

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen  
**Band:** 7 (1943-1944)

**Artikel:** Schwingungen von Kirchtürmen bei elastischer Einspannung im Baugrunde  
**Autor:** Lardy, Pierre  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-8002>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SCHWINGUNGEN VON KIRCHTÜRMEN BEI ELASTISCHER EINSPANNUNG IM BAUGRUNDE.

OSCILLATIONS DES CLOCHERS ENCASTRÉS ÉLASTIQUEMENT  
DANS LE TERRAIN.

THE OSCILLATIONS IN CHURCH TOWERS FIXED ELASTICALLY  
IN THE GROUND.

Ing. Dr. PIERRE LARDY, Zürich.

Die Untersuchung der Transversalschwingungen von Kirchtürmen, hervorgerufen durch das Läuten der Glocken, bildet ein wichtiges Problem des Kirchturmbaues. Sie zerfällt in zwei Teile:

1. Ermittlung der Eigenschwingungen (Eigenfrequenzen) des Turmes zur Abklärung der möglichen Resonanzerscheinungen beim Glockenläuten.
2. Berechnung der durch das Glockenläuten erzwungenen Schwingungen und der daraus entstehenden Beanspruchungen des Turmes.

Die bisherige Berechnungsweise setzte feste Einspannung des Turmes im Baugrunde voraus<sup>1)</sup>. Der Zweck dieser Arbeit ist, das Problem, von der wesentlich allgemeineren Voraussetzung einer elastischen Einspannung im Baugrunde ausgehend, zu behandeln und für die Integrationskonstanten des Schwingungszustandes geschlossene, einfache Ausdrücke anzugeben, was u. W. bisher auch nicht für den einfacheren Spezialfall der festen Einspannung geschehen ist<sup>2)</sup>. Damit kann ein für allemal die oft mühsame und langwierige Integration der Differentialgleichung mit den zahlreichen Randbedingungen umgangen werden, was für den Ingenieur in der Praxis willkommen sein dürfte.

Es zeigt sich, daß durch die Einführung einer elastischen Einspannung wesentliche Unterschiede gegenüber früher entstehen. Im besonderen können die Eigenfrequenzen stark von denjenigen bei fester Einspannung abweichen, und zwar fallen sie erwartungsgemäß kleiner aus. Dies ist besonders wichtig, wenn es sich darum handelt, die Gefahr von Resonanzerscheinungen beim Glockenläuten zu untersuchen. Auch die Beanspruchungen durch die Biegungsmomente des Schwingungszustandes können infolge der elastischen Einspannung stark verschieden sein.

Im ersten Teil dieser Arbeit werden die Eigenschwingungen behandelt. Sie führen zu einer Frequenzengleichung, welche infolge der elastischen Einspannung gegenüber früher ein Zusatzglied enthält und an Hand der beigegebenen graphischen Darstellung (Fig. 2) ohne Mühe gelöst werden kann. Es folgen dann die analytischen Ausdrücke für die Eigenschwingungsformen. Für zahlreiche Fälle der praktischen Anwendung, wo der „Frequenzparameter“  $m$  klein ist, erhalten obige Ausdrücke durch Reihenentwicklung eine besonders einfache, der numerischen Rechnung zugängliche Gestalt.

<sup>1)</sup> TIMOSHENKO, Theory of Elasticity. HORT, Technische Schwingungslehre. Roš, Schweiz. Bauzeitung vom 11. Mai 1940. G. SCHNEIDER, Schweiz. Bauzeitung vom 13.

<sup>2)</sup> Dr. PAUL KOENIG, Diss. E. T. H. 1930, No. 601.

Im zweiten Teil werden die durch das Glockenläuten erzwungenen Schwingungen behandelt (für eine einzige Komponente der periodischen Lagerkraft einer Glocke) und das Resultat der Integration in geschlossener Form angegeben. Auch hier können die Ausdrücke für die Integrationskonstanten bei kleinen Werten von  $m$  in einfache Näherungsausdrücke umgewandelt werden. Es folgen einige Spezialfälle, die sich auf die feste Einspannung sowie auf eine spezielle Lage der Glocken beziehen.

Zum Schluß veranschaulicht ein numerisches Beispiel die gewonnenen Resultate.

Zur allgemeinen Orientierung sei noch auf einige Resultate aufmerksam gemacht, die aus der in Fußnote 2) zitierten Dissertation von Dr. PAUL KOENIG stammen und kurz zusammengefaßt folgendes aussagen: Jeder Glocke entsprechen zwei sich überlagernde erzwungene Schwingungen, die eine im Takte der Glocke, die andere in dreimal schnellerem Takte. Daraus folgt, daß zur Vermeidung der Resonanzgefahr die Grundeigenschwingung des Turmes weder im Takte der Glocke, noch in dreimal schnellerem Takte erfolgen darf. Im allgemeinen genügt die Betrachtung der Eigenfrequenz der Grundschwingung des Turmes (das ist der kleinste Wert der unendlich vielen Lösungen der Frequenzengleichung), da die übrigen Eigenfrequenzen außerhalb des Resonanzbereiches liegen. Die Glockenkräfte, d. h. die horizontalen Komponenten der Lagerkräfte, sind wohl periodisch, jedoch nicht harmonische Funktionen der Zeit. Ihre beiden ersten harmonischen Komponenten (mit den Frequenzen 1:3, die übrigen können vernachlässigt werden) gewinnt man aus der harmonischen Analyse, und ihr Größenverhältnis sowie dasjenige der einzelnen Komponente zum Maximalwert<sup>3)</sup> kann für alle Glocken als konstant betrachtet werden<sup>4)</sup>. Das Schlußresultat entsteht durch Überlagerung sämtlicher Schwingungsformen.

### 1. Eigenschwingungen.

Der Turm ist in Fig. 1 unten als elastisch eingespannter und oben freier Stab von der Länge  $l$  dargestellt. Die Grundgleichung für die Transversalschwingungen eines biegungsfesten Stabes lautet:

$$\rho \cdot F \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad (1)$$

Darin sind:

$x$  = Abszisse in cm (+ nach oben)

$y$  = Ordinate in cm (+ nach rechts)

$\rho$  = Dichte des Turmmaterials in  $\frac{\text{kg} \cdot \text{sec}^2}{\text{cm}^4}$

$F$  = Querschnittsfläche in  $\text{cm}^2$

$I$  = Trägheitsmoment des Querschnittes in  $\text{cm}^4$  }<sup>5)</sup>

$E$  = Elastizitätsmodul des Turmmaterials in  $\text{kg}/\text{cm}^2$

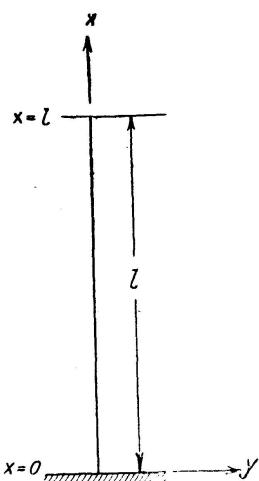


Fig. 1

<sup>3)</sup> Siehe<sup>2)</sup>, Seite 37 und 38.

<sup>4)</sup> Über den Maximalwert der Lagerkomponenten siehe<sup>1)</sup>: G. SCHNEIDER, Schweiz. Bauzeitung.

<sup>5)</sup> Für  $I$  und  $F$  werden konstante Mittelwerte eingeführt, was in den meisten praktischen Fällen ohne weiteres zulässig ist.

