

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

**Band:** 7 (1943-1944)

**Artikel:** Fliessgrenze bei örtlicher Belastung des Halbraumes

**Autor:** Hruban, K.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-7999>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# **FLIESSGRENZE BEI ORTLICHER BELASTUNG DES HALBRAUMES.**

**LIMITE DE PLASTICITÉ PAR SUITE DE CHARGES LOCALES  
DU DEMI-ESPACE.**

**YIELD POINT IN THE SEMI-INFINITE SOLID IN CASE  
OF LOCAL LOADING.**

Prof. Ing. Dr. K. HRUBAN, Brünn.

## **1. Andauernde Setzungen von Bauwerken.**

Die systematische Beobachtung monumentalener Bauten hat gezeigt, daß es Bauwerke gibt, welche sich auch nach erfolgtem Ausgleich der hydrodynamischen Spannungen im Baugrund allmählich weiter senken. Diese Setzung erfolgt zwar mit einer geringen Geschwindigkeit, dauert jedoch auch Jahrhunderte nach der Errichtung des Bauwerkes an, solange ihr nicht durch geeignete Maßnahmen Einhalt geboten wird (wenn dies überhaupt möglich ist).

Das bekannteste Beispiel solcher Senkungen stellt der schiefe Turm von Pisa dar, der abschnittsweise in den Jahren 1174 bis 1350 erbaut wurde, bis zum Jahre 1865 um etwa 2,40 m eingesenkt ist und vor Verfestigung des Baugrundes im Jahre 1934 sich immer noch in Bewegung befand, deren Geschwindigkeit rund 1 mm jährlich betrug<sup>1)</sup>. Die Ungleichmäßigkeit der Baugrundverhältnisse hatte hier die Schiefstellung des Turmes infolge der Setzungen zur Folge. Andauernde Sackungen wies auch der Dom zu Königsberg auf<sup>2)</sup>), mit dessen Bau in der ersten Hälfte des vierzehnten Jahrhunderts begonnen wurde. Noch 500 Jahre später wurde eine Setzung um etwa 2 mm jährlich im Mittel festgestellt.

Derartige Erscheinungen können nicht durch einfache Konsolidierung bindiger Bodenschichten erklärt werden. Die Zeitsetzungskurve solcher Bauten nähert sich nicht asymptotisch einem endlichen Festwert, sondern sie endet mit einer schiefen Geraden, deren Neigung die Geschwindigkeit der andauernden Abwärtsbewegung des Bauwerkes darstellt.

Ich hatte in den letzten Jahren Gelegenheit, zwei ähnliche Fälle näher zu beobachten. Es handelte sich um ernste Bauschäden, welche in einem Schloß und in einem Konvent entstanden sind. Beide Bauwerke stammen aus der ersten Hälfte des achtzehnten Jahrhunderts, und in beiden Fällen war die Ursache der Schäden dieselbe: eine Mittelmauer senkte sich andauernd weiter, während die Setzung der benachbarten Tragmauern, die den Baugrund mit einer etwas kleineren Mittelpressung beanspruchten, schon zum Stillstand gekommen war. Im ersten Falle hatte dies zur Folge, daß die Pflasterung des 2,05 m breiten Ganges, der im erwähnten Schloß zwischen

<sup>1)</sup> TERZAGHI hat aus historischen Dokumenten die Zeitsetzungskurve des Turmes zusammengestellt (Der Bauingenieur 1934, S. 1).

<sup>2)</sup> KÖGLER-SCHEIDIG, Baugrund und Bauwerk, Berlin 1939, S. 130.

den Mittelmauern verläuft, im Jahre 1937 schon eine Neigung von 17 cm aufwies, welche sich alljährlich langsam vergrößerte. Auch im zweiten Falle wurde ähnliches beobachtet, außerdem konnte dabei in einem anliegenden Kellerraum eine bedeutende Aufwölbung des Kellerfußbodens um etwa 30 cm festgestellt werden, welche durch einen Schnitt in Fig. 1 wiedergegeben ist. Die Setzung dieser Mauer ging in den Jahren 1939 bis 1942 um etwa 0,5 mm jährlich weiter.

Die Untersuchung der Gründungsverhältnisse wies in beiden Fällen unterhalb der betreffenden Mauer einen etwas größeren Sohlendruck auf als unter den übrigen Hauptmauern, jedoch blieb dieser weit unter der nach CAQUOT<sup>3)</sup> oder nach RITTER<sup>4)</sup> berechneten Bruchbelastung. Tatsächlich ergab sich z. B. im ersten Falle die Bruchpressung nach CAQUOT zu  $9,4 \text{ kg/cm}^2$  und nach RITTER zu  $7,4 \text{ kg/cm}^2$ , während die beschriebene andauernde Sackung schon bei einem Sohlendruck von  $3,2 \text{ kg/cm}^2$  auftrat. Die Lage und Form des durch den emporgedrückten Boden gebildeten Walles (Fig. 1) bestätigt ebenso, daß diese Sackung vom Bruch zu unterscheiden ist.

Man hat es bei diesen Erscheinungen mit einer Art Störung des Gleichgewichtes in der Erdmasse zu tun, welche durch eine bedeutend kleinere Beanspruchung hervorgerufen wird als der Bruch selbst, welche jedoch mit der Zeit schwere Schädigungen der Bauwerke verursachen kann. Im folgenden

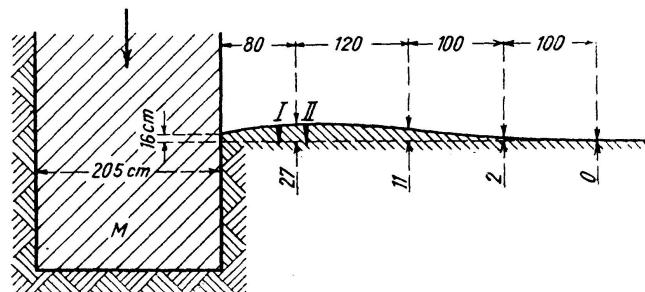


Fig. 1

wird dieser Zustand der Gleichgewichtsstörung zuerst in einem elastisch-isotropen Material untersucht, worauf die Anwendbarkeit der gewonnenen Ergebnisse bei der Ermittlung zulässiger Bodenpressungen geprüft wird. Die Grenzbelastung an der Fließgrenze wird mit jener Bruchlast verglichen, welche sich aus den bisherigen Annahmen über den Grenzzustand des Gleichgewichtes in den Erdmassen ergibt.

## 2. Der Spannungszustand des örtlich belasteten Halbraumes.

Wird die Last auf die Oberfläche des Halbraumes durch einen Körper übertragen, so hängt die Druckverteilung in der Kontaktfläche von der Durchbiegung dieses Körpers ab. Diesbezügliche Zusammenhänge hat BOROWICKA untersucht<sup>5)</sup>). Aus den Ergebnissen seiner Berechnungen ist zu schließen, daß

<sup>3)</sup> A. CAQUOT, *Équilibre des massifs à frottement interne*, Paris 1934, S. 33 u. 59.

<sup>4)</sup> M. RITTER, *Grenzzustände des Gleichgewichtes in Erd- und Schüttmassen*, II. Congr. A. I. P. C., Publication préliminaire, S. 1585.

<sup>5)</sup> H. BOROWICKA: Influence of rigidity of a circular foundation slab on the distribution of pressures over the contact surface. (Proceedings of the intern. conference on soil mechanics, 1936, vol. II, S. 144). *Derselbe*: Druckverteilung unter einem gleichmäßig belasteten, elastischen Plattenstreifen ... (A. I. P. C., II. Congrès, Rapport final, S. 840).

eine merkliche Abweichung von der einer vollkommenen Starrheit der Platte entsprechenden Druckverteilung erst dann erscheint, wenn die Verhältniszahl

$$K = \frac{1}{6} \frac{E_p}{E_B} \cdot \left( \frac{h}{a} \right)^3$$

unter den Wert  $\frac{\pi}{3} \sim 1$  sinkt. (Hierin bedeutet  $E_p$  bzw.  $E_B$  den Elastizitätsmodul der Platte bzw. des Halbraumes,  $h$  die Höhe der Platte,  $a$  die halbe Breite der Platte.) Bei Baustoffprüfungen und bei Flachgründungen ist jedoch diese Verhältniszahl gewöhnlich viel größer. So ergibt sich z. B. für einen kreisförmigen Betongründungskörper auf sandigem Boden ( $h = a = 100$  cm,  $E_p = 210$  t/cm<sup>2</sup>,  $E_B = 1$  t/cm<sup>2</sup>) der Wert von  $K$  zu etwa 35. Dies trifft auch bei Gründungen auf breiten Eisenbetonplatten zu, denn hier hat man statt der Biegungssteifigkeit der Platte diejenige des ganzen Bauwerks in Rechnung zu ziehen. Es ist daher für die uns interessierenden Fälle im allgemeinen mit jener Druckverteilung in der Lastfläche zu rechnen, die sich für starre Platten oder Stempel ergibt.

Um den Gleichgewichtszustand in der Masse beurteilen zu können, haben wir von dem Spannungszustand des Halbraumes auszugehen, der durch diese Art Belastung hervorgerufen wird. Wir untersuchen zuerst das ebene Problem.

Der elastisch isotrope Halbraum  $z > 0$  sei durch die Ebene  $XY$  begrenzt (Fig.2), wobei die Achse  $Y$  durch den Koordinatenursprung  $O$  senkrecht zur Bildebene verläuft.

Die Verschiebungskomponenten in der positiven  $x$ - bzw.  $y$ - und  $z$ -Richtung werden mit  $\xi$  bzw.  $\eta$  und  $\zeta$  bezeichnet. Der ebene Deformationszustand sei dadurch gekennzeichnet, daß die Dehnung  $\eta$  in der  $y$ -Richtung überall Null ist, so daß die Spannung in der  $y$ -Richtung

$$\sigma_y = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{m}$$

beträgt; ( $m$  bedeutet die Querdehnungszahl  $\frac{1}{\nu}$ ). Die kubische Dilatation

$$e = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}$$

und die Rotation eines Elementes

$$\omega = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)$$

müssen den Gleichungen genügen<sup>6)</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{m-2} \frac{\partial e}{\partial x} - \frac{1}{m-1} \frac{\partial \omega}{\partial z} &= 0, \\ \frac{1}{m-2} \frac{\partial e}{\partial z} + \frac{1}{m-1} \frac{\partial \omega}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Die Größen  $\frac{e}{m-2}$  und  $-\frac{\omega}{m-1}$  sind daher konjugierte harmonische Funktionen in  $z$  und  $x$ .

<sup>6)</sup> S. z. B. S. S. TIMOSHENKO, Theory of Elasticity, 1934, S. 163.

Für den Fall einer zur Oberfläche senkrechten Linienlast  $q$  gemäß Fig. 2 liefert die bekannte Lösung folgende Spannungskomponenten:

$$\sigma_x = -\frac{2q}{\pi} \cdot \frac{x^2 z}{R^4}, \quad \sigma_z = -\frac{2q}{\pi} \cdot \frac{z^3}{R^4}, \quad \tau_{xz} = -\frac{2q}{\pi} \cdot \frac{x z^2}{R^4}. \quad (2)$$

Es herrscht jedoch eine Unklarheit in der Frage der Formänderung des Halbraumes. Die von den bezogenen Dehnungen ausgehende Integration ergibt mit  $G = \frac{m E}{2(m+1)}$  ( $E$  = Elastizitätsmodul des Halbraumes):

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{q}{2\pi G} \left( -\frac{m-2}{m} \operatorname{arc tg} \frac{x}{z} + \frac{xz}{R^2} \right), \\ \zeta &= \frac{q}{2\pi G} \left( -2 \frac{m-1}{m} \ln \frac{R}{2h} + \frac{z^2}{R^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Dazu kommen noch die zu bestimmenden Konstanten  $C_1$  für  $\xi$ ,  $C_2$  für  $\zeta$ . Die Verschiebungskomponenten (3) liefern die Größen

$$e = -\frac{m-2}{m} \frac{q}{\pi G} \frac{z}{R^2}, \quad -\omega = \frac{m-1}{m} \frac{q}{\pi G} \frac{x}{R^2},$$

welche die Gleichungen (1) erfüllen. Es ist jedoch unmöglich, für ein beliebiges  $m$  die Integrationskonstanten  $C_1$ ,  $C_2$  so zu bestimmen, daß die Forderung nach dem Verschwinden der Verschiebungskomponenten bei  $R \rightarrow \infty$  befriedigt wird, da der Symmetrie wegen auch in der Ebene  $YZ$  keine  $\xi$ -Verschiebung möglich ist. Es wurde schon die Meinung ausgesprochen<sup>7)</sup>, daß der Spannungszustand (2) nur für den Wert  $m=2$  eine strenge Lösung darstellt. Bevor wir die Beziehungen (3) weiter verwerten, müssen wir sie daher näher untersuchen.

Der Spannungszustand eines mit zwei entgegenwirkenden Kräften  $q$  beanspruchten Zylinders (Fig. 3) ist bekannt<sup>8)</sup>. In dem gewählten Koordinatensystem lauten die Spannungskomponenten

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2q}{\pi} \left[ x^2 \left( \frac{z}{R^4} + \frac{2h-z}{R_1^4} \right) - \frac{1}{2h} \right], \\ \sigma_z &= -\frac{2q}{\pi} \left[ \frac{z^3}{R^4} + \frac{(2h-z)^3}{R_1^4} - \frac{1}{2h} \right] \\ \tau_{xz} &= -\frac{2q}{\pi} \left[ \frac{z^2}{R^4} - \frac{(2h-z)^2}{R_1^4} \right] x. \end{aligned} \right\} \quad (2a)$$

Ist der Zylinder in der  $y$ -Richtung (senkrecht zur Bildebene) unbegrenzt, ist weiter  $\eta=0$  und werden die Verschiebungskomponenten so bestimmt, daß  $\zeta$  in der horizontalen Symmetrieebene und  $\xi$  in der Symmetrieebene  $OC$  verschwindet, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{q}{2\pi G} \left[ -\frac{m-2}{m} \left( \operatorname{arctg} \frac{x}{z} + \operatorname{arctg} \frac{x}{2h-z} \right) + x \left( \frac{z}{R^2} + \frac{2h-z}{R_1^2} \right) + \frac{m-2}{m} \frac{x}{h} \right], \\ \zeta &= \frac{q}{2\pi G} \left[ -2 \frac{m-1}{m} \ln \frac{R}{R_1} + \frac{z^2}{R^2} - \frac{(2h-z)^2}{R_1^2} - \frac{m-2}{m} \left( 1 - \frac{z}{h} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3a)$$

<sup>7)</sup> J. OHDE, Der Bauingenieur 1939, S. 451.

<sup>8)</sup> S. TIMOSHENKO, Theory of Elasticity, 1934, S. 104.

In der Oberfläche des Zylinders ist

$$\arctg \frac{x}{z} + \arctg \frac{x}{2h-z} = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \frac{z}{R^2} = \frac{2h-z}{R_1^2} = \frac{1}{2h}, \quad \frac{R}{R_1} = \frac{z}{|x|}$$

und die Verschiebungen ergeben sich zu (das obere Vorzeichen für  $x > 0$ )

$$\xi_0 = \frac{q}{2\pi G} \left[ 2 \frac{m-1}{m} \frac{x}{h} \mp \frac{m-2}{m} \frac{\pi}{2} \right],$$

$$\zeta_0 = \frac{q}{\pi G} \frac{m-1}{m} \left( \frac{z}{h} - \ln \frac{z}{|x|} - 1 \right).$$

In den Angriffspunkten der Kräfte  $q$  werden alle Komponenten unendlich, da die Kräfte als in einem Punkt konzentriert angenommen wurden. Sonst entsteht keine Singularität. Die Oberflächenverschiebung  $\xi_0$  ist in der Nähe des Punktes  $O$  negativ, für  $x > \frac{\pi m-2}{4(m-1)} h$  wird sie positiv und erreicht ihren Größtwert im Punkte  $A$ . Im Punkte  $O$  müssen wir uns einen kleinen Teil des Körpers ausgeschnitten denken, da hier eine Verschiebung beider Seiten gegen  $O$  erscheint. Diese Schwierigkeit verschwindet jedoch sofort, wenn die Verteilung der Last auf eine endliche Breite in Rechnung gezogen wird.

