Kabelverlängerung ist

$$(5b) \qquad Q = -\frac{8f}{l\lambda}(H_t + \Delta H)\left(\operatorname{Tg}\frac{\lambda}{2}\operatorname{Cos}\lambda\xi - \operatorname{Sin}\lambda\xi\right).$$

Im Seitenfeld ergibt sich für eine Einzellast P im Punkte ϑ die Querkraft im Punkte ξ in entsprechender Weise wie für das Mittelfeld

$$Q_1 = \frac{dM_1}{dx} = P\left[\frac{\operatorname{Cos}\lambda_1\xi \operatorname{Sin}\lambda_1(1-\vartheta)}{\operatorname{Sin}\lambda_1} - \frac{6\vartheta(1-\vartheta)}{\lambda_1}\frac{\gamma}{1+2\gamma}\left(\operatorname{Tg}\frac{\lambda_1}{2}\operatorname{Cos}\lambda_1\xi - \operatorname{Sin}\lambda_1\xi\right)\right].$$

Da γ eine kleine Größe ist, erhält man mit guter Annäherung die maximale Querkraft Q_p für eine gleichmäßig verteilte Belastung p durch Belastung vom Auflager bis zu dem betrachteten Schnitt ξ. Diese Querkraft wird aus obiger Gleichung durch Einführung von $P = pld\vartheta$ und Integration von ξ bis 1 erhalten zu

$$(5c) \qquad Q_1 = \frac{pl_1}{\lambda_1}\left[\frac{\operatorname{Cos}\lambda_1\xi}{\operatorname{Sin}\lambda_1}(\operatorname{Cos}\lambda_1(1-\xi) - 1) - \frac{\gamma}{1+2\gamma}\left(\operatorname{Tg}\frac{\lambda_1}{2}\operatorname{Cos}\lambda_1\xi - \operatorname{Sin}\lambda_1\xi\right)(1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)\right].$$

Für $\lambda_1 < 5$ ist diese Gleichung genau und für $\lambda_1 = 10$ ist die Abweichung vom genauen Wert 1%, was ohne praktische Bedeutung ist.

Der maximale Auflagerdruck für die Streckenlast p ist

$$(5d) \qquad Q_0 = \frac{pl_1}{\lambda_1}\frac{1+\lambda}{1+2\gamma}\operatorname{Tg}\frac{\lambda_1}{2}.$$

Die Querkraft im Seitenfeld aus Temperatur und Kabelverlängerung ist

$$(5e) \qquad Q = -\frac{8f_1}{l_1\lambda_1}(H_t + \Delta H)\left(\operatorname{Tg}\frac{\lambda_1}{2}\operatorname{Cos}\lambda_1\xi - \operatorname{Sin}\lambda_1\xi\right).$$

d) *Maximale Winkeländerungen und Durchbiegungen des Versteifungsträgers nebst Schiefstellung des Querträgers.*

Die Versteifungsträger gehören zu den sekundären Baugliedern der Hängebrücken und können bei großen Brücken, wie z. B. bei der George Washington-Brücke im 1. Ausbau, ganz wegfallen. Sie wirken im wesentlichen lastverteilend und versteifend. Wird für den Versteifungsträger ein beliebiges Trägheitsmoment gewählt, so können die Maximalmomente aus der Tafel 1a und 1b entnommen werden, und es ist immer möglich, Querschnitte zu finden, die das gewählte Trägheitsmoment und gleichzeitig die zulässige Randspannung aufweisen.

Außer den Versteifungsträgern können auch das Eigengewicht der Fahrbahn und die Pfeilhöhe des Kabels frei gewählt werden. Diese Größen müssen so abgestimmt sein, daß genügende Steifigkeit der Brücke mit kleinstmöglichen Baukosten erhalten wird. Als Steifigkeitsmaße der Brücke werden gewöhnlich die maximale Winkeländerung und die maximale Durchbiegung des Versteifungsträgers verwendet. Am wichtigsten ist jedoch die maximale Schiefstellung der Querträger. Wo diese Schiefstellung sehr große Werte annimmt, wie z. B. bei der Tacoma-Brücke $\left(\operatorname{tg}\beta = \frac{v_v - v_h}{b} = 1:7\right)$, wird die Brücke bei schiefen Belastungen und Wind so große Schiefstellungen der Fahrbahn erhalten, daß sowohl die Fahrbahn als auch die Hängeseile mit ihren Befestigungen zum Bruch kommen und ein teilweises Einstürzen zur Folge haben. Um eine schnelle Übersicht über die verschiedenen Steifigkeitsmaße zu erhalten, wollen wir dieselben in geschlossenen Formelausdrücken und Zahlentafeln angeben.

Die maximale Winkeländerung der Versteifungsträger entsteht bei den Türmen, und da $\operatorname{tg}\alpha = \frac{dv}{dx}$ ist, wird diese aus Gl. (1c) durch Derivation erhalten.

Für das Mittelfeld ergibt sich für eine Einzellast P im Punkte ϑ eine Winkeländerung des Versteifungsträgers an den Türmen ($\xi = 0$)

$$\text{(6a)} \qquad \operatorname{tg}\alpha_P = \frac{P}{H}\left[1 - \vartheta - \frac{\operatorname{Sin}\lambda(1-\vartheta)}{\operatorname{Sin}\lambda} - \frac{3\vartheta(1-\vartheta)\left(1-\frac{2}{\lambda}\right)}{1+2\gamma}\right].$$

Die Nullstelle $\xi = c$ wird durch folgende Gleichung bestimmt:

$$\text{(6b)} \qquad 1 - c - \frac{\operatorname{Sin}\lambda(1-c)}{\operatorname{Sin}\lambda} - \frac{3c(1-c)\left(1-\frac{2}{\lambda}\right)}{1+2\gamma} = 0.$$

Die maximale Winkeländerung an den Türmen für eine Streckenlast p entsteht durch Belastung von $\xi = 0$ bis $\xi = c$ und wird durch Einführung von $P = pl\,d\vartheta$ in Gl. (6a) und Integration erhalten

$$\text{(6c)} \qquad \operatorname{tg}\alpha_p = \frac{pl}{H}\left[c - \frac{(3c^4 - 2c^5)\left(1-\frac{2}{\lambda}\right)}{4(1+2\gamma)} + \frac{\operatorname{Cos}\lambda(1-c) - \operatorname{Cos}\lambda}{\lambda\operatorname{Sin}\lambda}\right].$$

In Tafel 4 sind die maximalen positiven Winkeländerungen $\operatorname{tg}\alpha_p$ und $\operatorname{tg}\alpha_P$ an den Türmen im Mittelfeld aus einer Streckenlast p und einer Einzellast P angegeben. Die minimalen Winkeländerungen sind von derselben

Größenordnung, da sie aber im unbelasteten Teil auftreten, fallen sie weniger ins Gewicht.

Tafel 4. Maximale positive Winkeländerungen des Mittelfeldes an den Türmen mit zugehöriger Horizontalkraft und Belastungslänge.

	γ \ λ	5	10	15	20	30	40	50	∞	Multiplikator
$\mathrm{tg}\,\alpha_p$	0	0,042	0,081	0,101	0,112	0,124	0,130	0,134	0,148	$\frac{p\,l}{H}$
	0,05	0,055	0,095	0,115	0,126	0,137	0,143	0,147	0,161	
H_p	0	0,424	0,358	0,327	0,309	0,292	0,283	0,278	0,259	$\frac{p\,l^2}{8f}$
	0,05	0,477	0,385	0,349	0,330	0,311	0,302	0,296	0,277	
l_p	0	0,45	0,40	0,38	0,37	0,36	0,35	0,35	0,33	l
	0,05	0,52	0,45	0,42	0,41	0,39	0,39	0,38	0,37	
$\mathrm{tg}\,\alpha_P$	0	0,149	0,326	0,444	0,524	0,626	0,689	0,732	1,0	$\frac{P}{H}$
	0,05	0,172	0,351	0,467	0,544	0,643	0,704	0,745	1,0	
H_P	0	0,102	0,084	0,071	0,063	0,051	0,043	0,038	0	$\frac{P\,l}{f}$
	0,05	0,100	0,080	0,067	0,059	0,048	0,040	0,035	0	

Die maximale Winkeländerung in den Seitenfeldern erhalten wir für Vollast des betrachteten Feldes. Für die gleichmäßig verteilte Belastung ist die Winkeländerung an den Türmen

$$\mathrm{tg}\,\alpha_1 = \frac{p\,l_1}{2H}\,\frac{1+\gamma}{1+2\gamma}\left(1+\frac{2}{\lambda_1}\,\mathrm{Tg}\,\frac{\lambda_1}{2}\right). \tag{6d}$$

$$H_p = \frac{p\,l^2}{8f}\,\frac{\gamma}{1+2\gamma}.$$

Die entsprechende Winkeländerung für eine Einzellast P im Punkte ϑ wird

$$\mathrm{tg}\,\alpha_1 = \frac{P}{H}\left[1-\vartheta-\frac{\mathrm{Sin}\,\lambda_1(1-\vartheta)}{\mathrm{Sin}\,\lambda_1}-3\,\vartheta(1-\vartheta)\left(1-\frac{2}{\lambda_1}\right)\frac{\gamma}{1+2\gamma}\right]. \tag{6e}$$

Die Winkeländerung aus Temperaturänderung $+t$ und Kabelverlängerung an den Türmen ist im Mittelfeld

$$\mathrm{tg}\,\alpha_{t+\varDelta H} = -\frac{4f}{l^2}\,\frac{H_t+\varDelta H}{H}\left(1-\frac{2}{\lambda}\,\mathrm{Tg}\,\frac{\lambda}{2}\right) \tag{6f}$$

und entsprechend in den Seitenfeldern H_t und $\varDelta H$ sind durch Gl. (4a) und (4b) bestimmt.

