

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen  
**Band:** 6 (1940-1941)  
  
**Artikel:** Zur Biegung und Verdrehung des dünnwandigen schlanken Stahlstabes  
**Autor:** Stüssi, F.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-7101>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ZUR BIEGUNG UND VERDREHUNG DES DÜNNWANDIGEN SCHLANKEN STAHLSTABES.

ÉTUDE SUR LA FLEXION ET LA TORSION D'UNE BARRE EN ACIER  
ÉLANCÉE ET À PAROIS MINCES.

CONCERNING THE BENDING AND TORSION OF A THIN-WALLED  
SLENDER STEEL BAR.

Prof. Dr. F. STÜSSI, Eidg. Techn. Hochschule, Generalsekretär für Stahlbau  
der I. V. B. H., Zürich.

1. In der klassischen Bieungslehre nach NAVIER werden die sechs räumlichen Gleichgewichtsbedingungen zwischen den äußern Schnittkräften und den innern Spannungen in einem Stabquerschnitt in zwei von einander unabhängige Gleichungsgruppen aufgeteilt: Die erste dieser Gruppen bezieht sich auf das Gleichgewicht der Bieugungsmomente und Normalkräfte ( $M_x$ ,  $M_y$  und  $N$ ) mit den Normalspannungen  $\sigma$ , die zweite auf das Gleichgewicht der Querkräfte und Torsionsmomente ( $Q_x$ ,  $Q_y$  und  $T$ ) mit den Schubspannungen  $\tau$ . Daß diese Aufteilung eine Einschränkung des Gültigkeitsbereiches der NAVIER'schen Bieungslehre zur Folge hat, ergibt sich aus den C. VON BACH'schen Bieungsversuchen an U-Trägern<sup>1)</sup>, bei denen im Gegensatz zur klassischen Bieungslehre ursprünglich ebene Querschnitte nicht eben blieben und die Normalspannungen nicht linear über den Querschnitt verteilt waren. R. MAILLART<sup>2)</sup> hat die Bedeutung des Schubmittelpunktes für die Biegung von Stäben mit unsymmetrischem Querschnitt erkannt; ungefähr gleichzeitig bestimmten auch H. SCHWYZER<sup>3)</sup> und A. EGGENSCHWYLER<sup>4)</sup> den Schubmittelpunkt als Angriffspunkt der äussern Belastung für verdrehungsfreie Biegung. S. TIMOSHENKO<sup>5)</sup> verdanken wir die Lösung des Torsionsproblems von I-Trägern auf Grund der Erkenntnis, daß bei der Verdrehung solcher Profile nicht nur Torsionsschubspannungen, sondern auch Flanschquerkräfte und Flanschbieugungsmomente und damit Normalspannungen  $\sigma$  auftreten. Diese Normalspannungen infolge Torsion sind es, die im Widerspruch mit der Aufteilung der Gleichgewichtsbedingungen in zwei unabhängige Gruppen und damit auch zur Voraussetzung vom Ebenbleiben der Querschnitte der klassischen Bieungslehre stehen; sie sind damit die Ursache, daß die klassische Bieungslehre heute nicht nur aus erkenntnistheoretischen Gründen, sondern auch wegen den Bedürfnissen

<sup>1)</sup> C. v. BACH: Versuche über die tatsächliche Widerstandsfähigkeit von Balken mit [-förmigem Querschnitt. Z. d. V. d. I. 1909, 1910. S. auch „Elastizität und Festigkeit“, Berlin, Springer.

<sup>2)</sup> R. MAILLART: Zur Frage der Biegung. Schweiz. Bauzeitung Bd. 77, 1921.

<sup>3)</sup> H. SCHWYZER: Statische Untersuchung der aus ebenen Tragflächen zusammengesetzten räumlichen Fachwerke. Diss. E. T. H. 1920.

<sup>4)</sup> A. EGGENSCHWYLER: Über die Festigkeitsberechnung von Schiebetoren und ähnlichen Bauwerken. Diss. E. T. H. 1921.