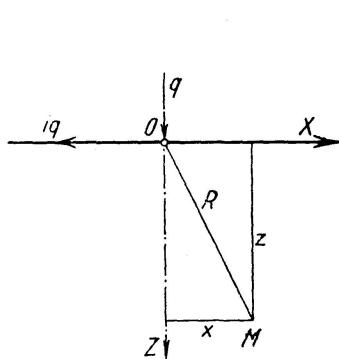


Fig. 2

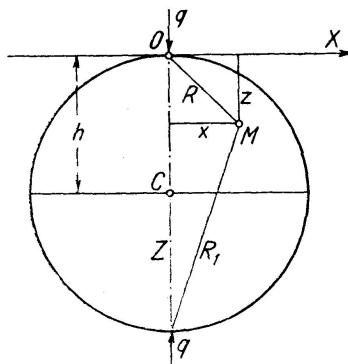


Fig. 3

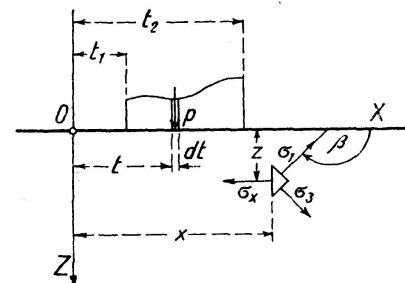


Fig. 4

Der Spannungszustand (3a) entspricht also allen Forderungen, welche die Elastizitätstheorie an eine strenge Lösung stellt. Lassen wir jetzt den Halbmesser  $h$  unbeschränkt wachsen, so geht der Zylinder in einen unendlich großen Körper über, der nur durch die  $XY$ -Ebene begrenzt ist, und wir bekommen den untersuchten elementaren Fall. Die richtigen Verschiebungskomponenten für den mit einer Linienlast beanspruchten Halbraum sind also durch die Gleichungen (3a) als  $\lim_{h \rightarrow \infty} \xi$ ,  $\lim_{h \rightarrow \infty} \zeta$  gegeben. Für endliche Werte der Entfernung  $R$  sind das die Beziehungen (3), wobei die beiden Integrationskonstanten Null sind,  $C_1 = C_2 = 0$ . Ebenso gehen die Ausdrücke (2a) in (2) über. Die Gleichungen (2) und (3) stellen daher die strenge Lösung des Halbraumproblems für einen beliebigen Wert von  $m$  dar, sie gelten jedoch nur für endliche Entfernungen vom Angriffspunkte der Kraft. Im Unendlichen muß man auf die Beziehungen (3a) zurückgreifen.

Aus (3) und (3a) folgt, daß sich die Oberfläche des Körpers in der Umgebung der Last beiderseits gegen den Mittelpunkt der belasteten Fläche verschiebt.

Wenn sich die Last auf eine gewisse Breite kontinuierlich verteilt (Fig. 4), so daß  $dq = p(t)dt$  ist, kann man die Verschiebungskomponenten durch Integration von  $d\xi$ ,  $d\zeta$  bestimmen; diese gelingt jedoch in manchen Fällen nicht. Die Aufgabe kann weitgehend vereinfacht werden, wenn man ein zu den angreifenden Kräften konjugiertes imaginäres System hinzufügt, so daß sich die resultierenden Verschiebungen durch Funktionen der komplexen Veränderlichen  $\alpha = z + ix$  ausdrücken lassen.

Die Kraft  $iq$ , die in der negativen  $x$ -Richtung (Fig. 2) angreift, bedingt, wenn jetzt die Konstanten außer acht gelassen werden, die Deformation

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \frac{iq}{2\pi G} \left( 2 \frac{m-1}{m} \ln R + \frac{z^2}{R^2} \right), \\ \zeta_1 &= -\frac{iq}{2\pi G} \left( \frac{m-2}{m} \operatorname{arctg} \frac{x}{z} + \frac{xz}{R^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3b)$$

Wir ergänzen sie durch eine weitere imaginäre Belastung der Oberfläche, welche die Formänderung hervorruft

$$\xi_2 = -\frac{iq}{2\pi G} \ln R, \quad \zeta_2 = -\frac{iq}{2\pi G} \operatorname{arctg} \frac{x}{z} \quad (3c)$$

und überlagern alle drei Gleichgewichtssysteme (3), (3b) und (3c). Das Ergebnis zeigt, daß jede harmonische Funktion, die in (3) vorkommt, durch ihre konjugierte ergänzt erscheint; so wird z. B. das erste Glied in  $\zeta$  zu

$$-2 \frac{m-1}{m} \ln R - i \left( \frac{m-2}{m} + 1 \right) \operatorname{arctg} \frac{x}{z} = -2 \frac{m-1}{m} \ln \alpha, \quad \text{usw.}$$

Die resultierenden komplexen Verschiebungskomponenten  $\xi, \zeta$  ergeben sich zu

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{q}{2\pi G} i \left( \frac{m-2}{m} \ln \alpha + \frac{z}{\alpha} \right), \\ \zeta &= \frac{q}{2\pi G} \left( -2 \frac{m-1}{m} \ln \alpha + \frac{z}{\alpha} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3d)$$

Der reelle Teil dieser Größen sowie deren Ableitungen stellen die Einwirkung der reellen Kraft dar.

Bei der Ermittlung des Einflusses der Kraft  $dq = p(t)dt$  gemäß Fig. 4 hat man in (3) statt  $x$  die Differenz  $x - t$  einzusetzen; für das zugehörige komplexe Kräftesystem heißt das, den Wert  $\alpha = z + ix$  in den Beziehungen (3c) durch  $z + i(x-t) = \alpha - it$  zu ersetzen.

Somit ergibt sich die zur Belastung  $\int_{t_1}^{t_2} p(t)dt$  gehörige komplexe Verschiebung zu

$$\xi = \frac{i}{2\pi G} \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{m-2}{m} p(t) \ln (\alpha - it) + z \frac{p(t)}{\alpha - it} \right] dt.$$

Daraus folgt mit der Bezeichnung

$$J = -\frac{1}{\pi} \int_{t_1}^{t_2} \frac{p(t) dt}{\alpha - it} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -\frac{i}{2G} \left( \frac{m-2}{m} \int J d\alpha + zJ \right) + C_3, \\ \zeta &= \frac{1}{2G} \left( 2 \frac{m-1}{m} \int J d\alpha - zJ \right) + C_4. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Setzt man die Ableitungen von (5) in die bekannten Ausdrücke für die Spannungskomponenten ein, so findet man:

$$\frac{\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_z}{2} = J, \quad \frac{\bar{\sigma}_x - \bar{\sigma}_z}{2z} = \frac{dJ}{d\alpha}, \quad \frac{\bar{\tau}_{xz}}{z} = -i \frac{dJ}{d\alpha}. \quad (6)$$

Es bedeutet hier wieder  $\bar{\sigma}$  bzw. eine komplexe Funktion, deren Realteil die durch die reelle Belastung gemäß Fig. 4 hervorgerufene Spannungskomponente  $\sigma$  bzw.  $\tau$  darstellt. Die kubische Dilatation ergibt sich zu

$$\bar{e} = \frac{m-2}{mG} J.$$

Die Größe  $J$  ist also eine Funktion der komplexen Veränderlichen  $\alpha = z + ix$ , welche wir in der Form schreiben können:

$$J = \Phi + i\Psi.$$

Des weiteren besagen die Beziehungen (6), daß die Realteile von

$$\frac{\bar{\sigma}_x - \bar{\sigma}_z}{2z} \quad \text{und} \quad \frac{\bar{\tau}_{xz}}{z}$$

konjugierte harmonische Funktionen sind, welche in der komplexen Funktion

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} - i \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

erscheinen. Es ist daher:

$$\frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} = \Phi, \quad \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} = z \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad \tau_{xz} = -z \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (7)$$

Dadurch sind auch die Hauptspannungen  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  und ihre Richtungen gegeben<sup>9)</sup>:

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \Phi, \quad \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = z \sqrt{\left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2}, \quad \operatorname{tg} 2\beta = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}{\frac{\partial \Phi}{\partial z}}. \quad (8)$$

Die Aufgabe beschränkt sich somit auf die Berechnung des Integrals  $J$  (Gl. 4) und seines Realteiles  $\Phi$ , wodurch alle Spannungsgrößen bestimmt sind.

Bevor wir zu weiteren Ausführungen schreiten, wollen wir diese Methode auf einen bekannten Fall anwenden, da wir die hier vorkommenden Beziehungen später auch brauchen werden.

### 3. Die Isochromen bei der Beanspruchung durch eine Gruppe von gleichmäßig verteilten Lasten.

Die Linienlast  $q = 2ap$  greift so an, daß die Formänderung der Oberfläche des Halbraumes in keiner Weise gehindert wird. Der Streifen zwischen  $x = -a$  und  $x = a$  wird gleichmäßig belastet mit konstantem Druck  $p$  (Fig. 5).

<sup>9)</sup> Die mittlere Hauptspannung  $\sigma_2$  wirkt in der  $y$ -Richtung und ist gleich  $\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{m}$ .

Die Gleichung (4) wird zu

$$J = -\frac{p}{\pi} \int_{-a}^a \frac{dt}{\alpha - it} = -\frac{p}{\pi} \left[ \frac{i \ln(\alpha - it)}{t} \right]_{t=-a}^{t=a}.$$

Der Realteil dieser komplexen Funktion ist

$$\Phi = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = -\frac{p}{\pi} \left[ -\arctg \frac{x - t}{z} \right]_{t=-a}^{t=a} = -\frac{p}{\pi} \delta, \quad (9)$$

bleibt also konstant auf dem ganzen Kreise  $K$ , der durch die Randpunkte  $A, B$  des Streifens geht. Die Gleichung dieses Kreises ist

$$x^2 + (z - r \cos \delta)^2 = r^2, \quad \sin \delta = \frac{a}{r}.$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{a(a^2 - x^2 + z^2)}{2r^2 z^2} \cdot \frac{d\Phi}{d\delta}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{ax}{r^2 z} \frac{d\Phi}{d\delta}.$$

Durch Einsetzen in die Gleichung (8) folgt

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{p}{\pi} \frac{a}{r} = \frac{p}{\pi} \sin \delta. \quad (9a)$$

Die Isochromen (Hauptschubgleichen)  $\sigma_1 - \sigma_3 = \text{konst.}$  sind daher Kreise  $K$ . Der absolut größte Wert der Schubspannung wird bei minimalem Wert von  $r$  erreicht, d. h. bei  $r = a$ , und beträgt

$$\max \tau = \max \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{p}{\pi}. \quad (10)$$

Die Hauptspannungen ergeben sich aus (9) und (9a) zu

$$\sigma_{1,3} = -\frac{q}{\pi} (\delta \mp \sin \delta) \quad (11)$$

und wirken in den in der Fig. 5 angedeuteten Richtungen.

#### 4. Belastung durch einen starren Plattenstreifen.

Die Senkung  $\zeta_0$  der Oberfläche muß in den Grenzen  $|x| < a$  konstant bleiben. Aus (5) folgt, daß für  $z = 0$

$$\frac{\partial \zeta_0}{\partial x} = \frac{m-1}{mG} iJ \quad \text{ist.}$$

Die komplexe Funktion  $iJ$  darf daher bei  $z = 0$  in dem Bereich  $|x| < a$ , jedoch nur in diesen Grenzen, keinen Realteil haben. Diese Bedingung wird von dem Ansatz

$$J = \frac{A}{\sqrt{a^2 + x^2}} \quad (12)$$

erfüllt, denn es ist bei  $z = 0$ :

$$a^2 = -x^2, \quad \frac{\partial \zeta_0}{\partial x} = \frac{m-1}{mG} \frac{iA}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Nur wenn  $|x| > a$  ist, besitzt diese Funktion einen Realteil, und zwar

$$\frac{\partial \zeta_0}{\partial x} = \frac{m-1}{mG} \cdot \frac{A}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \quad |x| > a. \quad (13)$$

Aus (7) folgt, daß die Lastverteilung über den belasteten Streifen durch den Realteil von  $J$  bestimmt ist, so daß, wenn wir jetzt statt  $x$  wieder  $t$  schreiben und mit  $q = \int_{-a}^a p(t) dt$  die Lastgröße bezeichnen,

$$p(t) = \frac{q}{\pi \sqrt{a^2 - t^2}}. \quad (14)$$

Falls der Ansatz (12) richtig ist, muß gemäß (4) sein

$$J = -\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{q}{\pi \sqrt{a^2 - t^2}} \frac{dt}{\alpha - it}.$$

Dies ist tatsächlich der Fall mit  $A = -\frac{q}{\pi}$ , denn es ist

$$\int_{-a}^a \frac{dt}{(\alpha - it) \sqrt{a^2 - t^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \alpha^2}} \left[ \arcsin \frac{\alpha t - ia^2}{\alpha(\alpha - it)} \right]_{-a}^a = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 + \alpha^2}}.$$

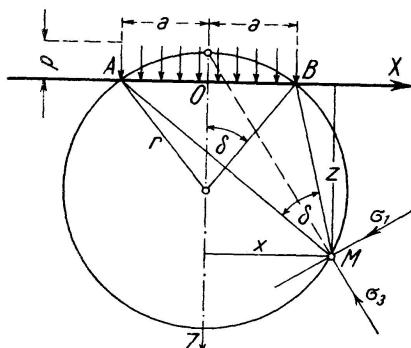


Fig. 5

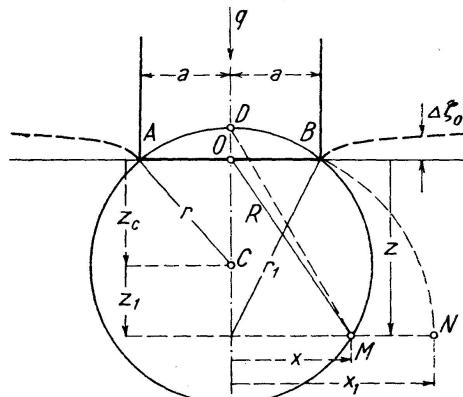


Fig. 6

Somit ist auch bewiesen, daß die Lastverteilung nach (14) die vorgeschriebene Deformation hervorruft<sup>10)</sup>. Die Senkungslinie der Oberfläche kann in der Umgebung der Lastfläche aus (13) bestimmt werden (Fig. 6)

$$\Delta \zeta_0 = - \int_a^x \frac{\partial \zeta_0}{\partial x} dx = \frac{m-1}{mG} \frac{q}{\pi} \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{m-1}{mG} \frac{q}{\pi} \ln \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}, \quad x > a.$$

(Da sich die Belastung nach der Annahme senkrecht zur Bildfläche ins Unendliche erstreckt, wird diese Differenz bei wachsendem  $x \rightarrow \infty$  auch unendlich.)

