

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen  
**Band:** 7 (1943-1944)

**Artikel:** Influence de la déformabilité aux efforts tranchants sur la résistance au flambage des poutres à âme pleine ou en treillis  
**Autor:** Marneffe, Alb. de  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-8003>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# **INFLUENCE DE LA DÉFORMABILITÉ AUX EFFORTS TRANCHANTS SUR LA RÉSISTANCE AU FLAMBAGE DES POUTRES A ÂME PLEINE OU EN TREILLIS.**

**EINFLUSS DER FORMÄNDERUNG INFOLGE DER QUERKRÄFTE AUF DEN KNICKWIDERSTAND DER VOLLWAND- UND FACHWERKTRÄGER.**

**CHANGE OF SHAPE DUE TO SHEARING FORCES AND ITS INFLUENCE ON THE RESISTANCE TO BUCKLING OF PLATE AND LATTICE GIRDERS.**

ALB. DE MARNEFFE, Professeur à l'Université de Liège.

L'on admet fréquemment que la part de déformation des poutres due aux efforts tranchants est négligeable devant celle due aux moments fléchissants. Si cela est souvent exact pour les poutres à âme pleine, il peut être dangereux de l'étendre aux poutres en treillis et surtout aux poutres à étrésillons (poutre VIERENDEEL), où la part de déformation due aux efforts tranchants peut au contraire devenir prépondérante.

Dans ces conditions, on peut se demander si la charge critique de flambage qui est déterminée en fonction de la seule déformabilité de la poutre à la flexion, n'est pas à modifier si l'on tient compte en même temps de la déformabilité aux efforts tranchants.

C'est la question que nous nous proposons de résoudre dans cette étude. Nous constaterons que le coefficient de sécurité au flambage des poutres en treillis ou à étrésillons n'atteint pas la valeur que l'on pense et nous établirons une méthode rationnelle pour le calcul des proportions du treillis de ces poutres.

## **I. Flèches des poutres droites dues aux moments fléchissants et aux efforts tranchants.**

a) *Poutre à âme pleine.*

La déformée se déduit des formules bien connues de NAVIER-BRESSE

$$\omega_1 - \omega_0 = \int_0^1 \frac{M}{EI} d\xi$$
$$v_1 - v_0 - \omega_0(x_1 - x_0) = \int_0^1 \frac{M}{EI} (x_1 - \xi) d\xi - \int_0^1 \frac{T}{GS_r} d\xi$$

où  $S_r$  est la section réduite de résistance à l'effort tranchant (âme des poutres double T).

Pour le but que nous poursuivons, il nous suffira d'envisager une poutre de section uniforme ( $EI = C^t e$ ) et symétriquement chargée. Nous placerons donc l'origine 0 des axes au milieu de la portée  $L$  (fig. 1).

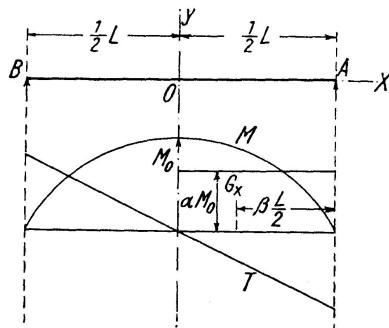


Fig. 1

En cette section médiane:  $x_0 = 0$ ,  $\omega_0 = 0$  par symétrie —  $v_0 = f$  flèche à déterminer. A l'extrémité  $A$ :  $x_1 = \frac{1}{2}L$ ,  $v_1 = 0$  et on obtient:

$$\omega_1 = \frac{1}{EI} \int_0^1 M d\xi = \frac{L}{2EI} \alpha M_0 \text{ si } M_0 = \text{moment maximum en 0}$$

$\alpha M_0 = \text{ordonnée moyenne du diagramme des } M$

$$f = \frac{1}{EI} \int_0^1 M \left( \frac{L}{2} - \xi \right) d\xi - \frac{1}{GS_r} \int_0^1 \frac{dM}{d\xi} d\xi \quad \text{car } T = \frac{dM}{d\xi} \text{ et } \int_0^1 dM = -M_0$$

$$f = \frac{1}{EI} \cdot \alpha M_0 \frac{L}{2} \cdot \frac{\beta L}{2} + \frac{M_0}{GS_r} = M_0 \left( \frac{\alpha \beta L^2}{4EI} + \frac{1}{GS_r} \right) = M_0 \frac{\alpha \beta L^2}{4EI} \left( 1 + \frac{4ES\varrho^2}{\alpha \beta GS_r L^2} \right)$$

$$f = M_0 \frac{L^2}{4EI} \alpha \beta (1 + \delta) \quad (1)$$

si  $\beta \frac{L}{2}$  est la distance à l'extrémité  $A$  du centre de gravité de la surface  $\frac{\alpha M_0 L}{2}$

$I = S\varrho^2$  et posant

$$\delta = \frac{4}{\alpha \beta} \frac{E}{G} \frac{S}{S_r} \frac{\varrho^2}{L^2} \quad (2)$$

$\delta$  étant précisément le rapport de la déformabilité due aux efforts tranchants à la déformabilité due aux moments fléchissants.

### b) Poutre en treillis.

Les formules de NAVIER-BRESSE appliquées aux poutres en treillis deviennent:

$$\omega_1 - \omega_0 = \sum_0^1 \frac{M l}{Es d^2}$$

$$v_1 - v_0 - \omega_0 (x_1 - x_0) = \sum_0^1 \frac{M l}{Es d^2} (x_1 - \xi) \text{ où } \left\{ \begin{array}{l} M = \text{moment au sommet opposé à une barre} \\ l = \text{longueur de la barre} \\ s = \text{section de la barre} \\ d = \text{distance du sommet opposé à la barre} \\ \xi = \text{abscisse du sommet opposé.} \end{array} \right.$$

Si nous envisageons (fig. 2) une poutre de hauteur constante  $h$ , on doit distinguer les barres des membrures et les barres du treillis comprises entre les membrures. Pour les barres des membrures, les sommets opposés sont aux noeuds  $n$  de celles-ci et par conséquent  $l = \lambda$ ,  $d = h$ ,  $s = s_e$  section supposée uniforme.

