

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen  
**Band:** 7 (1943-1944)  
  
**Artikel:** Temperaturverlauf und Wärmespannungen in Mauern bei oscillierenden Aussentemperaturen  
**Autor:** Ritter, M.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-8005>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# **TEMPERATURVERLAUF UND WÄRMESPANNUNGEN IN MAUERN BEI OSCILLIERENDEN AUSSENTEMPERATUREN.**

OSCILLATION DE LA TEMPÉRATURE ET CONTRAINTES  
THERMIQUES DANS LES MURS SOUS L'EFFET DE TEMPÉRATURES  
EXTÉRIEURES PÉRIODIQUEMENT VARIABLES.

TEMPERATURE VARIATION AND HEAT STRESSES IN WALLS SUB-  
JECTED TO PERIODICALLY CHANGING OUTSIDE TEMPERATURE.

Prof. Dr. M. RITTER, Eidg. Techn. Hochschule, Zürich, Generalsekretär für  
Eisenbetonbau der I. V. B. H.

Anlässlich der Ausarbeitung von Berechnungsgrundlagen zur Bemessung bogenförmiger Staumauern wurde die Aufgabe behandelt, die Temperaturverteilung und die davon herrührenden Spannungen und Formänderungen in einer homogenen Mauer konstanter Stärke anzugeben, wenn sich die Temperaturen an den Oberflächen nach periodischen Gesetzen ändern. Die Lösung, die nachstehend vorgeführt wird, ergibt sich mit Hilfe der klassischen Theorie der Wärmeleitung nach FOURIER; sie gelangt zu relativ einfachen, geschlossenen Formeln, die sich leicht zahlenmäßig auswerten lassen. Wenn die Amplituden der Temperaturschwingung an den beiden Oberflächen ungleich sind, so erleidet die Mauer eine Krümmung; der entstehende Formänderungswinkel wird u. a. benötigt bei der Berechnung der sogenannten Wärmespannungen in Brücken- oder Talsperrengewölben.

## **1. Grundlagen.**

Es wird angenommen, daß die Temperaturen  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_2$  an den beiden Oberflächen mit der Zeit  $t$  ohne Phasendifferenz, aber mit verschiedenen Amplituden  $\vartheta_{10}$  und  $\vartheta_{20}$  schwingen, entsprechend den Gesetzen

$$\vartheta_1 = \vartheta_{10} \cdot \cos \frac{2\pi t}{T}, \quad \vartheta_2 = \vartheta_{20} \cdot \cos \frac{2\pi t}{T}. \quad (1)$$

Darin bezeichnet  $T$  die Periode der Schwingung, in den Zahlenrechnungen zweckmäßig in Stunden auszudrücken. Für den jährlichen Ablauf der Lufttemperatur ist  $T = 1 \text{ Jahr} = 8760 \text{ Stunden}$  zu setzen.

Die Mauer besitzt die konstante Stärke  $d$  und wird als seitlich unbegrenzt vorausgesetzt (vergl. Fig. 1). Die Temperatur  $\vartheta$  im Innern der Mauer ist dann aus Symmetriegründen nur eine Funktion des Abstandes  $x$  von der einen Oberfläche, nicht aber der andern Koordinaten (linearer Wärmefluß).

Somit gilt die klassische Differentialgleichung der Wärmeleitung<sup>1)</sup> eines Stabes, der längs der Mantelfläche keine Wärme abgibt:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}. \quad (2)$$

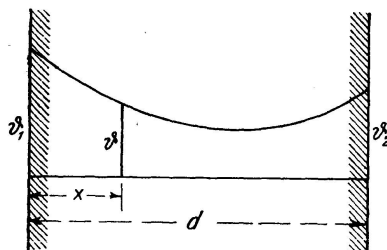


Fig. 1

Darin bezeichnet  $a$  die sogenannte Temperaturleitzahl, die sich aus der Wärmeleitzahl  $\lambda$ , der spezifischen Wärme  $c$  und dem Raumgewicht  $\gamma$  berechnen läßt. Es ist

$$a = \frac{\lambda}{c \gamma}, \quad \text{Dim.} = \frac{\text{m}^2}{\text{Std.}}$$

## 2. Temperaturverlauf.

Die Temperatur  $\vartheta$  im Abstände  $x$  von der Oberfläche, zur Zeit  $t$ , berechnet sich durch Integration der Differentialgleichung (2) und Anpassung der Integrationskonstanten an die Randbedingungen (1). Man erkennt zunächst leicht, daß die allgemeine Lösung von Gl. (2) sowohl Glieder mit  $\cos \frac{2\pi t}{T}$  als auch solche mit  $\sin \frac{2\pi t}{T}$  enthalten muß, da nur dann Gl. (2) identisch erfüllt wird. Somit kann man schreiben

$$\vartheta = \cos \frac{2\pi t}{T} \cdot f + \sin \frac{2\pi t}{T} \cdot \varphi, \quad (3)$$

worin  $f$  und  $\varphi$  Funktionen von  $x$  allein darstellen. Setzt man diese Lösung in Gl. (2) ein, so erhält man die Beziehung

$$\sin \frac{2\pi t}{T} \left( f + \frac{\varphi''}{2k^2} \right) = \cos \frac{2\pi t}{T} \left( \varphi - \frac{f''}{2k^2} \right), \quad (4)$$

worin zur Abkürzung

$$k = \sqrt{\frac{\pi}{aT}} \quad (5)$$

gesetzt ist. Damit Gl. (4) identisch, d. h. für jeden Wert  $t$  erfüllt ist, müssen die Klammerausdrücke in Gl. (4) verschwinden; daher ist

$$f = -\frac{\varphi''}{2k^2} \quad \text{und} \quad \varphi = \frac{f''}{2k^2}, \quad (6)$$

<sup>1)</sup> Für die Ableitung und die Definitionen der verschiedenen Koeffizienten vergl. die Lehrbücher der Physik, Abschnitt Wärmeleitung. Für den Bauingenieur besonders geeignet ist das ausführliche Spezialwerk von GRÖBER-ERK, Grundgesetze der Wärmeübertragung, Verlag Springer 1933.

woraus 
$$f'''' + 4k^4 f = 0. \quad (7)$$

Die allgemeine Lösung dieser totalen Differentialgleichung setzt sich aus sogenannten Produktfunktionen zusammen, das sind Produkte aus trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen; die Lösung lautet <sup>2)</sup>

$$f = A \cos kx \operatorname{Cos} kx + B \cos kx \sin kx + C \sin kx \operatorname{Cos} kx + D \sin kx \sin kx, \quad (8a)$$

worin  $A, B, C, D$  die vier Integrationskonstanten darstellen, die mit Hilfe der Randbedingungen (1) auszuwerten sind. Gl. (6) ermöglicht die Berechnung der Funktion  $\varphi$  aus  $f$ ; man findet

$$\varphi = -A \sin kx \sin kx - B \sin kx \operatorname{Cos} kx + C \cos kx \sin kx + D \cos kx \operatorname{Cos} kx \quad (8b)$$