<sup>5)</sup> S. TIMOSHENKO: Einige Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie. Zeitschr. f. Math. u. Physik 1910.

der Bemessungspraxis erweitert werden muß. Die späteren Arbeiten über dieses Problem, deren wichtigste von C. WEBER<sup>6)</sup>, E. TREFFTZ<sup>7)</sup>, F. und H. BLEICH<sup>8)</sup> und H. NEUBER<sup>9)</sup> herrühren, haben die Erkenntnisse über die Verdrehung zusammengesetzter dünnwandiger Stahlstäbe weitergefördert.

Nachstehend wird eine direkte und für die Konstruktionspraxis geeignete Darstellung des Problems mit elementaren Mitteln der Baustatik versucht, ausgehend von der Doppelbedeutung des Schubmittelpunktes, die auf einfachste Weise mit Hilfe des MAXWELL'schen Reziprozitätssatzes aufgezeigt werden kann.

2. Wenn ein Stab durch ein Drehmoment  $X$  belastet wird, so dreht sich jeder Querschnitt des Stabes um einen noch zu bestimmenden Punkt 0 (Fig. 1). Greift nun in einem dieser Punkte 0, in beliebiger Schnittebene, eine Last  $Y$  an, so leistet sie während der Verdrehung des Querschnittes infolge  $X$  keine Arbeit, da die Verschiebung  $a_{yx}$  des Punktes 0 in Richtung von  $Y$  infolge des Momentes  $X$  null ist:

$$a_{yx} = 0 \quad (1)$$

Nach dem MAXWELL'schen Reziprozitätsgesetz ist

$$a_{xy} = a_{yx}; \quad (2)$$

da damit auch

$$a_{xy} = 0, \quad (3)$$

leistet auch das Drehmoment  $X$  während einer Belastung durch  $Y$  keine Arbeit oder infolge einer Belastung durch  $Y$  in 0 verbiegt sich der Querschnitt verdrehungsfrei. Damit ist die doppelte Bedeutung des Schubmittelpunktes 0 nachgewiesen: der Schubmittelpunkt 0 ist sowohl Drehpunkt des Querschnittes bei Verdrehung wie auch Lastangriffspunkt für verdrehungsfreie Biegung.

Die beiden Belastungszustände  $X$  und  $Y$  sind wegen  $a_{xy} = a_{yx} = 0$  voneinander unabhängig; jede äußere Belastung des Stabes kann in die beiden von einander unabhängigen und damit je für sich erfaßbaren Teilbelastungen  $X$  und  $Y$  zerlegt werden.

Aus der doppelten Bedeutung des Schubmittelpunktes ergeben sich auch zwei Wege zu seiner Bestimmung: der Schubmittelpunkt kann sowohl aus der Lage der inneren Schnittkräfte bei verdrehungsfreier Biegung, wie auch als Drehpunkt bei reiner Verdrehung bestimmt werden. Es wird sich zeigen, daß die erste Möglichkeit bei offenen Querschnitten zu einer recht einfachen Darstellungsart des Torsionsproblems führt, während die zweite bei geschlossenen Kastenquerschnitten angezeigt sein dürfte. Der Unterschied zwischen diesen beiden Querschnittsformen beruht darauf, daß bei der Biegung von schlanken Stäben mit offenem Querschnitt der Einfluß der Schubspannungen auf die Formänderungen der einzelnen Stabteile vernachlässigbar klein ist, während bei der Verdrehung von Stäben mit geschlossenem Querschnitt gerade die Schubspannungen (Schubfluß  $\tau \cdot d$ ) maßgebend werden.

<sup>6)</sup> C. WEBER: Biegung und Schub in geraden Balken. Z. a. M. M. 1924. Übertragung des Drehmomentes in Balken mit doppelflanschigem Querschnitt. Z. a. M. M. 1926.

<sup>7)</sup> E. TREFFTZ: Über den Schubmittelpunkt in einem durch eine Einzellast gebogenen Balken. Z. a. M. M. 1935.

<sup>8)</sup> F. u. H. BLEICH: Biegung, Drillung und Knickung von Stäben aus dünnen Wänden. I. V. B. H., Vorbericht z. Kongreß Berlin 1936.

<sup>9)</sup> H. NEUBER: Schubmittelpunkt und Querschnittsverwölbung dünnwandiger Träger unterhalb der Beulgrenze. Z. a. M. M. 1941.