Um die Spannungskomponenten angeben zu können, haben wir noch den Realteil  $\Phi$  der Funktion

<sup>10)</sup> Diese wurde auf einem anderen Wege zuerst von SADOWSKY gefunden, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., Bd. 8, 1928, S. 107.

$$J = -\frac{q}{\pi \sqrt{a^2 + \alpha^2}} = \Phi + i \Psi$$

zu bestimmen. Durch das Gleichstellen der reellen und imaginären Glieder der Beziehung

$$\left(\frac{q}{\pi}\right)^2 \frac{1}{a^2 + (z + ix)^2} = (\Phi + i \Psi)^2$$

ergeben sich zwei Gleichungen, deren Auflösung die beiden Unbekannten  $\Phi, \Psi$  liefert. Das Ergebnis lautet

$$\Phi = -\frac{q}{\pi \sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{a^2 - x^2 + z^2 + \sqrt{(a^2 + x^2 + z^2)^2 - 4a^2 x^2}}{(a^2 + x^2 + z^2)^2 - 4a^2 x^2}} \quad (15)$$

Führt man wieder einen Kreis durch die Randpunkte des belasteten Streifens (Fig. 6), so ist sein Halbmesser

$$r = \frac{\sqrt{(a^2 + x^2 + z^2)^2 - 4a^2 x^2}}{2z}$$

und die von seinem Mittelpunkt gemessene Ordinate des Punktes  $M(x, z)$  beträgt

$$z_1 = z - z_c$$

( $z_1$  und  $z_c$  sind positiv, wenn sie die Richtung der positiven  $Z$ -Achse haben).

Mit diesen Bezeichnungen lautet (15)

$$\Phi = -\frac{q}{2\pi r} \sqrt{\frac{r + z_1}{z}}. \quad (15a)$$

### Die Spannungen.

Durch Ausführen der in den Gleichungen (7) vorgeschriebenen Operationen erhält man nach einigen Umformungen:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{q}{2\pi r} \left[ \sqrt{\frac{r + z_1}{z}} - \frac{x^2(r - z + 2z_1) + zz_1(r + z_1)}{2r^2 \sqrt{z(r + z_1)}} \right], \\ \sigma_z &= -\frac{q}{2\pi r} \left[ \sqrt{\frac{r + z_1}{z}} + \frac{x^2(r - z + 2z_1) + zz_1(r + z_1)}{2r^2 \sqrt{z(r + z_1)}} \right], \\ \tau_{xz} &= -\frac{qx}{2\pi r^2} \frac{r^2 + (z - z_1)(r + 2z_1)}{\sqrt{z(r + z_1)}}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

a) Wächst die Entfernung  $R$  des betrachteten Punktes von der Mitte des belasteten Streifens, so verschmelzen schließlich die Randpunkte  $A$  und  $B$  mit  $O$  und es gilt

$$r + z_1 = z, \quad r = \frac{R^2}{2z}$$

und die Ausdrücke (16) gehen für  $R \rightarrow \infty$  in (2) über, wie es sein muß.

b) In der  $YZ$ -Ebene ist

$$z_1 = r, \quad 2rz = s^2 = a^2 + z^2$$

und es ergibt sich für  $x = 0$ :

$$\sigma_x = -\frac{q}{\pi} \frac{a^2}{s^3}, \quad \sigma_z = -\frac{q}{\pi} \frac{s^2 + z^2}{s^3}. \quad (17)$$

Die Differenz der Werte dieser beiden in den Punkten der  $Z$ -Achse wirkenden Hauptspannungen erreicht ihren Größtwert bei  $z = a\sqrt{2}$ , also um 0,414  $a$  tiefer als bei der gleichmäßigen Lastverteilung. Die größte in der  $Z$ -Achse vorkommende Schubspannung beträgt

$$\max \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} = \frac{2}{3\pi\sqrt{3}} \frac{q}{a} = 0,245 \frac{q}{2a}, \quad (18)$$

ist also um rund 23 % kleiner als gemäß (10).

c) In der  $XY$ -Ebene, welche die Oberfläche des Halbraumes bildet, ist  $z = 0$ ,  $r = \infty$ . Die Gleichung (15) ergibt für die Oberflächenebene

$$\Phi = -\frac{q}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Die übrigen Glieder der Ausdrücke (16) fallen wegen der größeren Potenzen von  $r$  im Nenner weg, so daß unter der Lastfläche

$$\sigma_x = \sigma_z = -\frac{q}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}$$

und in der ganzen Oberfläche  $\tau_{xz} = 0$  ist.

d) Die Hauptspannungen werden durch Einsetzen in die Gleichungen (8) bestimmt. Sie betragen

$$\sigma_{1,3} = -\frac{q}{2\pi r} \left( \sqrt{\frac{r+z_1}{z}} \mp \frac{R}{\sqrt{2rz}} \right), \quad (19)$$

was auch geschrieben werden kann (Fig. 6):

$$\sigma_{1,3} = -\frac{q}{2\pi} \frac{\overline{MD} \mp \overline{MO}}{r\sqrt{2rz}}.$$

Es sind also überall Druckspannungen. Ihre Richtungen sind durch die Beziehung bestimmt ( $\beta$  nach Fig. 4 gemessen)

$$\tan 2\beta = -x \frac{(r+2z_1)(z-z_1) + r^2}{(r+2z_1)(x^2 + zz_1) - r^2 z}, \quad (20)$$

wodurch auch die isostatischen Kurven gegeben sind. Die Hauptdrucklinien haben die Form von Hyperbeln höheren Grades, deren Asymptoten durch den Punkt  $O$  gehen.

Die Gleichung der Isochromen ( $\sigma_1 - \sigma_3 = \text{konst.}$ ) ist

$$\frac{R}{r\sqrt{rz}} = k, \quad \text{oder} \quad x^2 + z^2 - kr^3 z = 0. \quad (21)$$

Ihre Gestalt ist aus Fig. 10 und der photoelastischen Aufnahme Fig. 11 ersichtlich<sup>11)</sup>.

e) Auf dem Halbkreis mit dem Halbmesser  $a$  ist  $R = r = a$ ,  $z_1 = z$  und man erhält

<sup>11)</sup> G. MESMER, Spannungsoptik, 1939, S. 197.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{q}{4\pi a} \sqrt{\frac{a+z}{z}}, \quad \sigma_z = -\frac{3q}{4\pi a} \sqrt{\frac{a+z}{z}}, \quad \tau_{xz} = -\frac{q}{4\pi a} \cdot \frac{z}{\sqrt{z(a+z)}}, \\ \sigma_1 &= -\frac{q}{2\pi a} \left( \sqrt{\frac{a+z}{z}} - \sqrt{\frac{a}{2z}} \right), \quad \sigma_3 = -\frac{q}{2\pi a} \left( \sqrt{\frac{a+z}{z}} + \sqrt{\frac{a}{2z}} \right), \\ \operatorname{tg} 2\beta &= -\frac{x}{a+z}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Die Richtungen der Hauptspannungen halbieren auf diesem Halbkreise die Winkel, die der Strahl  $MD$  mit der  $z$ -Richtung bildet.

f) Auch für die Punkte  $N$ , die auf der Hyperbel  $a^2 - x^2 + z^2 = 0$  liegen, ergeben sich sehr einfache Ausdrücke für die Spannungen; die Abszisse  $x_1$  des Punktes  $N$  ist gleich dem Halbmesser  $r_1$  des durch  $A, B, N$  gehenden Kreises (Fig. 6), und die Ordinate  $z_1$  verschwindet. Es folgt

$$\sigma_x = -\frac{q}{4\pi r_1} \frac{r_1 + z}{\sqrt{r_1 z}}, \quad \sigma_z = -\frac{q}{4\pi r_1} \frac{3r_1 - z}{\sqrt{r_1 z}}, \quad \tau_{xz} = -\frac{q}{4\pi x} \frac{r_1 + z}{\sqrt{r_1 z}}. \quad (23)$$

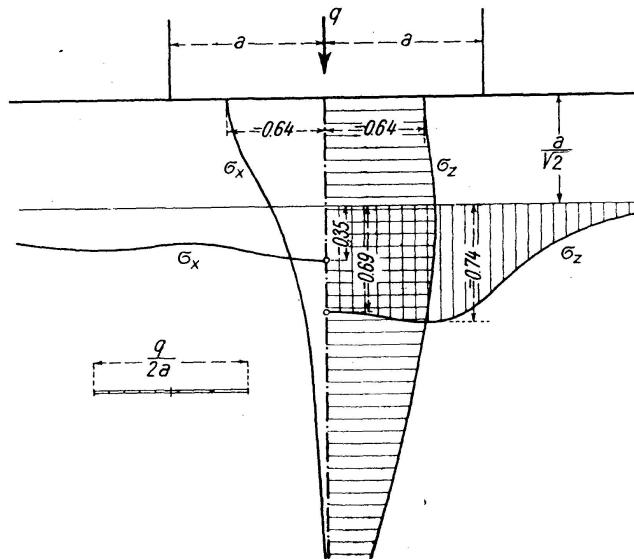


Fig. 7

Der nach den Formeln (16), (17), (22) und (23) berechnete Verlauf einiger Spannungskomponenten ist in Fig. 7 wiedergegeben. Für praktische Berechnungen lassen sich Gl. (16) auf die Form bringen

$$\sigma_x = -\frac{q}{4\pi r} \left[ 1 + \frac{(z - z_1)(r - 2z_1)}{r^2} \right] \sqrt{\frac{r + z_1}{z}},$$

$$\sigma_z = -\frac{q}{4\pi r} \left[ 3 - \frac{(z - z_1)(r - 2z_1)}{r^2} \right] \sqrt{\frac{r + z_1}{z}}.$$

### Der antimetrische Fall.

Die Streifenlast ist durch die Funktion

$$p(t) = tf(a, t)$$

gegeben. Das resultierende Drehmoment sei mit  $M$  bezeichnet. Die Be-

dingung, daß die Verformungslinie der Oberfläche innerhalb des Streifens linear verlaufen muß, wird durch den Ansatz befriedigt

$$J = i \left( \frac{A \alpha}{\sqrt{a^2 + \alpha^2}} + B \right).$$

Dieser ergibt die Sohlenkräfte

$$p(t) = \frac{2 M t}{\pi a^2 \sqrt{a^2 - t^2}}.$$

Die Deformation des Halbraumes ist antimetrisch. Die Verschiebungen der Oberfläche betragen im Bereiche der positiven  $x$ :

$$\text{für } x < a: \quad \xi_0 = - \frac{m-2}{mG} \frac{M}{\pi} \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{a^2}, \quad \zeta_0 = 2 \frac{m-1}{mG} \frac{M}{\pi} \frac{x}{a^2},$$

$$\text{für } x > a: \quad \xi_0 = - \frac{m-2}{mG} \frac{M}{\pi a}, \quad \zeta_0 = 2 \frac{m-1}{mG} \frac{M}{\pi} \frac{x - \sqrt{x^2 - a^2}}{a^2}.$$

Der Realteil der komplexen Größe  $J$  ergibt sich zu

$$\Phi = - \frac{M x (r - z + z_1)}{\pi a^2 r \sqrt{z(r + z_1)}} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2}$$

Somit ist der Spannungszustand bestimmt, die Spannungen können gemäß (7) ermittelt werden.

Durch Überlagerung dieses antimetrischen und des durch (15a) gegebenen symmetrischen Zustandes erhält man die Lösung für außermittige Streifenbelastung (bei reibungsloser Kraftübertragung).

## 5. Reibung in der Sohlenfläche.

Aus (5) und (12) ergibt sich der Zuwachs der  $\xi$ -Verschiebung in der Oberfläche ( $z = 0$ ) zu

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial x} = \frac{m-2}{2mG} J = - \frac{m-2}{2mG} \frac{q}{\pi \sqrt{a^2 + \alpha^2}}.$$

Der Realteil dieser Funktion ist

$$\text{für } |x| < a: \quad \frac{\partial \xi_0}{\partial x} = - \frac{m-2}{2mG} \frac{q}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$\text{für } x > a: \quad \frac{\partial \xi_0}{\partial x} = 0.$$

Der Mittelpunkt der Lastfläche darf keine Verschiebung in der  $x$ -Richtung erleiden; es ist daher

$$\text{für } |x| < a: \quad \xi_0 = \int_0^x \frac{\partial \xi_0}{\partial x} dx = - \frac{m-2}{2mG} \frac{q}{\pi} \arcsin \frac{x}{a},$$

$$\text{für } x > a: \quad \xi_0 = - \frac{m-2}{4mG} q.$$

Die Oberfläche verschiebt sich also unter der Sohle der Lastplatte von

beiden Seiten gegen die Mitte, die Größe der Verschiebung wächst von Null (im Punkte 0) zum Größtwert  $\xi_{0a}$  (unter dem Rande).

Falls dadurch eine Reibung entsteht, so wirken die Reibungskräfte, die den Halbraum beanspruchen, nach außen hin. Elastische Deformationen werden jedoch kleiner sein als plastische Verschiebungen, welche das Material unter den Rändern der Lastfläche erleidet und welche ein Ausweichen des Materials nach außen hin zur Folge haben. Die durch das Fließen hervorgerufenen Reibungskräfte sind also den ersteren entgegengerichtet. Die resultierende Schubbeanspruchung der Oberfläche wird von dem Verhältnis der elastischen und der plastischen Verschiebungen abhängig sein, daher auch von den Materialeigenschaften des Halbraumes und des Lastkörpers, sowie auch von der Größe der Last selbst. Die weiter folgenden Ausführungen zeigen, daß der Einfluß der plastischen Erscheinungen nicht dem Lastzuwachs proportional ist. Es ist zu erwarten, daß bedeutende Reibungskräfte in der Sohlenfläche erst bei Belastungen auftreten werden, welche sich der Bruchlast nähern. Ihr Einfluß beschränkt sich nach dem de St. Venant'schen Prinzip auf kleine Entfernungen von dem Laststreifen. Alle diese Gründe führen dazu, daß Sohlenreibung bei den Gleichgewichtsuntersuchungen nicht in Betracht gezogen wird. Dieses Vorgehen scheint gerechtfertigt zu sein, solange die plastischen Formänderungen in begrenzten Gebieten unterhalb der Ränder, nicht jedoch in voller Breite der Lastfläche zum Vorschein kommen. Da wir in den weiteren Ausführungen lediglich den vorwiegend elastischen Zustand behandeln, werden wir die durch Sohlenreibung hervorgerufenen Schubkräfte außer acht lassen und beschränken uns auf die Untersuchung einer reibunglosen Lastübertragung.

Es sei noch bemerkt, daß durch Versuchsmessungen entweder keine oder ganz unbedeutende Reibungskräfte zwischen Betonkörper und Sandschüttung festgestellt wurden<sup>12)</sup>, welche die Sandschichten in der Richtung gegen die Plattenmitte beanspruchten. Sie traten erst bei größeren Belastungen auf (über  $4 \text{ kg/cm}^2$ ) und betragen höchstens 6 % des lotrechten Sohlendruckes. Die obigen Erwägungen finden sich durch diese Messungen bestätigt.

## 6. Einfluß der Oberflächenbelastung.

Wirken an der Oberfläche außer dem starren Plattenstreifen auch noch andere Lasten, so wird die Sohlendruckverteilung von der bisher behandelten verschieden sein, da die Verformungslinie der Oberfläche des Halbraumes innerhalb der Ränder des Streifens nunmehr unter der Einwirkung der gesamten aufgebrachten Lasten linear verlaufen muß. Für weitere Ausführungen ist der folgende Fall zu untersuchen: der Halbraum trägt beiderseits des Streifens eine gleichmäßig verteilte Belastung  $p_0$  (Fig. 13).

Wäre die Oberfläche überall nur mit  $p_0$  belastet, so würden die Spannungen bei verhinderter Querdehnung betragen

$$\sigma_x = \sigma_y = -\frac{p_0}{m-1}, \quad \sigma_z = -p_0. \quad (24)$$

Die Senkung der Oberfläche wäre dabei überall gleich. Falls man die Belastung  $p_0$  von dem Streifen  $AB$  entfernt, so entsteht hier eine Aufwölbung, deren Neigung  $-\frac{\partial \zeta_1}{\partial x}$  nach Ziff. 3 angegeben werden kann.