Für  $x=0$  und  $x=d$  muß Gl. (3) in Gl. (1) übergehen, woraus sich die Integrationskonstanten wie folgt ergeben:

$$x=0, \quad f = \vartheta_{10}, \quad \varphi = 0.$$

Mit  $\sin kx = 0$ ,  $\sin kx = 0$ ,  $\cos kx = 1$ ,  $\operatorname{Cos} kx = 1$  liefern die Gl. (8)

$$f = A = \vartheta_{10}, \quad D = 0.$$

$$x=d, \quad f = \vartheta_{20}, \quad \varphi = 0.$$

Die Gl. (8) gehen für  $x=d$  über in

$$\vartheta_{20} = \vartheta_{10} \cos kd \operatorname{Cos} kd + B \cos kd \sin kd + C \sin kd \operatorname{Cos} kd,$$

$$0 = -\vartheta_{10} \sin kd \sin kd - B \sin kd \operatorname{Cos} kd + C \cos kd \sin kd;$$

die Auflösung ergibt

$$B = \frac{\vartheta_{20} \cos kd \sin kd - \vartheta_{10} \operatorname{Cos} kd \sin kd}{\operatorname{Cos}^2 kd - \cos^2 kd},$$

$$C = \frac{\vartheta_{20} \operatorname{Cos} kd \sin kd - \vartheta_{10} \cos kd \sin kd}{\operatorname{Cos}^2 kd - \cos^2 kd}.$$

Zur Vereinfachung der Berechnung führt man zweckmäßig die Verhältniszahl

$$n = \frac{\vartheta_{20}}{\vartheta_{10}}$$

ein, sowie die neuen Konstanten

$$B_0 = \frac{B}{\vartheta_{10}} \quad \text{und} \quad C_0 = \frac{C}{\vartheta_{10}}.$$

Man erhält aus  $B$  und  $C$

$$\begin{aligned} B_0 &= \sin kd \frac{n \cos kd - \operatorname{Cos} kd}{\operatorname{Cos}^2 kd - \cos^2 kd}, \\ C_0 &= \sin kd \frac{n \operatorname{Cos} kd - \cos kd}{\operatorname{Cos}^2 kd - \cos^2 kd}. \end{aligned} \quad (9)$$

Für die Funktionen  $f$  und  $\varphi$  ergeben sich jetzt aus (8) die Beziehungen

<sup>2)</sup> E. KAMKE, Differentialgleichungen, 1939.



$$\begin{aligned} f &= \vartheta_{10} (\cos kx \cos kx + B_0 \cos kx \sin kx + C_0 \sin kx \cos kx), \\ \varphi &= \vartheta_{10} (-\sin kx \sin kx - B_0 \sin kx \cos kx + C_0 \cos kx \sin kx). \end{aligned} \quad (10)$$

Nach Auswertung dieser Funktionswerte findet man den Temperaturausschlag  $\vartheta$  zur Zeit  $t$  an irgend einer Stelle der Mauer gemäß Gl. (3) zu

$$\vartheta = \cos \frac{2\pi t}{T} \cdot f + \sin \frac{2\pi t}{T} \cdot \varphi.$$

### 3. Amplitudenkurve.

Der Ausschlag  $\vartheta$  erreicht sein Maximum (Amplitude) im Zeitpunkte  $t_0$ .  
Aus

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0 = \frac{2\pi}{T} \left( -\sin \frac{2\pi t_0}{T} \cdot f + \cos \frac{2\pi t_0}{T} \cdot \varphi \right)$$

ergibt sich

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi t_0}{T} = \frac{\varphi}{f}. \quad (11)$$

Wird dieser Wert in Gl. (3) eingesetzt, so erhält man

$$\begin{aligned} \vartheta_{\max} &= \cos \frac{2\pi t_0}{T} \cdot f + \sin \frac{2\pi t_0}{T} \cdot \varphi = \frac{f + \operatorname{tg} \frac{2\pi t_0}{T} \cdot \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi t_0}{T}}} \\ \vartheta_{\max} &= \sqrt{f^2 + \varphi^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Damit läßt sich die Amplitudenkurve aus den Kurven  $f$  und  $\varphi$  leicht konstruieren; man überträgt am Fußpunkte der Ordinate  $f$  die Strecke  $\varphi$  auf die Horizontale und zieht die Diagonale, vergl. Fig. 2.

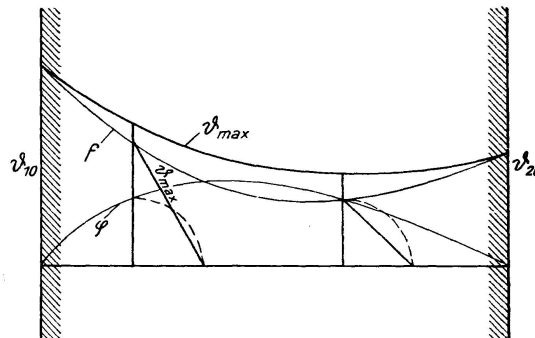


Fig. 2

Zu der Amplitudenformel (12) gelangt man auch unmittelbar mit Hilfe der Gl. (3), da sich diese leicht auf die Form bringen läßt:

$$\vartheta = \sqrt{f^2 + \varphi^2} \cdot \cos \left( \frac{2\pi t}{T} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{f} \right). \quad (12a)$$

Man erkennt, daß die Temperatur im Innern der Mauer mit der Periode  $T$  schwingt; jedoch ist gegenüber der Schwingung an der Oberfläche eine Phasendifferenz vorhanden, die von  $x$  abhängt.

#### 4. Graphische Darstellungen.

Man gewinnt die erwünschte Übersicht über den Temperaturverlauf in einer Mauer durch die zahlenmäßige Ausrechnung und vergleichende Darstellung der Amplitudenkurven  $\vartheta_{max}$  für verschiedene Mauerstärken  $d$ , Perioden  $T$  und Randbedingungen  $\vartheta_{20} : \vartheta_{10}$ . Zu den Zahlenrechnungen benützt man vorteilhaft die vorhandenen Tabellen der Kreis- und Hyperbelfunktionen mit den natürlichen Zahlen als Argument<sup>3)</sup>.

In den Figuren 3 und 4 sind die Ergebnisse der Berechnung solcher Amplitudenkurven dargestellt für die Mauerstärken  $d = 1, 2, 5, 10$  und  $20$  m und die Perioden  $T = 720$  Stunden (= 1 Monat) und  $T = 8760$  Stunden (= 1 Jahr). Die Berechnungen beziehen sich auf homogenen Beton unter Annahme folgender Materialkonstanten:

$$\begin{aligned} \text{Wärmeleitzahl} \quad \lambda &= 1,0 \frac{\text{kcal.}}{\text{m Std. Grad}}, \\ \text{Spezifische Wärme} \quad c &= 0,21 \frac{\text{kcal.}}{\text{kg Grad}}, \\ \text{Raumgewicht} \quad \gamma &= 2400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}. \end{aligned}$$

Die Temperaturleitzahl  $a$  hat somit den Wert

$$a = \frac{\lambda}{c \gamma} = \frac{1,0}{0,21 \cdot 2400} = 0,00198 \frac{\text{m}^2}{\text{Std.}},$$

und der Parameter  $k$  beträgt

$$\begin{aligned} \text{für } T = 720 \text{ Std.} \quad k &= \sqrt{\frac{\pi}{0,00198 \cdot 720}} = 1,49 \text{ m}^{-1}, \\ \text{für } T = 8760 \text{ Std.} \quad k &= \sqrt{\frac{\pi}{0,00198 \cdot 8760}} = 0,43 \text{ m}^{-1}. \end{aligned}$$

Man erkennt aus den graphischen Darstellungen, daß bei einer Mauer von 2 m Stärke und darunter im Falle einer Jahresperiode die Temperatur nahezu linear verteilt ist. Die Temperaturschwankung in der Axe sinkt aber mit zunehmender Mauerstärke wesentlich und beträgt bei einer Mauer von 20 m Stärke nur noch einen kleinen Bruchteil der Oberflächenamplitude. In den Fig. 5 und 6 sind die maximalen Amplituden in der Maueraxe in Funktion der Mauerstärke dargestellt. Im Falle der Periode  $T = 1$  Monat macht sich die Temperaturschwankung in der Mitte einer Mauer von mehr als 5 m Stärke praktisch nicht mehr geltend.