Die Durchbiegung des Versteifungsträgers ist durch Gl. (1c) gegeben. Im Mittelfeld ergibt sich die Durchbiegung im Punkt ξ für eine Einzellast P im Punkte $\vartheta\,(\xi<\vartheta)$

$$v = \frac{P\,l}{H}\left[\xi(1-\vartheta)-\frac{\mathrm{Sin}\,\lambda\xi\,\mathrm{Sin}\,\lambda(1-\vartheta)}{\lambda\,\mathrm{Sin}\,\lambda}-\frac{3\,\vartheta(1-\vartheta)}{1+2\gamma}\left(\xi-\xi^2-\frac{2}{\lambda^2}\,\Phi(\lambda\,\xi)\right)\right]. \tag{6g}$$

Ein entsprechender Ausdruck für v wird für $\xi > \vartheta$ erhalten. Die maximale Durchbiegung wird für die Einzellast im betrachteten Punkt erhalten. Abhängig von λ und γ liegt dieser Punkt bei gewöhnlichen Brücken zwischen $\xi = 0{,}22$ und $\xi = 0{,}29$. Da es hier nicht auf den exakten Wert ankommt, berechnen wir die Durchbiegung in $\xi = 0{,}25$. In extremen Fällen wird die maximale Durchbiegung diesen Wert bis zu 3% überschreiten, was ohne praktische Bedeutung ist. Für eine Streckenlast p wird die Durchbiegung in $\xi = 0{,}25$ durch Einführung von $P = pl d\xi$ und Integration von 0 bis zur Nullstelle der Durchbiegungen, die von λ und γ abhängig zwischen $\xi = 0{,}44$ und $\xi = 0{,}58$ liegt, erhalten. Diese Durchbiegungen sind für verschiedene Werte von λ und γ ermittelt und in Tafel 5 zusammengestellt.

Aus der Kabelverlängerung entsteht eine horizontale Korrekturkraft ΔH im Kabel. ΔH ist durch Gl. (4b) bestimmt und das zugehörige Moment durch Gl. (4c). Diese Ausdrücke in Gl. (1c) eingesetzt, ergeben

$$v = \frac{H_s L_s}{E_k F_k} \frac{3\,l}{4\,f(1 + 2\gamma)\,\varphi(\lambda)} \left(\xi - \xi^2 - \frac{2}{\lambda^2}\,\Phi(\lambda\,\xi)\right). \tag{6h}$$

Tafel 5. Maximale Durchbiegung im **Mittelfeld** bei $\xi = 0{,}25$ für eine Streckenlast p und eine Einzellast P.

	$\gamma \backslash \lambda$	5	10	15	20	30	40	50	∞	Multiplikator
v_p	0	0,050	0,092	0,110	0,117	0,123	0,126	0,127	0,129	$\frac{p\,l^2}{8H}$
	0,05	0,076	0,123	0,141	0,148	0,154	0,156	0,157	0,159	
		$H_p = \left[0{,}41 + \frac{0{,}44}{\lambda}(1+8\gamma)\right](1+\gamma)\frac{p\,l^2}{8f}$								
v_P	0	0,021	0,043	0,054	0,060	0,067	0,070	0,072	0,082	$\frac{Pl}{H}$
	0,05	0,028	0,051	0,063	0,069	0,076	0,080	0,082	0,092	
		$H_P = \frac{9}{64}\frac{Pl}{f}\frac{1}{1+2\gamma}$								

Die maximale Schiefstellung der Querträger ist durch die relative Durchbiegung der Versteifungsträger bestimmt

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{v_v - v_h}{b},$$

wo b die Brückenbreite, v die Durchbiegung des linken und v_h die Durchbiegung des rechten Versteifungsträgers sind. Um einfache Formeln zu erhalten, berechnen wir die Schiefstellung in $\xi = 0{,}25$ für eine Belastung bis Brückenmitte. Die maximale Schiefstellung kann diesen Wert in extremen Fällen bis zu etwa 4% überschreiten.

Die größte Schiefstellung wird durch wechselweise Belastung bis Mitte Fahrbahn erhalten. Durch diese einseitige Belastung ist die Belastung auf dem einen Kabel p_v bzw. P_v, und auf dem andern p_h bzw. P_h ($p_v > p_h$).

Die Schiefstellung in $\xi = 0{,}25$ bei Belastung auf der einen Seite mit p_v von $\xi = 0$ bis $\xi = 0{,}5$, mit p_h von 0,5 bis 1,0 und auf der anderen Seite mit p_h von $\xi = 0$ bis 0,5 und mit p_v von $\xi = 0{,}5$ bis $\xi = 1{,}0$ wird

(6 j) $$\operatorname{tg}\beta_p = \frac{(p_v - p_h)\,l^2}{b\,H}\left[\frac{1}{32} - \frac{1}{\lambda^2}\left(1 - \frac{\operatorname{Sin} 0{,}75\,\lambda - \operatorname{Sin} 0{,}25\,\lambda}{0{,}5\,\operatorname{Sin}\lambda}\right)\right].$$

Bei Belastung in den Seitenfeldern mit p_v und p_h wird die Durchbiegung in $\xi = 0{,}25$ im Mittelfeld auf der einen Seite

$$v_v = -\frac{p_v\,l^2}{H}\,\frac{\gamma}{1+2\gamma}\left[\frac{3}{16} - \frac{2}{\lambda^2}\left(1 - \frac{\operatorname{Sin} 0{,}75\,\lambda + \operatorname{Sin} 0{,}25\,\lambda}{\operatorname{Sin}\lambda}\right)\right]$$

und entsprechend auf der anderen Seite. Für die Einzellasten P_v und P_h in $\xi = 0{,}25$ und P_h und P_v in $\xi = 0{,}75$ wird

(6 k) $$\operatorname{tg}\beta_P = \frac{(P_v - P_h)\,l}{b\,H}\left[\frac{1}{8} - \frac{\operatorname{Sin} 0{,}25\,\lambda\,(\operatorname{Sin} 0{,}75\,\lambda - \operatorname{Sin} 0{,}25\,\lambda)}{\lambda\,\operatorname{Sin}\lambda}\right].$$

Die Schiefstellung, die von γ unabhängig ist, ist für verschiedene Werte von λ ausgerechnet und in Tafel 7 zusammengestellt. Dort sind gleichzeitig die entsprechenden Horizontalkräfte angegeben.

Tafel 6. Schiefstellung der Querträger im Mittelfeld für $\xi = 0{,}25$ für Streckenlasten p_v und p_h und für Einzellasten P_v und P_h an beiden Kabeln.

γ	5	10	15	20	30	40	50	∞	Multiplikator
$\operatorname{tg}\beta_P$	0,040	0,076	0,092	0,100	0,108	0,113	0,115	0,125	$(P_v - P_h)\frac{l}{b\,H}$
	$H_P = \frac{9}{64}\,\frac{(P_v + P_h)\,l}{f}\,\frac{1}{1+2\gamma}$								
$\operatorname{tg}\beta_p$	0,100	0,183	0,216	0,230	0,241	0,245	0,247	0,250	$(p_v - p_h)\frac{l^2}{8\,b\,H}\left[1 + \frac{2\gamma}{1+2\gamma}\left(3 + \frac{70}{\lambda^2}\right)\right]$
	$H_p = (p_v + p_h)\frac{l^2}{16 f}$								

Die maximalen Durchbiegungen und die Schiefstellung der Querträger treten in den Seitenfeldern bei $\xi = 0{,}5$ auf. Die maximale Durchbiegung entsteht für Vollast p im betrachteten Feld und P in $\xi = 0{,}5$

(6 l) $$v_1^{max} = \frac{p\,l_1^2}{8H}\,\frac{1+\gamma}{1+2\gamma}\left[1 - \frac{8}{\lambda_1^2}\left(1 - \frac{1}{\operatorname{Cos} 0{,}5\,\lambda_1}\right)\right]$$
$$+ \frac{P\,l_1}{4H}\left[1 - \frac{2}{\lambda_1}\operatorname{Tg}\frac{\lambda_1}{2} - \frac{3\gamma}{1+2\gamma}\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{\lambda_1^2}\left(1 - \frac{1}{\operatorname{Cos}\frac{\lambda_1}{2}}\right)\right)\right].$$

Die minimale Durchbiegung entsteht, wenn das betrachtete Seitenfeld unbelastet und die übrigen Felder voll belastet sind.

(6 m) $$v_1^{min} = -\frac{p\,l_1^2}{8H}\,\frac{1+\gamma}{1+2\gamma}\left[1 - \frac{8}{\lambda_1^2}\left(1 - \frac{1}{\operatorname{Cos}\frac{\lambda_1}{2}}\right)\right]\left(1 + \frac{1{,}5\,P}{p\,l}\right).$$

Die Durchbiegungen sind für verschiedene Werte von λ_1 und γ berechnet und in Tafel 7 zusammengestellt.

Tafel 7. Maximale Durchbiegung v^{max} und Aufbiegung v^{min} für $\xi = 0{,}5$ in einem Seitenfeld.