<sup>12)</sup> F. SIEMONSEN, Die Lastaufnahmekräfte im Baugrund. Bautechnik 1942, S. 319.

Wird jetzt die Streifenlast  $q$  hinzugefügt, welche die Oberflächensenkung  $\zeta_0'$  verursacht, so lautet die Bedingung für das Ebenbleiben der Sohlenfläche  $AB$ :

$$\frac{\partial \zeta_0'}{\partial x} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} = 0.$$

Diese wird offenbar erfüllt, falls von der Last  $q$  der Teil  $2ap_0$  gleichmäßig und der Rest  $q - 2ap_0$  nach dem Gesetz (14) verteilt wird. Der erste Teil ruft dann eine Neigung  $+\frac{\partial \zeta_1}{\partial x}$ , der Rest eine Nullneigung hervor, so daß die obere Bedingung befriedigt wird. Somit ist die Druckverteilung unter einer starren Platte in diesem Falle durch die Funktion gegeben

$$p(t) = p_0 + \frac{q - 2ap_0}{\pi \sqrt{a^2 - t^2}}. \quad (25)$$

Es ist demnach möglich, daß auch ein starrer Körper die Last gleichmäßig verteilt. Das könnte jedoch lediglich in dem Falle vorkommen, wenn die gleichmäßige Oberflächenbelastung beiderseits des starren Plattenstreifens dem mittleren Sohlendruck gleich wäre. Der Spannungszustand, der durch das gleichzeitige Einwirken beider Belastungen  $p_0$  und  $q$  entsteht, wird durch die Summen der Komponenten gemäß (24) und (16) dargestellt; in die Formeln (16) ist jedoch statt  $q$  nur der Teil  $q - 2ap_0$  einzusetzen.

Um zu überprüfen, wie weit die Verteilungsgesetze (14) und (25) mit der in den Baukonstruktionen tatsächlich vorkommenden Spannungsverteilung im Einklang sind, unternahmen wir im Jahre 1936 in der Forschungsanstalt für das Bauwesen in Prag Versuchsmessungen, über welche ich dem II. Kongreß der IVBH im Jahre 1936 teilweise berichtete<sup>13)</sup>. Es wurden Spannungen zwischen Lastplatten aus Messing und einer elastischen Gummischicht oder einer Sandschicht gemessen. Mit Rücksicht darauf, daß durch plastische Formänderungen in den Plattenrändern und im belasteten Material unterhalb der Ränder die ins Unendliche reichenden Spannungsspitzen abgestumpft werden, ergaben sich Linien, welche im sonstigen Bereich der Lastfläche mit den nach (14) und (25) berechneten Kurven gut übereinstimmen.

Seitdem wurden Berichte über weitere Versuche veröffentlicht, von denen besonders jene von Dr. Ing. SIEMONSEN<sup>14)</sup> besondere Beachtung verdienen. Es wurden u. a. Spannungen in der Gründungssohle eines quadratischen Betonkörpers von  $3,5 \times 3,5$  m Sohlenfläche gemessen. Die Ergebnisse bestätigten eindeutig den hohlpolytischen Verlauf der Drucklinie im mittleren Teile der Lastfläche, wie es der vorangeführten Theorie des elastischen Halbraumes entspricht.

Alle Messungen weisen weiter darauf hin, daß bei steigender Belastung das Material unter den Randgebieten mehr und mehr ausweicht, was eine Wanderung der Pressungen gegen die Mitte der Lastfläche verursacht. Wenn wir jetzt die Grenzbelastung bestimmen wollen, bei welcher dieses Ausweichen permanent zu werden beginnt, haben wir den unter Ziff. 4 und 6 beschriebenen Spannungszustand des Halbraumes auf Grund der Fließbedingung des Materials zu untersuchen.

<sup>13)</sup> Hruban und Hacar, Schlußbericht des II. Kongresses der I. V. B. H., Bericht VIII 2, Berlin 1938.

<sup>14)</sup> Die Bautechnik, 1941, S. 159 und 1942, S. 319.

## 7. Die Fließbedingung.

Wir wissen bisher sehr wenig über das Verhalten verschiedener Stoffe an der Fließgrenze bei dreiachsigem Druck mit Hauptspannungen verschiedener Größe. Die meisten bisherigen Zusammendrückungsgeräte sind so eingerichtet, daß lediglich entweder ein ebener Deformationszustand oder ein achsial-symmetrischer Spannungszustand untersucht werden kann. Die Forschungen der letzten Jahre über die Mechanik des bildsamen Verhaltens von Flußstahl<sup>15)</sup> beweisen jedoch das Nichtzutreffen der MOHR'schen Hypothese, nach welcher die mittlere Hauptspannung keinen Einfluß auf die Fließbedingung ausübt. Dieselbe Schlußfolgerung ergeben Versuche, welche KJELLMAN<sup>16)</sup> in einem besonders konstruierten Kompressionsapparat mit Sand durchgeführt hat.

Wenn man die bisherigen Arbeiten überblickt, gelangt man zu der Anschauung, die zuerst von HUBER ausgesprochen und später von mehreren anderen Forschern genauer formuliert wurde, daß die Fähigkeit des Materials, sich elastisch zu verhalten, dadurch beschränkt ist, daß die bezogene Gestaltänderungsarbeit einen Grenzwert nicht überschreiten kann. Dieser Grenzwert scheint von der durch die Vorgeschichte des Materials in ihm akkumulierten Energie abhängig zu sein. Die bezogene Gestaltänderungsarbeit ist der Summe der Quadrate der Hauptschubspannungen proportional, die akkumulierte Energie ist eine Funktion der Hauptnormalspannungen, wobei jedoch in die Komponenten die gesamten in der Festsubstanz der Masse wirkenden Spannungen einzubeziehen sind (also auch Innendruck und Nebenspannungen). Wenn wir mit  $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$  diese totalen Hauptspannungen bezeichnen, wobei wieder  $\sigma_I$  die kleinste und  $\sigma_{III}$  die größte Druckspannung bedeutet, so läßt sich die Fließbedingung im allgemeinen in der Form anschreiben

$$(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 = f(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}). \quad (26)$$

Für praktische Berechnungen wird eine einfache Form der Funktion  $f$  gewählt und die darin vorkommenden Konstanten werden so bestimmt, daß sie im gewählten Spannungsbereich den Erfahrungen möglichst gut entsprechen.

Wir werden uns hier mit der einfachsten Form dieser Funktion begnügen, welche bei ebenem Deformationszustand zu linearen Bedingungsgleichungen führt. Wir nehmen an, daß in dem belasteten Material außer den Spannungen gemäß Abschnitt 4 bzw. 6 nur noch ein hydrostatischer Spannungszustand mit allseitiger Pressung  $\sigma_0$  herrscht, welcher durch Molekularkräfte, Vorbelastung, Eigenspannungen und Nebeneinwirkungen hervorgerufen ist. Die Hauptspannungen des durch die Belastung bedingten elastischen Zustandes seien wieder  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Dann betragen die totalen Hauptspannungen im belasteten Material

$$\sigma_I = \sigma_0 + \sigma_1, \quad \sigma_{II} = \sigma_0 + \sigma_2, \quad \sigma_{III} = \sigma_0 + \sigma_3.$$

Die Differenzen auf der linken Seite der Gleichung (26) sind

$$\sigma_I - \sigma_{II} = \sigma_1 - \sigma_2, \quad \text{usw.}$$

<sup>15)</sup> P. BIJLAARD, Theory of local plastic deformations. A. I. P. C., Mémoires, vol. 6, S. 27. — HOHENEMSER u. PRAGER, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., 1931, S. 1. In diesen beiden Abhandlungen ist weiteres Schrifttum angeführt.

<sup>16)</sup> J. HVORSLEV, Über die Festigkeitseigenschaften gestörter bindiger Böden, København 1937, S. 100. — W. KJELLMAN, Proceedings of the intern. conference on soil mechanics, 1936, vol. II, S. 16.

und die rechte Seite wird zu einer Funktion von  $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Wir nehmen an, daß sich die Wurzel dieser Funktion in eine Potenzreihe nach der durchschnittlichen Hauptspannung  $\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$  entwickeln läßt, von welcher wir nur die ersten zwei Glieder behalten. Das Ergebnis kann wie folgt ange- schrieben werden:

$$\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 = \frac{k^2}{2} \left(\sigma + \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)^2. \quad (27)$$

Dies ist eine einfache Form der Fließbedingung für isotrope Stoffe, welche mit dem Prinzip der begrenzten Gestaltänderungsarbeit im Einklang steht. Der Beiwert  $k$  und die Spannung  $\sigma$  bedeuten hierin Stoffkonstanten;  $k$  ist durch die innere Reibung und  $\sigma$  durch Innenspannungen bedingt. Je nachdem, welcher von diesen beiden Werten die Beschaffenheit des Materials mehr beeinflußt, können drei Gruppen von Stoffen unterschieden werden.

I. Gruppe. Stoffe ohne innere Reibung, bei welchen  $\sigma$  gegenüber  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  sehr groß und  $k$  sehr klein ist, wie z. B. Metalle. (Für Flußstahl wird z. B.  $\sigma = 320\,000 \text{ kg/cm}^2$  angegeben,  $k$  ist dann  $\sim 0,0075$ ). Hierher gehören auch wassergesättigte Tone bei schneller Lastaufbringung. Die rechte Seite der Beziehung (27) kann somit als konstant angenommen werden, und diese verwandelt sich in die HUBER-v. MISES-HENCKY'sche Fließbedingung für Stahl

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 = 2(k\sigma)^2 = 2\sigma_v^2, \quad (28)$$

a) Beim einachsigen Zug ist  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$  und es folgt

$$\sigma_1 = \sigma_v, \quad (28a)$$

$\sigma_v$  bedeutet also die Fließgrenze in dem vereinfachten Spannungsdehnungsdiagramm (Fig. 8) bei reiner Zugbeanspruchung. Derselbe zahlenmäßige Wert ergibt sich aus (28) für einachsige Druckbeanspruchung.

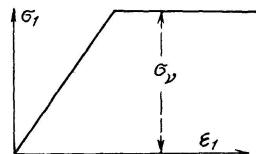


Fig. 8

b) Im Falle ebener Deformation ist

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{m}.$$

Im Anfangsstadium des Fließvorganges ist jedoch bei den meisten Stoffen  $m = 2$  und die Gl. (28) liefert damit die Fließbedingung

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_v. \quad (28b)$$

Der Spannungsunterschied könnte daher im Verhältnis  $2:\sqrt{3} = 1,15$  höher sein als bei reiner Zugbeanspruchung. Es gibt also eine obere und eine untere Streckgrenze, was auch mit den Beobachtungen übereinstimmt<sup>17)</sup>.

<sup>17)</sup> l. c. unter <sup>15)</sup>, S. 41.

c) Wir betrachten noch den folgenden achsial-symmetrischen Spannungszustand, der bei der Belastung des Halbraumes durch einen starren Zylinderstempel vorkommt: in der Richtung der  $Z$ -Achse wirkt die größte Pressung  $\sigma_3$ , die beiden anderen Hauptspannungen sind gleiche Pressungen  $\sigma_1 = \sigma_2$ . Die Gleichung (28) liefert für diesen Fall

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_v, \quad (28c)$$

der Spannungsunterschied ist also derselbe wie bei einachsiger Beanspruchung.

II. Gruppe. Schüttmassen mit  $\sigma = 0$ . In der Fließbedingung (27) verbleibt nur die Konstante  $k$ . Da hier nur Druckspannungen (mit negativem Vorzeichen) vorkommen können, schreiben wir jetzt die Fließbedingung (27) wie folgt an

$$\left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_2}{2}\right)^2 = \frac{k^2}{2} \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)^2. \quad (29)$$

a) Im einachsigen Spannungszustand ergibt sich

$$\sigma_3 = 0, \quad (30a)$$

diese Stoffe besitzen keine Druckfestigkeit.

b) Für den Fall der ebenen Deformation lautet die Fließbedingung (mit  $m = 2$ )

$$\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_3} = \frac{k}{\sqrt{3}}. \quad (30b)$$

Dies ist die bekannte Gleichung der klassischen Erddrucklehre, wenn der Reibungswinkel mit

$$\varphi_1 = \arcsin \frac{k}{\sqrt{3}}$$

bezeichnet wird.

c) Für die achsial-symmetrische Beanspruchung müssen hier zwei Fälle unterschieden werden.

α) Der Achsialdruck  $\sigma_3$  ist größer als der Manteldruck  $\sigma_1 = \sigma_2$ . Beachtet man, daß

$$\frac{2\sigma_1 + \sigma_3}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{6}$$

ist, so bekommt man die Fließbedingung in der Form

$$\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_3} = \frac{3k}{6 + k}. \quad (30c)$$

Es erscheint in diesem Falle ein anderer Reibungswinkel

$$\varphi_2 = \arcsin \frac{3k}{6 + k}.$$

β) Der Achsialdruck  $\sigma_1$  ist kleiner als der Manteldruck  $\sigma_2 = \sigma_3$ . Das Einsetzen in (30) führt zu der Fließbedingung

$$\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_3} = \frac{3k}{6 - k} \quad (30d)$$

und der Reibungswinkel erreicht den Wert

$$\varphi_3 = \arcsin \frac{3k}{6-k}.$$

Falls die angenommene allgemeine Fließbedingung (27) dem tatsächlichen Verhalten des Materials entspricht, müssen also bei verschiedenen Spannungszuständen verschiedene Reibungswinkel zum Vorschein kommen. Es ergeben sich z. B. für  $k = 1$  die Werte  $\varphi_2 = 25^\circ 20'$ ,  $\varphi_3 = 37^\circ$ ; der Reibungswinkel bei ebener Formänderung  $\varphi_1 = 35^\circ 20'$  liegt dazwischen.

Die erwähnten Messungen von KJELLMAN haben tatsächlich bei seinem Versuchssand für den Fall c) einen kleineren Reibungswinkel ergeben als für den Fall b) und zwar  $35^\circ$  gegen  $43^\circ$ ; der Unterschied ist jedoch nicht so groß, wie die Gleichungen (30c) und (30d) angeben.

Den Fließbedingungen (30b) und (30c) sind weiter die Ergebnisse verschiedener Versuchsmessungen<sup>18)</sup> gegenüberzustellen, welche beweisen, daß der Zusammenhang beider Werte  $(\sigma_3 - \sigma_1)$  und  $(\sigma_1 + \sigma_3)$  nicht linear ist, sondern durch eine leicht gekrümmte Linie dargestellt werden kann. Wir müssen daher die Brauchbarkeit der vereinfachten Fließbedingung (27) auf einen Spannungsbereich begrenzen, in welchem die Umhüllungskurve der MOHR'schen Hauptkreise durch eine gerade Linie nach COULOMB ersetzt werden kann (Fig. 9). Dies ist bei den praktischen Aufgaben der Bodenmechanik zulässig, da hier nur verhältnismäßig kleine Unterschiede von Druckspannungen vorkommen.

Jedenfalls kann durch die Annahme des Satzes von der begrenzten Gestaltänderungsarbeit die Tatsache erklärt werden, daß mit Benützung verschiedener Meßeinrichtungen verschiedene Reibungswinkel bei demselben Material festgestellt werden; der Winkel der inneren Reibung darf dann einen veränderlichen, von der Größe der mittleren Hauptspannung abhängigen Wert haben, und es wäre besonders zwischen den Werten  $\varphi_1$  (bei ebenem Formänderungszustand) und  $\varphi_2$  (im Falle  $|\sigma_3| > |\sigma_1| = |\sigma_2|$ ) zu unterscheiden.