#### 5. Wärmespannungen in der freistehenden Mauer.

Der Temperaturverlauf nach Gl. (3) erzeugt in der Mauer Formänderungen, die die sogenannten Wärmespannungen zur Folge haben. Wir berechnen diese zunächst für eine freistehende Mauer, das heißt für eine Mauer, die nicht durch äußere Auflagerbedingungen in ihrer Formänderung behindert ist. Jeder Normalschnitt (Querschnitt) ist hier ein Sym-

<sup>3)</sup> K. HAYASHI, Fünfstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen, Leipzig 1921. HÜTTE I, 27. Auflage 1941, Tafel Nr. 8.

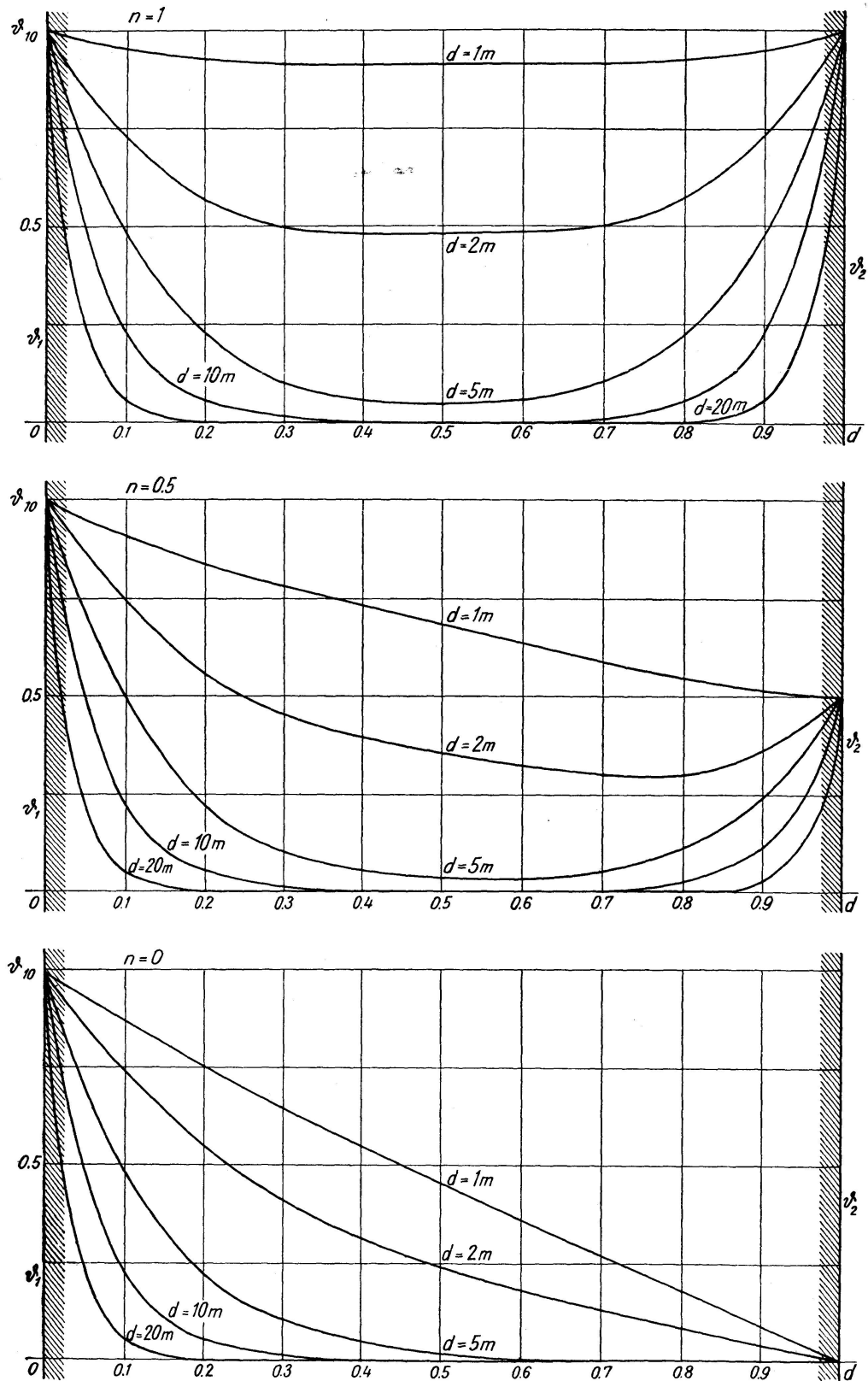


Fig. 3. Amplitudenkurven  $T=1$  Monat=720 Stunden  
 Courbes des amplitudes  $T=1$  mois=720 heures  
 Curves of amplitudes  $T=1$  month=720 hours