λ_1	2	3	5	7	10	15	∞	Multiplikator
v_p^{max}	0,296	0,489	0,732	0,847	0,921	0,964	1,0	$\frac{p l_1^2}{8H} \frac{1+\gamma}{1+2\gamma}$
v_P^{max} $\gamma = 0{,}02$	0,059	0,097	0,149	0,176	0,197	0,213	0,246	$\frac{P l_1}{H}$
v_P^{max} $\gamma = 0{,}05$	0,057	0,095	0,145	0,171	0,192	0,208	0,241	
	$H_{p+P} = \frac{\gamma}{1+\gamma}\left(\frac{p l^2}{8f} + \frac{3}{16}\frac{P l_1}{f_1}\right)$							
v_{p+P}^{min}	0,296	0,489	0,732	0,847	0,921	0,964	1,0	$\frac{1+\gamma}{1+2\gamma}\frac{p l_1^2}{8H}\left(1+\frac{1{,}5P}{pl}\right)$
	$H_{p+P} = \frac{1+\gamma}{1+2\gamma}\frac{p l^2}{8f}\left(1+\frac{1{,}5P}{pl}\right)$							

Die maximale Schiefstellung der Querträger in $\xi = 0{,}5$ wird aus Tafel 7 erhalten, indem man in die Multiplikatoren für v als Belastung $p = p_v - p_h$ bzw. $P = P_v - P_h$ einführt. Die zugehörige Horizontalkraft wird

$$H_{p+P} = (p_v + p_h)\frac{l^2}{16f} + \frac{3}{32}\frac{(P_v + P_h)\,l}{f}\frac{1}{1+2\gamma}. \tag{6n}$$

Um eine Übersicht über die drei Deformationsgrößen, maximale Durchbiegung v_{max}, maximale Neigung des Versteifungsträgers $\mathrm{tg}\,\alpha$ und maximale Schiefstellung des Querträgers $\mathrm{tg}\,\beta$ zu erhalten, sind diese Werte für einige amerikanische und norwegische Brücken in Tafel 8 zusammengestellt. Es sind hier auch die der Berechnung zugrundegelegten Belastungen angegeben. Die übrigen Konstruktionsdaten gehen aus Tafel 11 hervor.

Tafel 8. Maximale Durchbiegungen v^{max}, Winkeländerung des Versteifungsträgers $\mathrm{tg}\,\alpha$ und Schiefstellung des Querträgers $\mathrm{tg}\,\beta$ für einige ausgeführte Hängebrücken. (Temperaturänderung nicht berücksichtigt.)

	g t/m	p t/m	$p_v - p_h$ t/m	b m	l m	v^{max} m	$\frac{v^{max}}{l}$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\beta$
Tocama Br.	5,0	1,0	0,40	11,86	853	2,55	1 : 333	1 : 53	1 : 7
Bronx-Whitestone Br.	8,19	2,23	1,0	22,6	701	2,60	1 : 270	1 : 41	1 : 12
George W. Br. im 1. Ausbau (ohne Versteifungsträger)	19,4	2,1	1,1	35,6	1067	1,41	1 : 760	1 : 85	1 : 27
Fyksesund (norw.) .	2,1	0,6	0,3	7,2	230	1,04	1 : 222	1 : 29	1 : 8
Framnes „ .	1,8	0,6	0,25	4,8	150	0,64	1 : 234	1 : 35	1 : 11

4. Einfeldrige Hängebrücke mit frei aufliegendem Versteifungsträger von konstantem Trägheitsmoment nach Fig. 1b.

Für die einfeldrige Hängebrücke werden sämtliche Größen aus den entsprechenden Ausdrücken für die dreifeldrige durch Einführung von $l_1 = l_2 = \gamma = 0$ erhalten. Die in dieser Weise erhaltenen Maximalmomente in $\xi = 0{,}2$ und $\xi = 0{,}5$ für die Streckenlast p und die Einzellast P mit zugehöriger Horizontalkraft lassen sich auch folgendermaßen schreiben:

$$\text{(7a)} \quad \begin{cases} M_{\xi=0,2} = \dfrac{p l^2}{\lambda^2}\left(0{,}939 - \dfrac{5{,}18}{\lambda} + \dfrac{8{,}84}{\lambda^2}\right) + \dfrac{Pl}{\lambda}\left(0{,}499 - \dfrac{0{,}907}{\lambda} - \dfrac{0{,}1}{\lambda^2}\right) \\ H_{p+P} = \dfrac{p l^2}{8f}\left[0{,}35 - 0{,}77\dfrac{\lambda}{100} + 0{,}64\left(\dfrac{\lambda}{100}\right)^2\right] + \dfrac{Pl}{f}\,0{,}120\,. \end{cases}$$

$$\text{(7b)} \quad \begin{cases} M_{\xi=0,5} = \dfrac{p l^2}{\lambda^2}\left(0{,}947 - \dfrac{9{,}62}{\lambda} + \dfrac{45{,}6}{\lambda^2} - \dfrac{87}{\lambda^3}\right) + \dfrac{Pl}{\lambda}\left(0{,}504 - \dfrac{1{,}74}{\lambda} + \dfrac{2{,}16}{\lambda^2}\right), \\ H_{p+P} = \dfrac{p l^2}{8f}\left[0{,}47 - 1{,}1\dfrac{\lambda}{100} + \left(\dfrac{\lambda}{100}\right)^2\right] + \dfrac{Pl}{f}\,0{,}1875\,. \end{cases}$$

Die maximale Querkraft für $\xi = 0$ und $\xi = 0{,}2$ mit zugehöriger Horizontalkraft wird

$$\text{(7c)} \quad \begin{cases} Q_{\xi=0} = P + \dfrac{pl}{\lambda}\left(1 - \dfrac{2{,}2}{\lambda}\right) \\ H_{p+P} = \dfrac{p l^2}{8f}\left(\dfrac{1{,}35}{\lambda} - \dfrac{45}{\lambda^4}\right). \end{cases}$$

$$\text{(7d)} \quad \begin{cases} Q_{\xi=0,2} = 0{,}5\,P + \dfrac{pl}{\lambda}\left(0{,}5 - \dfrac{8}{\lambda^2} + \dfrac{15}{\lambda^3}\right), \\ H_{p+P} = 0{,}12\dfrac{Pl}{f} + \dfrac{p l^2}{8f}\left(0{,}3 + \dfrac{1{,}8}{\lambda} - \dfrac{5}{\lambda^2}\right). \end{cases}$$

Die entsprechenden Belastungslängen können der Tafel 1b, 1c und 3 für $\gamma = 0$ entnommen werden.

Aus Temperatur und Kabelverlängerung folgt:

$$\text{(7e)} \quad \begin{cases} H_t + \Delta H = -\left(H \varepsilon t L_t + \dfrac{H H_s L_s}{E_k F_k}\right)\dfrac{3\,l}{16 f^2 \varphi(\lambda)} \\ M_{t+\Delta H} = -\dfrac{8f}{\lambda^2}(H_t + \Delta H)\,\Phi(\lambda\xi)\,, \\ Q_{t+\Delta H} = -\dfrac{8f}{l\lambda}(H_t + \Delta H)\left(\mathrm{Tg}\dfrac{\lambda}{2}\,\mathrm{Cos}\,\lambda\xi - \mathrm{Sin}\,\lambda\xi\right). \end{cases}$$

$\varphi(\lambda)$ und $\Phi(\lambda\xi)$ können der Tafel 2 entnommen werden. $M_{\xi=0,1}$, $Q_{\xi=0,1}$, $Q_{\xi=0,5}$ $\mathrm{tg}\,\alpha$, ν^{max}, $\mathrm{tg}\,\beta$ mit den entsprechenden Horizontalkräften werden den Tafeln 1a, 3, 4, 5 und 6 für $\gamma = 0$ entnommen.

5. Korrekturmomente aus der Horizontalverschiebung *u* des Kabels.

Da die vereinfachte Differentialgleichung (1a) der Berechnung zugrunde gelegt wurde, erfahren die erhaltenen Formeln und Zahlenwerte kleine Korrekturen, die durch Iteration gefunden werden können. Die Bedingung für das Gleichgewicht in senkrechter Richtung eines Brückenelementes dx ist nach Fig. 2

$$[g + p(x)]\,dx = -\,dQ - H\,[\mathrm{tg}(\psi + d\psi) - \mathrm{tg}\,\psi] = -\,dQ - H\,d\,\mathrm{tg}\,\psi\,.$$

Hier ist $dQ = -\,\frac{JE}{l^4}\,v''''\,dx$,

$$\mathrm{tg}\,\psi = \frac{dy + dv}{dx + du} = \frac{1}{l}\left(y' + v' - \frac{y'\,u'}{l}\right),$$

Aus dem geometrischen Zusammenhang (Fig. 3)

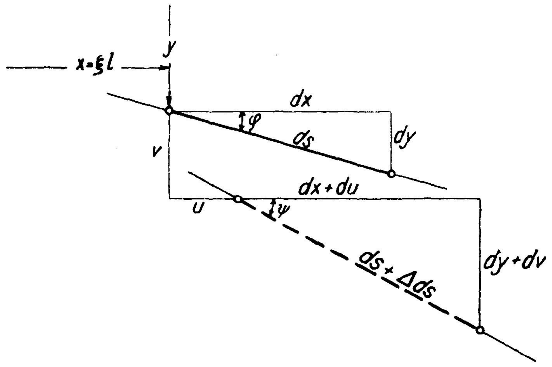


Fig. 3

Kabelelement ds mit zugehörigen Verschiebungen.

Elément de câble ds avec déplacements correspondants.

Cable element ds with corresponding displacements.

$(ds + \Delta ds)^2 = (dx + du)^2 + (dy + dv)^2$ entnehmen wir $u' \approx \frac{y'\,v'}{l}$ und mit $H = H_g + H_s$, $gl^2 + H_g y'' = 0$ erhalten wir die genaue Gleichung zur Bestimmung von $p(x)$.

$$p(x) = \frac{JE}{l^4}\,v'''' - \frac{H}{l^4}\,(l^2 v'' + v'' y'^2 + 2\,v' y' y'') - H_s\,\frac{y''}{l^2}\,. \tag{8a}$$

Führen wir die aus der Differentialgleichung (1a) gefundene Durchbiegung nach Gl. (1c) in Gl. (8a) ein, so erhalten wir, da

$$p = \frac{JE}{l^4}\,v'''' - \frac{H v''}{l^2} - H_s\,\frac{y''}{l^2}$$

(p ist die gleichmäßig verteilte Belastung), folgende Korrekturbelastung

$$\Delta p = p - p(x) = \frac{H}{l^4}\,(v'' y'^2 + 2\,v' y' y'')\,. \tag{8b}$$

Diese kleine Korrekturbelastung kann wieder in die vereinfachte Differentialgleichung (1a) eingeführt werden, und wir erhalten so das Korrekturmoment. Dies kann in den Seitenfeldern bis zu 10% des durch Gl. (1a) bestimmten Momentes betragen und kann darum nicht vernachlässigt werden. Die Korrekturen für die Winkeländerungen, Durchbiegungen und die Querkraft Q sind ohne praktische Bedeutung und werden hier nicht ausgewertet.