III. Gruppe. Stoffe mit Kohäsion und innerer Reibung. Die Fließbedingung (27) bleibt mit beiden Konstanten  $k$  und  $\sigma$  in Kraft. Es folgt daraus für den einachsigen Spannungszustand, daß die Fließgrenze bei reinem Druck höher liegt als bei reinem Zug. Für dreiachsig Druckbeanspruchung läßt sich die Fließbedingung für alle drei bei der vorigen Stoffgruppe behandelten Fälle auf die Form bringen

$$\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_3 + 2\sigma} = \sin \varphi. \quad (31)$$

Der Reibungswinkel  $\varphi$  hat wieder in einem jeden dieser Fälle einen verschiedenen Wert  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  und zwar denselben, wie in den Gleichungen (30b), (30c), (30d). Sonst ist die Fließbedingung (31) identisch mit der bekannten COULOMB'schen Gleichgewichtsbedingung für kohärente Stoffe; die Kohäsion im COULOMB'schen Sinne ist durch

$$O'M = c = -\sigma \operatorname{tg} \varphi \quad (32)$$

gegeben. Wie bei der vorigen Stoffgruppe muß man die Gültigkeit der Bedingung (31) wieder nur auf einen bestimmten Bereich, z. B.  $MN$  (Fig. 9),

<sup>18)</sup> Z. B. W. BERNATZIK, Versuche über Festigkeitseigenschaften von Sand im dreiachsigem Spannungszustand, Wasserwirtschaft und Technik, Wien, 1935, S. 184.

beschränken, in welchem die krumme Umhüllungslinie der Spannungshauptkreise durch eine Gerade ersetzt werden kann. Die Größe  $\sigma$  ist von der Wahl dieses Bereiches abhängig, sie bedeutet eine Druckspannung und ist in die Gl. (31) mit negativem Vorzeichen einzusetzen, ebenso wie die Druckspannungen  $\sigma_1, \sigma_3$ . Der Wert  $\sigma_v$  bedeutet hier jedoch nicht die Fließgrenze bei reiner einachsiger Druckbeanspruchung; wenn  $\sigma_1 = 0$  ist, richtet sich die Größe von

$$\sigma_v = \frac{2 \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \sigma \quad (32a)$$

offenbar nach dem Werte des Reibungswinkels  $\varphi$  und damit auch nach der Größe der mittleren Hauptspannung  $\sigma_2$ . Die Druckfestigkeit wird also bei einseitig behinderter Querdehnung größer sein als bei reiner Druckbeanspruchung.

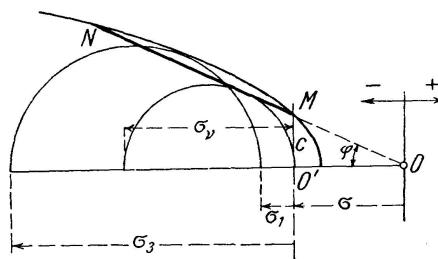


Fig. 9

### 8. Die Belastung an der Grenze des elastischen Zustandes.

Wir wollen jetzt mit Hilfe der im vorigen Abschnitt gewonnenen Beziehungen versuchen, diejenige Intensität der Streifenlast zu ermitteln, welche an der Grenze zwischen vorwiegend elastischem und vorwiegend plastischem Verhalten des beanspruchten Halbraumes liegt. Um zu einer eindeutigen Definition dieser Grenzbelastung zu gelangen, betrachten wir zuerst den folgenden einfachen Fall: das Material des Halbraumes ist elastisch-isotrop und gehört zu den Stoffen der I. Gruppe des vorigen Abschnittes. Die Fließbedingung ist daher für den behandelten ebenen Formänderungszustand durch Gl. (28b) gegeben. Diese besagt, daß der Unterschied der Hauptspannungen eine konstante Größe  $\frac{2 \sigma_v}{3}$  nicht überschreiten soll;  $\sigma_v$  ist hierin die

Fließgrenze bei reiner einachsiger Zugbeanspruchung. Die Oberfläche des Halbraumes beiderseits des starren Plattenstreifens sei unbelastet, das Eigengewicht des Materials wird nicht in Betracht gezogen.

Dann sind die Hauptspannungen durch die Formel (19) bestimmt und ihre Differenz ist

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{q R}{\pi r \sqrt{2 r z}}.$$

Trägt man den bezüglichen Wert von  $\sigma_1 - \sigma_3$  in jedem Punkte der  $XZ$ -Ebene senkrecht zur Bildebene (Fig. 10) auf, so erhält man eine Fläche, deren Schichtlinien in der Projektion durch Isochromen dargestellt sind. Diese Fläche schneidet die Bildebene in der  $X$ -Achse, steigt längs der  $Z$ -Achse bis über den Punkt  $C$ , der in der Entfernung  $a\sqrt{2}$  von der Lastfläche liegt, und senkt sich wieder allmählich mit der wachsenden  $z$ -Ordinate des betrachteten Punktes. Vom Punkte  $C$  formt sie zwei gegen die Ränder der

Lastfläche steigende Rücken, welche in infinitesimaler Entfernung von den Rändern unendlich hoch werden. Es muß daher schon bei der kleinsten Belastung zu plastischen Formänderungen in den Randgebieten, und zwar nicht nur im beanspruchten Halbraum, sondern auch in dem die Last übertragenden Körper kommen. In der Fig. 10 ist durch Schraffierung jener Bereich gekennzeichnet, in welchem die Hauptspannungsdifferenz den Grenzwert  $\frac{2\sigma_v}{3}$  überschreitet, wenn die Durchschnittsbelastung  $\frac{q}{2a} = \frac{2}{0,70\sqrt{3}}\sigma_v$  beträgt. Durch wird eine Änderung des Spannungszustandes hervorgerufen. Die Analyse dieses Zustandes gehört zu der statisch unbestimmten Aufgabe der Plastizitätsmechanik; denn sie ist von den plastischen Verschiebungen im

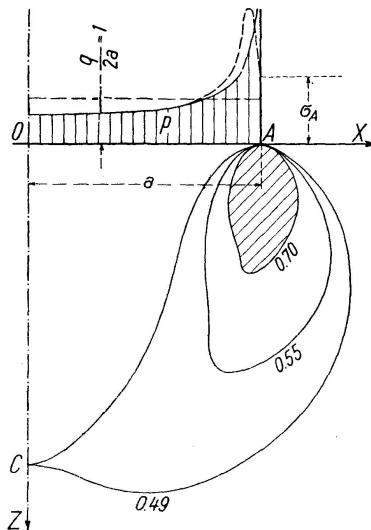


Fig. 10

Körperrand und im Halbraum abhängig und entzieht sich vorläufig einer strengeren theoretischen Behandlung. Man kann jedoch einen Näherungswert des Randdruckes  $\sigma_A$  gewinnen, indem man den Verlauf der isostatischen Kurven (und damit der Gleitlinien) in unmittelbarer Nähe des Randpunktes als bekannt annimmt.

a) der RANKINE'sche Gleichgewichtszustand. Die Richtungen der Hauptspannungen sind mit den Achsen  $X, Z$  parallel, rechts vom Randpunkte  $A$  herrscht der Fließzustand mit  $\sigma_z = 0$ , links davon der Fließzustand mit der größten Druckspannung  $\sigma_A$ . Das Gleichgewicht dicht unterhalb des Randpunktes erfordert, daß beiderseits dasselbe  $\sigma_x$  vorkommt; die Fließbedingung (28b) ergibt

$$\sigma_A = \sigma_x - \frac{2\sigma_v}{\sqrt{3}}, \quad \sigma_x = 0 - \frac{2\sigma_v}{\sqrt{3}},$$

$$\sigma_A = -\frac{4}{\sqrt{3}}\sigma_v = -2,31\sigma_v. \quad (33a)$$

b) Der BOUSSINESQ-RÉSAL'sche Gleichgewichtszustand. Es wird angenommen, daß eine Schar Gleitlinien durch Strahlen gebildet wird, welche von dem Randpunkte ausgehen. Diese Voraussetzung ergibt<sup>19)</sup> mit der Fließbedingung (28b)

<sup>19)</sup> S. A. CAQUOT, Equilibre des massifs à frottement interne, Paris 1934, S. 59.

$$\sigma_A = -2,571 \frac{2 \sigma_v}{\sqrt{3}} = -2,97 \sigma_v. \quad (33b)$$

Die tatsächliche Randspannung wird wahrscheinlich näher dem Werte (33a) liegen und die resultierende Änderung der Druckverteilung in der Lastfläche kann etwa durch die schraffierte Linie in Fig. 9 dargestellt werden.

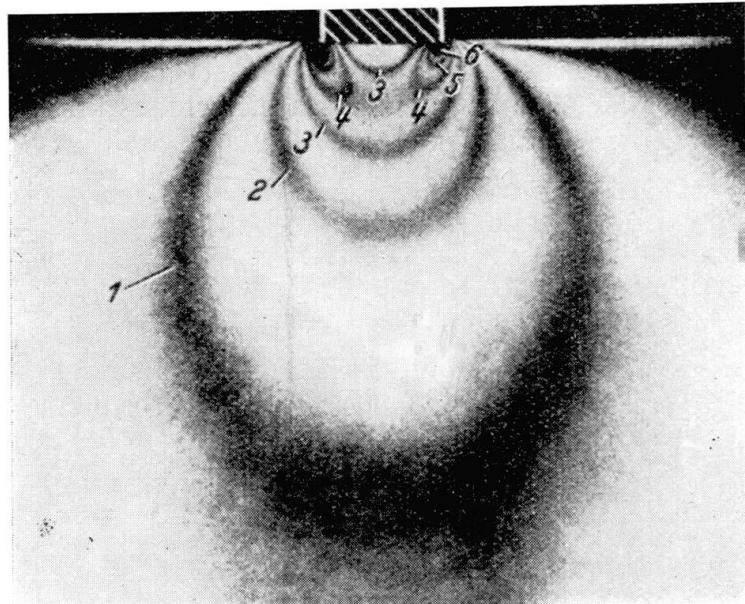


Fig. 11

Die Spannungsspitze wird abgestumpft und gegen die Mitte der Lastfläche verschoben. Dadurch verändert sich der Spannungszustand des Halbraumes und somit auch die Abgrenzung des plastischen Bereiches, was auch durch Vergleich der spannungsoptischen Aufnahme (Fig. 11) mit dem theoretischen Verlauf der Isochromen im Randgebiet ersichtlich ist. Diese Spannungsumlagerung bleibt jedoch nach dem Saint Venant'schen Prinzip auf die unmittelbare Umgebung des Störungsherdes beschränkt. Im plastischen Bereich sinkt die Querdehnungszahl auf den Wert  $m = 2$  und die bezogene kubische Zusammendrückung wird Null. Es muß daher ein entsprechender Teil des plastisch gewordenen Materials seitlich des Randes herausgequetscht werden. Der Rand des Lastkörpers schneidet sich in den Halbraum ein, falls das Material dieses Körpers härter ist als dasjenige des Halbraumes. Dies kann man z. B. bei Probebelastungen bindiger Böden deutlich beobachten.

Die Verschiebung des starren Lastkörpers ist jedoch in diesem Stadium des Belastungsvorganges durch die elastische Zusammendrückung in der  $Z$ -Achse gegeben; andauernde Senkungen können daher nicht auftreten, solange die Fließbereiche auf Randgebiete begrenzt bleiben.

Wird nun die Last gesteigert, so vergrößern sich die beiden Bereiche, in welchen die kritische Spannungsdifferenz im elastischen Zustand überschritten wird, bis sie endlich bei dem durch (18) gegebenen Werte der Hauptschubspannung die  $Z$ -Achse im Punkte  $C$  erreichen. Die mittlere Belastung beträgt in diesem Augenblick

$$\frac{q}{2a} = \frac{2\sigma_v}{\sqrt{3}} \frac{3\pi\sqrt{3}}{8} = 2,356 \sigma_v. \quad (34)$$

Der Verlauf der durch  $C$  gehenden Isochrome  $\sigma_1 - \sigma_3 = 0,490 \frac{q}{2a}$  ist in Fig. 10. darstellt. Bei elastischem Zustand wäre die kritische Schubspannung im ganzen zwischen den beiden Ästen dieser Kurve eingeschlossenen Bereich überschritten. Die dadurch verursachte Bildung plastischer Gebiete, deren Tiefe jetzt schon die Größenordnung der halben Lastflächenbreite erreicht, ruft eine weiterreichende Umlagerung der Druckverteilung hervor.

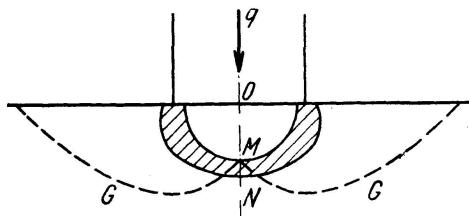


Fig. 12

Wächst die Belastung noch weiter an, so dürfte sich zuerst eine zusammenhängende plastische Zone etwa nach Fig. 12 bilden, welche den elastisch bleibenden Kern unter der Lastfläche umschließt und vom äußerem elastisch bleibenden Materiale des Halbraumes abtrennt. In diesem Stadium des Belastungsvorganges kann jedoch das Material noch nicht ins Gleiten geraten, da sich die Gleitlinien  $G$  nicht ausbilden können. Das plastisch gewordene Material mit der Querdehnungszahl  $m = 2$  muß jedoch infolge seiner Volumenbeständigkeit neben den Plattenrändern ausgequetscht werden, und der Lastkörper sinkt samt dem elastischen Kern ein, wodurch die Entfernung  $ON$  kleiner wird. Infolgedessen vergrößert sich die Spannung in  $N$ , eine weitere dünne Schicht des Materials wird durch den Fließvorgang ergriffen und die Senkung schreitet mit geringer Geschwindigkeit fort. Das andauernde Einsinken könnte erst dann aufhören, wenn das Gewicht des hinaufgedrückten Materials den elastischen Zustand unter der Plattenmitte wieder herstellen würde.

Auf Grund dieser Erwägungen kann die gesuchte Grenzbelastung als diejenige Lastgröße definiert werden, bei welcher das kritische Spannungsverhältnis in irgend einem Punkte der Wirkungslinie der angreifenden Kraft erreicht wird. Unter dem kritischen Verhältnis wird die durch die Fließbedingung bedingte Funktion der Hauptspannungen verstanden.

## 9. Die Grenzbelastung bei ebenem Formänderungszustand.

Wir betrachten jetzt den allgemeinen Fall, daß die Oberfläche des Halbraumes beiderseits des Plattenstreifens eine gleichmäßig verteilte Belastung  $p_0$  trägt (Fig. 13). Das Material sei durch den Reibungswinkel  $\varphi_1$  und die Konstante  $\sigma = -c_1 \cot \varphi_1$  gemäß (32) gekennzeichnet.