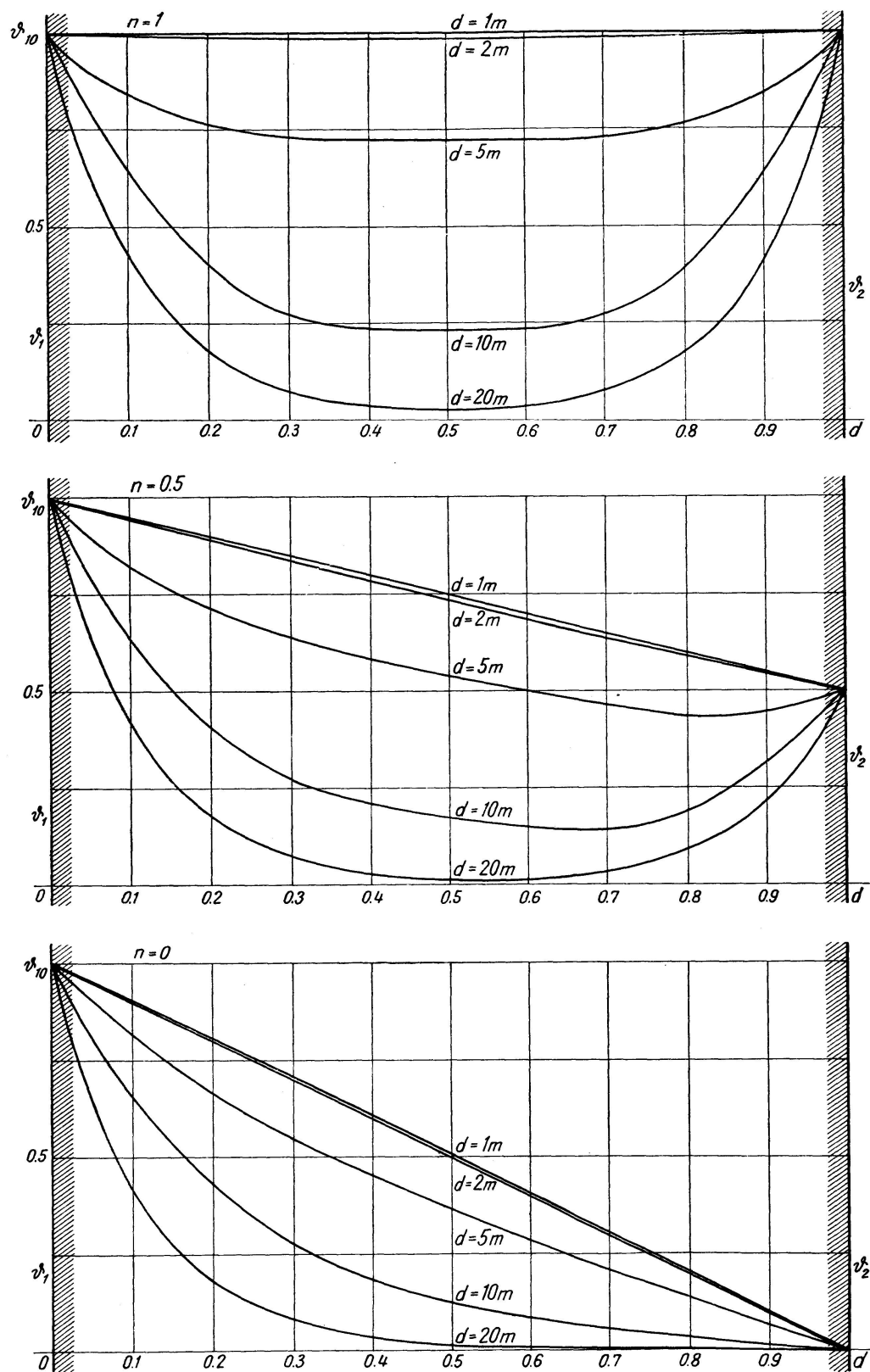


Fig. 4. Amplitudenkurven  $T=1$  Jahr = 8760 Stunden  
 Courbes des amplitudes  $T=1$  année = 8760 heures  
 Curves of amplitudes  $T=1$  year = 8760 hours

metrieschnitt, bleibt also bei der Formänderung eben und wird durch Normalspannungen, nicht aber durch Schubspannungen beansprucht. Die Wärmespannungen bilden in jedem Schnitte ein Gleichgewichtssystem (Eigenspannungen).

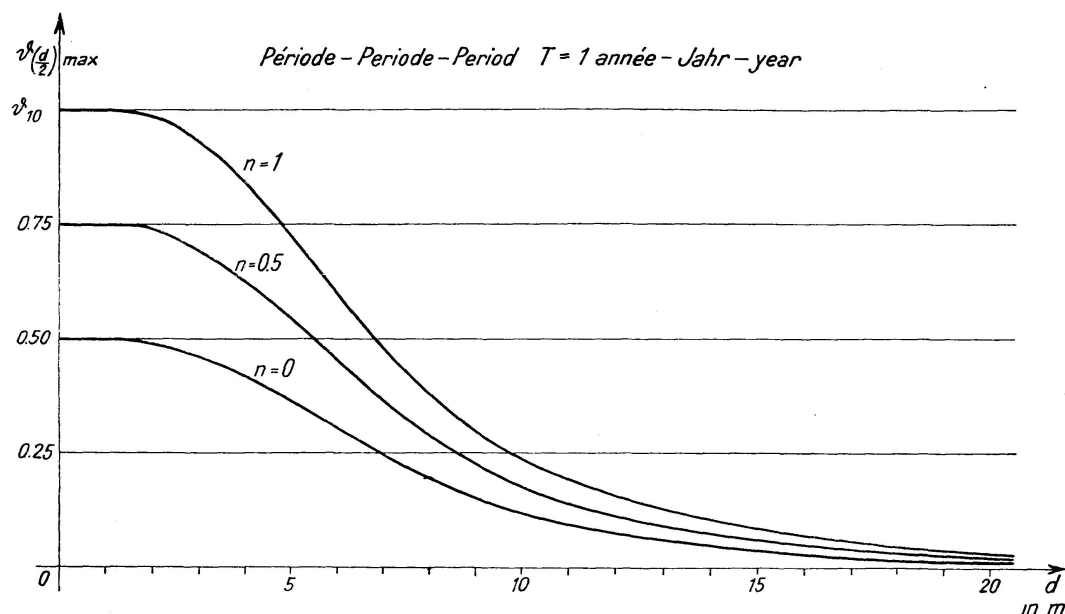


Fig. 5. Maximale Amplituden in der Maueraxe — Amplitudes maximales dans l'axe du mur  
Maximum amplitudes in axis of wall

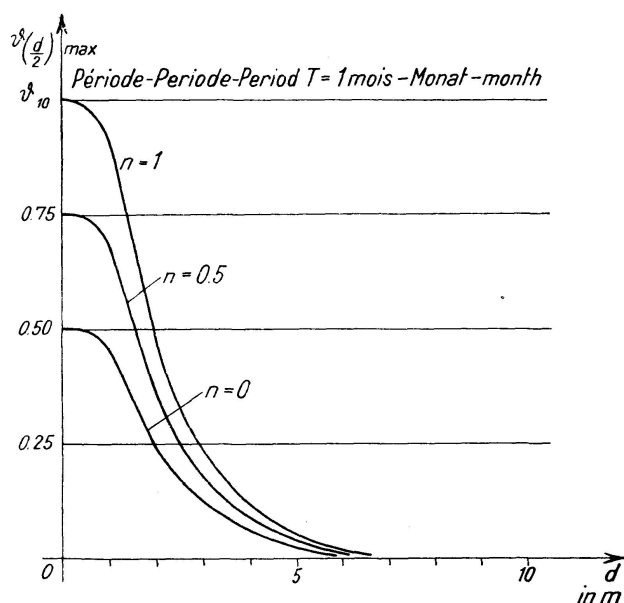


Fig. 6. Maximale Amplituden in der Maueraxe  
Amplitudes maximales dans l'axe du mur  
Maximum amplitudes in axis of wall

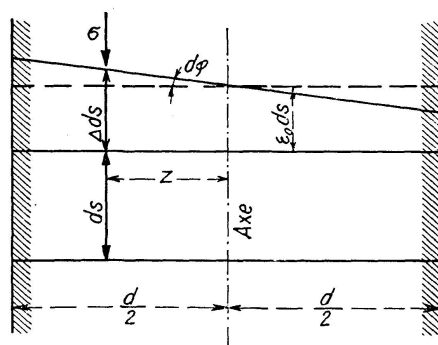


Fig. 7

Durch zwei benachbarte Querschnitte im Abstände  $ds$  wird ein Mauer-element abgegrenzt, dessen Gestalt sich mit dem Temperaturverlauf ändert und definiert ist durch den Formänderungswinkel  $d\phi$  und die Längenänderung  $\Delta ds_0 = \epsilon_0 ds$  der Schwerlinie, wobei  $\epsilon_0$  die Dehnung in der Axe be-

zeichnet. Aus Fig. 7 ergibt sich die Längenänderung einer Faser im Abstände  $z$  von der Axe zu

$$\Delta ds = \varepsilon_0 ds + z d\varphi$$

In spannungslosem Zustande würde diese Faser ihre Länge um  $\omega \vartheta ds$  ändern, unter  $\omega$  den Wärmeausdehnungskoeffizienten verstanden (für Beton  $\omega = 0,00001$ ). Die wirkliche Längenänderung ist davon verschieden, weil sie der Forderung, daß die Querschnitte bei der Deformation eben bleiben, genügen muß. Diese Bedingung wird erfüllt durch die Wärmespannungen  $\sigma$  (positiv gerechnet als Druckspannungen). Die Faser im Abstände  $z$  verlängert sich daher infolge der Temperaturerhöhung  $\vartheta$  und der Spannung  $\sigma$  um

$$\Delta ds = \omega \vartheta ds - \frac{\sigma}{E} ds.$$

Aus den beiden Beziehungen für  $\Delta ds$  berechnet sich jetzt die Spannung  $\sigma$  zu

$$\sigma = E \left( \omega \vartheta - \varepsilon_0 - z \frac{d\varphi}{ds} \right). \quad (13)$$