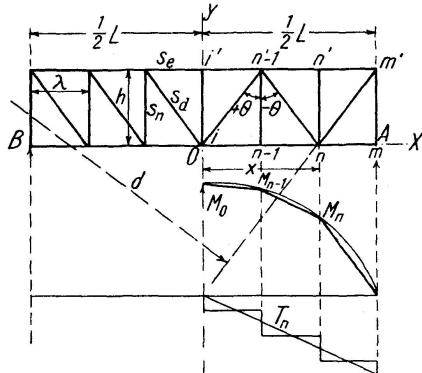


Fig. 2

Alors  $\frac{l}{E s d^2}$  devient constant pour les membrures et pour l'ensemble de celles-ci on a, en plaçant encore l'origine 0 au milieu de la poutre:

$$\sum_0^1 \frac{M l}{E s d^2} = \frac{2}{E s_e h^2} \sum_0^1 \lambda M = \frac{\alpha}{2} \frac{L}{E I} M_0$$

avec  $I = \frac{s_e h^2}{2}$  = moment d'inertie de la poutre dû aux membrures,

car  $\zeta \sum_0^1 \lambda M = \alpha M_0 \frac{L}{2}$  = surface du diagramme de  $M$ ; ceci n'est qu'approximatif mais d'autant plus exact que le nombre  $m$  des panneaux est élevé. De même le terme

$$\sum \frac{M l}{E s d^2} (x_1 - \xi) = \frac{2}{E s_e h^2} \sum_0^1 \lambda M \left( \frac{L}{2} - \xi \right)$$

est approximativement le moment de la surface du diagramme des  $M$  par rapport à l'extrémité  $A$ .

On peut donc également poser

$$f_m = \frac{2}{E s_e h^2} \cdot \alpha M_0 \frac{L}{2} \cdot \beta \frac{L}{2} = \frac{\alpha \beta}{4} \frac{L^2}{E I} M_0 \quad (3)$$

Pour les barres du treillis, dans ce cas spécial des membrures parallèles, les sommets opposés sont à l'infini et l'on obtient pour les termes  $\frac{M}{d}$ , c'est-à-dire l'indétermination. Pour la lever, remplaçons tout d'abord  $\frac{M}{d}$  par  $N$  = effort longitudinal dans les barres que l'on peut facilement exprimer en fonction de  $T$ , car  $N_n = -\frac{T_n}{\cos \theta} = -T_n \frac{l}{h}$ .

On obtient donc:

$$\frac{M l}{E s d^2} = \frac{N l}{E s d} = \frac{N l}{E s} \cdot \frac{1}{\infty} = 0 \quad \text{car } d = \infty,$$

donc les barres des treillis n'interviennent pas dans l'expression de  $\omega$  et l'on a:

$$\omega_a = \frac{\alpha}{2} \frac{L}{EI} M_0.$$

Pour les termes  $\frac{MI(x_1 - \xi)}{Es_d^2}$ , ils deviennent  $\frac{Nh(\frac{1}{2}L - \xi)}{Es_d \cos \theta d}$ .

Or  $d = (x - \xi) \cos \theta$ , si  $x$  est l'abscisse du point où la barre recoupe l'axe 0  $X$ , donc

$$\frac{\frac{1}{2}L - \xi}{d} = \frac{\frac{1}{2}L - \xi}{(x - \xi) \cos \theta} = \frac{\frac{1}{2}\frac{L}{\xi} - 1}{\left(\frac{x}{\xi} - 1\right)} \cdot \frac{1}{\cos \theta} \rightarrow \frac{1}{\cos \theta} \text{ pour } \xi \rightarrow \infty.$$

On obtient donc  $\frac{Nh}{Es_d \cos^2 \theta} = \frac{-T_n l}{Es_d \cos^2 \theta} = \frac{-T_n l^3}{Es_d h^2}$

$$\text{et } f_t = \sum_0^A \frac{MI(\frac{1}{2}L - \xi)}{Es_d^2} = \frac{-l^3}{Es_d h^2 \lambda} \sum_0^A \lambda T_n = \frac{+l^3}{Es_d h^2 \lambda} M_0 \quad (4)$$

si  $s_d$  est uniforme, car  $\sum_0^A \lambda T_n = -M_0$  parce que  $\lambda T_n = M_n - M_{n-1}$ .

Pour les montants  $\theta = 0$ ,  $\cos \theta = 1$ ,  $l = h$  et il vient  $\frac{h M_0}{Es_n \lambda}$  avec  $\lambda = \frac{L}{m}$ .

Si les diagonales alternent d'inclinaison (treillis en  $V$ ), alors pour  $\theta \leq 0$  on a toujours  $\cos \theta > 0$  et le signe ne change pas.