In den folgenden Untersuchungen wollen wir uns auf den für den Stahlbau wichtigen Fall des dünnwandigen Stabes beschränken, sodaß die Widerstände der einzelnen Scheiben, aus denen sich ein Stab zusammensetzt, gegen Verbiegung in Richtung der kleineren Querschnittsabmessungen gegenüber den Widerständen in Scheibenebene vernachlässigbar klein werden. Für die Einzelscheiben soll von vornherein die NAVIER'sche Biegungslehre als gültig angenommen werden.

Bei der Betrachtung der Formänderungen des Stabes gehen wir davon aus, daß die Querschnittsform erhalten bleiben soll. Diese Voraussetzung, die bei Walzprofilen durch den Zusammenhang der einzelnen Scheiben, bei zusammengesetzten Querschnitten auch durch Querschotten erfüllt wird, ersetzt die speziellere Voraussetzung vom Ebenbleiben der Querschnitte bei der klassischen Biegungslehre.

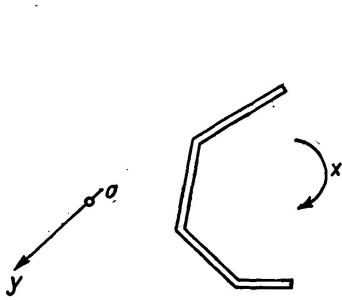


Fig. 1

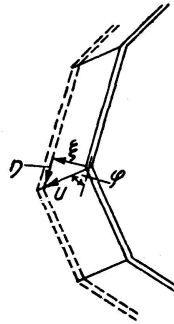


Fig. 2

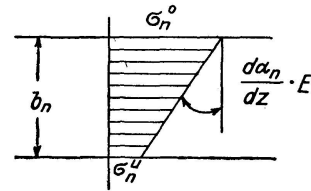


Fig. 3

3. Bei verdrehungsfreier Biegung erleiden alle Punkte eines Querschnitts gleiche Verschiebungen  $u$ . Bezeichnen wir nach Fig. 2 die Komponenten der Verschiebung  $u$  in bezw. senkrecht zur Schnittebene mit  $\eta$  und  $\xi$ , den Winkel zwischen  $\eta$  und  $u$  mit  $\varphi$ , so folgt

$$\begin{aligned}\eta &= u \cdot \cos \varphi \\ \xi &= u \cdot \sin \varphi\end{aligned}\quad (4)$$

Wegen der Voraussetzung dünner Scheiben brauchen wir die Verschiebungen  $\xi$  nicht weiter zu berücksichtigen.

In einer herausgetrennt gedachten Scheibe  $n$  eines Stabes mit offenem Querschnitt sollen die Randspannungen die Werte  $\sigma_n^u$  und  $\sigma_n^o$  besitzen; zwei um den Abstand  $dz$  voneinander entfernte Schnitte werden sich damit nach Fig. 3 gegenseitig um den Winkel

$$d\alpha_n = \frac{\sigma_n^o - \sigma_n^u}{b_n \cdot E} \cdot dz \quad (5)$$

drehen. Das Verhältnis  $d\alpha_n : dz$  ist die Neigungsänderung der elastischen Linie oder

$$\frac{d\alpha_n}{dz} = \frac{\sigma_n^o - \sigma_n^u}{b_n \cdot E} = \frac{d^2 \eta_n}{dz^2} = \eta_n'' \quad (6)$$

Bei für den ganzen Stab gleichbleibender Richtung von  $u$  wird nach Gleichung 4  $\eta_n'' = u'' \cdot \cos \varphi_n$ ; da  $u''$  wie  $u$  für den ganzen Querschnitt konstant ist, so folgt daraus für alle Scheiben des Querschnitts

$$\frac{\sigma_n^o - \sigma_n^u}{E \cdot b_n \cdot \cos \varphi_n} = \frac{\varepsilon_n^o - \varepsilon_n^u}{b_n \cdot \cos \varphi_n} = \text{konst.} \quad (7)$$



Gleichung 7 bedeutet nun folgendes: Wenn wir die Randfaserdehnungen  $\varepsilon$  der einzelnen Scheiben des Querschnittes von einer gemeinsamen Querschnittsebene aus auftragen, so lassen sich diese Dehnungen durch parallele Ebenen, von denen je eine zu einer Scheibe gehört, begrenzt denken. Da aber in zusammenstoßenden Kanten benachbarter Scheiben wegen ihres Zusammenhanges die Dehnungen  $\varepsilon_n''$  und  $\varepsilon_{n+1}''$  gleich groß sein müssen, so fallen alle diese parallelen Ebenen in eine einzige zusammen: bei verdrehungsfreier Biegung bleiben ursprünglich ebene Querschnitte auch nach der Formänderung eben.