Die Formänderungen  $\varepsilon_0$  und  $d\varphi$  lassen sich nun leicht aus den Gleichgewichtsbedingungen für die Spannungen  $\sigma$  im Querschnitt berechnen. Sie lauten für die Breite  $b$ , ( $dF = b \cdot dz$ )

$$\int \sigma dF = Eb \int \left( \omega \vartheta - \varepsilon_0 - z \frac{d\varphi}{ds} \right) dz = 0,$$

$$\int \sigma z dF = Eb \int \left( \omega \vartheta - \varepsilon_0 - z \frac{d\varphi}{ds} \right) z dz = 0.$$

Die Integrale sind über den ganzen Querschnitt auszudehnen. Da  $z$  den Abstand der Faser von der Schwerlinie bezeichnet, so ist  $\int z dz = 0$ .

Aus der oberen Gleichgewichtsbedingung gewinnt man die Axdehnung

$$\varepsilon_0 = \frac{\int \omega \vartheta dz}{\int dz} = \frac{\omega}{d} \cdot \int \vartheta dz = \omega \cdot \vartheta_m. \quad (14)$$

Darin bezeichnet  $\vartheta_m$  den Mittelwert des Temperaturschla-  
ges  $\vartheta$  zur Zeit  $t$ ; es ist

$$\vartheta_m = \frac{1}{d} \int \vartheta dz = \frac{1}{d} \left( \cos \frac{2\pi t}{T} \cdot \int f dx + \sin \frac{2\pi t}{T} \cdot \int \varphi dx \right). \quad (15)$$

Die untere Gleichgewichtsbedingung liefert den Formänderungs-  
winkel

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\int \omega \vartheta z dz}{\int z^2 dz} = \frac{\omega}{J} \cdot \int \vartheta z dz, \quad (16)$$

worin  $J$  das Trägheitsmoment des Querschnittes für die Breite  $= 1$  bedeutet ( $1 \cdot d^3/12$ ).

Gl. (16) läßt sich wie folgt auf eine für die Anwendung geeignetere Form bringen. Die Temperaturkurve  $\vartheta$  bildet mit der Abszisse eine Fläche, deren Schwerlinie von der Axe die Entfernung  $e$  besitzt, vergl. Fig. 8. Es ist also

$$\int \vartheta z dz = e \cdot \int \vartheta dz = e \cdot d \cdot \vartheta_m, \quad (17)$$

somit 
$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\omega e d}{J} \cdot \vartheta_m = \frac{12 \omega e}{d^2} \cdot \vartheta_m. \quad (18)$$

Für die Spannung  $\sigma_c$  im Abstand  $c = z$  ergibt jetzt Gl. (13)

$$\sigma_c = E \omega \left[ \vartheta - \vartheta_m \left( 1 + \frac{e d}{J} c \right) \right]. \quad (19)$$

Der erste Summand dieser Formel bedeutet eine der Temperatur proportionale Spannung. Die andern Glieder lassen sich ansprechen als NAVIER'sche Spannungsformel für eine gedachte Normalkraft von der Größe

$$N = E \omega d \cdot \vartheta_m, \quad (20)$$

die im Abstände  $e$  vom Schwerpunkte  $s$  auf den Querschnitt von der Breite  $= 1$  wirkt. Diese ideelle Kraft erzeugt nach der NAVIER'schen Bieungslehre ein geradliniges Spannungsdiagramm, das dem Spannungsdiagramm mit den Ordinaten  $\sigma_0 = E \omega \vartheta$  zu überlagern ist, vergl. Fig. 9.

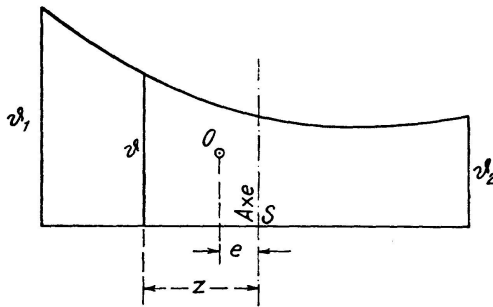


Fig. 8

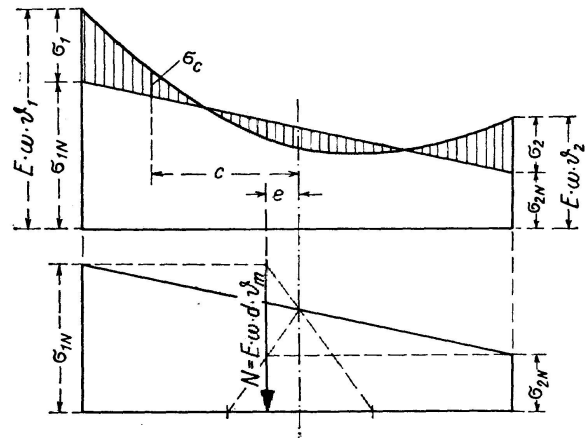


Fig. 9

Es gelingt leicht, den Größtwert der Spannung  $\sigma_c$  an der Stelle  $c = z$  zu bestimmen, der im Zeitpunkte  $t_1$  auftritt. Setzt man in Gl. (19) die Ausdrücke (3), (15) und (17) ein, so erhält man

$$\sigma_c = E \omega \left( \cos \frac{2\pi t}{T} f_1 + \sin \frac{2\pi t}{T} \varphi_1 \right),$$

worin

$$f_1 = f - \frac{1}{d} \int f dx - \frac{c}{J} \int f z dz, \quad (21)$$

$$\varphi_1 = \varphi - \frac{1}{d} \int \varphi dx - \frac{c}{J} \int \varphi z dz.$$

Der Ausdruck wird ein Maximum für

$$\frac{\partial \sigma_c}{\partial t} = E \omega \cdot \frac{2\pi}{T} \left( -\sin \frac{2\pi t_1}{T} f_1 + \cos \frac{2\pi t_1}{T} \varphi_1 \right) = 0,$$

woraus

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi t_1}{T} = \frac{\varphi_1}{f_1}. \quad (22)$$

Gl. (19) liefert damit für die größte Spannung  $\sigma_c$  im Schnitte  $c = z$

$$\max \sigma_c = E \omega \sqrt{f_1^2 + \varphi_1^2}. \quad (23)$$

Zur Auswertung der Ausdrücke (21) benötigt man die Funktionen  $f$  und  $\varphi$  nach Gl. (10), sowie die aus ihnen gebildeten, bestimmten Integrale, die sich leicht durch geschlossene Formeln darstellen lassen. Man erhält

$$\begin{aligned} \int f dx &= \vartheta_{10} (\int \cos kx \cos kx dx + B_0 \int \cos kx \sin kx dx + C_0 \int \sin kx \cos kx dx) \\ &= \frac{\vartheta_{10}}{2k} [\cos kd \sin kd + \sin kd \cos kd \\ &\quad + B_0 (\cos kd \cos kd + \sin kd \sin kd - 1) \\ &\quad + C_0 (\sin kd \sin kd - \cos kd \cos kd + 1)]. \end{aligned}$$