Zur Lösung der partiellen Differentialgleichung (1) dient der Ansatz:

$$y = \Phi(x) \cdot \cos \nu t \quad (2)$$

worin  $\Phi(x)$  eine Funktion von  $x$  allein ist und  $\nu$  die Frequenz ( $\text{sec}^{-1}$ ) bedeutet. Durch Einsetzen und Division durch  $\cos \nu t$  folgt für  $\Phi(x)$  die totale Differentialgleichung:

$$\frac{d^4 \Phi(x)}{dx^4} - \frac{\nu^2 \varrho F}{EI} \cdot \Phi(x) = 0 \quad (3)$$

Zur Abkürzung setzt man:

$$\frac{\nu^2 \varrho F}{EI} = \frac{m^4}{l^4} \quad \text{oder} \quad m = l \sqrt[4]{\frac{\nu^2 \varrho F}{EI}} \quad (4)$$

und erhält nach einigen Umformungen für  $\Phi(x)$  die allgemeine Lösung in der Form

$$\Phi(x) = A \cdot Ch\left(\frac{mx}{l}\right) + B \cdot Sh\left(\frac{mx}{l}\right) + C \cdot \cos\left(\frac{mx}{l}\right) + D \cdot \sin\left(\frac{mx}{l}\right) \quad (5)$$

Darin sind  $A, B, C$  und  $D$  die Integrationskonstanten, welche durch die nun folgenden Randbedingungen bestimmt werden.

### R a n d b e d i n g u n g e n.

Diese gelten für jeden Wert der variablen  $t$ , also auch für  $t = 0$ , d. h. die 4 Randbedingungen können durch  $\Phi(x)$  statt durch  $y$  ausgedrückt werden.

1. An der Einspannstelle  $x = 0$  ist auch  $y = 0$  oder  $\Phi(0) = 0$ , woraus

$$C = -A \quad (6)$$

folgt

2. Für  $x = 0$  soll die Einspannung elastisch sein, d. h. es besteht für den Drehwinkel  $w$  die Relation:

$$w = -\varepsilon M \quad (7)$$

Durch Einführung der Bettungsziffer  $c$  des Baugrundes und des Trägheitsmomentes  $I_F$  der Fundation wird bekanntlich  $\varepsilon = \frac{1}{C \cdot I_F}$

$$(\varepsilon = w \quad \text{für} \quad M = -1)$$

$$\text{Aus} \quad w = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{d \Phi}{dx}\right)_0$$

$$\text{und} \quad M = -EI \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_0 = -EI \left(\frac{d^2 \Phi}{dx^2}\right)_0$$

$$\text{folgt} \quad \left(\frac{d \Phi}{dx}\right)_0 = \varepsilon EI \cdot \left(\frac{d^2 \Phi}{dx^2}\right)_0$$

und daraus eine Beziehung für die Integrationskonstanten

$$B + D = \frac{2 \varepsilon EI m \cdot A}{l} \quad (8)$$

Mit der Abkürzung

$$\lambda = \frac{\varepsilon EI}{l} = \frac{EI}{CI_F l} \quad (9)$$

ist

$$B + D = 2\lambda m A \quad (10)$$

3. Für  $x = l$  (Stabende) muß das Moment  $M = -EI \frac{d^2 \Phi}{dx^2} = 0$  sein.

Dies ergibt

$$A(Chm + \cos m) + B \cdot Shm - D \cdot \sin m = 0 \quad (11)$$

4. Für  $x = l$  muß die Querkraft  $Q = -EI \frac{d^3 \Phi}{dx^3} = 0$  sein; es folgt

$$A(Shm - \sin m) + B \cdot Chm - D \cdot \cos m = 0 \quad (12)$$

Aus den 4 homogenen Gleichungen (6), (10), (11) und (12) sind nur drei Integrationskonstanten bestimmbar; die 4., z. B.  $A$ , ist willkürlich. Indem man für die 3 letzten Gleichungen die Verträglichkeitsbedingung formuliert, erhält man nach verschiedenen Umformungen folgende allgemeine Frequenzengleichung für  $m$ :

$$1 + \cos m \cdot Chm + \lambda m(\cos m \cdot Shm - \sin m \cdot Chm) = 0 \quad (13)$$

wo

$$\lambda = \frac{\varepsilon EI}{l} \quad \text{ist.}$$

Der Einfluß der elastischen Einspannung kommt darin im Zusatzglied mit  $\lambda$  zur Geltung. Es ist bemerkenswert und aus Fig. 2 ersichtlich, daß schon für kleine Werte von  $\lambda$  die entsprechenden Frequenzparameter  $m$  stark abnehmen. Für feste Einspannung ist  $\varepsilon = \lambda = 0$ , und die Gl. (13) geht über in die bekannte Form:

$$1 + \cos m \cdot Chm = 0.$$

Gleichung (13) hat unendlich viele Lösungen, die man bei gegebenem  $\lambda$  durch sukzessive Approximation finden kann, oder einfacher noch aus der graphischen Darstellung der Fig. 2, wo Gleichung (13) in der Form

$$\lambda = -\frac{(1 + \cos m \cdot Chm)}{(\cos m \cdot Shm - \sin m \cdot Chm)} \cdot \frac{1}{m} = -\frac{f(m)}{g(m)} \cdot \frac{1}{m}$$

dargestellt wurde. ( $g(m)$  ist übrigens die Ableitung von  $f(m)$  nach  $m$ .) Aus Fig. 2 ist deutlich ersichtlich, daß für  $\lambda \neq 0$  die zugehörigen  $m$ -Werte kleiner sind als bei  $\lambda = 0$ ; d. h. nach Gleichung (4), daß die entsprechenden Eigenfrequenzen ebenfalls kleiner sind als diejenigen bei fester Einspannung.

Für jede Lösung  $m$  der Gleichung (13) kann nun die zugehörige analytische Schwingungsform, d. h. die Funktion  $\Phi(x)$  bestimmt werden.

Bevor wir dies tun, führen wir vier Funktionen ein, welche formal und rechnerisch die weiteren Berechnungen und Resultate bedeutend vereinfachen. Es sind dies die folgenden:

$$\left. \begin{array}{l} C_x = Chx + \cos x \\ \bar{C}_x = Chx - \cos x \\ S_x = Shx + \sin x \\ \bar{S}_x = Shx - \sin x \end{array} \right\} \quad (14)$$

welche durch Differentiation zyklisch vertauscht werden. Sie sind in Fig. 3 und 4 dargestellt für die Argumentwerte  $0 \leq x \leq 4$ .