Finalement on obtiendra pour la flèche totale

a) cas d'un treillis en  $V$

$$f = \frac{\alpha \beta}{4} \cdot \frac{2L^2}{Es_e h^2} M_0 + \frac{l^3}{Es_d h^2 \lambda} M_0 = M_0 \frac{L^2}{4EI} \alpha \beta (1 + \delta) \quad (5)$$

avec

$$\boxed{\delta = \frac{2m}{\alpha \beta} \cdot \frac{l^3}{L^3} \cdot \frac{s_e}{s_d}} \quad (6)$$

b) cas d'un treillis en  $N$

Il y a alors deux barres par panneaux dont les déformations s'ajoutent, la diagonale  $s_d$  et le montant  $s_n$

$$T_n \left( \frac{l^3}{Es_d h^2} + \frac{h}{Es_n} \right) = \frac{T_n h}{E} \left( \frac{l^3}{h^3 s_d} + \frac{1}{s_n} \right) \quad (7)$$

$$\text{donc } f = M_0 \left[ \frac{\alpha \beta}{4} \cdot \frac{2L^2}{Es_e h^2} + \frac{h}{E \lambda} \left( \frac{1}{s_n} + \frac{l^3}{h^3 s_d} \right) \right] = M_0 \frac{L^2}{4EI} \alpha \beta (1 + \delta) \quad (8)$$

avec

$$\boxed{\delta = \frac{2m}{\alpha \beta} \cdot \frac{s_e}{L^3} \left( \frac{h^3}{s_n} + \frac{l^3}{s_d} \right)} \quad (9)$$

c) Poutre à étrésillons (Type VIERENDEEL).

Soit une poutre type VIERENDEEL de hauteur constante et à membrures symétriques uniformes dont les notations sont définies sur la fig. 3.

Chaque tronçon de membrure est caractérisé par sa masse élastique  $\sigma_e = \frac{\varepsilon \lambda}{E i_e}$  et son coefficient d'inertie  $\nu$  défini par  $\nu = \frac{\lambda^2}{4 R^2}$  où  $R$  est le rayon d'inertie de toute la masse élastique  $\sigma_e$  par rapport à l'axe vertical médian.

Chaque montant a une masse élastique  $\sigma_n = \frac{\varepsilon h}{E i_n}$  et, supposons-nous, le même coefficient d'inertie  $\nu$ .

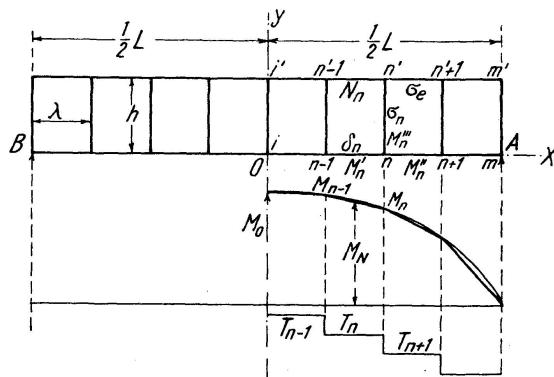


Fig. 3

Autour d'un noeud  $n$  les moments de flexion dans les diverses branches sont donnés par les formules de la théorie des rotations<sup>1)</sup> qui deviennent ici

$$\begin{aligned} -M'_n &= \frac{1}{\sigma_e} [2\nu\delta_n - (\nu-1)\omega_{n-1} - (\nu+1)\omega_n] \\ +M''_n &= \frac{1}{\sigma_e} [2\nu\delta_{n+1} - (\nu+1)\omega_n - (\nu-1)\omega_{n+1}] \end{aligned} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \delta_n = \text{inclinaison de la barre} \\ \omega_n = \text{rotation du noeud } n \end{cases}$$

$$M'''_n = \frac{1}{\sigma_n} [2\nu\delta_{nn'} - (\nu+1)\omega_n - (\nu-1)\omega_{n'}] = -\frac{2\nu\omega_n}{\sigma_n} \quad (10)$$

car par symétrie  $\omega_n = \omega_{n'}$  et  $\delta_{nn'} = 0$ .

Par raison de symétrie, l'effort tranchant  $T_n$  du panneau  $n$  se répartit par moitié entre les deux membrures et il s'exprime dans chacune<sup>1)</sup> par:

$$\frac{1}{2}T_n = \frac{2\nu}{\sigma_e\lambda} (\omega_{n-1} + \omega_n - 2\delta_n) \quad \text{d'où} \quad \boxed{\delta_n = \frac{-\sigma_e\lambda}{8\nu} T_n + \frac{\omega_{n-1} + \omega_n}{2}} \quad (11)$$

Or d'après (10)

$$\omega_n = -\frac{\sigma_n}{2\nu} M'''_n \quad \text{et} \quad M'''_n = -(N_n - N_{n+1}) \frac{h}{2},$$

les  $N_n$  étant les efforts longitudinaux dans les membrures qui en première approximation peuvent s'obtenir par  $hN_n = M_N = \frac{M_n + M_{n-1}}{2}$ .

Alors

$$\omega_n = \frac{\sigma_n}{4\nu} (M_N - M_{N+1}) = \frac{\sigma_n}{8\nu} (M_n + M_{n-1} - M_{n+1} - M_n) = -\frac{\sigma_n\lambda}{8\nu} (T_n + T_{n+1})$$

<sup>1)</sup> Voir par exemple: A. DE MARNEFFE: Les constructions hyperstatiques. Ed. Thone, Liège, 1937, page 158, formules 85 et 87.

$$\text{donc } \frac{\omega_n + \omega_{n-1}}{2} = -\frac{\sigma_n \lambda}{16 \nu} (T_n + T_{n+1} + T_{n-1} + T_n) = -\frac{\sigma_n \lambda}{4 \nu} T_n$$

si on admet très approximativement que  $2T_n = T_{n-1} + T_{n+1}$ , ce qui est fréquemment exact en cas de charges symétriques.