Das Eigengewicht des Halbraumes ziehen wir vorläufig nicht in Betracht. Die Druckverteilung unter dem starren Plattenstreifen ist durch (25) gegeben und die Hauptspannungen unter Plattenmitte betragen gemäß (24) und (17):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= -\frac{p_0}{m-1} - \frac{q - 2ap_0}{\pi} \frac{a^2}{s^3}, \\ \sigma_3 &= -p_0 - \frac{q - 2ap_0}{\pi} \frac{s^2 + z^2}{s^3}. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Wir bezeichnen das Verhältnis, das die linke Seite der Fließbedingung (31) bildet, mit  $v$ . Setzt man die Werte (35) und  $\vartheta = \arcsin \frac{a}{s}$  ein, so erhält man

$$v(\vartheta) = \frac{\frac{m-2}{m-1}p_0 + 2\frac{q-2a}{\pi a}p_0 \sin \vartheta \cos^2 \vartheta}{\frac{m}{m-1}p_0 + 2\frac{q-2a}{\pi a}p_0 \sin \vartheta + 2c_1 \cotg \varphi_1}. \quad (36)$$

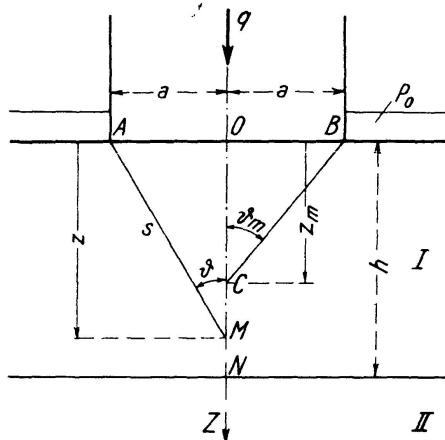


Fig. 13

Dieses Verhältnis erreicht sein Maximum beim Werte  $\vartheta_m$  des Winkels  $\vartheta$ , der durch die Gleichung bedingt ist

$$\begin{aligned} & \left( \frac{m}{m-1} p_0 + 2 \frac{q-2ap_0}{\pi a} \sin \vartheta_m + 2c_1 \cotg \varphi_1 \right) \cdot 2 \frac{q-2ap_0}{\pi a} \cos \vartheta_m (\cos^2 \vartheta_m - 2 \sin^2 \vartheta_m) - \\ & - 2 \frac{q-2ap_0}{\pi a} \cos \vartheta_m \left( \frac{m-2}{m-1} p_0 + 2 \frac{q-2ap_0}{\pi a} \sin \vartheta_m \cos^2 \vartheta_m \right) = 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Der Größtwert von  $v$  muß die Fließbedingung (31) befriedigen:

$$v(\vartheta_m) \equiv \sin \varphi_1. \quad (38)$$

Durch Elimination von  $\vartheta_m$  aus den Gleichungen (37) und (38) erhält man die Grenzbelastung  $q$  als Funktion der gegebenen Größen. Mit der Bezeichnung

$$k_1 = \frac{3\pi\sqrt{3}}{4\sqrt{(1 - \sin\varphi_1)^3}} \quad (39)$$

ergibt sich

$$\frac{q}{2a} = k_1 \cos \varphi_1 \cdot c_1 + \left[ 1 + \frac{2 - (1 - \sin \varphi_1)m}{2(m-1)} k_1 \right] p_0. \quad (40)$$

Die Beiwerte  $k_1$  sind in der Zahlentafel 1 für verschiedene Werte des Reibungswinkels angegeben.

Aus (37) und (38) folgt weiter

$$\sin \vartheta_m = \sqrt{\frac{1 - \sin \varphi_1}{3}}.$$

Die Ordinate  $z_m$  des Punktes C, in welchem das Verhältnis sein Maximum erreicht, beträgt

$$z_m = a \sqrt{\frac{2 + \sin \varphi_1}{1 - \sin \varphi_1}}. \quad (41)$$

Der kleinstmögliche Wert dieser Größe (bei  $\varphi_1 = 0$ ) ist

$$\min z_m = a \sqrt{2}. \quad (41a)$$

Beispiel 1. Die Last wird durch eine schmale Schiene auf einen breiten Betonblock weit von seinem Rande übertragen. Ersetzt man die Umhüllungskurve nach Fig. 9, welche für den Beton des Blocks bei ebenem Formänderungszustand bestimmt wurde, im Druckbereich durch eine Gerade, so ist diese durch die Werte  $c_1 = 26 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\varphi_1 = 41^\circ$  bestimmt.

Die Grenzbelastung unter der Stahlschiene ergibt sich, wobei der Block sonst unbelastet ist, gemäß (40):

$$\frac{q}{2a} = \frac{3\pi\sqrt{3}\cos\varphi_1}{4\sqrt{(1-\sin\varphi_1)^3}} c_1 = 397 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Druckfestigkeit dieses Betons beträgt rund  $110 \text{ kg/cm}^2$ , die Bruchlast, nach CAQUOT berechnet,  $1770 \text{ kg/cm}^2$ , nach RITTER  $660 \text{ kg/cm}^2$ . Bei einer Belastung von  $400 \text{ kg/cm}^2$  kann jedoch schon ein andauerndes allmähliches Eindrücken der Schiene in den Beton erfolgen.

## 10. Die Grenzbelastung bei achsial-symmetrischem Spannungszustand.

Die Druckverteilung unter einem starren Kreisstempel, welcher auf der sonst unbelasteten Oberfläche des Halbraumes liegt, wurde schon von BOUSSINESQ im Jahre 1885 bestimmt. Ist rings um den Stempel noch eine gleichmäßige Belastung  $p_0$  aufgebracht (Fig. 14), so ergibt sich mit Be-

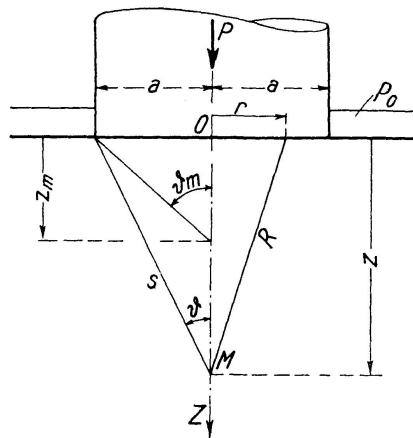


Fig. 14

nützung seiner Lösung und mit Rücksicht auf die bei der Ableitung der Gl. (25) gemachten Erwägungen die Funktion für die Druckverteilung in der Sohle mit

$$p(r) = p_0 + \frac{P - \pi a^2 p_0}{2\pi a \sqrt{a^2 - r^2}} = p_0 + \bar{p}. \quad (42)$$

(Bezeichnungen nach Fig. 14)

Die Druckverteilungslinie hat einen ähnlichen Verlauf wie bei ebenem Formänderungszustand (s. Fig. 10).

Auf Grund der angenommenen Definition der Grenzbelastung genügt uns jetzt die Kenntnis der Hauptspannungen in der Symmetriechse. Wir führen die Zylinderkoordinaten  $r, z$  ein. Die aus der Elastizitätstheorie bekannten Beziehungen liefern folgende Beiträge der Belastung  $\bar{p} dr$  des ganzen Kreises vom Halbmesser  $r$  zu den Hauptspannungen im Punkte  $M(0, z)$ :

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_r &= -\frac{P - \pi a^2 p_0}{4\pi a} z \left( \frac{3r^3}{R^5 \sqrt{a^2 - r^2}} - \frac{m-2}{m} \frac{r}{R^3 \sqrt{a^2 - r^2}} \right) dr, \\ d\sigma_z &= -3 \frac{P - \pi a^2 p_0}{4\pi a} z^3 \frac{r dr}{R^5 \sqrt{a^2 - r^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

(Bezeichnungen nach Fig. 14,  $m$  bedeutet die Querdehnungszahl.)

Nunmehr haben wir die Integration nach  $r$  in den Grenzen 0 bis  $a$  durchzuführen. Auf elementarem Wege findet man

$$\begin{aligned} \int \frac{r^3 dr}{R^5 \sqrt{a^2 - r^2}} &= -\frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{R s^2} \left( 1 - \frac{z^2}{3R^2} - \frac{2z^2}{3s^2} \right), \\ \int \frac{r dr}{R^3 \sqrt{a^2 - r^2}} &= -\frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{R s^2}, \\ \int \frac{r dr}{R^5 \sqrt{a^2 - r^2}} &= -\frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{3R s^2} \left( \frac{1}{R^2} + \frac{2}{s^2} \right). \end{aligned}$$

Das Einsetzen der Grenzen und der Integrationsergebnisse in Gl. (43) liefert die Spannungskomponenten

$$\sigma_r = -\frac{P - \pi a^2 p_0}{2\pi} \left( \frac{a^2}{s^4} - \frac{m-2}{2ms^2} \right), \quad \sigma_z = -\frac{P - \pi a^2 p_0}{2\pi} \frac{s^2 + 2z^2}{s^4}. \quad (44)$$

Um die Hauptspannungen  $\sigma_1, \sigma_3$  von der vollen Belastung nach Fig. 14 zu erhalten, hat man noch die Komponenten nach Gl. (24) hinzuzufügen. Bezeichnet man wieder den halben Öffnungswinkel mit  $\vartheta$  und die linke Seite der Fließbedingung (31) mit  $v$ , so findet man

$$v(\vartheta) = \frac{\frac{P - \pi a^2 p_0}{2\pi a^2} \sin^2 \vartheta \left( \frac{m-2}{m} + 3 \cos^2 \vartheta \right) + \frac{m-2}{m-1} p_0}{\frac{P - \pi a^2 p_0}{2\pi a^2} \sin^2 \vartheta \left( \frac{3m+2}{2m} + \cos^2 \vartheta \right) + \frac{m-2}{m-1} p_0 - 2\sigma}. \quad (45)$$

Dieses Verhältnis erreicht seinen Größtwert, wenn der Nenner des Ausdruckes (45) gleich ist dem mit

$$\frac{\frac{3m+2}{m} + 2 \cos^2 \vartheta - 2 \sin^2 \vartheta}{2 \left( \frac{m-2}{m} + 3 \cos^2 \vartheta \right) - 6 \sin^2 \vartheta}$$

multiplizierten Zähler.

Der dadurch bedingte Wert des Öffnungswinkels sei  $\vartheta_m$ . Dann lautet die Fließbedingung (31)

$$2 \frac{\frac{m-2}{m} + 3(\cos^2 \vartheta_m - \sin^2 \vartheta_m)}{\frac{3m+2}{m} + 2(\cos^2 \vartheta_m - \sin^2 \vartheta_m)} = \sin \varphi_2. \quad (45a)$$

(Hierin weist der Zeiger des Reibungswinkels darauf hin, daß dieser Winkel von demjenigen bei ebenem Problem zu unterscheiden ist.)

Aus (45a) folgt

$$\cos^2 \vartheta_m = \frac{4(m+1) + (m+2) \sin \varphi_2}{4m(3 - \sin \varphi_2)} \quad (46)$$

und die Ordinate des Punktes der  $Z$ -Achse, in welchem die Fließgrenze erreicht wird,

$$z_m = a \sqrt{\frac{4(m+1) + (m+2) \sin \varphi_2}{4(2m-1) - (5m+2) \sin \varphi_2}}. \quad (46a)$$

Setzt man in (45) statt  $\vartheta$  den Winkel  $\vartheta_m$  gemäß (46) ein, so erhält man den Größtwert  $v(\vartheta_m) = \sin \varphi_2$  als Funktion der Belastung und des Reibungswinkels  $\varphi_2$ . Daraus läßt sich die Grenzbelastung ermitteln. Mit der Bezeichnung

$$k_2 = \frac{4(3 - \sin \varphi_2)}{\left(\frac{2m-1}{m} - \frac{5m+2}{4m} \sin \varphi_2\right)^2} \quad (47)$$

und nach Einsetzen von  $\sigma = -c_2 \cot \varphi_2$  lautet das Ergebnis

$$\frac{P}{\pi a^2} = k_2 \cos \varphi_2 \cdot c_2 + \left[ 1 + \frac{2 - (1 - \sin \varphi_2)m}{2(m-1)} k_2 \right] p_0. \quad (48)$$

In der Baugrundlehre wird gewöhnlich mit der Querdehnungszahl  $m = 2$  gerechnet. Dann ist

$$k_2 = \frac{16(3 - \sin \varphi_2)}{9(1 - \sin \varphi_2)^2}, \quad z_m = a \sqrt{\frac{3 + \sin \varphi_2}{3(1 - \sin \varphi_2)}}. \quad (49)$$

Diese Ordinate ist bei jedem Werte von  $\varphi_2$  größer als  $a$ .

Beispiel 2. Ein Kreisstempel wird in einen Metallkörper bedeutend größeren Ausmaßes eingedrückt; die Fließgrenze des Materials bei reiner Zugbeanspruchung ist  $\sigma_v$  und die Querdehnungszahl beträgt  $m = \frac{10}{3}$ . Die Blockoberfläche ist sonst unbelastet,  $p_0 = 0$ .

Da  $\varphi_2 = 0$  ist, folgt aus (47)

$$k_2 = 12 \left( \frac{10}{17} \right)^2 = 4,16.$$

Die Durchschnittsbelastung, bei deren Überschreitung das andauernde Eindringen des Stempels in den Block beginnt, ergibt sich gemäß (48) mit  $c_2 = \frac{\sigma_v}{2}$ :

$$\frac{P}{\pi a^2} = 2,08 \sigma_v.$$

Mit dem Wert  $m = 2$  erhält man gemäß (49) und (48)

$$k_2 = \frac{16}{3}, \quad \frac{P}{\pi a^2} = 2,67 \sigma_v$$

gegen  $2,36 \sigma_v$  bei Streifenlast gemäß (34).

## 11. Anwendung bei Baugrunduntersuchungen.

Wenn wir die Ergebnisse der bisherigen Erwägungen bei Gründungsaufgaben verwerten wollen, dann müssen wir zuerst untersuchen, wie weit und in welcher Richtung der Spannungszustand der pseudosoliden Erdmassen von demjenigen des elastisch-isotropen Halbraumes mit konstantem Elastizitätsmodul abweicht. Wir zielen wieder dahin, die Belastung an der Grenze des quasi-elastischen Verhaltens der belasteten Bodenschicht zu finden, d. h. diejenige Höchstlast, bei welcher die Setzung nach dem Ausgleich hydrodynamischer Spannungen noch auf einem konstanten endlichen Wert verbleibt. Diese Grenzbelastung ist wieder von der Bruchlast zu unterscheiden, welche bedeutend höher sein wird, weil vor dem Bruch ein ausgedehntes Gebiet rings um die Lastfläche in plastischen Zustand geraten muß. Die unter Ziff. 1 angeführten Erfahrungen beweisen jedoch, daß bei Bauwerkgründungen die zulässige Sohlenpressung die gesuchte Grenzbelastung nicht überschreiten darf; andauernde Setzungen, welche nach Ablauf längerer Zeit zur Zerstörung von Bauwerksteilen führen, können auch dann auftreten, wenn die Sicherheit gegen Grundbruch genügend groß ist. Zur Abkürzung werden wir jenen Zustand der Erdmasse, bei welchem Fließgebiete die Wirkungslinie der Resultierenden der angreifenden Sohlenpressungen noch nicht erreichen, auch als elastisch bezeichnen, obzwar sich der Baugrund nicht elastisch (im wahren Sinne des Wortes) verhalten mag. Bei der Untersuchung des Gleichgewichtszustandes in bindigen Bodenarten hat man weiter den Umstand zu berücksichtigen, daß dafür lediglich die in der Festsubstanz wirkenden Spannungen maßgebend sind; jener Anteil der Beanspruchung, welcher durch das Porenwasser übernommen wird, ist also außer Betracht zu lassen.

Eine Bodenschicht, welche lediglich durch ihr Eigengewicht und eine gleichmäßig über ihre ganze Oberfläche verteilte Belastung  $p_0$  beansprucht wird, befindet sich im Gleichgewichtszustand, der durch die lotrechten und waagerechten Hauptspannungen gekennzeichnet ist:

$$\sigma_z = -p_0 - \gamma z, \quad \sigma_x = \sigma_y = \chi \sigma_z. \quad (50)$$

Hierin wird unter  $\gamma$  das Raumgewicht, unter  $z$  die Tiefe unter der Oberfläche und unter  $\chi$  die Ruhedruckziffer verstanden, die hier den Wert  $\frac{1}{m-1}$  der elastischen Stoffe vertritt. Die Querdehnungszahl  $m$  ist nämlich bei Erdmassen veränderlich, sie ist allem Anschein nach eine Funktion des Spannungsverhältnisses  $v$ , der die linke Seite der Fließbedingung (31) bildet. Nähert sich  $v$  dem Werte  $\sin \varphi$ , so sinkt  $m$  auf 2; im Fließzustand kommt es bei dichtgelagerten Bodenarten sogar zu einer Volumenvergrößerung, d. h. es ist dabei  $m < 2$ .