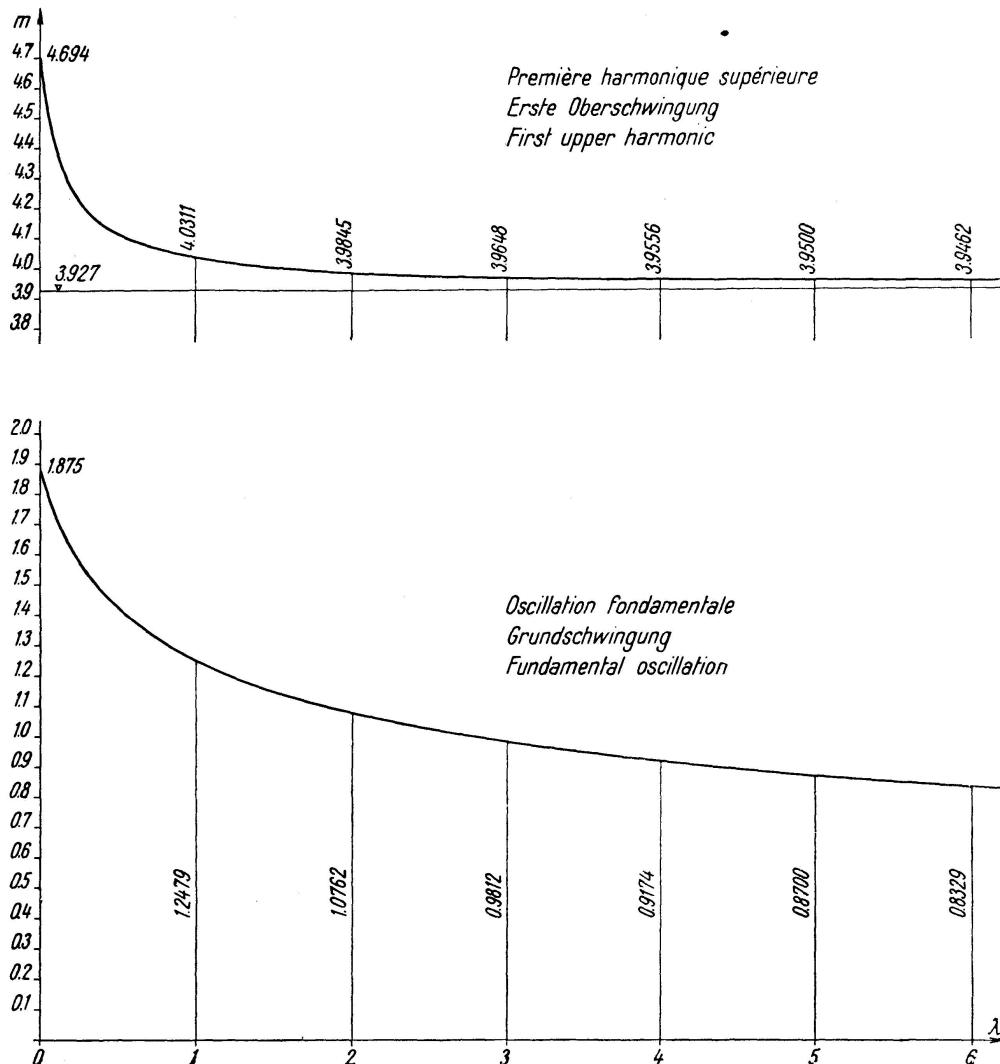


Fig. 2 Courbes des fréquences  
 Frequenzenkurven  
 Frequency curves }  $1 + \cos m Ch m + \lambda m (\cos m Sh m - \sin m Ch m) = 0$

Führt man nun diese Funktionen in  $\Phi(x)$  ein, so folgt, nach einigen Umformungen, bei denen statt  $x$  das Argument  $\frac{mx}{l} = m\xi$  gesetzt wird,

$$\Phi(x) = A' \{S_m \cdot \bar{C}_{m\xi} - C_m \cdot \bar{S}_{m\xi} + 2\lambda m (\sin m \cdot \bar{S}_{m\xi} + S_m \cdot \sin m \xi)\}. \quad (15)^6)$$

Die zugehörigen Biegunsmomente der Schwingungsform ergeben sich aus

$M = -EI \frac{d^2 \Phi}{dx^2}$  zu:

$$M = -EI \frac{m^2}{l^2} \cdot A' \{S_m \cdot C_{m\xi} - C_m \cdot S_{m\xi} + 2\lambda m (\sin m \cdot S_{m\xi} - S_m \cdot \sin m \xi)\} \quad (16)$$

<sup>6)</sup>  $\frac{A}{S_m} = A'$  ist eine willkürliche Konstante und kann nur durch eine zusätzliche Bedingung bestimmt werden.

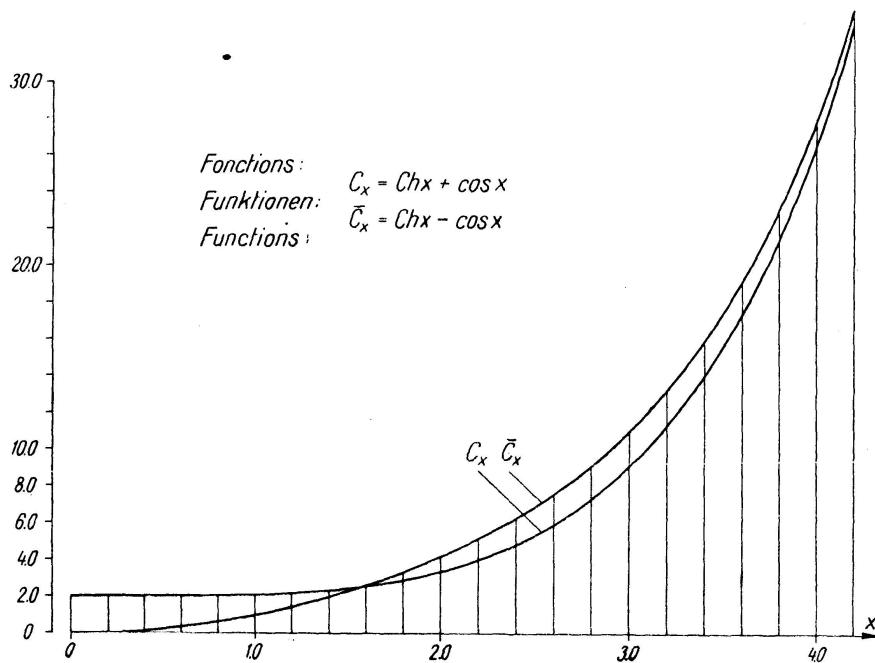


Fig. 3

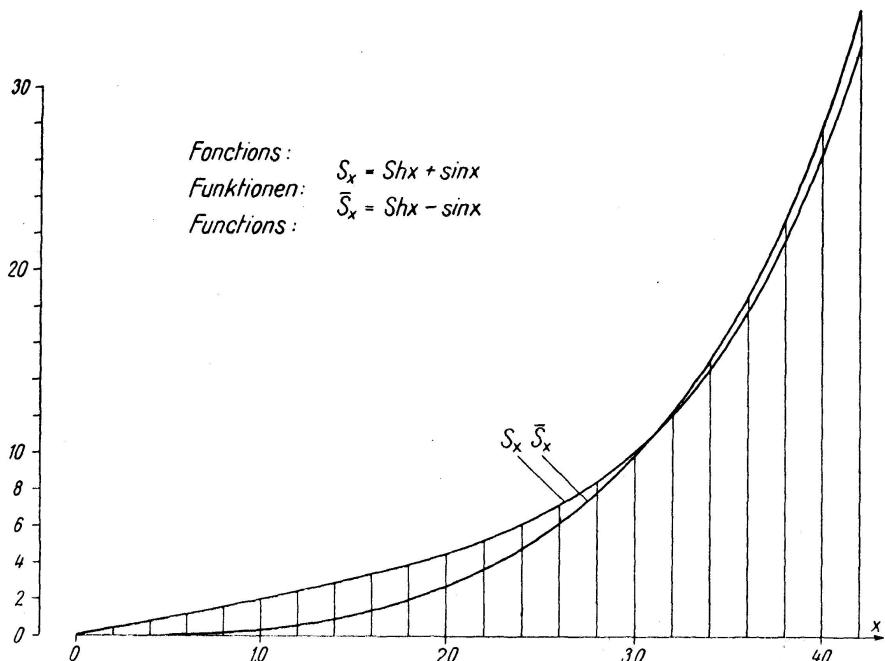


Fig. 4

### Näherungsberechnungen.

Bei den praktisch vorkommenden Fällen zeigt es sich im allgemeinen, daß der Frequenzparameter  $m_1$  der Grundschwingung, welcher für die Resonanzgefahr sozusagen immer ausschlaggebend ist, infolge der elastischen Einspannung kleine Werte annimmt. (Für feste Einspannung ist  $m_1 \approx 0,597 \cdot \pi = 1,8755$ .) Dies legt den Gedanken nahe, mittelst Reihenentwicklungen die gefundenen Ausdrücke für die Schwingungsformen zu vereinfachen. Aus den bekannten Reihenentwicklungen für die trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen folgt für die neu definierten Funktionen nach Gleichung (14):

$$\left. \begin{array}{l} C_x = 2 \left[ 1 + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^8}{8!} + \dots + \frac{x^{4n}}{(4n)!} + \dots \right] \\ \bar{C}_x = 2 \left[ \frac{x^2}{2!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^{10}}{10!} + \dots + \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} + \dots \right] \\ S_x = 2 \left[ \frac{x}{1!} + \frac{x^5}{9!} + \frac{x^9}{9!} + \dots + \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} + \dots \right] \\ \bar{S}_x = 2 \left[ \frac{x^3}{3!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{11}}{11!} + \dots + \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!} + \dots \right] \end{array} \right\} \quad (17)$$

Diese Reihenentwicklungen konvergieren gut und können für die Argumente  $m$  und  $m\xi \leq 1,4$  nach dem ersten, resp. zweiten Gliede abgebrochen werden, da der Fehler weniger als 1% ausmacht.