Im Mittelfeld ist die Umgebung des betrachteten Momentpunktes $v' \approx 0$ für die Belastung, die dem Maximalmoment entspricht. Die Korrekturlast Δp_0 im Momentpunkt ergibt darum mit guter Annäherung:

$$\Delta p_0 = \frac{H}{l^4}\,v'' y'^2 = -\,\frac{\lambda^2}{l^2}\,M\,\frac{16 f^2}{l^2}\,(1 - 2\xi)^2\,,$$

da $v'' = -\,\frac{M l^2}{JE}$ und $y' = 4f\,(1 - 2\xi)$.

Die auftretende Korrekturlast Δp wird durch eine äquivalente, gleichmäßig verteilte Streckenlast Δp_e ersetzt, so daß das Moment aus Δp_e gleich dem Korrekturmoment wird. Da das Korrekturmoment klein ist, kann Δp_e mit grober Annäherung bestimmt werden. Es kann darum von der Einwirkung der Seitenfelder abgesehen werden ($\gamma = 0$) und mittels numerischer Summation wird für eine Einzellast P in $\xi = 0{,}2$, $\Delta p_e = \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{\lambda} - \frac{5}{\lambda^2}\right) \Delta p_0$ erhalten. Diese Streckenlast wird in Gl. (7a) eingeführt und wir erhalten für eine Einzellast P in $\xi = 0{,}2$

$$\Delta M_P = -M_P \frac{5{,}76 f^2}{l^2} \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{\lambda} - \frac{5}{\lambda^2}\right)\left(0{,}939 - \frac{5{,}18}{\lambda} + \frac{8{,}84}{\lambda^2}\right)$$

oder

$$\Delta M_P = -M_P \left(\frac{f}{l}\right)^2 \left(3{,}8 - \frac{11}{\lambda}\right). \tag{8c}$$

Für die Streckenlast p ist $\Delta p_e = \left(1 + \frac{0{,}9}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1{,}3}{\lambda}\right) \Delta p_0$, und wir erhalten in ähnlicher Weise wie oben das Korrekturmoment in $\xi = 0{,}2$

$$\Delta M_p = -M_p \left(\frac{f}{l}\right)^2 \left(5{,}8 - \frac{12}{\lambda} - \frac{24}{\lambda^2}\right). \tag{8d}$$

M_P und M_p sind die nach Gl. (7a) berechneten oder aus Tafel 1b entnommenen Momente.

Da M proportional Δp_0 ist, können die Korrekturmomente aus $\Delta M_{\xi=0,2}$ errechnet werden zu

$$\Delta M_\xi = \left(\frac{1 - 2\xi}{0{,}6}\right)^2 \Delta M_{\xi=0,2}.$$

Wie hieraus hervorgeht, ist $\Delta M = 0$ für $\xi = 0{,}5$. Die Korrektur in H_p aus Δp ist ohne jede Bedeutung.

In den Seitenfeldern entsteht das Maximalmoment in Feldmitte. Die Zusatzbelastung Δp wird nach Gl. (8b) bestimmt. Es kann hier das zweite Glied nicht vernachlässigt werden. Mittels numerischer Summation kann das Korrekturmoment in derselben Form wie im Mittelfeld erhalten werden. Für eine Einzellast P in Feldmitte ergibt sich in dieser Weise

$$\Delta M_P = -M_P \left(\frac{h}{l_1}\right)^2 \left(0{,}53 - \frac{0{,}34}{\lambda_1}\right). \tag{8e}$$

Für die gleichmäßig verteilte Belastung erhalten wir für Feldmitte $\xi = 0{,}5$

$$\Delta M_p = -M_p \left(\frac{h}{l_1}\right)^2 \left(1{,}1 - \frac{1{,}8}{\lambda_1}\right). \tag{8f}$$

Für $\xi = 0{,}25$ (ξ vom Turm aus gerechnet) ist für gleichmäßig verteilte Belastung

$$\Delta M_p = -M_p \left(\frac{h}{l_1}\right)^2 \left(2{,}2 - \frac{5{,}5}{\lambda_1}\right)$$

und für $\xi = 0{,}75$ $\quad \Delta M_p = -M_p \left(\frac{h}{l_1}\right)^2 0{,}32.$

M_P und M_p sind die nach den Gl. (3e) und (3b) berechneten Momente.

Beispiel 1a.

Für die in Beispiel 1 behandelte Hängebrücke wird das Korrekturmoment aus der Horizontalverschiebung der Kabel für $\xi = 0{,}2$ im Mittelfeld nach Gl. (8d) und (8c)

$$\Delta M_p = -590 \left(\frac{22}{220}\right)^2 \left(5{,}8 - \frac{12}{12{,}33} - \frac{24}{12{,}33^2}\right) = -27 \text{ tm}$$

$$\Delta M_P = -339 \left(\frac{22}{220}\right)^2 \left(3{,}8 - \frac{11}{12{,}33}\right) = \ldots\ldots -10 \text{ „}$$

$$\Delta M_{p+P} = -37 \text{ tm}$$

d. h. 4% des Maximalmomentes.

6. Turmberechnung und verschiedene Korrekturen.

Bei der Aufstellung der Grundgleichungen wurde vorausgesetzt, daß die Kabel sich am Turmkopf frei bewegen können. Wenn die Kabel im Turmkopf befestigt sind, entstehen in den Seitenfeldern kleine Korrekturmomente im Versteifungsträger und bei eingespannten Türmen auch Turmmomente, die bei der Bemessung der Türme berücksichtigt werden müssen. Bei den Türmen selbst wird gewöhnlich die Temperaturänderung nicht berücksichtigt, da eine solche immer günstig wirkt. Dagegen sollen hier sowohl die Deformationen der Hängeseile und Türme infolge Normalkraft als auch die Verlängerung der Hängeseile infolge einer Temperaturänderung untersucht werden. Es wurde weiter vorausgesetzt, daß der Abstand der Hängeseile sehr klein sei, und daß die Nutzlast direkt in den Versteifungsträger geleitet wird. Keine dieser Voraussetzungen trifft ganz zu, und es entstehen dadurch kleine Korrekturen, die den schon berechneten Momenten und Horizontalkräften im Kabel hinzugefügt werden müssen.

a) *Kabel am Turmkopf befestigt.*

Gewöhnlich werden die Kabel am Turmkopf befestigt und die Türme unten eingespannt oder gelenkig gelagert. Turmkopf und Kabel erhalten hier dieselbe Horizontalverschiebung u_T, was eine Horizontalkraft H_T am Turmkopf hervorruft (u_T und H_T am Kabel positiv gegen Mittelfeld). Die Horizontalverschiebung u der Kabel wird durch die geometrische Bedingung $(ds + \Delta ds)^2 = (dx + du)^2 + (dy + dv)^2$ erhalten (Fig. 3). Hieraus folgt zur Bestimmung von u

$$du = \frac{\Delta ds}{\cos\varphi} - \frac{y'}{l} dv,$$

und die Turmverschiebung wird durch Integration über das Seitenfeld erhalten

$$u_T = \int_0^{l_1} \frac{\Delta ds}{\cos\varphi} + \frac{h + 4 f_1}{l_1} v_T - \frac{8 f_1}{l_1} \int_0^1 v_1 \, d\xi$$

v_T ist die senkrechte Turmverschiebung.

Für eine gleichmäßig verteilte Belastung p im Seitenfeld, wobei die übrigen Felder unbelastet sind, wird nach Gl. (3a, 3b, 1b und 1c)

$$M_1 = \frac{8 f_1}{\lambda_1^2} \left(\frac{p l^2}{8 f} - H_s\right) \Phi(\lambda_1 \xi),$$

$$v_1 = \frac{1}{H}\left(\frac{p l_1^2}{2} - 4 f_1 H_s\right)\left(\xi - \xi^2 - \frac{2}{\lambda_1^2}\Phi_1\right).$$

Mit $\Delta ds = \frac{H_s}{E_k F_k}\frac{dx}{\cos^2\varphi} + \frac{\varepsilon t dx}{\cos\varphi}$ folgt durch Einsetzen und Auswertung der Integrale:

(9 a) $$u_T = \frac{16 f_1^2 \varphi(\lambda_1)}{3 l_1 H}\left(H_s - \frac{p l^2}{8 f}\right) + \frac{H_s l_1}{E_k F_k}\left(1 + \frac{1{,}5\, h^2 + 8 f_1^2}{l_1^2}\right) + \varepsilon t l_1\left(1 + \frac{h^2 + 5{,}3 f_1^2}{l_1^2}\right)$$

$$H_s = H_p + H_t + \Delta H + H_T.$$

Hier ist zunächst H_T nicht bekannt, und es wird bei der ersten Berechnung von u_T $H_T = 0$ eingeführt. Aus der Bedingung, daß die Turmkopfverschiebung gleich u_T sein soll, entnehmen wir den Turmbedingungen

$$H_T = -\varkappa u_T.$$

Für eine senkrechte Turmbelastung $N = H(\operatorname{tg}\varphi_s + \operatorname{tg}\varphi_m)$, ($\varphi_s$ und φ_m sind die Neigungswinkel der Kabel am Turm), eine Turmhöhe h_T und gelenkig gelagerte Türme ist

$$\varkappa = -\frac{N}{h_T}.$$

Bei eingespannten Türmen mit einer mittleren Steifigkeit $J_T E_T$ wird

$$\varkappa = \frac{N}{h_T}\frac{1}{\frac{\operatorname{tg}\varrho}{\varrho} - 1}, \qquad \varrho = \sqrt{\frac{N h_T^2}{J_T E_T}}.$$

Für $\varrho = \frac{\pi}{2}$ ist $\varkappa = 0$ und auch $H_T = 0$. Daraus folgt $N = \frac{\pi^2 J_T E_T}{4 h_T^2}$ d. h. der Wert der Knickkraft für freie Auskragung der Türme. Für kleinere Werte von ϱ ist $\varkappa$ positiv und für größere Werte negativ. Nachdem $H_T = -\varkappa u_T$ bestimmt ist, kann H_T in Gl. (9a) eingesetzt und ein verbesserter Wert für u_T gefunden werden. Die Berechnung ist stark konvergent.