Alors

$$\delta_n = -\frac{\sigma_e \lambda}{8 \nu} T_n - \frac{\sigma_n \lambda}{4 \nu} T_n = -\frac{T_n \lambda}{8 \nu} (\sigma_e + 2 \sigma_n) = -\frac{T_n \lambda \varepsilon}{8 E \nu} \left( \frac{\lambda}{i_e} + \frac{2 h}{i_n} \right) \quad (12)$$

Si l'on rapporte les déformations à la direction du montant milieu de la poutre en 0, que nous numérotions  $i$ , et qui en cas de mises en charge symétriques ne varie pas, on obtient pour la dénivellation du noeud extrême  $m$  en  $A$ , c'est à dire pour la flèche  $f_t$ :

$$f_t = \sum_i^m \lambda \delta_n$$

$$f_t = -\frac{(\sigma_e + 2 \sigma_n) \lambda}{8 \nu} \sum_i^m \lambda T_n = M_0 \frac{(\sigma_e + 2 \sigma_n) \lambda}{8 \nu} = M_0 \frac{(\sigma_e + 2 \sigma_n) L}{8 m \nu} \quad (13)$$

car  $L = m \lambda$ .

Cette flèche a été établie en négligeant les déformations longitudinales des membrures, elle est donc due uniquement à l'effet des efforts tranchants dans la poutre considérée comme poutre en treillis.

Pour obtenir la flèche  $f_m$  due aux moments fléchissants, nous devons envisager les déformations longitudinales des membrures et pour cela nous pouvons utiliser la même expression que celle obtenue pour les membrures de la poutre en treillis (3).

La flèche totale sera donc

$$f = f_m + f_t = M_0 \left[ \frac{\alpha \beta}{4} \cdot \frac{2 L^2}{E s_e h^2} + \frac{L (\sigma_e + 2 \sigma_n)}{8 m \nu} \right] = M_0 \frac{L^2}{4 E I} \alpha \beta (1 + \delta) \quad (14)$$

avec

$$\delta = \frac{E s_e h^2}{4 \alpha \beta m \nu L} (\sigma_e + 2 \sigma_n) = \frac{s_e h^2 \varepsilon}{4 \alpha \beta m \nu L} \left( \frac{\lambda}{i_e} + \frac{2 h}{i_n} \right) \quad (15)$$

## II. Importance relative de la flèche due aux efforts tranchants par rapport à la flèche due aux moments fléchissants.

Les expressions que nous venons d'établir pour  $f$  donnent celle-ci en fonction de la flèche due aux moments fléchissants multipliée par le terme de correction  $(1 + \delta)$ , où le rapport  $\delta$  exprime le rapport entre  $f_t$  et  $f_m$ .

La valeur de  $\delta$  est donc intéressante à discuter. On peut l'exprimer pour les divers types de poutre en utilisant la disposition suivante qui fait ressortir les analogies.

On constate d'abord que le rapport  $\delta$  dépend pour toutes les poutres de  $\alpha \beta$ , c'est-à-dire de la mise en charge de la poutre, car le mode de mise en charge influence le rapport entre les  $M$  et les  $T$ .

Type de poutre	Expression de $\delta$				Valeurs moyennes de $\delta$					$\frac{L}{\varrho} = 20$	$\frac{L}{\varrho} = 100$	
	1 <sup>er</sup> facteur	2 <sup>ème</sup>	3 <sup>ème</sup>	4 <sup>ème</sup>	1 <sup>er</sup> facteur	2 <sup>ème</sup>	3 <sup>ème</sup> facteur	4 <sup>ème</sup>	produit			
âme pleines	$\frac{1}{\alpha\beta} \cdot \frac{E}{G} \cdot \frac{S}{S_r} \cdot \frac{4\varrho^2}{L^2}$				2,5	2,5	3	4	$\frac{\varrho^2}{L^2} =$	$75 \frac{\varrho^2}{L^2}$	0,1875	0,0075
treillis en V	$\frac{1}{\alpha\beta} \cdot \frac{l}{\lambda} \cdot \frac{2s_e}{s_d} \cdot \frac{l^2}{L^2}$				2,5	2	5	5	$\frac{\varrho^2}{L^2} =$	$125 \frac{\varrho^2}{L^2}$	0,3125	0,0125
treillis en N	$\left\{ \begin{array}{l} + \frac{1}{\alpha\beta} \cdot \frac{l}{\lambda} \cdot \frac{2s_e}{s_d} \cdot \frac{l^2}{L^2} \\ + \frac{1}{\alpha\beta} \cdot \frac{h}{\lambda} \cdot \frac{2s_e}{s_n} \cdot \frac{h^2}{L^2} \end{array} \right\}$				2,5	2	5	5	$\frac{\varrho^2}{L^2} = 125$	$200 \frac{\varrho^2}{L^2}$	0,5	0,02
	$\left\{ \begin{array}{l} + \frac{1}{\alpha\beta} \cdot \frac{\varepsilon h^2}{4\nu\varrho_e^2} \cdot \frac{s_e}{s_e} \cdot \frac{\lambda^2}{L^2} \\ + \frac{1}{\alpha\beta} \cdot \frac{\varepsilon h\lambda}{4\nu\varrho_n^2} \cdot \frac{2s_e}{s_n} \cdot \frac{h^2}{L^2} \end{array} \right\}$				2,5	1,25	6	4	$\frac{\varrho^2}{L^2} = 75$	$480 \frac{\varrho^2}{L^2}$	1,2	0,048
à étrésillons (Vierendeel)												

Mise en charge	$\alpha$	$\beta$	$\alpha\beta$	$\frac{1}{\alpha\beta}$	$x = \frac{1-\alpha}{1-\frac{1}{2}\beta}$
Charge unique $P$ concentrée au milieu .	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	3	2
Charge uniforme répartie $pL = P$ . . .	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{12}$	2,4	$\frac{5}{3}$
Moment de flexion sinusoïdal (flambage)	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{4}{\pi^2}$	2,4674	1,69
Moment de flexion constant . . . . .	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	1

On constate par le tableau ci-dessus que  $\frac{1}{\alpha\beta}$  est compris généralement entre 2 et 3 et a comme valeur moyenne 2,5.