Aus der Frequenzengleichung (13) entsteht auf diese Weise die einfache Beziehung:

$$1 + \cos m \cdot Ch m + \lambda m (\cos m \cdot Sh m - \sin m \cdot Ch m) \cong 2 - \frac{m^4}{6} (1 + 4\lambda) = 0$$

oder:

$$\boxed{m^4 = \frac{12}{1 + 4\lambda}} \quad (18)$$

Wird darin zur Kontrolle  $\lambda = 0$  gesetzt, so folgt:  $m^4 = 12$  und  $m \cong 1,864$  statt 1,8755, was die Güte der Approximation für Gleichung (18) beweist. Demnach kann für die Bestimmung von  $m_1$  statt der Gl. (13) die viel einfachere Beziehung aus Gl. (18) benutzt werden, da der Maximalfehler für  $m \leq 1,4$  ( $\lambda \geq 0,54$ ) ungefähr 2% beträgt.

Es gelingt auch, für die Schwingungsform  $\Phi(x)$  der Grundeigenschwingung, sowie für die entsprechenden Biegungsmomente  $M(x)$  aus den Reihenentwicklungen Ausdrücke zu gewinnen, welche die numerische Rechnung wesentlich vereinfachen und für die praktisch wichtigen Werte von  $\lambda$  (oder  $m$ ) einen hohen Genauigkeitsgrad besitzen. Die Ableitung dieser Ausdrücke verlangt eine sorgfältige Untersuchung, welche Glieder bei den Reihenentwicklungen vernachlässigt werden dürfen (von Fall zu Fall verschieden) und benutzt die Beziehung der Gl. (18),  $m^4 = \frac{12}{1 + 4\lambda}$ . Es sei hier lediglich das Resultat angegeben:

$$\Phi(x) \cong A'' \xi \left[ 2\lambda + \xi - \frac{1 + 4\lambda}{1,1 + 4\lambda} \cdot \frac{\xi^2}{2} \right] \cong A'' \xi \left[ 2\lambda + \xi - \frac{\xi^2}{2} \right] \quad (19)$$

$$M(x) \cong -\frac{2EI}{l^2} \cdot A'' (1 - \xi)^2 [1 + K_1 \xi + K_2 \xi^2 (3 - \xi)] \cong -\frac{2EI}{l^2} \cdot A'' (1 - \xi)^2 [1 + K_1 \xi] \quad (20)$$

Darir sind:

$$\xi = \frac{x}{l} \quad \text{und} \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad A'' = A m^2 \quad (A'' \text{ willkürlich})$$

$$K_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1,4 + 4\lambda}{1,1 + 4\lambda}, \quad K_2 = \frac{1}{10(1,1 + 4\lambda)} \quad \text{oft} \cong 0.$$

Der hohe Genauigkeitsgrad der Ausdrücke (19) und (20) geht aus folgenden Werten für den Maximalfehler hervor: für  $m = 1$  beträgt er 1% für  $\Phi$  und 0,2% für  $M$ , für  $m = 1,4$  4% für  $\Phi$  und 0,8% für  $M$ .

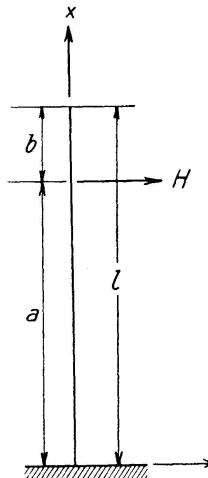
In den Ausdrücken (19) und (20) kommen die 4 Randbedingungen deutlich zum Ausdruck. Für  $x = 0$  ist  $\Phi = 0$  und  $\frac{d\Phi}{dx} = \frac{2\lambda m^2 A}{l} = -\varepsilon M(0)$  Winkel bei elastischer Einspannung. Ferner besitzt  $M(x)$  eine Doppelwurzel  $\xi = 1$ , weil für  $x = l$  auch die Querkraft Null ist.

Zusammenfassend kann über die Eigenschwingungen gesagt werden, daß im Falle der elastischen Einspannung ( $\lambda \neq 0$ ) die Schwingungen langsamer (Gl. (13) und (18)), deren Amplituden größer (Gl. (19)) und die Biegunsmomente (Gl. (20)) kleiner werden als bei fester Einspannung. Wesentlich bleibt für den praktischen Fall vor allem die Verschiebung des Resonanzbereiches und die möglicherweise dadurch bedingten viel ungünstigeren Verhältnisse beim Glockenläuten, welche zu einer ernstlichen Gefährdung des Turmes führen können. Dies kommt im 2. Abschnitt deutlich zum Ausdruck.

## 2. Erzwungene Schwingungen beim Glockenläuten.

Wir führen die Berechnung nur für eine Glocke durch; die periodische Kraft  $H$  (siehe Fig. 5) sei bereits eine harmonische Komponente der horizontalen Glockenkraft (siehe Einleitung) und greife in der Höhe  $a$  an ( $a + b = l$ ) mit der Störfrequenz  $\nu_c$ .

Die Ausgangsgleichung für die erzwungenen Transversalschwingungen ist wieder Gl. (1):



mit derselben Bedeutung der Variablen und Konstanten. Die Berechnung weist hier infolge der neuen und zahlreichen Randbedingungen wesentliche Unterschiede auf. Es sind 2 Lösungszweige für  $y$  einzuführen, je nachdem  $x < a$  oder  $x > a$  ist. Mit den Lösungsansätzen

$$\begin{aligned} y_1 &= \Phi_1(x) \cdot \cos(\nu t) \\ y_2 &= \Phi_2(x) \cdot \cos(\nu t) \end{aligned}$$

Fig. 5

folgt analog:

$$\Phi_1(x) = A_1 \cdot Ch\left(\frac{mx}{l}\right) + B_1 \cdot Sh\left(\frac{mx}{l}\right) + C_1 \cdot \cos\left(\frac{mx}{l}\right) + D_1 \cdot \sin\left(\frac{mx}{l}\right) \quad (21)$$

$$\Phi_2(x) = A_2 \cdot Ch\left(\frac{mx}{l}\right) + B_2 \cdot Sh\left(\frac{mx}{l}\right) + C_2 \cdot \cos\left(\frac{mx}{l}\right) + D_2 \cdot \sin\left(\frac{mx}{l}\right) \quad (22)$$

Dabei ist wiederum

$$m = l \sqrt[4]{\frac{\nu^2 \rho F}{EI}} \quad (\text{Siehe Gl. (4)})$$

R a n d b e d i n g u n g e n<sup>7)</sup> (für  $t = 0$  ausgedrückt).