Die Gl. (9a) gelten auch für ein unbelastetes Seitenfeld unter Belastung der übrigen Felder. In letzterem Fall muß nur $p = 0$ eingesetzt werden.

Das Korrekturmoment des Versteifungsträgers im belasteten Seitenfeld wird

$$\Delta M_T = -\frac{8 f_1}{\lambda_1^2} H_T \Phi(\lambda_1 \xi)$$

oder

(9 b) $$\Delta M_T = -M_1 \frac{k}{1 + k},$$

wo $$k = \frac{16}{3}\frac{\varkappa f_1^2}{H l_1}\varphi(\lambda_1)$$

und M_1 das schon berechnete Moment im Seitenfeld ist.

Dieser Ausdruck gilt auch für das Minimalmoment und für Einzellasten. Bei Belastung des Mittelfeldes ist die Änderung der Horizontalkraft hier

$$\Delta H_{p+P} = H_{p+P} \frac{2\gamma k}{1+k},$$

und das zugehörige Moment des Versteifungsträgers im Mittelfeld wird

$$\Delta M_T = -\frac{8f}{\lambda^2} \Delta H_{p+P} \Phi(\lambda\xi).$$

Da sowohl γ als k sehr kleine Größen sind, ist mit guter Annäherung für das Mittelfeld

$$\Delta M_T = 0.$$

Die maximale Turmverschiebung gegen die Verankerung entsteht durch Vollbelastung in einem Seitenfeld und einer Temperaturänderung $-t$ im Kabel. Die maximale Verschiebung gegen das Mittelfeld hin wird durch Vollast des Mittelfeldes und des zweiten Seitenfeldes mit einer Temperaturänderung $+t$ im Kabel erhalten. Diese letzte Verschiebung ist auch numerisch die größte, da hier die Verlängerung der Kabel infolge der Normalkraft am größten ist und zu den anderen Verschiebungen addiert wird.

Bei der Berechnung eingespannter Türme muß $\varkappa$ genau bestimmt werden, da H_T und die Turmmomente zu $\varkappa$ proportional sind. Zu diesen Turmmomenten in der Längsrichtung kommen die Windmomente in Querrichtung der Brücke.

Für die Bronx-Whitestone-Brücke ist: $f_1 = 6{,}4$ m, $l_1 = 224$ m, $h_T = 115$ m, $H \approx 9000$ t, $N = 8500$ t, $J_T E_T = 5 \cdot 10^7$ tm² (geschätzt), $E_k F_k = 4 \cdot 10^6$ t. Aus der Tafel 2, $\varphi(11) \approx 1$.

Die Türme sind eingespannt und es wird

$$\varrho = \sqrt{\frac{N h_T^2}{J_T E_T}} = \frac{8500 \cdot 115^2}{5 \cdot 10^7} = 1{,}5,$$

$$\varkappa = \frac{N}{h_T} \frac{1}{\frac{\operatorname{tg}\varrho}{\varrho} - 1} = \frac{8500}{115} \frac{1}{\frac{\operatorname{tg} 1{,}5}{1{,}5} - 1} = 8{,}7,$$

$$k = \frac{16}{3} \frac{\varkappa f_1^2}{H l_1} \varphi(\lambda_1) = \frac{16}{3} \frac{8{,}7 \cdot 6{,}4^2}{9000 \cdot 224} 1 = \frac{5700}{6050 \cdot 10^3} = 0{,}95 \cdot 10^{-3} \approx 0.$$

d. h. $\Delta M_T \approx 0$ sowohl im Seitenfeld als auch im Mittelfeld. Bei der Belastung des Seitenfeldes mit $p = 2{,}23$ t/m und einer Temperaturänderung von -30^0 wird

$$\left(H_g = \frac{8{,}19 \cdot 701^2}{8 \cdot 61} = 8100 \text{ t}\right)$$

$$H_s = \frac{2{,}23 \cdot 701^2}{8 \cdot 62} \cdot \frac{0{,}035}{1{,}07} + 8255 \cdot 30 \cdot 10^{-5} \cdot 1215 \frac{701}{62^2} \cdot \frac{3}{16 \cdot 1{,}07} -$$

$$- \frac{8255 \cdot 155}{4 \cdot 10^6} \cdot 1250 \frac{701}{62^2} \frac{3}{16 \cdot 107} = 72 + 96 - 13 = 155 \text{ t}.$$

$$u_T = \frac{16}{3} \frac{6{,}4^2}{8255 \cdot 224} \left(155 - \frac{2{,}23 \cdot 701^2}{8 \cdot 62}\right) + \frac{155 \cdot 224}{4 \cdot 10^6} \left(1 + \frac{1{,}5 \cdot 62^2 + 8 \cdot 6{,}4^2}{224^2}\right) -$$

$$- 30 \cdot 10^{-5} \cdot 224 \left(1 + \frac{62^2 + 5{,}3 \cdot 6{,}4^2}{224^2}\right) = -0{,}24 + 0{,}01 - 0{,}07 = -0{,}30 \text{ m}.$$

$H_T = 0{,}30 \cdot 8{,}7 = -2{,}6$ t.

Bei Belastung des Mittelfeldes und des zweiten Seitenfeldes mit einer Temperaturänderung $+30^0$ wird $H_s = 2135 - 116 - 182 = 1837$.

$$u_T = \frac{16}{3}\,\frac{6{,}4^2 \cdot 1837}{9937 \cdot 224} + \frac{1837 \cdot 224}{4 \cdot 10^6} \cdot 1{,}12 + 30 \cdot 10^{-5} \cdot 224 \cdot 1{,}08 =$$

$$= 0{,}18 + 0{,}12 + 0{,}07 = 0{,}37 \text{ m}.$$

$$H_T = -0{,}37 \cdot 8{,}7 = -3{,}2 \text{ t}.$$

b) *Verlängerung der Hängeseile.*

Aus der Verlängerung der Hängeseile entsteht am Turm zwischen den Versteifungsträgern und den Auflagern eine Trennung, deren Größe wir mit v_0 bezeichnen wollen. Diese Trennung muß rückgängig gemacht werden, und es entsteht hierdurch im Mittelfeld eine Horizontalkraft H_v im Kabel mit dem zugehörigen Moment nach Gl. (1b)

$$\Delta M_{vo} = -\frac{8 f H_v}{\lambda^2}\,\Phi(\lambda\xi).$$

Durch zweimalige Integration der Gleichung (1c) wird die Durchbiegung v erhalten. Die Bedingung der Horizontalverschiebung $\int\limits_{(k)} v dx = 0$ ergibt

$$H_v = \frac{3 H v_0}{4 f (1 + 2\gamma)\,\varphi(\lambda)}.$$

Oben eingesetzt wird das Korrekturmoment im Mittelfeld

$$\Delta M_{vo} = \frac{6 H v_0}{\lambda^2 (1 + 2\gamma)\,\varphi(\lambda)}\,\Phi(\lambda\,\xi).$$

Da M_{v0} klein ist, können wir als gute Annäherungen $\gamma \approx 0$, $\varphi = \Phi = 1$ einführen, und wir erhalten für das Mittelfeld ein konstantes Korrekturmoment

(9 c) $$\Delta M_{vo} = \frac{6 H}{\lambda^2}\,v_0.$$

Wenn die Verlängerung v_0 an beiden Türmen auftritt, wird das Moment

$$\Delta M_{vo} = \frac{12 H}{\lambda^2}\,v_0.$$

Das Korrekturmoment ist der Spannweite proportional, und für das Seitenfeld erhalten wir

(9 d) $$\Delta M_{vo} = \frac{l_1}{l}\,\frac{6 H v_0}{\lambda^2 (1 + 2\gamma)\,\varphi(\lambda)}\,\Phi(\lambda_1\xi).$$

Für die Bronx-Whitestone-Brücke, wo $v_0 = 0{,}17$ m, $H = 9000$ t und $\lambda = 36$ ist, wird $\Delta M_{v0} = \frac{6 \cdot 9000}{36^2} \cdot 0{,}17 = 7{,}1$ tm, d. h. 1 % des Maximalmomentes. Bei kleineren Brücken ist ΔM_{v0} ohne Bedeutung.

c) *Zusatzmomente infolge der Lastübertragung aus den Hängeseilen.*

Bei der Berechnung des Versteifungsträgers ist eine durchlaufende Aufhängung und eine direkte Lastübertragung vorausgesetzt. Gewöhnlich wird die Belastung durch die Querträger übertragen, die an den Hängeseilen aufgehängt sind, und die Versteifungsträger sind an den Querträgern befestigt. In diesem Fall erhalten die Versteifungsträger nur zusätzliche Momente aus Eigengewicht und werden für diese Belastung als Durchlaufträger auf starren Stützen berechnet. Bei kleineren Brücken können die Versteifungsträger gleichzeitig als Längsträger zwischen den Aufhängepunkten dienen und werden hier als Durchlaufbalken auf starren Stützen mit der gesamten Fahrbahnbelastung berechnet.