Nach Einsetzen der Konstanten  $B_0$  und  $C_0$  aus Gl. (9) folgt

$$\left. \begin{aligned} \int f dx &= \vartheta_{10} \frac{1+n}{2k} \frac{\sin kd + \sin kd}{\cos kd + \cos kd} \\ \int \varphi dx &= \vartheta_{10} \frac{1+n}{2k} \frac{\sin kd - \sin kd}{\cos kd + \cos kd} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Analoge Rechnungen liefern

$$\left. \begin{aligned} \int f z dz &= \vartheta_{10} \frac{1-n}{4k} d \frac{\sin kd - \sin kd}{\cos kd - \cos kd} \\ \int \varphi z dz &= \vartheta_{10} \frac{1-n}{4k} d \left( \frac{\sin kd + \sin kd}{\cos kd - \cos kd} - \frac{2}{kd} \right) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Bei symmetrischer Temperaturverteilung ( $n = 1$ ) verschwinden die Ausdrücke (25), und man erhält für die größte Wärmespannung  $\sigma_c$  im Schnitte  $c$

$$\max \sigma_c = E \omega \sqrt{\left(f - \frac{1}{d} \int f dx\right)^2 + \left(\varphi - \frac{1}{d} \int \varphi dx\right)^2}. \quad (26)$$

Die Spannung  $\sigma_c$  erreicht ihr Maximum in einem Zeitpunkte  $t$ , der von  $c$  abhängig und durch Gl. (22) definiert ist. Die absolut größten Wärmespannungen sind die Randspannungen ( $f = \vartheta_{10}$  bzw.  $\vartheta_{20}$ ,  $\varphi = 0$ ).

## 6. Formänderungen.

Der Formänderungszustand der freistehenden Mauer, herrührend vom Temperaturverlauf, ist eindeutig definiert durch die Axdehnung  $\varepsilon_0$  und den Formänderungswinkel  $d\varphi$ . Die Maxima dieser beiden Größen treten nicht im gleichen Zeitpunkte auf.

Die Axdehnung  $\varepsilon_0$  zur Zeit  $t$  beträgt nach Gl. (14)

$$\varepsilon_0 = \frac{\omega}{d} \int \vartheta dx = \frac{\omega}{d} \left( \cos \frac{2\pi t}{T} \int f dx + \sin \frac{2\pi t}{T} \int \varphi dx \right).$$

Der Ausdruck wird ein Maximum zur Zeit  $t_2$ , für

$$\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial t} = \frac{\omega}{d} \frac{2\pi}{T} \left( -\sin \frac{2\pi t}{T} \int f dx + \cos \frac{2\pi t}{T} \int \varphi dx \right) = 0,$$



woraus 
$$\operatorname{tg} \frac{2\pi t_2}{T} = \frac{\int \varphi dx}{\int f dx}. \quad (27)$$

Man erhält damit

$$\begin{aligned} \max \varepsilon_0 &= \frac{\omega}{d} \frac{\int f dx + \operatorname{tg} \frac{2\pi t_2}{T} \int \varphi dx}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi t_2}{T}}} \\ &= \frac{\omega}{d} \sqrt{(\int f dx)^2 + (\int \varphi dx)^2}. \end{aligned} \quad (28)$$

Wenn für die Integrale noch die Ausdrücke (24) eingesetzt werden, so ergibt sich

$$\max \varepsilon_0 = \omega \vartheta_{10} \frac{1+n}{2kd} \sqrt{\frac{2(\operatorname{Cos} kd - \cos kd)}{\operatorname{Cos} kd + \cos kd}}. \quad (29)$$

Mit negativem Vorzeichen liefert die Formel den entgegengesetzt gleichen Minimalwert der Axdehnung (Axverkürzung).

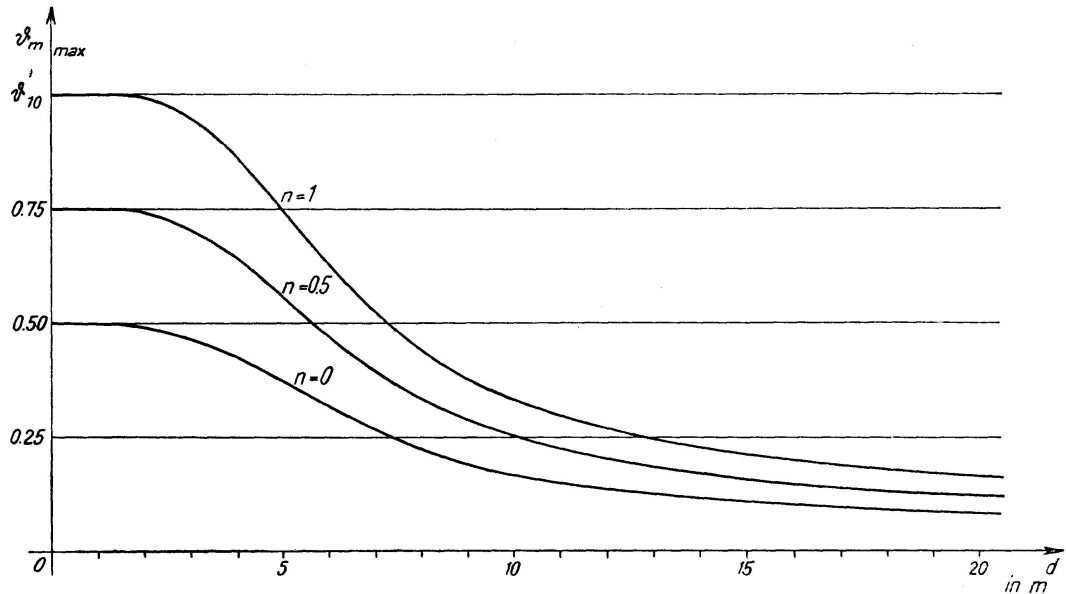


Fig. 10. Maxima der Mittelwerte der Temperatur  $T=1$  Jahr — Valeurs maximales des moyennes de la température  $T=1$  année — Maxima of the mean temperatures  $T=1$  year

Der Formänderungswinkel  $d\varphi$  zur Zeit  $t$  hat nach Gl. (16) den Wert

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\omega}{J} \int \vartheta z dz = \frac{\omega}{J} \left( \cos \frac{2\pi t}{T} \int f z dz + \sin \frac{2\pi t}{T} \int \varphi z dz \right).$$

Der Ausdruck erreicht sein Maximum zur Zeit  $t_3$ , für

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{d\varphi}{ds} \right) = \frac{\omega}{J} \frac{2\pi}{T} \left( -\sin \frac{2\pi t}{T} \int f z dz + \cos \frac{2\pi t}{T} \int \varphi z dz \right) = 0,$$

woraus

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi t_3}{T} = \frac{\int \varphi z dz}{\int f z dz}. \quad (30)$$

Dieser Wert, oben eingesetzt, liefert

$$\max \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\omega}{J} \sqrt{(\int f z dz)^2 + (\int \varphi z dz)^2}. \quad (31)$$

Setzt man hier für die Integrale die Ausdrücke (25) ein, so folgt

$$\max \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\omega}{J} \frac{\vartheta_{10}(1-n)d}{4k} \sqrt{\left(\frac{\sin kd - \sin kd_1}{\cos kd - \cos kd_1}\right)^2 + \left(\frac{\sin kd + \sin kd}{\cos kd - \cos kd} - \frac{2}{kd}\right)^2}. \quad (32)$$

In den Fig. 10 und 11 sind die maximalen Werte des Temperaturmittels (Axdehnung =  $\omega \cdot \vartheta_m$ ) und des Formänderungswinkels in Funktion der Mauerstärke dargestellt ( $T = 1$  Jahr). Man erkennt den starken Einfluß der Mauerstärke auf die Formänderung. Bei unsymmetrischer Temperaturverteilung deformiert sich die Mittelfläche der Mauer ohne Randbedingungen zu einer Kugelfläche, deren Radius aus Gl. (32) leicht berechnet werden kann.