1.  $x = 0$ :  $\Phi_1 = 0$  ergibt  $C_1 = -A_1$  (wie Gl. (6)).

2.  $x = 0$ : Elastische Einspannung; wie früher folgt:

$$B_1 + D_1 = 2\lambda m A_1 \quad (\text{wie Gl. (10)}).$$

3.  $x = a$ : Das zu übertragende Biegunsmoment sei  $M_a = M_a^* \cdot \cos \nu t$ .

<sup>7)</sup> Dr. KOENIG, Diss. S. 39 ff.

Es muß

$$\left( \frac{d^2 \Phi_1}{dx^2} \right)_a = - \frac{M_a^*}{EI} \quad \text{sein und daraus folgt:}$$

$$A_1 \left[ Ch\left(\frac{ma}{l}\right) + \cos\left(\frac{ma}{l}\right) \right] + B_1 \cdot Sh\left(\frac{ma}{l}\right) - D_1 \cdot \sin\left(\frac{ma}{l}\right) = - \frac{M_a^* \cdot l^2}{EI m^2} \quad (23)$$

4.  $x = a$ : Analog folgt für die zu übertragende Querkraft

$$\left( \frac{d^3 \Phi_1}{dx^3} \right)_a = - \frac{Q_a^*}{EI} \quad \text{und daraus}$$

$$A_1 \left[ Sh\left(\frac{ma}{l}\right) - \sin\left(\frac{ma}{l}\right) \right] + B_1 \cdot Ch\left(\frac{ma}{l}\right) - D_1 \cdot \cos\left(\frac{ma}{l}\right) = - \frac{Q_a^* \cdot l^3}{EI m^3} \quad (24)$$

Nun folgen die Randbedingungen für den Stab 2 ( $x \geq a$ ), der an seinem untern Ende außer  $Q_a$  noch die periodische Kraft  $H \cdot \cos \nu t$  aufzunehmen hat.

5.  $x = a$ : Stetiger Übergang der Ordinate, d. h.:  $\Phi_2(a) = \Phi_1(a)$  und daraus:

$$A_1 \left[ Ch\left(\frac{ma}{l}\right) - \cos\left(\frac{ma}{l}\right) \right] + B_1 \cdot Sh\left(\frac{ma}{l}\right) + D_1 \cdot \sin\left(\frac{ma}{l}\right) = \\ A_2 \cdot Ch\left(\frac{ma}{l}\right) + B_2 \cdot Sh\left(\frac{ma}{l}\right) + C_2 \cdot \cos\left(\frac{ma}{l}\right) + D_2 \cdot \sin\left(\frac{ma}{l}\right) \quad (25)$$

6.  $x = a$ : Stetiger Übergang der Tangente, d. h.:  $\left( \frac{d \Phi_2}{dx} \right)_a = \left( \frac{d \Phi_1}{dx} \right)_a$

und daraus:

$$A_1 \left[ Sh\left(\frac{ma}{l}\right) + \sin\left(\frac{ma}{l}\right) \right] + B_1 Ch\left(\frac{ma}{l}\right) + D_1 \cos\left(\frac{ma}{l}\right) = \\ A_2 Sh\left(\frac{ma}{l}\right) + B_2 Ch\left(\frac{ma}{l}\right) - C_2 \sin\left(\frac{ma}{l}\right) + D_2 \cos\left(\frac{ma}{l}\right) \quad (26)$$

7.  $x = a$ : Gleiches Biegemoment ergibt:  $\left( \frac{d^2 \Phi_2}{dx^2} \right)_a = - \frac{M_a^*}{EI}$ ,

woraus

$$A_2 Ch\left(\frac{ma}{l}\right) + B_2 Sh\left(\frac{ma}{l}\right) - C_2 \cos\left(\frac{ma}{l}\right) - D_2 \sin\left(\frac{ma}{l}\right) = - \frac{M_a^* l^2}{EI m^2} \quad (27)$$

8.  $x = a$ : Schubkraft aus  $Q_a^*$  und  $H$  ergibt  $\left( \frac{d^3 \Phi_2}{dx^3} \right)_a = - \frac{(Q_a^* - H)}{EI}$  und folglich

$$A_2 Sh\left(\frac{ma}{l}\right) + B_2 Ch\left(\frac{ma}{l}\right) + C_2 \sin\left(\frac{ma}{l}\right) - D_2 \cos\left(\frac{ma}{l}\right) = - \frac{(Q_a^* - H) l^3}{EI m^3} \quad (28)$$

Die 8. Randbedingung zieht ihrerseits, wie man leicht einsieht, noch die weitere Forderung

$$\nu = \nu_c$$

nach sich; d. h. die erzwungene Schwingung des Turmes erfolgt im Takte der erregenden Kraft. Daraus folgt der Wert des entsprechenden Frequenzparameters zu

$$m = m_c = l \sqrt[4]{\frac{\nu_c^2 \varrho F}{EI}} \quad (29)$$

9.  $x = l: M = 0$  am freien Ende, also

$$\left( \frac{d^2 \Phi_2}{dx^2} \right)_l = 0 = A_2 Ch m + B_2 Sh m - C_2 \cos m - D_2 \sin m \quad (30)$$

10.  $x = l: Q = 0$  am freien Ende, also

$$\left( \frac{d^3 \Phi_2}{dx^3} \right)_l = 0 = A_2 Sh m + B_2 Ch m + C_2 \sin m - D_2 \cos m \quad (31)$$

Es entsteht somit ein System von 10 Gleichungen mit den 10 Unbekannten  $A_1, \dots, D_1, A_2, \dots, D_2, M_a^*$  und  $Q_a^*$  wobei die 2 letzten  $M_a^*$  und  $Q_a^*$  nicht von Interesse sind und übrigens sofort eliminiert werden können. Entgegen der bisherigen Vermutung können die übrigen 8 Gleichungen, allerdings nach umfangreichen Operationen, allgemein gelöst und für die Integrationskonstanten einfache, geschlossene Ausdrücke gewonnen werden. Dabei war das systematische Vorgehen bei der Elimination wesentlich. Zur formalen und rechnerischen Vereinfachung wurden auch hier die durch die Gleichungen (14) definierten Funktionen wieder eingeführt. Es zeigt sich, daß die 6 Unbekannten  $C_1, D_1, A_2, B_2, C_2$  und  $D_2$  durch die beiden  $A_1$  und  $B_1$  ausgedrückt und demnach beider letzteren als „Basissystem“ aufgefaßt werden können. Als Resultat der Elimination bekommen wir:

$$\left. \begin{array}{l} A_1 = K \cdot \frac{[C_{m\beta} \cdot S_m - S_{m\beta} \cdot C_m]}{\psi(\lambda, m)} \\ B_1 = K \cdot \frac{[S_{m\beta} \cdot \bar{S}_m - C_{m\beta} \cdot C_m + 2\lambda m (\sin m \cdot C_{m\beta} - \cos m \cdot S_{m\beta})]}{\psi(\lambda, m)} \\ C_1 = -A_1 \\ D_1 = 2\lambda m A_1 - B_1 \end{array} \right\} \quad (32)$$

$$\left. \begin{array}{l} A_2 = A_1 - 2K \cdot Sh \left( \frac{ma}{l} \right) \\ B_2 = B_1 + 2K \cdot Ch \left( \frac{ma}{l} \right) \\ C_2 = -A_1 + 2K \cdot \sin \left( \frac{ma}{l} \right) \\ D_2 = D_1 - 2K \cdot \cos \left( \frac{ma}{l} \right) \end{array} \right\} \quad (33)$$

$$\text{wo: } K = \frac{Hl^3}{4EI m^3} \quad \text{und mit} \quad \beta = \frac{b}{l} \quad \text{nach (14)}$$

$$C_{m\beta} = Ch \left( \frac{mb}{l} \right) + \cos \left( \frac{mb}{l} \right)$$

$$S_{m\beta} = Sh \left( \frac{mb}{l} \right) + \sin \left( \frac{mb}{l} \right)$$

usw.