Zum Zweck der Übersicht über die möglichen Grenzen der Festwerte λ und γ sind schließlich in Tafel 11 die Abmessungen einiger amerikanischer und norwegischer Hängebrücken zusammengestellt.

Tafel 11. Abmessungen und Festwerte einiger amerikanischer und norwegischer Hängebrücken.

Brücken	l m	$\frac{l_1}{l_2}$ m	$\frac{f}{l}$	J m⁴	J_1 m⁴	$\lambda = l\sqrt{\frac{H}{JE}}$	$\lambda_1 = l_1\sqrt{\frac{H}{J_1 E}}$	γ
Tacoma Br.[1]	853	335	0,083	0,059	0 059	64	25	0,06
Bronx Whitestone Br.[2] .	701	224	0,088	0,156	0,128	36	11	0,035
George Washington Br.[3]	1067	186 198	0,093	2,0	2,0	35	6	0,005
Golden Gate Br. . . .	1280	343	0,113	2,6	1,67	26	9	0,018
Mount Hope Br. . . .	362	152	0,10	0,255	0,249	7	3	0,040
Maumee River Br. . .	237	70	0,123	0,156	0,132	7	2	0,01
Fyksesund Br.[4] . . .	230	0	0,127	0,001	0	36	0	0
Framnes Br.[4]	150	0	0,123	0,0013	0	15	0	0

[1] Bei starkem Wind (22 m/s) eingestürzt.
[2] Nachträglich gegen Schwingungen mit Schrägseilen ausgesteift.
[3] Die angegebenen Werte für J, λ und γ entsprechen dem endgültigen Ausbau. Im 1. Ausbau fehlt der Versteifungsträger ganz.
[4] Einfeldrige Hängebrücken.

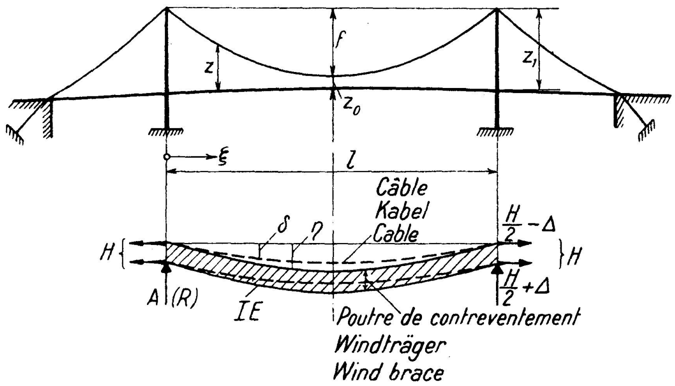
TEIL II. HORIZONTALE BELASTUNG.

1. Aufstellen der Differentialgleichung und formale Lösung durch Reihen.

Die horizontale Belastung aus Seitenwind kann als gleichmäßig verteilt über die ganze Brückenlänge angesehen werden. Die Windkräfte werden in Funktion der Steifigkeit EI des Windverbandes, teilweise durch die Kabel zum Turmkopf, teilweise durch die Windverbände zum Turmfuß abgeleitet. Wo die Windaussteifung in der Fahrbahn ganz fehlt, werden alle Windkräfte durch die Kabel zum Turmkopf übertragen, und wir erhalten hier das Kostenminimum. Selten wird man dies ausnützen können, da man, um unangenehme Schwingungen zu vermeiden, eine gewisse Seitensteifigkeit der Fahrbahn anstreben muß.

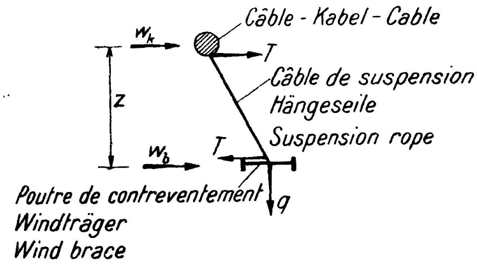
Die Lösung des Windproblems führt zu zwei gekoppelten linearen Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten [1] [2] [3]; die Integration muß darum mittels Reihen durchgeführt werden. Wir werden hier zeigen, daß man durch geeignete Wahl der Reihen i. A. einfache explizite Formelausdrücke angeben kann, bzw. immer mit zwei Reihengliedern auskommt, und es wird für diesen Fall eine Koeffiziententafel angegeben.

In den Außenfeldern dreifeldriger Hängebrücken ist die entlastende Wirkung der Kabel ohne Bedeutung, und wir können uns darum auf die Untersuchung des einfeldrigen frei aufliegenden Windverbandes beschränken (Fig. 4).



Kabel- und Windverbandverschiebungen.
Déplacements des câbles et des poutres de contreventement.
Displacements of cables and wind-bracing.

Fig. 4



Belastungen des Kabels und des Windverbandes aus Wind.
Charges des câbles et des contreventements dues au vent.
Loads on cables and wind-bracing caused by wind.

Fig. 5

Das Gleichgewicht in horizontaler Richtung eines Brückenelementes von der Länge $dx = 1$ ergibt für die Kabel

(10a) $$H\,\delta^{II} = -\,w_k - T, \quad \text{wo} \quad \frac{d^2 f}{dx^2} = f^{II}$$

und für die Fahrbahn

(10b) $$I E\,\eta^{IV} = w_b - T.$$

Hier ist H die Horizontalkraft in beiden Kabeln

$H = \dfrac{q+k}{8\,f}\,l^2,$
q = Gesamtgewicht der Fahrbahn,
k = Gewicht der Kabel, Hängeseile usw.,
T = Horizontale Rückhaltekraft aus der Schiefstellung der Hängeseile,
w_t = Gleichmäßig verteilte Windbelastung auf die Fahrbahn,
w_k = Gleichmäßig verteilte Windbelastung auf alle Kabel,
$w = w_k + w_t$,
δ = Kabelverschiebung, η = Windverbandverschiebung.

[1] L. S. Moisseiff og F. Lienhard: Suspension Bridges under the Action of Lateral Forces. Trans. Am. Soc. Civ. Eng. 1933, S. 1080.
[2] A. Selberg: Berechnung des Verhaltens von Hängebrücken unter Windbelastung. Stahlbau 1941, H. 21/22, S. 106.
[3] O. F. Theimer: Beitrag zur Theorie der Seitensteifigkeit weitgespannter Hängebrücken. Bauingenieur 1941, H. 45/46, S. 399.

Zur Bestimmung von T besteht folgende geometrische Bedingung (Fig. 5)

$$T = \frac{q}{z}(\eta - \delta)\,. \tag{10c}$$

Aus (10a) und (10b) folgt

$$IE\eta^{IV} - H\delta^{II} = w_b + w_k = w = \frac{4w}{\pi}\sum\frac{1}{n}\sin n\pi\xi\,,\quad n = 1, 3, 5\ldots.$$

und nach zweimaliger Integration folgt:

$$IE\eta^{II} - H\delta + \frac{4wl^2}{\pi^3}\sum\frac{1}{n^3}\sin n\pi\xi = 0\,. \tag{10d}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung muß mittels Reihen durchgeführt werden. Um die bestmögliche Konvergenz zu erzielen, wählen wir zT als Unbekannte und führen die Reihe in folgender Form ein

$$\frac{zT}{q} = \frac{f}{k+q}\sum a_n \sin n\pi\xi\,, \tag{10e}$$

wo a_n die unbekannten Koeffizienten sind. Gl. (10e) wird in Gl. (10c) eingesetzt:

$$\eta = \delta + \frac{zT}{q} = \delta + \frac{f}{k+q}\sum a_n \sin n\pi\xi\,. \tag{10f}$$

Diese Gleichung hat konstante Koeffizienten, und es müssen δ und η folgende Form haben:

$$\delta = \sum A_n \sin n\pi\xi\,,$$
$$\eta = \sum B_n \sin n\pi\xi\,.$$

Dies in Gl. (10f) und (10d) eingesetzt ergibt

$$A_n = \frac{l^2}{8H}\,\frac{\frac{32\alpha w}{n^3\pi^3} - n^2 a_n}{n^2+\alpha}\,,\qquad \alpha = \frac{Hl^2}{\pi^2 IE}\,.$$

Damit wird

$$\delta = \frac{l^2}{8H}\sum\frac{\frac{32\alpha w}{n^3\pi^3} - n^2 a_n}{n^2+\alpha}\sin n\pi\xi\,, \tag{11a}$$

$$\eta = \frac{\alpha l^2}{8H}\sum\frac{\frac{32w}{n^3\pi^3} + a_n}{n^2+\alpha}\sin n\pi\xi\,, \tag{11b}$$

$$M = \frac{l^2}{8}\sum\frac{\frac{32w}{n^3\pi^3} + a_n}{n^2+\alpha}\,n^2\sin n\pi\xi\,, \tag{11c}$$

$$Q = \frac{dM}{dx} = \frac{\pi l}{8}\sum\frac{\frac{32w}{n^3\pi^3} + a_n}{n^2+\alpha}\,n^3\cos n\pi\xi\,. \tag{11d}$$

Zur Bestimmung der unbekannten Koeffizienten a_n wird die Gl. (10b) benützt:

$$w_b - T = IE\eta^{IV} = \frac{\pi^2}{8}\sum\frac{\frac{32w}{n^3\pi^3} + a_n}{n^2+\alpha}\,n^4\sin n\pi\xi\,.$$