Die Ruhedruckziffer  $\chi$  dürfte vom Werte des Reibungswinkels abhängig sein. Dies folgt aus der Erwägung, daß eine unendlich ausgedehnte horizontale Bodenschicht nicht ins Gleiten geraten kann, wenn sie nur durch ihr Eigengewicht beansprucht wird. In diesem Falle muß daher bei einem kohäsionslosen Material gelten

$$\frac{\sigma_z - \chi \sigma_z}{\sigma_z + \chi \sigma_z} < \sin \varphi, \quad \chi > \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}.$$

Die bisher durch Messungen festgestellten Werte von  $\chi$  lassen sich gut mit der Beziehung erfassen

$$\chi = 1 - \sin \varphi.$$

Sie liefert z. B. für Sand mit  $\varphi = 35^\circ$  die Ruhedruckziffer 0,43, für fetten Ton mit  $\varphi = 16^\circ$  die Ruhedruckziffer 0,72, was den Erfahrungen entspricht. Somit lautet Gl. (50)

$$\sigma_x = -(p_0 + \gamma z)(1 - \sin \varphi), \quad \sigma_z = -(p_0 + \gamma z). \quad (50a)$$

Nunmehr haben wir noch den Einfluß der Sohlendruckkräfte zu bestimmen. Dabei ist es unerlässlich, vom Zusammenhang der Spannung und der Formänderung eines Elementes der Masse auszugehen. Mit dieser Frage befaßte sich schon BOUSSINESQ<sup>20)</sup>. Unter der Annahme einer vollkommen losen pulverartigen Masse gelangte er zu Beziehungen der Form

$$\sigma_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} (1 - 2\alpha \varepsilon_x). \quad (51)$$

Hierin bedeutet  $\varepsilon_x$  die bezogene Dehnung und  $\alpha$  einen Stoffwert. Die BOUSSINESQ'sche Masse ist volumenbeständig, daher erscheint in dem Formänderungsgesetz nur eine Konstante.

Das tatsächliche Verhalten der Bodenarten entspricht jedoch keineswegs den Eigenschaften dieser ideellen Masse, wie neuzeitliche Messungen klar beweisen. Die Fig. 15 gibt das Spannungsdehnungsbild eines Sandzylinders

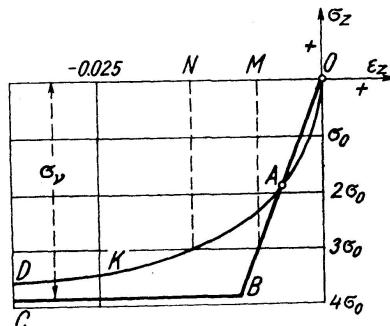


Fig. 15

wieder, welcher unter konstant gehaltener Mantelpressung  $\sigma_0$  in der Achsenrichtung  $Z$  auf Druck beansprucht wurde. Wäre das Gesetz (51) gültig, so müßte die Linie  $K$  eine entgegengesetzte Krümmung aufweisen. Tonproben haben im dreiachsigem Kompressionsapparat ähnliche Spannungsdehnungsbilder ergeben, und zwar sowohl zentral entwässerte Zylinder wie auch Proben mit behindertem Wasseraustritt<sup>21)</sup>. Auch für Betons und natürliche Steine gelten Linien desselben Charakters, wenn auch verschiedener Krümmungsverhältnisse. Auf Grund der Ergebnisse der Formänderungsmessungen im dreiachsigem Druck kann die Vermutung ausgesprochen werden, daß alle Baustoffe einem ähnlichen Gesetze folgen, wobei die Kurve  $K$  von der gebrochenen Linie  $OBC$  mehr oder weniger abweicht, sodaß der Zusammendrückungsmodul mehr oder weniger veränderlich ist. Unter  $\sigma_0$  und  $\sigma_z$  wären dabei die totalen in der Festmasse wirkenden Hauptspannungen (samt Kohäsion, Innenspannungen usw.) verstanden.

Solange das Verhältnis  $\frac{\sigma_z}{\sigma_0}$  etwa die Hälfte des kritischen Spannungs-

<sup>20)</sup> Essai théorique sur l'équilibre des massifs pulvérulents, Bruxelles 1876, S. 27.

<sup>21)</sup> L. RENDULIC, Der Bauing. 1936, S. 559 und 1937, S. 459. Es sei hier bemerkt, daß aus gewöhnlichen Oedometerversuchen nicht auf Formänderungsgesetze der Bodenarten im Baugrund geschlossen werden kann, da bei behinderter Querdehnung die kleinere Hauptspannung nicht gemessen wird.

verhältnisses  $\frac{\sigma_v}{\sigma_0}$  nicht überschreitet, kann auch bei Erdmassen die Kurve  $K$  in diesem Bereich durch eine Gerade  $OA$  ersetzt werden. Bei örtlicher Belastung des Halbraumes haben wir jedoch gerade in dem für das Verhalten der Masse entscheidenden Gebiet mit Spannungen zu tun, welche dem Kurvensektor  $AD$  entsprechen. (Dieses Gebiet nimmt ungefähr die Fläche ein, welche in der Fig. 11 unten durch die Isochrome 2 und oben durch den dicht unter der Lastfläche verlaufenden Bogen der Isochrome 3 begrenzt ist.) In diesem Gebiet würde der für einen konstanten Elastizitätsmodul gültige Spannungszustand weit größere Deformationen (z. B.  $\bar{ON}$  statt  $\bar{OM}$ ) hervorrufen, als es die Kontinuität des Massivs zuläßt; in diesem Gebiet tritt nämlich eine Querdehnung in nahezu horizontaler Richtung auf, welche durch die umhüllende Masse behindert wird und der Zusammendrückung der außen liegenden Teile des Halbraumes gleich sein muß.

Es folgt daraus, daß die Druckverteilung in der belasteten Erdmasse von derjenigen im elastischen Material verschieden sein muß. Sie wird dem Spannungszustand einer belasteten Schicht ähnlich sein, welche längs der  $Z$ -Achse erwärmt wird.

Wir werden hier auf die Berechnung dieser Druckverteilung nicht näher eingehen<sup>22)</sup>. Die theoretische Behandlung wird m. E. erst dann imstande sein, die wirklichen Spannungen in der Erdmasse zu erfassen, wenn die Forschung über die Formänderung im dreiachigen Spannungszustand weitere Erfahrungen gesammelt haben wird. Dennoch liefert sie Anhaltspunkte, aus welchen folgende Forderungen gezogen werden können:

- a) Im erwähnten Gebiet großer Spannungsunterschiede treten in der Erdmasse stärkere Pressungen als im elastischen Material auf; die vorwiegend horizontale Hauptdruckspannung  $\sigma_1$  weist jedoch eine verhältnismäßig größere Steigerung auf als die vorwiegend lotrechte Hauptspannung  $\sigma_3$ .
- b) Dadurch wird das Hauptspannungsverhältnis in diesem Gebiet günstiger als im elastischen Halbraum.
- c) Mit wachsenden Entfernungen von diesem Gebiet nähert sich die Druckverteilung in der Erdmasse dem Spannungszustand des elastischen Halbraumes.

Diese theoretischen Ergebnisse finden sich durch folgende Erfahrungen bestätigt: Bei zahlreichen Versuchen wurde die lotrechte Spannung im Sand und Lehm gemessen<sup>23)</sup> und tatsächlich größer gefunden als die Theorie elastischer Stoffe angibt. Linien, welche die Senkung als Funktion der Belastung darstellen, verlaufen im Bereich der im Gründungswesen zulässigen Lastgrößen entweder linear (als wenn die Masse dem HOOKE'schen Gesetz folgte)<sup>24)</sup> oder sind viel weniger gekrümmmt als die Spannungsdehnungskurve (Fig. 15). Bei örtlicher Belastung eines Tonblocks wurde eine etwa zweimal kleinere Senkung festgestellt, als den Druckproben desselben Materials und den parallelen Versuchen mit elastischer Masse entsprechen

<sup>22)</sup> Die Grundlagen dazu sind in der Abhandlung enthalten: K. HRUBAN, Der Spannungszustand des im Innern beanspruchten Halbraumes, Ingenieurarchiv 1943, H. 1, S. 9.

<sup>23)</sup> H. PRESS unternahm solche Messungen in der Baugrube, so daß der Einfluß einer starren Unterlage ausgeschlossen würde, welche die Laboratoriumsversuche beeinflussen kann. S. Die Bautechnik 1934, S. 569.

<sup>24)</sup> Aufschlußreiche Messungen führten z. B. RINGELING und BIEMOND durch. Proceedings of the intern. conference on soil mechanics 1936, vol. I, S. 106 u. 111.

würde<sup>25)</sup>). Alle diese Erscheinungen können auf das Formänderungsgesetz zurückgeführt werden, ähnlich wie bekanntlich der Unterschied zwischen der Biegs- und der Zugfestigkeit des Betons zu erklären ist.

Abschließend kommen wir also zu der Ansicht, daß es bei dem heutigen Stand der Forschung nicht möglich ist, die Spannungen in der Erdmasse mit der gleichen Verlässlichkeit anzugeben wie in einem elastischen Material, wenn man allen durch beweiskräftige Erfahrungen nicht gestützten Voraussetzungen ausweichen will. Wir sind daher nicht imstande, die Grenzbelastung an der Fließgrenze ohne ähnliche Annahmen zu ermitteln. Nichtsdestoweniger können wir mit Benützung des Spannungszustandes des elastischen Halbraumes eine Höchstbelastung bestimmen, welche etwas niedriger sein wird und von welcher behauptet werden kann, daß sie keine andauernden Fließerscheinungen hervorruft. Diese Höchstbelastung bleibt somit auf der Seite der Sicherheit, und wir werden sie als die **zulässige Bodenpressung** bezeichnen; zulässig, mit Rücksicht auf den Gleichgewichtszustand in der Erdmasse; bei der Wahl der Sohlendruckgrenze ist daneben natürlich auch die Größe der zu erwartenden Setzungen infolge Konsolidierung der bindigen Bodenschichten in Betracht zu ziehen.

## 12. Zulässige Bodenpressung beim Laststreifen.

Auf Grund obiger Erwägungen haben wir die Gl. (40) mit Rücksicht auf (50a) umzuformen. Bei der Ableitung wurde der Spannungsstoffwert  $\sigma$  als konstant angesehen, der Einfluß des Eigengewichtes hängt jedoch gemäß (50a) von der Tiefe  $z$  ab. Wir nehmen daher an, daß auch die Spannungen (50a) in der kritischen Tiefe konstant bleiben und setzen in (50a) den kleinstmöglichen Wert von  $z_m = a\sqrt{2}$  gemäß (41a) ein. Somit lauten die Hauptspannungen im kritischen Bereich:

$$\sigma_1 = -(1 - \sin \varphi_1)(p_0 + \gamma a \sqrt{2}) - \frac{q - 2a p_0}{\pi} \frac{a^2}{s^3},$$

$$\sigma_3 = -(p_0 + \gamma a \sqrt{2}) - \frac{q - 2a p_0}{\pi} \frac{s^2 + z^2}{s^3}.$$

(Bezeichnungen nach Fig. 13)

Für das Gleichgewicht der Schicht I ist wieder das Spannungsverhältnis im Punkte C maßgebend, dessen Ordinate durch (41) gegeben ist. Die zulässige Bodenpressung ergibt sich hiermit zu

$$p_{zul} = \frac{q}{2a} = \frac{3\pi\sqrt{3}}{4\sqrt{(1-\sin\varphi_1)^3}} \left[ c_1 \cos \varphi_1 + \frac{1-\sin\varphi_1}{2} \sin \varphi_1 (p_0 + \gamma a \sqrt{2}) \right] + p_0. \quad (52)$$

Dies kann in der Form angeschrieben werden

$$p_{zul} = A_1 c_1 + B_1 p_0 + C_1 \gamma a, \quad (52a)$$

wodurch die Beiträge der Kohäsion  $c_1$ , der Oberflächenbelastung  $p_0$  und der halben Plattenbreite  $a$  voneinander getrennt erscheinen. Hierin bedeutet  $\gamma$  das spezifische Gewicht des Bodens unterhalb der Sohle. Die Beiwerte  $A_1, B_1, C_1$  sind für verschiedene Größen des Reibungswinkels  $\varphi_1$  in Tafel 1 angegeben.

<sup>25)</sup> A. B. MASON, Correlation of surface loading tests with unconfined compression tests for cohesive soils. Proceedings int. conf. on soil mech. 1936, vol. II, S. 169.

Tafel 1. Zulässige Bodenpressung beim Laststreifen.  
Beiwerte der Gl. (40) und (52a).

$\varphi_1$	$k_1$	$A_1$	$B_1$	$C_1$
0°	4,081	4,08	1	0
10°	5,435	5,35	1,39	0,55
20°	7,646	7,18	1,86	1,22
30°	11,543	10,00	2,44	2,04
40°	19,125	14,65	3,20	3,10
50°	36,054	23,18	4,23	4,57

Beispiel 3. Für einen völlig kohäsionslosen Sand mit  $\varphi_1 = 40^\circ$ ,  $\gamma = 1800 \text{ kg/m}^3$  ergeben sich aus Tafel 1 bei 2 m Gründungstiefe folgende Werte der zulässigen Bodenpressung:

a) kein Grundwasser vorhanden;  $p_0 = 2 \times 0,18 = 0,36 \text{ kg/cm}^2$

$$\text{Plattenbreite 2 m. } p_{zul} = 3,20 \cdot 0,36 + 3,10 \cdot 0,18 \cdot 1,0 = 1,7 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\text{ " 10 m. } p_{zul} = 3,20 \cdot 0,36 + 3,10 \cdot 0,18 \cdot 5,0 = 3,9 \text{ " } .$$

b) Sohlenfuge 1 m unter Grundwasserspiegel;  $p_0 = 1 \cdot 0,18 + 1 \cdot 0,112 = 0,29 \text{ kg/cm}^2$  (Porenvolumen 32%, Raumgewicht unter Auftrieb  $1120 \text{ kg/m}^3$ ).

$$\text{Plattenbreite 2 m. } p_{zul} = 3,20 \cdot 0,29 + 3,10 \cdot 0,112 \cdot 1,0 = 1,3 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{ " 10 m. } p_{zul} = 3,20 \cdot 0,29 + 3,10 \cdot 0,112 \cdot 5,0 = 2,5 \text{ " } .$$

Beispiel 4. Der Boden unter einem Teile der Mittelmauer des in Ziff. 1 erwähnten Barockslosses erwies bei der Prüfung im Scherapparat eine wahre Kohäsion  $c_1 = 0,10 \text{ kg/cm}^2$  und einen Reibungswinkel  $\varphi_1 = 22^\circ$ ; die Breite des Fundamentes betrug 1,20 m, das Raumgewicht des Bodens unter der Sohlenfuge  $\gamma = 2000 \text{ kg/m}^3$ , die Gründungstiefe ergab  $p_0 = 1,04 \text{ kg/cm}^2$ .

Gl. (52) liefert

$$p_{zul} = 1,04 + 8,45 [0,10 \cdot 0,927 + 0,117 (1,04 + 0,20 \cdot 0,60 \cdot \sqrt{2})] = 3,0 \text{ kg/cm}^2$$

Dagegen beträgt die Bruchbelastung (mit  $c_1 \cot \varphi_1 = 0,25 \text{ kg/cm}^2$ )

$$\text{nach CAQUOT: } 1,04 \cdot 7,5 + 0,25 \cdot 6,5 = 9,4 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\text{nach RITTER: } 1,04 \cdot 5,6 + 0,25 \cdot 4,6 + 0,2 \cdot 0,6 \cdot 3,6 = 7,4 \text{ kg/cm}^2.$$

Andauernde Setzungen, welche eine Rekonstruktion der Gründungen unerlässlich machten, traten bei mittiger Belastung von  $3,2 \text{ kg/cm}^2$  auf, d. h. bei einer mehr als zweifachen Sicherheit gegen Bruch.