Dies ist aber nichts anderes als die Voraussetzung der klassischen Biegelehre nach NAVIER, die damit für den Fall verdrehungsfreier Biegung, d. h. bei Belastung durch den Schubmittelpunkt, sowohl bezüglich der Beanspruchungen wie der Formänderungen, voll gültig bleibt. Die Normalspannungen ergeben sich damit, bezogen auf die Hauptachsen  $x$  und  $y$  des Querschnitts, aus der bekannten Spannungsformel

$$\sigma_{xy} = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{J_x} \cdot y + \frac{M_y}{J_y} \cdot x, \quad (8)$$

während für die Durchbiegungen, unter der für schlanke Stäbe zulässigen Vernachlässigung des Schubspannungseinflusses, die Differentialgleichungen der elastischen Linie

$$u'' = -\frac{M_x}{E J_x}, \quad v'' = -\frac{M_y}{J_y} \quad (9)$$

gültig bleiben.

$$\text{Die Querkräfte } Q_y = \frac{d M_x}{dz} \quad \text{und} \quad Q_x = \frac{d M_y}{dz}$$

müssen dabei durch den Schubmittelpunkt 0 gehen; damit können wir den Schubmittelpunkt 0 des Querschnitts als Schnittpunkt der Resultierenden  $Q_y$  und  $Q_x$  der Schubspannungen  $\tau$  infolge  $M_x$  und  $M_y$ , bzw.

$$\frac{d M_x}{dz} \quad \text{und} \quad \frac{d M_y}{dz}$$

bestimmen.

Die Schubspannung  $\tau$  im Schnitt  $y'$  der Scheibe  $n$  finden wir aus einer Gleichgewichtsbetrachtung für den schraffierten Scheibenteil  $dz \cdot y'$  der Fig. 4:

$$\tau = \frac{1}{d} \int_0^{y'} d \cdot \frac{d \sigma}{dz} \cdot dy' + \tau_0 \cdot \frac{d_0}{d} \quad (10)$$

Für einen freien Scheibenrand ist  $\tau_0 = 0$ ; für einen Innenrand ergibt sich (bei den hier vorausgesetzten offenen Querschnitten)  $\tau_0$  aus der Randschubspannung der vorhergehenden Scheibe. Die Werte  $\frac{d \sigma}{dz} = \sigma'$  ergeben sich beispielsweise für eine zur  $y$ -Achse parallele Belastung aus der Spannungsformel Gleichung 8 zu

$$\sigma'_y = \frac{d \sigma_y}{dz} = \frac{Q_y}{J_x} \cdot y \quad (8a)$$

Aus den Schubspannungen  $\tau$  ergeben sich wegen  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$  als Resultierende über die Scheibenbreite  $b_n$  die Scheibenquerkräfte  $\mathfrak{Q}_n$

$$\mathfrak{Q}_n = - \int_0^{b_n} \tau \cdot d \cdot dy; \quad (11)$$

dabei ist das negative Vorzeichen deshalb einzuführen, weil die bei den in Fig. 4 eingetragenen Spannungsrichtungen auftretende Scheibenquerkraft negativ ist.

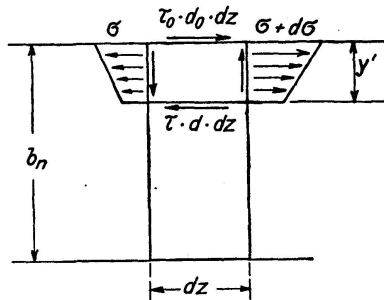


Fig. 4

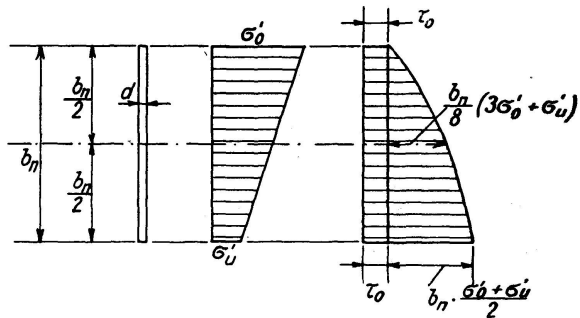


Fig. 5

Für Scheiben konstanter Stärke  $d$  können die Schubspannungen  $\tau$  und aus der parabelförmig begrenzten Schubspannungsfläche die Scheibenquerkräfte  $\mathfrak{Q}_n$  einfach berechnet werden (Fig. 5):