Diese Gleichung wird der Reihe nach mit $\sin \pi\xi, \sin 3\pi\xi, \ldots \sin m\pi\xi\, d\xi$ multipliziert und von 0 bis 1 integriert; wir erhalten damit ebensoviele Gleichungen wie unbekannte Koeffizienten a_n. Wir führen $w_b = \sum \frac{4 w_b}{n\pi} \sin n\pi\xi$ ein, und nach Multiplikation mit $\sin m\pi\xi\, d\xi$ können die Bestimmungsgleichungen in folgender Form geschrieben werden

$$\int_0^1 T \sin m\pi\xi\, d\xi = \sum_n \int_0^1 \frac{4 w_b}{n\pi} \sin n\pi\xi \sin m\pi\xi\, d\xi \tag{11 e}$$

$$- \frac{\pi^2}{8} \sum_n \int_0^1 \frac{\frac{32 w}{n^3\pi^3} + a_n}{n^2 + \alpha} n^4 \sin n\pi\xi \sin m\pi\xi\, d\xi\,.$$

2. Angenäherte Lösung durch direkte Summation der Reihe für *M*.

Wir führen in Gl. (11c) $a_n = 0$ ein und erhalten

$$M = \frac{l^2}{8} \sum \frac{\frac{32 w}{n^3\pi^3}}{n^2 + \alpha} n^2 \sin n\pi\xi\,.$$

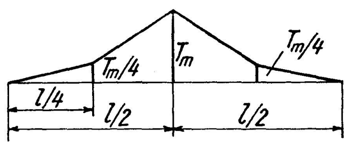
Diese Reihe konvergiert gut, und wir erhalten als Maximalwert

$$M_{max} = \frac{w l^2}{8(1+\alpha)}, \qquad \alpha = \frac{H l^2}{\pi^2 I E}\,. \tag{12a}$$

Bei steifen Brücken ($\alpha < 2$) tritt das Maximalmoment in Feldmitte auf und verschiebt sich bei weicheren Brücken gegen die Türme hin. Für die Rückhaltekraft T bei den Hängeseilen können wir den in Fig. 6 gezeigten Verlauf annehmen. Zur Bestimmung von T_m verwenden wir folgende Momentengleichung

$$\frac{w_b l^2}{8} + \frac{13}{12 \cdot 16} T_m l^2 = \frac{w l^2}{8(1+\alpha)},$$

$$T_m = \frac{24}{13}\left(\frac{w}{1+\alpha} - w_b\right).$$



Allure approximative de T
Angenäherter Verlauf von T
Approximate course of T

Fig. 6

Die horizontale Auflagerreaktion A des Windträgers am Turmfuß wird

$$A = \frac{w l}{26}\left(\frac{4 w_b}{w} + \frac{9}{1+\alpha}\right) \tag{12b}$$

und die Auflagerreaktion R der Kabel am Turmkopf

$$R = \frac{w l}{2} - A = \frac{w l}{2} - \frac{w l}{26}\left(\frac{4 w_b}{w} + \frac{9}{1+\alpha}\right). \tag{12c}$$

In entsprechender Weise wird die maximale Ausbiegung der Fahrbahn nach Gl. (11b) gefunden

$$\eta_{max} = \frac{w f}{q + k} \frac{1{,}1\,\alpha}{1+\alpha}\,. \tag{12d}$$

3. Horizontale Verschiebung des Turmkopfes.

Die horizontale Reaktion R des Turmkopfes infolge der Kabel ist durch Gl. (12c) und diejenige A der Fahrbahn durch Gl. (12b) bestimmt. Hierzu kommt die Windbelastung direkt am Turm und die Einwirkung der senkrechten Turmbelastung. Für diese Turmbelastungen wird in bekannter Weise eine relative Verschiebung δ_0 zwischen Turmkopf und Fahrbahnauflager berechnet.

Um den Einfluß dieser Verschiebung auf den Windverband zu ermitteln, wird dieser zuerst von seinem Turmauflager getrennt gedacht. Durch die Verschiebung des Turmkopfes wird der Windträger δ_0 von seinem Auflager entfernt und zunächst durch eine Belastung Δw zurück an sein Auflager gebracht. Wird diese Belastung auf Kabel und Fahrbahn im Verhältnis zu den senkrechten Belastungen verteilt, so verbleiben Kabel und Windverband in einer Ebene und der Windverband ist momentenfrei. Die Bedingung, daß die Verschiebung des Auflagers des Windverbandes gleich δ_0 ist, ergibt

$$\Delta w = \frac{k+q}{z_t}\,\delta_0$$

oder für Windverband und Kabel

$$w_b = \frac{q\,\delta_0}{z_t}\,, \qquad w_k = \frac{k\,\delta_0}{z_t}\,.$$

Mit dieser Belastung Δw wird der Windverband auf sein Auflager zurückversetzt, in dieser Stellung festgehalten und mit der gegebenen Windbelastung belastet. Da die Verschiebungsbelastung Δw nicht vorhanden ist, muß die Windlast um diesen Wert erhöht werden. Hierdurch entstehen im Windverband zusätzliche Momente, Querkräfte und Auflagerreaktionen, während die Turmkopfreaktionen R vermindert werden

$$\Delta M = M\,\frac{\Delta w}{w}\,,$$

$$\Delta A = A\,\frac{\Delta w}{w}\,,$$

$$\Delta R = -\frac{\Delta w\, l}{2} + R\,\frac{\Delta w}{w} = -A\,\frac{\Delta w}{w}\,,$$

wo M und A die ohne Verschiebung des Turmkopfes berechneten Momente und Auflagerreaktionen sind.

4. Lösung mit zwei Reihengliedern.

Mit den zwei ersten Reihengliedern ist nach Gl. (11c) und (11d)

$$M = \frac{l^2}{8}\left(\frac{1{,}032\,w + a_1}{1+\alpha}\sin\pi\xi + \frac{0{,}344\,w + 9a_3}{9+\alpha}\sin 3\pi\xi\right), \tag{13a}$$

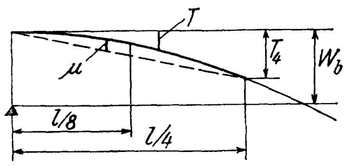
$$Q = \frac{\pi\, l}{8}\left(\frac{1{,}032\,w + a_1}{1+\alpha}\cos\pi\xi + \frac{0{,}344\,w + 9a_3}{9+\alpha}\,3\cos 3\pi\xi\right), \tag{13b}$$

$$T = \frac{q f}{(q+k)\,z}\,(a_1 \sin\pi\xi + a_3 \sin 3\pi\xi)\,. \tag{13c}$$

Ähnlich wie bei den frei aufliegenden Balken konvergiert die Reihe für Q weniger gut als diejenige für M. Da die Auflagerreaktionen A des Windverbandes und R der Kabel für die Windmomente in den Türmen maßgebend sind, müssen sie mit derselben Genauigkeit wie die Momente des Windverbandes ermittelt werden. Wir berechnen darum A aus den Größen M_4, Q_4 und T_4 für $\xi = \frac{1}{4}$. Nehmen wir an, daß der Verlauf für μ (Fig. 7) symmetrisch i. B. auf $\xi = \frac{1}{8}$ sei, so wird

$$A = Q_4 + \frac{l}{4}(w_b + \mu_{mittel}) - \frac{T_4\, l}{8},$$

$$M_4 = A\frac{l}{4} - \frac{l^2}{32}(w_b + \mu_{mittel}) - \frac{T_4\, l^2}{96}.$$



Force de retenue T de ξ = 0 à ξ = 0.25
Rückhaltekraft T von ξ = 0 bis ξ = 0.25
Restraining force T from ξ = 0 to ξ = 0.25

Fig. 7

Hieraus ergibt sich die Auflagerreaktion des Windverbandes zu

$$A = \frac{8\, M_4}{l} + \frac{T_4\, l}{24} - Q_4\,. \tag{13 d}$$

w, w_b und w_k sind hier die für die Verschiebung des Turmkopfes nach Abschnitt 3 verbesserten Belastungen aus Wind und den Verschiebungskräften Δw.

Zur Bestimmung von a_1 und a_3 erhalten wir für $m = 1$ und $m = 3$ durch Integration der Gl. (11e)

$$\left\{\begin{aligned} C_1\, a_1 - C_2\, a_3 &= \frac{2}{\beta\pi(1+\alpha)}(\alpha\, w_b - w_k - 0{,}97\, a_1)\,, \\ -C_2\, a_1 + C_3\, a_3 &= \frac{2}{3\pi\beta(9+\alpha)}(\alpha\, w_b - 9\, w_k - 235{,}5\, a_3)\,. \end{aligned}\right. \tag{13 e}$$

Hier ist $\beta = \frac{q f}{(q+k) z_0}$, $\alpha = \frac{H l^2}{\pi^2 I E}$; C_1, C_2 und C_3 können für verschiedene Werte von $\frac{z_0}{z_1 - z_0}$ (vergl. Fig. 4) der Tafel 12 entnommen werden.

Tafel 12.

$\frac{z_0}{z_1 - z_0}$	C_1	C_2	C_3
0,010	0,1275	0,0952	0,09937
0,015	0,1524	0,1075	0,1157
0,020	0,1717	0,1155	0,1281
0,025	0,1876	0,1210	0,1381
0,030	0,2010	0,1248	0.1466
0,035	0,2126	0,1275	0,1541
0,040	0,2229	0,1294	0,1607
0,050	0,2405	0,1315	0,1723
0,060	0,2552	0,1323	0,1823
0,070	0,2678	0,1323	0,1911
0,080	0,2787	0,1316	0,1991
0,090	0,2884	0,1307	0,2065
0,100	0,2971	0,1294	0,2133
0,110	0,3049	0,1280	0,2197
0,120	0,3120	0,1265	0,2256
0,130	0,3185	0,1249	0,2313

Beispiel 2.