#### Geschichteter Baugrund.

Die zulässige Bodenpressung gemäß (52) wurde unter der Voraussetzung abgeleitet, daß die Gründung auf einer mächtigen Bodenschicht erfolgt, deren Stoffwerte  $\gamma$ ,  $c_1$ ,  $\varphi_1$  als konstant angenommen werden können. Es kommt jedoch vor, daß der Baugrund aus Schichten verschiedener Beschaffenheit besteht; ist dabei eine der tiefer liegenden Schichten weniger tragfähig als das Material unmittelbar unter der Fundamentsohle, so ist auch der Gleichgewichtszustand dieser Schicht zu prüfen. Es kann sich dabei eine kleinere zulässige Bodenpressung  $\frac{q'}{2a}$  ergeben als diejenige, welche der Beschaffenheit der oberen Schicht entspricht.

Wir betrachten irgend einen Punkt  $M(0, z)$  der  $Z$ -Achse (Fig. 13) und bezeichnen mit  $p_1$  die vertikale Druckspannung, welche in diesem Punkte in der Festsubstanz des Bodens durch das Gewicht der darüberliegenden Bodensäule von der Höhe  $z$  entsteht. (Dieser Druck ist mit Rücksicht auf eventuellen Wasserauftrieb festzustellen.) Die Fließbedingung (31) für den betrachteten Punkt  $M$  lautet, falls  $c'_1, \varphi'_1$  die in  $M$  vorhandenen Stoffwerte sind:

$$\frac{(p_0 + p_1) \frac{\sin \varphi'_1}{2} + \frac{q' - 2ap_0}{\pi} \frac{z^2}{s^3}}{(p_0 + p_1) \frac{2 - \sin \varphi'_1}{2} + \frac{q' - 2ap_0}{\pi s} + c'_1 \cot \varphi'_1} = \sin \varphi'_1.$$

Sie liefert die Bodenpressung, welche in der Fundamentsohle mit Rücksicht auf die Fließgrenze im Punkte  $M$  zulässig ist:

$$\frac{q'}{2a} = \frac{\pi}{2 \frac{a}{s} \left( \frac{z^2}{s^2} - \sin \varphi'_1 \right)} \left[ c'_1 \cos \varphi'_1 + \frac{1 - \sin \varphi'_1}{2} \sin \varphi'_1 (p_0 + p_1) \right] + p_0. \quad (53)$$

Beispiel 5. a) Unterhalb des in Beispiel 3 sub a) angeführten 2 m breiten Gründungskörpers befindet sich eine Tonschicht II, welche nach erfolgtem Ausgleich der hydrodynamischen Spannungen die Stoffwerte  $c'_1 = 0,10 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\varphi'_1 = 12^\circ$  aufweist (Fig. 13). Die Oberfläche dieser Schicht liegt in der Tiefe  $h = 2,5 \text{ m}$ , der Grundwasserspiegel in der Tiefe  $1,75 \text{ m}$  unter der Fundamentsohle.

Da  $h > z_m$  gemäß (41) ist, haben wir das Spannungsverhältnis für die Tonschicht im Punkte  $N$  (Fig. 13) zu prüfen. Nach Beispiel 3 ist  $p_0 = 0,36 \text{ kg/cm}^2$ , das Raumgewicht der Sandschicht I ist  $\gamma = 1800 \text{ kg/cm}^2$ , so daß  $p_1 = 2,5 \cdot 0,18 - 0,75 \cdot 0,068$  (Auftrieb)  $= 0,40 \text{ kg/cm}^2$  beträgt.

Gl. (53) liefert

$$\frac{q'}{2a} = \frac{\pi}{2 \frac{1,0}{\sqrt{7,25}} \left( \frac{2,5^2}{7,25} - 0,208 \right)} [0,10 \cdot 0,978 + 0,082 (0,36 + 0,40)] + 0,36 = 1,4 \text{ kg/cm}^2$$

gegen  $p_{zul} = 1,7 \text{ kg/cm}^2$  laut Beispiel 3.

b) Plattenbreite 10 m. Die Tiefe  $z_m$  gemäß (41) ist größer als  $h$ , d. h. der Punkt, in dem das kritische Spannungsverhältnis auftritt, liegt in der Tonschicht II, und zwar in der Nähe des Punktes mit  $z = a\sqrt{2}$  laut (41a).

Die Ausrechnung mit Hilfe von (53) ergibt  $\frac{q'}{2a} = 1,5 \text{ kg/cm}^2$  gegen  $p_{zul} = 3,9 \text{ kg/cm}^2$  in Beispiel 3. Andauernde Setzungen könnten hier also durch einen Sohlendruck auf die Sandschicht I herbeigeführt werden, welcher nur die Hälfte der zulässigen Beanspruchung dieser Schicht beträgt. Ähnliche Fälle sind bekannt<sup>26)</sup>.

Anmerkung. Während des Ausgleiches der hydrodynamischen Spannungen übernimmt einen Teil der durch die Belastung hervorgerufenen Pressungen das Porenwasser; infolgedessen dürften die in der Festsubstanz wirkenden Druckspannungen in allen Richtungen um dieselbe Größe kleiner sein als nach Ablauf dieser Übergangszeit. Der Gleichgewichtszustand in der Masse wird dadurch während der Ausgleichsperiode ungünstig beeinflußt.

<sup>26)</sup> KÖGLER-SCHEIDIG, Baugrund und Bauwerk, Berlin 1939, S. 126.

Unsere Ausführungen bleiben jedoch in Kraft, da wir uns lediglich die Bedingung gestellt haben, daß die Setzungen erst nachher konstant bleiben sollen.

### 13. Zulässige Bodenpressung bei kreisförmiger Lastfläche.

Durch den im vorigen Abschnitt geschilderten Vorgang erhält man mit der Annahme  $\chi = 1 - \sin \varphi_2$  für die Gl. (50a) und  $m = 2$  für die Gl. (44) folgende Hauptspannungen im kritischen Bereich:

$$\sigma_1 = -(1 - \sin \varphi_2)(p_0 + \gamma a) - \frac{P - \pi a^2 p_0}{2\pi} \frac{a^2}{s^4},$$

$$\sigma_3 = -(p_0 + \gamma a) - \frac{P - \pi a^2 p_0}{2\pi} \frac{s^2 + 2z^2}{s^4}.$$

(Bezeichnungen nach Fig. 14.)

Die umgeformte Gl. (48) liefert die zulässige Bodenpressung

$$p_{zul} = \frac{P}{\pi a^2} = \frac{16(3 - \sin \varphi_2)}{9(1 - \sin \varphi_2)^2} \left[ c_2 \cos \varphi_2 + \frac{1 - \sin \varphi_2}{2} \sin \varphi_2 (p_0 + \gamma a) \right] + p_0. \quad (54)$$

Man kann wieder die Beiträge der Kohäsion  $c_2$ , der Oberflächenbelastung  $p_0$  und des Plattenhalbmessers  $a$  getrennt ausweisen:

$$p_{zul} = A_2 c_2 + B_2 p_0 + C_2 \gamma a. \quad (54a)$$

Die Beiwerte sind in der Zahlentafel 2 für einige Werte von  $\varphi_0$  angegeben;  $\varphi_0$  bedeutet hierin den Winkel der inneren Reibung bei achsial-symmetrischem Spannungszustand mit überwiegend achsialer Druckbeanspruchung (Ziff. 7).

Tafel 2. Zulässige Bodenpressung bei kreisförmiger Lastfläche.  
Beiwerthe der Gl. (54) und (54a).

$\varphi_2$	$\frac{16(3 - \sin \varphi_2)}{9(1 - \sin \varphi_2)^2}$	$A_2$	$B_2$	$C_2$
0°	5,333	5,33	1	0
10°	7,358	7,25	1,53	0,53
20°	10,914	10,26	2,23	1,23
30°	17,778	15,40	3,22	2,22
40°	32,844	25,16	4,77	3,77

Beispiel 6. Für einen kohäsionslosen Sand mit  $\varphi_2 = 30^\circ$ ,  $\gamma = 1800 \text{ kg/m}^3$ , Gründungstiefe 2 m, erhält man mit Benützung der Tafel 2:

$$\text{Plattendurchmesser } 2 \text{ m. } p_{zul} = 0,18(3,22 \cdot 2,0 + 2,22 \cdot 1,0) = 1,6 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{, } \quad 10 \text{ m. } p_{zul} = 0,18(3,22 \cdot 2,0 + 2,22 \cdot 5,0) = 3,2 \text{ , }$$

### Geschichteter Baugrund.

Betrachtet man wieder irgend einen Punkt  $M(0, z)$  an der Wirkungslinie der angreifenden Kraft und bezeichnet mit  $p_1$  das Gewicht der darüberliegenden Bodensäule von der Höhe  $z$  und Durchschnittsfläche 1, so lautet die Fließbedingung (31) für den Punkt  $M$  (Fig. 14)

$$\frac{(p_0 + p_1) \sin \varphi'_2 + \frac{P' - \pi a^2 p_0}{2\pi} \frac{3z^2}{s^4}}{(p_0 + p_1)(2 - \sin \varphi'_2) + \frac{P' - \pi a^2 p_0}{2\pi} \frac{s^2 + 2z^2}{s^4} + 2c'_2 \cot \varphi'_2} = \sin \varphi'_2.$$

Hierin sind unter  $c'_2$ ,  $\varphi'_2$  die Stoffwerte der im Punkte  $M$  vorhandenen Bodenart verstanden. Die Bodenpressung, die in der Fundamentsohle mit Rücksicht auf die Fließgrenze im Punkte  $M$  zulässig ist, ergibt sich zu

$$\frac{P'}{\pi a^2} = \frac{4}{\frac{a^2}{s^2} \left[ \frac{z^2}{s^2} (3 - \sin \varphi'_2) - 2 \sin \varphi'_2 \right]} \left[ c'_2 \cos \varphi'_2 + \frac{1 - \sin \varphi'_2}{2} \sin \varphi'_2 (p_0 + p_1) \right] + p_0. \quad (55)$$

Die Anwendung dieser Beziehung erfolgt in derselben Weise, wie im Beispiel 5 gezeigt wurde.

Die Gleichungen (53) und (55) ergeben für kleine Entfernungen von der Lastfläche negative Werte. Dieses Gebiet bleibt demnach bei beliebig großem Sohlendruck elastisch. Nur eine negative Belastung (Beanspruchung durch Zugkräfte) könnte hier den Fließzustand herbeiführen.

### Zusammenfassung.

Es gibt Bauwerke, welche durch Jahrhunderte andauernd in den Baugrund einsinken. Diese Erscheinung kann nicht lediglich auf die Konsolidierung bindiger Bodenschichten zurückgeführt werden; es handelt sich vielmehr um eine Gleichgewichtsstörung in der untenliegenden Erdmasse, welche jedoch vom Bruch zu unterscheiden ist. Zur Untersuchung dieser Fließerscheinungen wird der Spannungszustand im elastisch-isotropen Halbraum ermittelt, dessen Oberfläche durch einen starren Körper belastet wird. Strenge Lösungen lassen sich beim ebenen Problem sowohl für eine mittige wie auch für eine außermittige Kraftübertragung angeben. Auf Grund einer einfachen Form der Fließbedingung für begrenzte Gestaltänderungsarbeit ergibt sich die Lastgröße bei Beginn permanenter plastischer Verschiebungen unter streifenförmiger (Gl. 40) und kreisförmiger Lastfläche (Gl. 48). Diese Grenzbelastung erweist sich als bedeutend kleiner als die nach bisherigen Annahmen berechnete Bruchlast. Das Formänderungsgesetz der Erdmassen lässt zwar eine unmittelbare Anwendung der Elastizitätstheorie auf Baugrundschichten nicht zu, doch lassen sich aus den Verträglichkeitsbedingungen Folgerungen entwickeln, welche eine Beurteilung des Gleichgewichtszustandes in örtlich belasteten Bodenschichten ermöglichen. Daraus ergeben sich Grenzwerte der Bodenpressung bei Streifenlast (Gl. 52, 53) und bei konzentrierter Last (Gl. 54, 55), bei welchen die Bedingung erfüllt ist, daß keine andauernden Senkungen auftreten sollen. Die Einflüsse der Gründungstiefe, Plattenbreite und Kohäsion werden durch einige Beispiele und Zahlentafeln veranschaulicht.

### Résumé.

Il existe des bâtiments qui, pendant des siècles, ne cessent de s'enfoncer peu à peu dans le terrain. Ce phénomène ne peut simplement s'expliquer par la consolidation de couches à cohésion, il s'agit là bien plutôt d'une perturbation de l'équilibre des couches terrestres inférieures, perturbation qu'il ne faut cependant pas confondre avec la rupture. Afin d'étudier ce phénomène plastique, on détermine l'état de tension du demi-espace iso-

trope élastique, dont la surface est chargée d'un corps rigide. Il est possible d'indiquer des solutions rigoureuses en ce qui concerne le problème à 2 dimensions aussi bien pour une charge centrée que pour une charge excentrique. Le fait de pouvoir exprimer sous une forme simple la condition de plasticité, en limitant la valeur du travail de déformation, permet de déterminer la grandeur de la charge dont dépendent les déplacements plastiques permanents aussi bien pour une surface de charge en forme de bande que circulaire (Eq. 48, 40). Cette charge limite est essentiellement plus petite que la charge à la rupture considérée jusqu'ici. La loi de déformation des masses terrestres ne permet pas l'application immédiate de la théorie de l'élasticité aux couches de fondations; cependant les conditions de compatibilité conduisent à des conclusions donnant la possibilité de juger l'état d'équilibre d'une couche sollicitée par une charge locale. On peut en tirer les valeurs limites des pressions sur le sol pour une charge en forme de bande (Eq. 52, 53) et pour une charge concentrée (Eq. 54, 55); ces charges vérifient la condition stipulant qu'il ne doit pas exister de tassements permanents. Les influences dues à la profondeur de fondation, à la largeur de la dalle et à la cohésion sont illustrées par quelques exemples et tables numériques.

### Summary.

There are buildings which, in the course of centuries, are continually sinking more and more into the soil. This phenomenon cannot be attributed solely to the consolidating of cohesive layers; it arises rather from a disturbance of equilibrium in the mass of earth underneath the building, a disturbance which must not be confused with rupture. In order to investigate this phenomenon of plastic deformation the stress conditions are determined in the elastic-isotropic semi-infinite solid whose surface is loaded with a rigid body. Rigorous solutions can be obtained for the two-dimensional problem with central and also eccentric transmission of force. Based on a simple form of the yield condition of the limited shearing energy, the magnitude of the load is found at the start of permanent plastic displacements for loading on a strip (eq. 40) and on a circular area (eq. 48). This limited loading is found to be much smaller than the rupturing load as calculated in accordance with the assumptions hitherto made. The law of deformation of the earth masses does not allow the theory of elasticity to be applied directly to foundation layers; nevertheless the conditions of compatibility lead to conclusions which make it possible to form a judgement of the equilibrium in locally loaded layers of earth. From that, limiting values of the pressure on the soil can be found in case of a loaded strip (eq. 52, 53) and a loaded circle (eq. 54, 55), where the condition is fulfilled that no continual settlement shall occur. The influences of the depth of the foundation, of the width of slabs, and of the cohesion are illustrated by some examples and numerical tables.