Le rapport  $\frac{E}{G} = 2,5$  pour les poutres en acier à âme pleine. Pour les poutres en treillis, le terme correspondant dépend des proportions des panneaux. Il dépasse rarement la valeur 2. Pour les poutres à étrésillons, il dépend de la flexibilité transversale des membrures et montants. Souvent la proportion  $\frac{h}{\varrho}$  est voisine de 16 et  $\nu = 4$ . Ce terme a donc une valeur proche de 16 ( $\varepsilon \leq 1$ ).

Le rapport  $\frac{S}{S_r}$  varie entre 2 et 3 pour les poutres à âme pleine, prenons 3. On peut estimer  $\frac{s_e}{s_d}$  à 2,5 en moyenne dans les poutres en treillis et à 1 dans les poutres à étrésillons.

Enfin le 4<sup>me</sup> terme dépend de l'élancement de la poutre et nous l'exprimons en fonction du coefficient d'élancement habituel  $\frac{L}{\varrho}$ . On déduit de cela

les valeurs moyennes de  $\delta$  pour diverses poutres. Pour un élancement réduit ( $\frac{L}{\rho} = 20$ ) tel que celui des poutres fléchies, on constate que  $\delta = 0,2$  environ pour les poutres à âme pleine, est doublé pour les poutres en treillis et atteint 1,2 pour les poutres VIERENDEEL. La déformée due à l'effort tranchant est donc prépondérante dans les poutres VIERENDEEL.

Pour les poutres soumises au flambage, l'élancement est souvent plus élevé ( $\frac{L}{\rho} > 100$ ) et le coefficient  $\delta$  est moindre. Il est négligeable pour les poutres à âme pleine ( $< 1\%$ ), atteint 2% dans les poutres en treillis mais peut s'élever à 5% et davantage dans les poutres à étrésillons.

En conséquence, il y a lieu de vérifier les calculs de stabilité qui dépendent de la déformabilité des poutres et en tout premier lieu la stabilité au flambage qui n'est généralement établie qu'en fonction de la déformabilité à la flexion.

### III. Influence sur la charge critique de flambage.

On peut assimiler la sollicitation par flambage à une sollicitation par flexion dont le diagramme des moments le long de la poutre est une fonction sinusoïdale:  $M = Pf \cos kx$ , où  $P$  est l'effort de compression axiale et  $f$  la flèche.

Reprendons la figure 1 et soit pour  $x = 0$   $M_0 = Pf$ , pour  $x = \frac{1}{2}L$   $M = 0$  c'est-à-dire  $\cos \frac{kL}{2} = 0 = \cos \frac{\pi}{2}$  d'où  $k = \frac{\pi}{L}$ . Alors il vient

$$\frac{\alpha L}{2} Pf = \int_0^{\frac{L}{2}} Pf \cos k\xi d\xi = \frac{Pf}{k} = Pf \frac{L}{\pi} \quad \text{donc} \quad \alpha = \frac{2}{\pi}$$

$$\alpha \beta \frac{L^2}{4} Pf = \int_0^{\frac{L}{2}} Pf \cos k\xi \left( \frac{L}{2} - \xi \right) d\xi = Pf \frac{L^2}{\pi^2} \quad \text{donc} \quad \frac{\alpha \beta}{4} = \frac{1}{\pi^2} \quad \text{donc} \quad \beta = \frac{2}{\pi} \quad ^2)$$

$$\text{Donc d'après (1)} \quad f = Pf \frac{L^2}{\pi^2 EI} (1 + \delta) = Pf \frac{1 + \delta}{P_0} \quad \text{car} \quad P_0 = \frac{\pi^2 EI}{L^2}.$$

$P_0$  étant la charge critique habituelle donnée par la formule d'EULER. Donc pour que la flèche critique ne soit pas atteinte, il faut que

$$P_{cr} \leq \frac{P_0}{1 + \delta}$$

(16)

On constate que la charge critique de flambage est réduite du fait de la déformabilité à l'effort tranchant dans la proportion de  $\frac{1}{1 + \delta}$ . Le coefficient de sécurité au flam-

<sup>2)</sup> Pour ce qui précéde, nous n'avons vérifié l'équilibre qu'au milieu pour la section dangereuse; en réalité, il faudrait le vérifier tout le long de la déformée. Mais cela n'entraînerait qu'une faible modification du diagramme des  $M$  et les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  ne seraient modifiés que dans une mesure bien inférieure aux tolérances pratiques adoptées.

bage généralement admis jusqu'à présent<sup>3)</sup> pour les poutres en treillis sans tenir compte de la déformabilité due à  $T$  est donc réduit en réalité dans la même proportion.

Soit par exemple  $\delta = 0,1$ , le coefficient de sécurité supposé  $k$  n'est plus que  $\frac{1}{1,1} k = 0,91 k$  et de 3 il est descendu à 2,73 environ.

Pour les poutres prismatiques à âme pleine, la réduction de sécurité est le plus souvent négligeable. Mais pour les poutres en treillis et spécialement pour les poutres à étrésillons, il y a lieu de les calculer en tenant compte de la réduction de la charge critique due à la déformabilité du treillis. L'on pourra cependant alors se contenter d'un coefficient de sécurité réduit (de 10 à 20% par exemple) pour ne pas renforcer une construction qui s'est montrée suffisante jusqu'à présent, — ce serait un progrès à rebours, — mais on aura l'avantage de limiter la tolérance dont on use.

Les formules ci-dessus ont été établies pour le flambage, c'est-à-dire pour le cas où la formule d'EULER est applicable et qui demande  $\frac{L}{\varrho} > 105$ . Dans le cas d'élancement moindre ( $30 < \frac{L}{\varrho} < 105$ ) où l'on applique généralement la formule de TETMAYER, l'on pourrait se contenter de vérifier que la réduction de sécurité  $\frac{1}{1 + \delta}$  reste dans une limite raisonnable.