Als Beispiel untersuchen wir das Mittelfeld einer Hängebrücke mit folgenden Abmessungen und Belastungen:

$$l = 1200 \text{ m}, \quad f = 150 \text{ m}, \quad z_0 = 3 \text{ m}, \quad z_1 = 153 \text{ m},$$
$$IE = 2 \cdot 10^9 \text{ tm}^2, \quad k = 9 \text{ t/m}, \quad q = 32{,}75 \text{ t/m},$$
$$w_k = 0{,}2 \text{ t/m}, \quad w_b = 1{,}8 \text{ t/m}, \quad w = 2 \text{ t/m}.$$

Die gesamte Kabelkraft wird

$$H = \frac{k+q}{8f} l^2 = \frac{9 + 32{,}75}{8 \cdot 150} \cdot 1200^2 = 50000 \text{ t},$$

$$\alpha = \frac{H l^2}{\pi^2 IE} = \frac{50000 \cdot 1200^2}{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^9} = 3{,}66.$$

Die zwei Reihenglieder a_1 und a_3 entnehmen wir der Tafel 12 für

$$\frac{z_0}{z_1 - z_0} = \frac{3}{153 - 3} = 0{,}02,$$

$$C_1 = 0{,}1717, \quad C_2 = 0{,}1155, \quad C_3 = 0{,}1281.$$

Aus Gl. (13e)

$$\begin{cases} 0{,}1717\, a_1 - 0{,}1155\, a_3 = 0{,}02225 - 0{,}00338\, a_1 \\ -0{,}1155\, a_1 + 0{,}1281\, a_3 = 0{,}00205 - 0{,}10066\, a_3 \end{cases}$$

ergibt sich $a_1 = 0{,}1994$ und $a_3 = 0{,}1097$.

Das Moment im Windverband ist nach Gl. (13a)

$$M = \frac{1200^2}{8} (0{,}4857 \sin \pi \xi + 0{,}1323 \sin 3 \pi \xi).$$

Der Momentenverlauf ist in Tafel 13 zusammengestellt.

Tafel 13. Momentenverlauf im Windverband.

ξ	M (nach Gl. 13a) tm	M (nach Theimer) tm	Abweichung in %
0	0	0	0
0,2	74 000	72 600	+ 1,9
0,3	78 100	77 800	— 0,9
0,4	69 200	70 600	— 2,0
0,5	63 600	63 700	— 0,2

Die Auflagerreaktionen sind nach Gl. (13d)

$$A = 1200 \left(\frac{1{,}8}{24} + 0{,}393 \cdot 0{,}4857 + 1{,}21 \cdot 0{,}1323 \right) = 511 \text{ t} \quad (\text{Theimer}, A = 506 \text{ t})$$

$$R = 2 \cdot 600 - 511 = 689 \text{ t} \quad (\text{Theimer}, R = 694 \text{ t}).$$

Die Ausbiegung der Fahrbahn wird nach Gl. (11b)

$$\eta = \frac{3{,}66 \cdot 1200^2}{8 \cdot 50000} (0{,}4857 \sin \pi \xi + 0{,}0147 \sin 3 \pi \xi),$$

$$\eta_{max} = 13{,}18 \cdot 0{,}471 = 6{,}21 \text{ m} \quad (\text{Theimer}, \ \eta_{max} = 6{,}219 \text{ m}).$$

Ohne Reihen erhalten wir nach den Gl. (12a—d)

$$M_{max} = \frac{2 \cdot 1200^2}{8(1+3{,}66)} = 77300 \text{ tm} \quad (\text{Abw. } 0{,}7\,\%),$$

$$A = \frac{2 \cdot 1200}{26}\left(\frac{4 \cdot 1{,}8}{2} + \frac{9}{1+3{,}66}\right) = 511 \text{ t} \quad (\text{Abw. } 1\,\%),$$

$$\eta_{max} = \frac{2 \cdot 150}{41{,}75}\,\frac{1{,}1 \cdot 3{,}66}{1+3{,}66} = 6{,}21 \text{ m}.$$

Da die Gurtungen des Windverbandes gewöhnlich aus den Versteifungsträgern gebildet werden, genügt es oft, die Maximalmomente zu kennen, und die Gl. (12a—d) können auch bei Hängebrücken mit weichen Windverbänden, bei denen das Maximalmoment nicht in Brückenmitte auftritt, verwendet werden.

Mit einer Verschiebung des Turmkopfes

$$\delta_0 = 0{,}725 \text{ m}$$

wird nach Gl. (13b)

$$\Delta w = \frac{(32{,}75 + 9) \cdot 0{,}725}{3 + 150} = 0{,}198 \text{ t/m}.$$

Die Erhöhung der berechneten Momente, Auflagerreaktionen und Schubkräfte im Windverband werden

$$\frac{100\,\Delta w}{w} = \frac{100 \cdot 0{,}198}{2{,}0} = 9{,}9\,\% \quad (\text{Abw.} 0{,}9\,\%).$$

Literaturverzeichnis.

1. S. Timoshenko: The Stiffness of Suspension Bridges. Proc. of Am. Soc. of Civ. Eng. 1928, S. 1464.
2. H. H. Rode: New Deflection Theory. Det Kgl Norske Videnskabs skrifter 1930, nr. 3.
3. O. Stang: Myke hengebroer på norske landeveier. Med. fra Veidirektøren 1934, nr. 11.
4. A. A. Jakkula: The Theory of the Suspension Bridge. Abh. d. I. V. B. H. 1936, Bd. 4, side 333.
5. F. Stüssi: Zur Berechnung verankerter Hängebrücken. I. V. B. H. Abhl. IV, Zürich 1936, S. 531—542.
6. J. Karol: A Partial Influence Line Procedure for Suspension Bridge Analysis by the Deflection Theory. Univ. of Ill. 1938.
7. S. Hardesty & H. E. Wessman: Preliminary Design of Suspension Bridges. Transactions 1939, S. 579.
8. F. Stüssi & E. Amstutz: Verbesserte Formänderungstheorie von Stabbogen und verankerten Hängebrücken. Schw. Bauzeitung 1940.
9. F. Stüssi: Zur allgemeinen Formänderungstheorie der verankerten Hängebrücke. Schweizerische Bauzeitung 1941.
10. A. Selberg: En lettvint beregning av hengebruer. Medd. fra Veidirektøren 1942, nr. 7.
11. — Design of Suspension Bridges. Kgl Norsk Videnskapsselskabs skrifter 1943.
12. S. O. Asplund: Teori för influenslinjer vid hängebroberegningar. Teknisk Tidskrift, Väg och Vatten, H. 12, 1942.
13. — On the Deflection Theory of Suspension Bridges. Stockholm 1943.
14. L. S. Moisseiff & F. Lienhard: Suspension Bridges under the Action of Lateral Forces. Trans. Am. Soc. Civ. Eng. 1933, S. 1080.
15. A. Selberg: Berechnung des Verhaltens von Hängebrücken unter Windbelastung. Stahlbau 1941, H. 21/22, S. 106.
16. O. F. Theimer: Beitrag zur Theorie der Seitensteifigkeit weitgespannter Hängebrücken. Bauingenieur 1941, H. 45/46, S. 399.

Zusammenfassung.

Für die Versteifungsträger der ein- und dreifeldrigen Hängebrücken werden Tafeln und geschlossene Formelausdrücke für die Maximalmomente, maximalen Querkräfte, maximalen Winkeländerungen des Versteifungsträgers und sowohl für die maximale Schiefstellung der Querträger als auch für die maximalen Durchbiegungen mit zugehörigen Horizontalkräften aus senkrechter Belastung angegeben. Es werden die Korrekturmomente aus der Horizontalverschiebung der Kabel und die Verschiebungen des Turmkopfes mit den zugehörigen Korrekturmomenten im Versteifungsträger angegeben.

Für Seitenwind wird gezeigt, daß das Maximalmoment von der einfachen Form $M = \frac{w\,l^2}{8\,(1+\alpha)}$, $\alpha = \frac{H\,l^2}{\pi^2 IE}$ ist und daß der Momentenverlauf durch so gut konvergierende Reihen angegeben werden kann, daß zwei Reihenglieder immer genügen. Die zugehörigen Koeffizienten sind in einer Zahlentafel angegeben. Das gezeigte Lösungsverfahren läßt sich leicht auf beliebige Belastungen und einen durchlaufenden Windverband ausdehnen.

Résumé.

Ce mémoire contient des tables et des formules explicites, se rapportant aux poutres raidisseuses des ponts suspendus à une et trois ouvertures; elles mettent en évidence les moments de flexion et les efforts tranchants maximaux, de même que les déviations angulaires et les forces horizontales correspondantes dues à des charges verticales. Le déplacement horizontal des câbles est également pris en considération. Les corrections à apporter aux moments de flexion, dues aux déplacements horizontaux des câbles, sont indiquées, de même que les déplacements du sommet de la tour et les corrections correspondantes des moments de flexion de la poutre raidisseuse.

Il est démontré ensuite que sous l'effet latéral du vent, le moment maximal prend la forme simple: $M = \frac{w\,l^2}{8\,(1+\alpha)}$, où $\alpha = \frac{H\,l^2}{\pi^2 IE}$; en plus, la variation du moment peut être représentée par des séries qui convergent rapidement, ce qui permet d'en considérer uniquement les deux premiers termes. Les coefficients respectifs sont indiqués dans une table numérique.

Summary.

For the bracing members of suspension bridges with one and three openings, tables and definite formulae are given for the maximum moments, maximum transverse forces and alterations in angles, with the respective horizontal forces caused by the vertical loading. The horizontal displacement of the cable is also taken into consideration. The correcting moments from the horizontal displacement of the cables are given, as well as the displacements of the head of the tower with the corresponding correcting moments in the stiffening girders.

For side winds it is shown that the maximum moment is of the simple form $M = \frac{w\,l^2}{8\,(1+\alpha)}$, $\alpha = \frac{H\,l^2}{\pi^2 IE}$, and that the course of the moments can be expressed by series which converge so rapidly that two terms of a series are always sufficient. The respective coefficients are given in a numerical table.