Für  $m$  ist jetzt überall der durch Gl. (29) definierte Wert  $m_c$  als Funktion

der Störungsfrequenz  $\nu_c$  einzusetzen. Der Nennerausdruck  $\psi(\lambda, m)$  ist nichts anderes als die linke Seite der Frequenzengleichung (13) für  $m = m_c$ , nämlich:

$$\psi(\lambda, m) \equiv 1 + \cos m_c \cdot Ch m_c + \lambda m_c (\cos m_c \cdot Sh m_c - \sin m_c \cdot Ch m_c).$$

Dieses Resultat entspricht den Erwartungen und veranschaulicht rein formal den Zustand der Resonanz, der dann eintritt, wenn  $m = m_c$  eine Wurzel von  $\psi(\lambda, m)$  ist, also die Gleichung (13) erfüllt und mit einem der Eigenschwingungswerte  $m$  übereinstimmt; d. h.  $\psi(\lambda, m) = 0$  und sämtliche Integrationskonstanten  $A_1, \dots, D_1, A_2, \dots, D_2$  werden  $\infty$  groß, wodurch gerade die Resonanz definiert ist.

Im Gegensatz zu den Eigenschwingungen sind hier alle Integrationskonstanten durch die Randbedingungen eindeutig bestimmt. Ihre numerische Auswertung bietet keinerlei Schwierigkeiten und führt mit Hilfe der Kurven in den Fig. 3 und 4 (oder mit Tabellen) rasch zum Ziel.

Gewöhnlich ist  $\beta = \frac{b}{l}$  klein, sodaß vor allem die Schwingungsform  $\Phi_1$  sowie das zugehörige Biegunsmoment  $M_1$  für die Untersuchung wichtiger sind als  $\Phi_2$  und  $M_2$ . Sie können an Hand der Ausdrücke (32) formal einfach dargestellt werden:

$$\Phi_1(x) = A_1 \left[ \bar{C}_{m\xi} + \frac{B_1}{A_1} \cdot \bar{S}_{m\xi} + 2\lambda m \cdot \sin(m\xi) \right] \quad (34)$$

$$M_1(x) = -\frac{EI m^2}{l^2} \cdot A_1 \left[ C_{m\xi} + \frac{B_1}{A_1} \cdot S_{m\xi} + 2\lambda m \cdot \sin(m\xi) \right] \quad (35)$$

worin für  $\frac{B_1}{A_1}$  nur das Verhältnis der eckigen Klammern in (32) zu setzen ist.

Der Faktor  $-\frac{EI m^2}{l^2} \cdot A_1$  in Gl. (35) ergibt ausmultipliziert einfach

$$-\frac{Hl}{4m} \cdot \frac{[C_{m\xi} \cdot S_m - S_{m\xi} \cdot C_m]}{\psi(\lambda, m)},$$

sodaß

$$M_1(x) = -\frac{Hl}{4m} \cdot \frac{[C_{m\xi} \cdot S_m - S_{m\xi} \cdot C_m]}{\psi(\lambda, m)} \left\{ C_{m\xi} + \frac{B_1}{A_1} \cdot S_{m\xi} - 2\lambda m \cdot \sin(m\xi) \right\} \quad (35')$$

ist. Auf die allgemeine Diskussion der Ausdrücke (34) und (35) kann hier nicht eingegangen werden. Die Frage der Resonanzgefahr ist beim Vergleich der Werte  $m_c$  und derjenigen  $m$  der Eigenfrequenzgleichung (13) abgeklärt.

Oft handelt es sich darum, ein Bild über die durch das Glockenläuten hervorgerufenen Maximalmomente zu erhalten. Es sind diesbezüglich die „analytischen“ Maxima ( $\frac{dM}{dx} = 0$ ) und die „Randmaxima“ (größter Absolutwert im betrachteten Intervall) zu unterscheiden. Bei letzteren hat das Moment den größten Absolutwert für  $x = 0$ , was obige Formeln wesentlich vereinfacht. Eine allgemeine Aussage über die analytischen Maxima ist schwierig wegen der Abhängigkeit des Biegunsmomentes von den 3 Parametern  $m_c$ ,  $\lambda$  und  $\beta$ . (Der Ausdruck für das Maximalmoment kann übrigens auf eine besonders einfache Form gebracht werden.) Das Randmaximum für  $x = 0$  an der Einspannstelle wird, wegen

$$C_{m\xi} = 2 \quad \text{und} \quad S_{m\xi} = \sin(m\xi) = 0$$

$$\text{besonders einfach: } M_1(0) = -\frac{Hl(C_{m\beta} \cdot S_m - S_{m\beta} \cdot C_m)}{2m \cdot \psi(\lambda, m)} \quad (36)$$

Spezialfälle.

1. Extremfall  $\lambda = 0$  der festen Einspannung.

Dann wird  $\psi(\lambda, m) = 1 + \cos m_c \cdot Ch m_c$ ; bei  $B_1$  sowie  $\Phi_1$  und  $M_1$  verschwindet das Zusatzglied mit dem Faktor  $\lambda$  und sämtliche Formeln werden einfacher. So ist z. B.

$$M_1(0) = -\frac{Hl(C_{m\beta} \cdot S_m - S_{m\beta} \cdot C_m)}{2m(1 + \cos m \cdot Ch m)} \quad (37)$$

2. Extremfall  $b = 0$ , wo die erregende Kraft zuoberst am Turm angreift.  $\lambda$  sei  $\neq 0$ . Auch hier werden sämtliche Ausdrücke einfacher, z. B.

$$M_1(0) = -\frac{HlS_m}{m \cdot \psi(\lambda, m)} \quad (38)$$

3. Kombination der beiden obigen Fälle ( $\lambda = 0, b = 0$ ) ergibt für  $M_1(0)$ :

$$M_1(0) = -\frac{HlS_m}{m(1 + \cos m \cdot Ch m)} \quad (39)$$

Näherungsberechnungen.

Auch hier können ähnlich wie im 1. Abschnitt für kleinere Werte des Frequenzparameters  $m_c$  mittelst Reihenentwicklungen gute Näherungswerte und damit große Vereinfachungen für die praktische Berechnung erzielt werden. Unter Wiederbenutzung der Näherung

$$\psi(\lambda, m) \cong 2 - \frac{m^4}{6}(1 + 4\lambda)$$

sowie durch die in den Gl. (17) definierten Reihenentwicklungen erhalten wir, da auch  $\beta$  i. A. kleine Werte annimmt ( $\beta \leq 1/2$ ):

$$C_{m\beta} \cdot S_m - S_{m\beta} \cdot C_m \cong 4m \left(1 - \beta - \frac{m^4 \beta}{4!}\right) \cong 4m(1 - \beta)$$

und analoge Ausdrücke für die andern Funktionen. Es wird:

$$A_1 \cong \frac{Hl^3 \left(1 - \beta - \frac{m^4 \beta}{4!}\right)}{2EIm^2 \left[1 - \frac{m^4}{12}(1 + 4\lambda)\right]} \cong \frac{Hl^2 a}{2EIm^2 \left[1 - \frac{m^4}{12}(1 + 4\lambda)\right]} \quad (40)$$

$$B_1 \cong -\frac{Hl^3}{4EIm^3} \cdot \frac{2 + \frac{m^4}{12}(1 - 4\beta) - \lambda m^2 [2(1 - \beta) + m^2(\beta - 1/3)]}{1 - \frac{m^4}{12}(1 + 4\lambda)} \quad (41)$$

Für  $m = m_c = 0,5$  beträgt der Maximalfehler in obigen Formeln ungefähr  $1/2\%$ , für  $m_c = 1$  ungefähr  $1,5\%$  und für  $m_c = 1,4$  ungefähr  $5\%$ .