Il ne faut pas confondre cette réduction de résistance au flambage due à la déformabilité du treillis avec celle qui provient de la possibilité du flambage local des tronçons de membrure entre noeuds et qu'a exposée M. G. L. GERARD dans sa «Théorie physique de la résistance des pièces comprimées à treillis»<sup>4)</sup>. Ces réductions ne s'ajoutent pas, mais agissent parallèlement et c'est la plus forte qui l'emporte, car elles proviennent d'éléments différents.

#### IV. Calcul des dimensions du treillis ou des étrésillons.

La déformabilité aux efforts tranchants des poutres diminue leur résistance au flambage. Il ne sera donc pas possible de proportionner l'âme ou le treillis des poutres pour que cette réduction soit nulle. On devra se contenter de les établir pour qu'elle ne dépasse pas une certaine limite que l'on peut s'imposer selon les circonstances (10 à 20% par exemple).

Soit  $\eta K$  le coefficient de sécurité réduit adopté ( $\eta < 1$ ), nous poserons donc  $\eta \leq \frac{1}{1 + \delta}$  ce qui revient à réaliser  $\delta \leq \frac{1 - \eta}{\eta}$ . L'on aura là une condition que l'on pourra utiliser pour déterminer les proportions du treillis où des étrésillons par rapport aux membrures.

C'est la véritable méthode rationnelle de calcul de ce treillis; car la méthode utilisée en adoptant un effort tranchant hypothétique n'est qu'empirique. Cette méthode est à substituer à celle que nous-même avons indiquée dans un mémoire<sup>5)</sup> publié en 1935 en nous basant sur un effort tran-

<sup>3)</sup> Signalons cependant que l'influence des étrésillons sur le flambage a été étudiée assez complètement par le Prof. Dr. Ing. ERNST CHWALLA de Brunn dans un mémoire intitulé: «Das Problem der Stabilität gedrückter Rahmenstäbe» et publié dans le Vol. II de «Mémoires» de l'Assoc. intern. des Ponts et Charpentes, Zurich, 1933.

<sup>4)</sup> Revue universelle des Mines. t. III, août-septembre 1913.

<sup>5)</sup> L'Ossature métallique n° 2, Février 1935.

chant hypothétique préconisé par M. G. L. GERARD dans le mémoire cité plus haut, et donné par  $T \leq 0,016 \left( \frac{R}{R_t} - 1 \right) F$ .

Pour la poutre à âme pleine, on en déduira une limite inférieure pour  $S_r$

$$S_r \geq S \frac{\eta}{1-\eta} \frac{\pi^2 E \varrho^2}{G L^2} = \frac{\eta}{1-\eta} \frac{P_0}{G} \quad (17)$$

Pour la poutre à treillis en V

$$s_d \geq s_e \frac{\eta}{1-\eta} \frac{\pi^2 l^3}{2 \lambda L^2} \quad (18)$$

Pour la poutre à étrésillons, on pourra choisir  $i_e$  puis déterminer  $i_n$  ou inversement par :

$$\frac{\lambda}{i_e} + \frac{2h}{i_n} \leq \frac{1-\eta}{\eta} \frac{16 m \nu L}{\pi^2 \varepsilon h^2 s_e} \quad \text{ou} \quad \sigma_e + 2\sigma_n \leq \frac{1-\eta}{\eta} \frac{8 m \nu L}{\pi^2 EI} \quad (19)$$

En dehors de la question du flambage, il y a là une méthode pour déterminer les profils des montants et membrures des poutres VIERENDEEL pour que leur déformabilité ne dépasse pas certaines valeurs imposées par les circonstances.

## V. Efforts secondaires de flexion dans les membrures des poutres en treillis ou à étrésillons.

La flèche supplémentaire due au treillis ou aux étrésillons détermine des efforts secondaires de flexion dans les membrures, en sorte que le moment de flexion dans une section transversale d'une poutre ne sera pas uniquement équilibré par le couple des efforts longitudinaux dans les membrures  $N_n h = M'_n$  que j'appellerai «l'effet poutre», mais aussi par des moments fléchissants propres à chacune des membrures. En cas de membrures identiques, ces moments seront les mêmes dans chacune de celles-ci et égaux à  $\frac{1}{2} M''$ . On aura donc

$$M = M' + M''$$

On partagera  $M$  en  $M'$  et  $M''$  en posant l'égalité des flèches :

$$\frac{1}{2} M'' \cdot \frac{\alpha \beta L^2}{4 E i_e} = M' \frac{\alpha \beta L^2}{4 E I} (1 + \delta)$$

Donc

$$\frac{M''}{M'} = \frac{2(1 + \delta) i_e}{I} = \frac{4 \varrho_e^2}{h^2} (1 + \delta)$$

et le rendement de l'effet poutre sera exprimé par :

$$\frac{M'}{M} = \frac{M'}{M' + M''} = \frac{h^2}{h^2 + 4 \varrho_e^2 (1 + \delta)} \quad (20)$$

Ceci n'est qu'une première approximation, car la poutre entière est libre sur ses appuis, mais il n'en est pas de même des membrures qui sont encastrées sur les premiers montants rigides. Il faudra alors tenir compte de la contre-flèche produite dans les membrures par les moments d'encastrement sur les montants d'extrémités.

On peut alors établir que le rendement de l'effet poutre est donné par :

$$\frac{M'}{M} = \frac{h^2}{h^2 + 4\varrho_e^2(1+\delta)x} \quad (21)$$

où  $x$  est un facteur correctif qui peut varier de 1 à 2 selon la mise en charge (voir 2<sup>me</sup> tableau page 269).