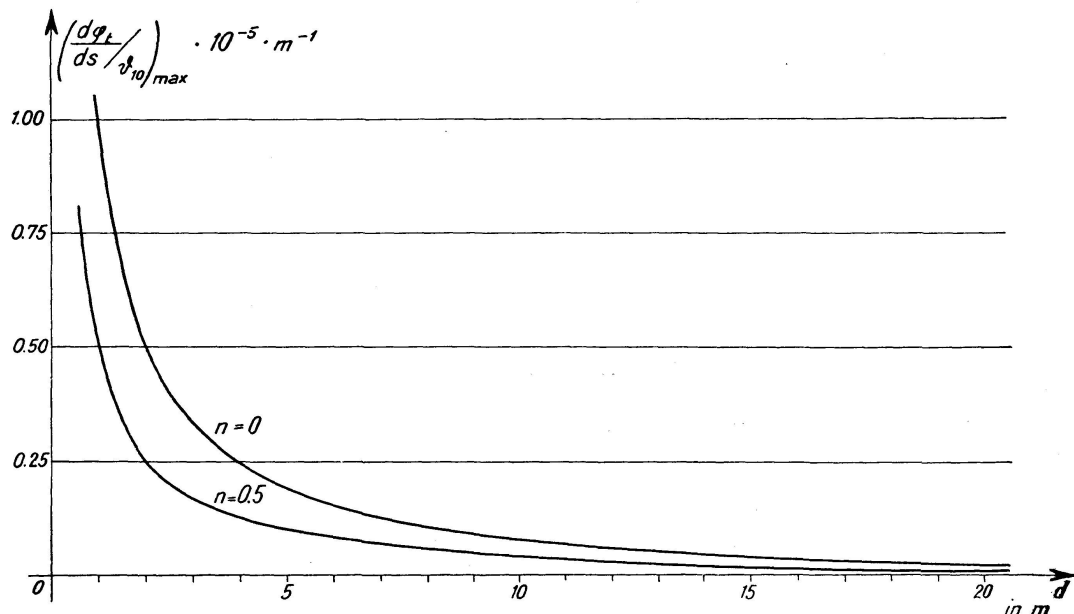


Fig. 11. Maxima des Formänderungswinkels bei unsymmetrischer Temperaturverteilung ( $T = 1$  Jahr) — Valeurs maximales de l'angle de déformation sous l'effet d'une répartition asymétrique de la température  $T = 1$  année — Maxima of the angle of distortion with unsymmetrical distribution of temperature  $T = 1$  year

## 7. Dünnwandige Mauer.

Besitzt die Mauer eine geringe Stärke  $d$ , so kann man angenähert schreiben

$$\begin{aligned} \cos kd &= 1 + \frac{(kd)^2}{2}, & \cos kd &= 1 - \frac{(kd)^2}{2}, \\ \sin kd &= kd + \frac{(kd)^3}{6}, & \sin kd &= kd - \frac{(kd)^3}{6}, \end{aligned}$$

und analoge Formeln für  $(kx)$ . Man erhält jetzt für die Konstanten (9) unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung

$$B_0 = C_0 = \frac{n-1}{2kd},$$

und für die Funktionen  $f$  und  $\varphi$  nach (10)

$$f = \vartheta_{10} \left(1 - \frac{x}{d}\right) + \vartheta_{20} \frac{x}{d}, \quad \varphi = 0. \quad (33)$$

Die Temperaturverteilung ist somit geradlinig. Es ist ferner

$$\int f dx = \frac{\vartheta_{10} + \vartheta_{20}}{2} d, \quad \int f z dz = \frac{\vartheta_{10} - \vartheta_{20}}{12} d^2,$$

und die Ausdrücke (21) ergeben

$$f_1 = \vartheta_{10} \left(1 - \frac{x}{d}\right) + \vartheta_{20} \frac{x}{d} - \frac{\vartheta_{10} + \vartheta_{20}}{2} - \frac{12 \left(\frac{d}{2} - x\right)}{d^3} \frac{\vartheta_{10} - \vartheta_{20}}{12} d^2$$

$$f_1 = 0, \quad \varphi_1 = 0.$$

Gl. (23) liefert für jeden Punkt die Wärmespannung  $\sigma_c$  gleich Null; die dünnwandige Mauer ohne Randbedingungen deformiert sich spannungslos. Die *A x d e h n u n g* beträgt nach (28)

$$\max \varepsilon_0 = \frac{\omega}{d} \int f dx = \omega \frac{\vartheta_{10} + \vartheta_{20}}{2}, \quad (34)$$

und der Formänderungswinkel nach (31)

$$\max \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\omega}{J} \int f z dz = \omega \frac{\vartheta_{10} - \vartheta_{20}}{d}. \quad (35)$$

## 8. Dickwandige Mauer.

Die hyperbolischen Funktionen  $\text{Cos } kd$  und  $\text{Sin } kd$  sind hier große Werte im Vergleich zu den Kreisfunktionen. Werden diese vernachlässigt und setzt man  $\text{Tg } kd = 1$ , so erhält man für die Integrale (24) und (25)

$$\int f dx = \int \varphi dx = \vartheta_{10} \frac{1+n}{2k},$$

$$\int f z dz = \vartheta_{10} \frac{1-n}{4k} d, \quad \int \varphi z dz = \vartheta_{10} \frac{1-n}{4k} d \left(1 - \frac{2}{kd}\right).$$

Damit ergibt die Spannungsformel (23) für die *R a n d s p a n n u n g e n*  $\sigma$  folgende Näherungswerte:

Linker Rand  $\left(f = \vartheta_{10}, \quad c = \frac{d}{2}\right)$

$$\max \sigma_1 = E \omega \vartheta_{10} \sqrt{\left[1 + \frac{n-2}{kd}\right]^2 + \left[\frac{n-2}{kd} + \frac{3(1-n)}{(kd)^2}\right]^2}, \quad (36)$$

Rechter Rand  $\left(f = \vartheta_{20} = n \vartheta_{10}, \quad c = -\frac{d}{2}\right)$

$$\max \sigma_2 = E \omega \vartheta_{10} \sqrt{\left[n + \frac{1-2n}{kd}\right]^2 + \left[\frac{1-2n}{kd} - \frac{3(1-n)}{(kd)^2}\right]^2}.$$

Für  $n = 1$  und  $kd > 4$  ist mit genügender Genauigkeit

$$\max \sigma_{1,2} = E \omega \vartheta_{10} \frac{kd}{1 + kd}. \quad (37)$$

Die A x d e h n u n g berechnet sich nach Gl. (29) zu

$$\max \varepsilon_0 = \omega \frac{\vartheta_{10} + \vartheta_{20}}{kd \cdot \sqrt{2}} \quad (38)$$

und der Formänderungswinkel nach Gl. (32)

$$\max \frac{d\varphi}{ds} = \frac{3\omega}{d} \frac{\vartheta_{10} - \vartheta_{20}}{kd} \sqrt{1 + \left(1 - \frac{2}{kd}\right)^2}. \quad (39)$$

### 9. Mauer mit Auflagerbedingungen.

Die abgeleiteten Beziehungen gelten nur für die „freistehende Mauer“, deren Formänderung nicht durch äußere Auflagerkräfte behindert ist. Bei einem äußerlich statisch unbestimmten Tragwerk, z. B. einem Gewölbe, dient der Fall der freistehenden Mauer als Grundsystem, an dem an den Rändern die „überzähligen Größen“ so anzubringen sind, daß die Elastizitätsbedingungen oder Randbedingungen erfüllt werden.