Besonders einfach wird der Ausdruck für  $M_1(0)$ ; man erhält:

$$M_1(0) \cong -\frac{Hl \left(1 - \beta - \frac{m^4 \beta}{4!}\right)}{1 - \frac{m^4}{12}(1 + 4\lambda)} \cong -\frac{H \cdot a}{1 - \frac{m^4}{12}(1 + 4\lambda)}. \quad (42)$$

Gl. (42) erlaubt eine Kontrolle durch den Grenzübergang  $I \rightarrow \infty$ , was nach Gl. (29)  $m_c \rightarrow 0$  nach sich zieht und für das Moment  $M_1(o)$  den Wert  $-H \cdot a$  liefert, wie er aus der Statik bekannt ist.

Aus Gl. (42) geht ferner hervor, daß für kleine Werte von  $m$  mit zunehmendem  $\lambda$ , d. h. bei zunehmender Lockerung der Einspannung, das Einspannmoment  $M_1(o)$  zunimmt und nicht etwa umgekehrt, wie man vermuten könnte. Das röhrt davon her, daß bei der elastischen Einspannung der Resonanzbereich verschoben wurde im Sinne einer Verkleinerung des Eigenfrequenzparameters  $m_1$  ( $m_1 < 1,8755$ , siehe 1. Abschnitt). Damit wird aber der Unterschied zwischen  $m_1$  und  $m_c$  kleiner, d. h. die Störungsschwingung ist näher an die Eigenschwingung herangerückt und das Biegemoment ist größer geworden. Dies zeigt deutlich, daß bei Schwingungsuntersuchungen von Kirchtürmen die Einführung der elastischen Einspannung im Bau grunde eine wichtige Rolle spielt und zu ganz anderen Resultaten führen kann als die Annahme einer festen Einspannung. Dieser Umstand möge hier noch einmal ganz besonders hervorgehoben werden.

Die entwickelten Gleichungen und Formeln erlauben es, das Problem der Kirchturmschwingungen unter der allgemeinen Voraussetzung der elastischen Einspannung ohne Integration und besonders ohne die mühsame, von Fall zu Fall sich wiederholende Auflösung des Gleichungssystems für die Integrationskonstanten durchzuführen. Die Näherungsformeln sowie die beigegebenen graphischen Darstellungen führen jeweils rasch zum Ziele, umso mehr, als in praktischen Fällen die Wirkung jeder Glocke einzeln behandelt und das Endergebnis der Untersuchung erst noch durch Überlagerung gewonnen werden muß.

### 3. Numerisches Beispiel.

In einem kurzen Beispiel soll für verschiedene Werte der Bettungsziffer  $c$  (und damit für verschiedene  $\lambda$ ) der Einfluß der elastischen Einspannung beleuchtet werden. Dazu sei ein Turm aus Natursteinmauerwerk mit folgenden Daten gewählt:

$$l = 40 \text{ m}, \quad E = 60000 \text{ kg/cm}^2, \quad I = 72 \text{ m}^4, \quad I_F = 108 \text{ m}^4, \quad F = 24 \text{ m}^2 \\ \varrho = 2,75 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{cm}^{-4} \text{ sec}^2.$$

Es ist ferner nach Gl. (4) die Frequenz

$$\nu = \frac{m^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\varrho F}} \quad \text{und die Schwingungsperiode} \quad T = \frac{2\pi}{\nu}.$$

Für die erzwungenen Schwingungen sei:  $H = 1000 \text{ kg}$ ,  $a = 30 \text{ m}$ ,  $b = 10 \text{ m}$ , die Störungsfrequenz  $\nu_c = 2,3 \text{ sec}^{-1}$ , woraus  $T_c = 2,73 \text{ sec}$  und  $m_c = 1,2$ . Wir untersuchen die 4 Fälle:

- |                            |   |                        |
|----------------------------|---|------------------------|
| 1. $c = 4 \text{ kg/cm}^3$ | } | elastische Einspannung |
| 2. $c = 10 \text{ "}$      |   |                        |
| 3. $c = 50 \text{ "}$      |   |                        |
| 4. $c = \infty$            |   |                        |
- : feste Einspannung

Für die Berechnungen genügt die Auswertung der Näherungsformeln, da hier besonders der Vergleich mit der festen Einspannung ( $\lambda = 0$ ) hervorgehoben werden soll.

### Eigenschwingungen:

Aus  $\lambda = \frac{EI}{CII_F}$  sowie aus Fig. 2 oder aus der angenäherten Frequenzengleichung  $m^4 = \frac{12}{1 + 4\lambda}$  folgt:

$C \text{ kg/cm}^3$	$\lambda$	$m$	$\nu \text{ sec}^{-1}$	$T \text{ sec}$
4	2,5	1,022	1,68	3,75
10	1	1,248	2,49	2,52
50	0,2	1,61	4,15	1,51
$\infty$	0	1,865	5,56	1,13

Die Unterschiede sind beträchtlich. Die Schwingungsformen  $\Phi(x)$  und  $M(x)$  können aus obigen Werten leicht berechnet werden.

### Erzwungene Schwingungen.

Wir untersuchen hier nur die Abhängigkeit des Biegunsmomentes  $M_1(0)$  von  $\lambda$  nach der Formel:

$$M_1(0) \cong - \frac{Ha}{1 - \frac{m_c^4}{12}(1 + 4\lambda)}$$

Mit  $m_c = 1,2$  wird:

$C \text{ kg/cm}^3$	$\lambda$	$M_1(0) \text{ mt}$
4	2,5	+ 33,3
10	1	- 220
50	0,2	- 43,5
$\infty$	0	- 36,3

Der hohe Betrag des Biegunsmomentes  $M_1(0) = -220 \text{ mt}$  für den Fall  $c = 10 \text{ kg/cm}^3$  zeigt deutlich die Resonanznähe, da der entsprechende Wert des Eigenschwingungsparameters  $m = 1,248$  ist und nur wenig von  $m_c = 1,2$  differiert. Der Unterschied mit der festen Einspannung ist damit evident.

### 4. Anhang.

Mehr vom theoretischen als vom Standpunkt der Kirchturmschwingungen aus bietet die Untersuchung der Eigenfrequenzengleichung (13)

$$1 + \cos m \cdot Ch m + \lambda m (\cos m \cdot Sh m - \sin m \cdot Ch m) = 0 \quad (13)$$

ein Interesse für große Werte von  $m$ , d. h. für die höheren Oberschwingungen. Auch in diesem Falle gelingt es, ähnlich wie bei der Annahme kleiner Werte von  $m$ , für Gl. (13) eine Näherungsgleichung zu gewinnen. Für große  $m$  kann man

$$Ch m \cong Sh m \cong \frac{e^m}{2} \quad \text{setzen.}$$

Damit wird aus Gl. (13), nach Multiplikation mit  $\frac{2}{e^m}$ .

$$\frac{2}{e^m} + \cos m + \lambda m (\cos m - \sin m) = 0 \quad \text{oder, da } \frac{2}{e^m} \leq 0 \text{ ist:} \\ \cos m + \lambda m (\cos m - \sin m) = 0 \quad (13')$$

und schließlich:

$$\lambda \approx \frac{1}{m(\tan m - 1)} \quad (\text{siehe Fig. 6}) \quad (13'')$$

(Eigenfrequenzengleichung für große  $m$ )