On peut en déduire  $M''$ , moments de flexion secondaires dans les membrures. Je signalerai enfin que l'on peut aussi en déduire une méthode approximative rapide de calcul de la poutre VIERENDEEL en cas de charge symétrique.

*Table alphabétique des notations utilisées.*

$\alpha$	Rapport à $M_0$ de l'ordonnée moyenne du diagramme des $M$	$\lambda$	largeur d'un panneau de treillis
$\beta$	rapport à $\frac{L}{2}$ de la distance de l'extrémité de la poutre au centre de gravité de $\frac{\alpha}{2} M_0 L$	$M$	moment fléchissant
$d$	distance du sommet opposé à une barre	$M_0$	moment fléchissant maximum
$\delta = \frac{f_t}{f_m}$	rapport des flèches dues à $T$ et à $M$	$m$	nombre total de panneaux de la poutre
$\delta_n$	inclinaison de l'axe d'une barre	$N$	effort longitudinal dans une barre
$E$	coefficient d'élasticité longitudinal	$n$	numéro d'un noeud quelconque
$\varepsilon$	réduction de masse élastique due à la présence des goussets	$r = \frac{l^2}{4R^2}$	(voir § Ic) $r = 3$ pour une barre uniforme
$\eta$	rendement du coefficient de sécurité	$P$	charge concentrée
$\theta$	angle de la diagonale sur le montant	$P_0$	charge de flambage d'EULER
$f$	flèche totale au milieu de la poutre	$P_{cr}$	charge critique réduite
$f_m$	flèche due aux $M$	$p$	charge répartie
$f_t$	flèche due aux $T$	$\pi$	rapport = 3,1416
$G$	coefficient d'élasticité transversal	$\varrho$	rayon d'inertie
$h$	hauteur de la poutre	$S$	section d'une poutre
$I = S\varrho^2$	moment d'inertie d'une poutre	$S_r$	section réduite de résistance à $T$
$i$	moment d'inertie d'une barre	$s$	section d'une barre
$L$	portée de la poutre	$s_e$	section d'une membrure
$l$	longueur d'une barre (diagonale)	$\sigma = \frac{l}{E \cdot i}$	masse élastique d'une barre
		$T$	effort tranchant
		$v$	déplacement vertical d'une section
		$x$	abscisse d'une section
		$\xi$	abscisse d'une section courante
		$\omega$	angle de rotation d'une section

## Alphabetisches Verzeichnis der verwendeten Bezeichnungen.

$\alpha$	Verhältnis der mittleren Ordinate des $M$ -Diagramms zu $M_0$	$\lambda$	Feldweite
$\beta$	Verhältnis des Abstandes zwischen dem Balkenende und dem Schwerpunkt $\frac{\alpha}{2} M_0 L$ zu $\frac{L}{2}$	$M$	Biegungsmoment
$d$	Abstand des Drehpols eines Stabes	$M_0$	maximales Biegungsmoment
$\delta = \frac{f_t}{f_m}$	Verhältnis der Durchbiegungen infolge $T$ und $M$	$m$	Anzahl der Felder
$\delta_n$	Neigung einer Stabaxe	$N$	Längskraft in einem Stabe
$E$	Elastizitätsmodul	$n$	Nummer für einen beliebigen Knotenpunkt
$\varepsilon$	Reduktion der elastischen Masse durch die Knotenbleche	$r = \frac{l^2}{4R^2}$	(siehe § 1c); $r = 3$ für einen gleichförmigen Stab
$\eta$	Wirkungsgrad des Sicherheitskoeffizienten	$P$	Einzellast
$\theta$	Winkel zwischen Diagonale und Pfosten	$P_0$	EULER'sche Knicklast
$f$	totale Durchbiegung in Balkenmitte	$P_{cr}$	reduzierte kritische Last
$f_m$	Durchbiegung infolge $M$	$p$	gleichmäßig verteilte Last
$f_t$	Durchbiegung infolge $T$	$\pi$	Verhältniszahl = 3,1416
$G$	Schubmodul	$\varrho$	Trägheitsradius
$h$	Balkenhöhe	$S$	Balkenquerschnitt
$I = S\varrho^2$	Trägheitsmoment eines Balkens	$S_r$	reduzierter Schubquerschnitt
$i$	Trägheitsmoment eines Stabes	$s$	Stabquerschnitt
$L$	Spannweite des Balkens	$s_e$	Gurtquerschnitt
$l$	Stablänge (Diagonale)	$\sigma = \frac{l}{E \cdot i}$	elastische Masse eines Stabes
		$T$	Querkraft
		$v$	vertikale Verschiebung eines Querschnittes
		$x$	Abszisse eines Querschnittes
		$\xi$	Abszisse eines variablen Querschnittes
		$\omega$	Drehwinkel eines Querschnittes

## Alphabetical list of symbols used.

$\alpha$	Ratio to $M_0$ of the mean ordinates of the $M$ diagram	$\varepsilon$	Reduction of the elastic mass due to the gusset plates
$\beta$	Ratio to $\frac{L}{2}$ of the distance between the end of the beam and the centre of gravity of $\frac{\alpha}{2} M_0 L$	$\eta$	Efficiency of the factor of safety
$d$	Distance from the opposite vertex to a bar	$\theta$	Angle between diagonal and upright
$\delta = \frac{f_t}{f_m}$	Ratio of the deflections due to $T$ and to $M$	$f$	Total deflection at middle of beam
$\delta_n$	Inclination of the axis of a bar	$f_m$	Deflection due to $M$
$E$	Modulus of elasticity	$f_t$	Deflection due to $T$
		$G$	Modulus of shear
		$h$	Height of beam
		$I = S\varrho^2$	Moment of inertia of a beam
		$i$	Moment of inertia of a bar
		$L$	Span of the beam