Die wichtigste Anwendung der vorstehenden Berechnungen bezieht sich auf die bogenförmigen Staumauern von Wasserkraftanlagen. An Stelle einer rohen und unzuverlässigen Schätzung des Temperaturverlaufes im Innern der Mauer empfiehlt sich dessen Berechnung nach der Theorie der Wärmeleitung, wobei die Jahresamplitude der Oberflächentemperatur an der Wasserseite kleiner als an der Luftseite eingesetzt werden darf, um dem günstigen Einflusse des Speicherwassers Rechnung zu tragen.

### 10. Wärmeübergang.

Die abgeleiteten Beziehungen ermöglichen die Berechnung der Temperaturverteilung, der Formänderungen und der Spannungen, wenn die Oberflächentemperaturen bekannt sind. Bei den praktischen Aufgaben ist indessen nicht der Temperaturverlauf an den Oberflächen gegeben, sondern der Verlauf der Temperatur  $\vartheta_u$  der Umgebung. Grenzt die Mauer an Luft, so besteht zwischen den beiden Medien ein Temperatursprung, der in erster Linie vom Temperaturgefälle an der Oberfläche abhängt. Die physikalisch entwickelten Verhältnisse werden in der Fourier'schen Wärmetheorie in vereinfachter Weise durch die Beziehung

$$\vartheta_u - \vartheta_1 = - \frac{\lambda}{\alpha} \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_0 \quad (40)$$

ausgedrückt, worin  $\alpha$  die sogenannte W ä r m e ü b e r g a n g s z a h l bezeichnet, die für leicht bewegte Luft ungefähr zu

$$\alpha = 10 \frac{\text{kcal}}{\text{m}^2 \cdot \text{Std} \cdot \text{Grad}}$$

angesetzt werden kann. Grenzt die Mauer an Wasser, so ergibt sich  $\alpha$  nach den Versuchen  $> 200$ , sodaß praktisch ein Temperatursprung nicht vorhanden ist.

Das Temperaturgefälle berechnet sich nun aus den Gl. (10) und (11) für  $x = 0$  zu

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_0 &= \cos \frac{2\pi t}{T} \left( \frac{df}{dx} \right)_0 + \sin \frac{2\pi t}{T} \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)_0 \\ &= \vartheta_{10} k \left[ \cos \frac{2\pi t}{T} (B_0 + C_0) - \sin \frac{2\pi t}{T} (B_0 - C_0) \right]. \end{aligned}$$

Damit ergibt Gl. (40) unter Berücksichtigung von Gl. (1) die Umgebungstemperatur

$$\vartheta_u = \vartheta_{10} \cos \frac{2\pi t}{T} \left[ 1 - \frac{\lambda k}{\alpha} (B_0 + C_0) \right] + \vartheta_{10} \sin \frac{2\pi t}{T} \cdot \frac{\lambda k}{\alpha} (B_0 - C_0).$$

Diese Beziehung läßt sich durch einfache Umformung auf die Gestalt bringen

$$\begin{aligned} \vartheta_u &= \vartheta_{10} \cdot \sqrt{\left[ 1 - \frac{\lambda k}{\alpha} (B_0 + C_0) \right]^2 + \left[ \frac{\lambda k}{\alpha} (B_0 - C_0) \right]^2} \\ &\quad \cdot \cos \left[ \frac{2\pi t}{T} - \arctg \frac{\frac{\lambda k}{\alpha} (B_0 - C_0)}{1 - \frac{\lambda k}{\alpha} (B_0 + C_0)} \right] \end{aligned} \quad (41)$$

Man erkennt, daß die Temperatur  $\vartheta_u$  der an die Mauer angrenzenden Luft ebenfalls mit der Periode  $T$  schwingt und daß diese Schwingung im Vergleich zu (1) eine Phasenverschiebung aufweist.

Die Amplitude der Schwingung von  $\vartheta_u$  beträgt nach (41)

$$\max \vartheta_u = \vartheta_{10} \sqrt{1 - \frac{2\lambda k}{\alpha} (B_0 + C_0) + \frac{2\lambda^2 k^2}{\alpha^2} (B_0^2 - C_0^2)} \quad (42)$$

Bei den Zahlenrechnungen ergeben sich die Konstanten  $B_0$  und  $C_0$  nach (9) als kleine Größen und zwar ist  $B_0 + C_0$  stets negativ. Für  $kd > 4$  ergibt sich mit genügender Genauigkeit  $B_0 = -1$  und  $C_0 = 0$ . Man kann daher in obiger Formel die quadratischen Glieder vernachlässigen und mit  $\lambda = 1$  und  $\alpha = 10$  schreiben

$$\max \vartheta_u = \vartheta_{10} \sqrt{1 + \frac{k}{5}} \approx \vartheta_{10} \left( 1 + \frac{k}{10} \right).$$

Somit hat man bei größerer Mauerstärke von der gegebenen Amplitude der Lufttemperatur einfach 4% (für  $T = 1$  Jahr) bzw. 12% (für  $T = 1$  Monat) zu subtrahieren, um die Oberflächenamplitude  $\vartheta_{10}$  zu gewinnen, mit der alsdann die Berechnung des Temperaturverlaufes im Innern der Mauer durchzuführen ist. Bei der Jahresperiode begeht man sogar nur einen geringen Fehler, wenn man den Temperatursprung an der Oberfläche ganz vernachlässigt.

### **Zusammenfassung.**

Der Temperaturverlauf im Innern einer homogenen Mauer wird nach der Fourier'schen Theorie der Wärmeleitung für den Fall oscillierender Außentemperaturen berechnet und graphisch dargestellt. Die Theorie liefert geschlossene Ausdrücke für die Temperaturausschläge, die Formänderungen und die Wärmespannungen. Die Ergebnisse finden Anwendung bei der statischen Berechnung von gelenklosen Brückengewölben, bogenförmigen Stau-mauern und andern massiven Bauwerken, die dem Einflusse der Jahres-schwankung der Lufttemperatur unterworfen sind.

### **Résumé.**

La variation de la température à l'intérieur d'un mur homogène est étudiée au moyen de la théorie de la chaleur de FOURIER pour le cas de températures extérieures périodiquement variables et illustrée par des représentations graphiques. La théorie fournit des valeurs explicites pour les écarts de la température, les déformations et les contraintes thermiques. Les résultats peuvent être appliqués au calcul statique de voûtes encastrées, des barrages arqués et d'autres constructions massives qui sont exposées aux fluctuations annuelles de la température de l'air.

### **Summary.**

The course of the temperature in the interior of a homogeneous wall is calculated by the FOURIER theory of heat conductivity for the case of periodically varying outside temperatures and represented graphically. The theory furnishes closed expressions for the temperature amplitudes, deformations and heat stresses. The results find application in the static calculations of jointless bridge arches, arch-shaped dams and other solid structures which are subjected to the annual periodic variation of the air temperature.

Leere Seite  
Blank page  
Page vide