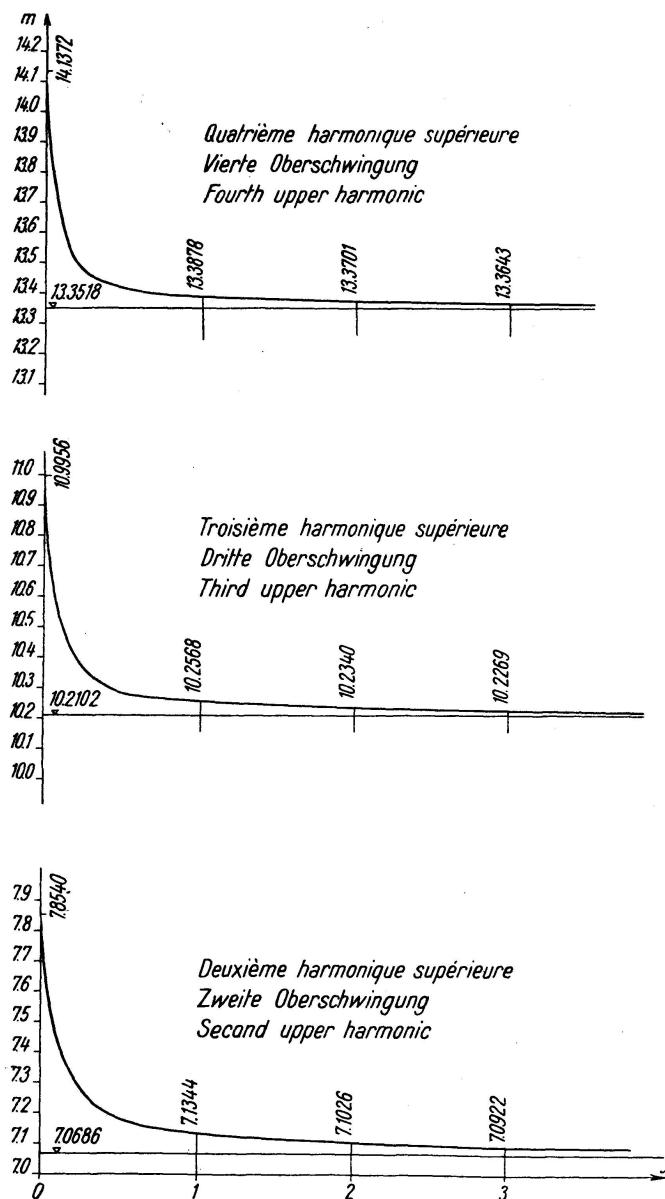


Fig. 6. Courbes des fréquences des harmoniques supérieures  
Frequenzenkurven der Oberschwingungen  
Frequency curves of upper harmonics

$$\left. \lambda \approx \frac{1}{m(\tan m - 1)} \right\}$$

Für  $m \geq 6$  liefert die Näherungsgleichung (13'') Lösungen, deren Fehler, verglichen mit der genauen Gl. (13), kleiner sind als 0,2%.

Grenzfall  $\lambda = 0$ : es muß  $\tan m = \infty$  sein, d. h.: bei fester Einspannung sind die Eigenfrequenzparameter gegeben durch:

$$m \leqq (2n + 1) \frac{\pi}{2} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Grenzfall  $\lambda = \infty$ : es muß  $\operatorname{tg} m = 1$  sein; die Eigenfrequenzenkurve hat eine horizontale Asymptote (siehe Fig. 6) für

$$m \leqq (4n + 1) \frac{\pi}{4} = \left(n + \frac{1}{4}\right) \pi \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Daraus folgt allgemein, daß bei elastischer Einspannung der Eigenfrequenzparameter  $m$  der  $n$ -ten Oberschwingung zwischen den beiden angeführten Grenzwerten liegt:

$$\left(n + \frac{1}{4}\right) \pi \leqq m \leqq \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi.$$

Mit zunehmendem  $m$  schmiegen sich die Eigenfrequenzenkurven immer mehr an den rechten Winkel zwischen Asymptote und  $m$ -Axe an, sodaß schon für kleine  $\lambda$  die entsprechenden  $m$  nahezu konstant, nämlich gleich  $\left(n + \frac{1}{4}\right) \pi$  sind. Damit ist allgemein gezeigt, daß bei elastischer Einspannung die Frequenzparameter  $m$  der Oberschwingungen gegenüber fester Einspannung um  $\sim \frac{\pi}{4}$  kleiner sind. Infolgedessen verschieben sich auch die Eigenfrequenzen  $\nu$  und die Perioden  $T$  je um einen nahezu konstanten Betrag.

### Zusammenfassung.

Die Untersuchung von Kirchturmschwingungen wird unter der allgemeinen Voraussetzung einer elastischen Einspannung des Turmes im Baugrunde durchgeführt. In einem ersten Abschnitt werden die Eigenschwingungen behandelt und die allgemeine Frequenzengleichung als Funktion der elastischen Einspannung diskutiert. Es folgen die Schwingungsformen für die Durchbiegungen und das Biegmomoment, sowie Näherungsformeln für die numerische Berechnung, welche durch Reihenentwicklungen gewonnen wurden.

In einem zweiten Abschnitt werden die durch das Glockenläuten erzwungenen Schwingungen untersucht. Das Resultat der Integration für den allgemeinsten Fall wird in Form von einfachen, geschlossenen Ausdrücken dargestellt und einige Spezialfälle sowie Näherungswerte für die wichtigsten Größen angegeben. Zum Schluß beleuchtet ein numerisches Beispiel den theoretischen Teil, und im Anhang wird die Eigenfrequenzengleichung für die Oberschwingungen untersucht.

Der Unterschied gegenüber einer festen Einspannung wird auch durch graphische Darstellungen hervorgehoben, welche zusammen mit den angegebenen einfachen Näherungsformeln unter Umgehung einer mühsamen Integration rasch zum Ziel führen.

### Résumé.

Les oscillations des clochers sont traitées sous l'hypothèse générale d'un encastrement élastique de la tour dans le terrain. Un premier chapitre contient l'étude des oscillations fondamentales en dépendance de l'encastrement élastique. Les formes analytiques pour les déformations et les mo-

ments fléchissants ont été établies, de même que des formules approchées obtenues par développement en série, dans le but de simplifier le calcul numérique.

Le second chapitre a pour objet l'étude des oscillations forcées dues à la sonnerie des cloches. Le résultat de l'intégration du cas le plus général conduit à des expressions simples; suivent quelques cas spéciaux et formules approchées importantes, de même qu'un exemple numérique qui illustre la théorie. En fin de travail, l'équation aux fréquences fondamentales est étudiées pour les harmoniques supérieures.

La différence avec le cas de l'encastrement total a également été mise en évidence par des graphiques, qui, joints aux approximations simples indiquées pour le calcul numérique, conduisent rapidement au but tout en évitant une intégration laborieuse.

### **Summary.**

The investigation of the oscillations of church towers is made under the general assumption of the tower being elastically fixed. In a first section the natural oscillations are considered and the general equation of frequencies discussed as a function of the elastic fixing. Then follow analytical forms for the deformations and bending moments, and also formulae of approximation for the numerical calculation, which have been obtained by the expansion of series.

In a second section the oscillations caused by bell ringing are investigated. The result of the integration for the most general case is represented in the form of simple, definite expressions; some special cases, and also approximate values are given for the most important magnitudes. Finally, a numerical example explains the theoretical part, and in an appendix the equation of natural frequencies for the upper harmonics is examined.

The difference in comparison with rigid fixing is also shown by graphical illustrations, which, together with the simple formulae of approximation given by the author, lead quickly to a solution and avoid a laborious integration.

Leere Seite  
Blank page  
Page vide