$l$	Length of a bar (diagonal)
$\lambda$	Width of one panel
$M$	Bending moment
$M_0$	Maximum bending moment
$m$	Total number of panels
$N$	Longitudinal force in a bar
$n$	Number for any assemblage point whatever
$\nu = \frac{l^2}{4R^2}$	(see § 1c); $\nu = 3$ for a uniform bar
$P$	Concentrated load
$P_0$	EULER's buckling load
$P_{cr}$	Reduced critical load
$p$	Uniformly distributed load
$\pi$	3,1416

$\rho$	Radius of gyration
$S$	Cross-section of a beam
$S_r$	Reduced section of shear
$s$	Cross-section of a bar
$s_e$	Cross-section of a chord
$\sigma = \frac{l}{E \cdot i}$	Elastic mass of a bar
$T$	Shearing force
$v$	Vertical displacement of a cross-section
$x$	Abscissae of a cross-section
$\xi$	Abscissae of a variable cross-section
$\omega$	Angle of rotation of a cross-section

### Résumé.

La détermination de la flèche des poutres fléchies montre que la flèche totale  $f$  comporte une flèche partielle  $f_m$  due aux moments fléchissants et une flèche  $f_t$  due aux efforts tranchants. Le rapport  $\delta = \frac{f_t}{f_m}$  de ces flèches est spécialement intéressant à discuter pour chaque type de poutre (Tableau p. 269). Il est assez faible et souvent négligeable pour les poutres à âme pleine, mais devient plus important dans les poutres en treillis et même prépondérant ( $\delta > 1$ ) dans les poutres à étrésillons ou du type VIERENDEEL.

Il en résulte comme principale conséquence que la charge critique de flambage qui est déterminée en fonction de la déformabilité de la poutre à la flexion doit être réduite si l'on tient compte également de la déformabilité aux efforts tranchants et cela spécialement dans les poutres à étrésillons. L'on obtient alors la charge critique réelle par la formule (16)

$P_{cr} = \frac{P_0}{1 + \delta}$ . Il n'est pas possible de proportionner l'âme ou le treillis des poutres pour que cette réduction soit nulle. On devra se contenter de les établir en utilisant les expressions de  $\delta$  du tableau (page 269) pour que cette réduction ne dépasse pas une certaine limite que l'on peut s'imposer selon les circonstances (10 à 20% par exemple) (17), (18), (19).

Enfin le coefficient  $\delta$  permet également de déterminer le rendement à la flexion des membrures des poutres en treillis ou à étrésillons (20), (21).

### Zusammenfassung.

Die Bestimmung der Durchbiegung von auf Biegung beanspruchten Trägern zeigt, daß die totale Durchbiegung aus zwei Beiträgen zusammengesetzt ist, nämlich aus dem Anteil  $f_m$  infolge der Biegunsmomente und dem Anteil  $f_t$  infolge der Querkräfte. Es ist von Interesse, das Verhältnis  $\delta = \frac{f_t}{f_m}$  für jede Art Balken zu untersuchen (s. Tabelle S. 269). Für Vollwandträger ist  $\delta$  ziemlich klein und kann in den meisten Fällen vernachlässigt werden; für Fachwerkträger jedoch weist  $\delta$  größere Beträge auf und wird maßgebend ( $\delta > 1$ ) für Vierendeelträger.

Daraus ergibt sich als wichtigste Folgerung, daß die kritische Knicklast, welche von der Deformation des Trägers infolge Biegung abhängig ist, vermindert werden muß, sobald man die Deformation infolge der Querkräfte in Rechnung zieht, was besonders für die Vierendeelträger ins Gewicht fällt. Man erhält in diesem Falle die tatsächliche kritische Knicklast aus der Formel (16):  $P_{kr} = \frac{P_0}{1 + \delta}$ . Es zeigt sich, daß es unmöglich ist, einen Vollwand- oder Fachwerkträger so zu dimensionieren, daß obige Reduktion verschwindet. Man muß sich damit begnügen, diese Träger mit Hilfe von  $\delta$  (siehe Tabelle S. 269) so zu dimensionieren, daß die dadurch bedingte Reduktion eine bestimmte Grenze, die man den Umständen anpassen kann (z. B. 10 bis 20%), nicht überschreitet (Formeln (17), (18), (19)).

Der Koeffizient  $\delta$  erlaubt schließlich, den Wirkungsgrad bei Biegung sowohl für die Fachwerk- wie für die Vierendeelträger zu bestimmen.

### Summary.

Determining the deflection of beams subjected to bending shows that the total deflection is made up of two parts, namely one  $f_m$  due to the bending moments and the other  $f_t$  due to shearing forces. It is of particular interest to investigate the ratio  $\delta = \frac{f_t}{f_m}$  for each type of beam (see Table on page 269). In the case of plate girders  $\delta$  is rather small and can often be neglected, but in lattice girders it becomes more important and in VIERENDEEL girders it is even preponderant ( $\delta > 1$ ).

The principal result following from this is that the critical buckling load, which is dependent on the deformation of the beam in consequence of bending, must be reduced when the deformation due to shearing forces is also taken into account, particularly in VIERENDEEL girders. In that case the actual critical buckling load is obtained from formula (16):  $P_{kr} = \frac{P_0}{1 + \delta}$ . It is shown to be impossible to choose the dimensions of a plate or lattice girder in such a way that this reduction completely disappears. It is necessary to be satisfied with dimensioning these girders from the values of  $\delta$  given in the Table on page 269, so that this reduction does not exceed a certain limit which may be chosen in accordance with the particular circumstances (for instance 10 to 20%) (formulae (17), (18), (19)).

Finally, the coefficient  $\delta$  also allows the work done in bending to be determined in lattice girders and also in VIERENDEEL girders (formulae (20), (21)).