$$\mathfrak{Q}_n = - d \cdot b_n \left( \tau_0 + \frac{b_n}{6} (2 \sigma'_0 + \sigma'_u) \right) \quad (11a)$$

Bei der Beanspruchung eines Stabes auf Torsion tritt im allgemeinen die Schwierigkeit auf, daß sich sowohl die Torsionsschubspannungen wie die Flanschbiegungsmomente  $\mathfrak{M}$  bzw. Flanschquerkräfte  $\mathfrak{Q}$  an der Aufnahme des Torsionsmomentes  $T$  beteiligen. Die Größe der beiden Anteile  $t_\tau$  (Torsion) und  $t_\sigma$  (Flanschbiegung) ist einmal aus der Gleichgewichtsbedingung

$$T = t_\tau + t_\sigma \quad (12)$$

und ferner aus der Formänderungsbedingung, daß die Querschnittsverdrehungen  $\varphi$  aus beiden Anteilen gleich groß sein müssen, zu bestimmen. Für den Torsionsanteil  $t_\tau$  ist der Zusammenhang mit dem Verdrehungswinkel  $\varphi$  gegeben durch die bekannte Beziehung

$$t_\tau = C \cdot \varphi', \quad (13)$$

wobei  $C = G \cdot J_d$  die Verdrehungssteifigkeit bedeutet.

Mit Hilfe der Abstände  $a$  der einzelnen Scheiben vom nun bekannten Schubmittelpunkt 0 (Fig. 6) lassen sich die Scheibendurchbiegungen  $\eta$  und ihre Ableitungen durch  $\varphi$  ausdrücken:

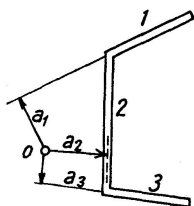


Fig. 6

$$\eta_n = a_n \cdot \varphi; \quad \eta_n''' = a_n \cdot \varphi'''. \quad (14)$$

Aus Gleichung 6 folgt durch Differentiation

$$\frac{\sigma'_{n-1} - \sigma'_n}{b_n \cdot E} = \eta_n''' = a_n \cdot \varphi''' \quad (15)$$

Zur Bestimmung der  $n+1$  unbekannten Werte  $\sigma'$  an den  $n+1$  Kanten lassen sich bei  $n$  Scheiben  $n$  Gleichungen 15 anschreiben; außerdem gilt, da bei

Verdrehung die Längskraft  $N$  und ihre Änderung null sind, auch

$$\int \sigma' \cdot dF = C; \quad (16)$$

Gleichung 16 läßt sich durch die  $n+1$  Werte  $\sigma'$  an den Kanten ausdrücken. Durch Auflösen des aus  $n$  Gleichungen 15 und der Gleichung 16 bestehenden Gleichungssystems ergeben sich die gesuchten Werte  $\sigma'$  in der Form

$$\sigma'_n = \alpha \cdot a_n \cdot b_n \cdot E \cdot \varphi''' \quad (16a)$$

und daraus nach Gleichung 11 die Flanschquerkräfte  $\mathfrak{Q}_n$  in der Form

$$\mathfrak{Q}_n = -D_n \cdot E \cdot \varphi'''. \quad (16b)$$

Mit

$$t_\sigma = \sum_0^n \mathfrak{Q}_n \cdot a_n = - \sum_0^n a_n D_n \cdot E \cdot \varphi''' = -A \cdot \varphi''', \quad (16c)$$

wobei der Drehsinn der Momente  $\mathfrak{Q} \cdot a$  zu beachten ist, liefert Gleichung 12 nun die Grundgleichung des Torsionsproblems:

$$T = C \cdot \varphi' - A \cdot \varphi'''. \quad (17)$$

Die Zahlenwerte von  $\alpha$ ,  $D$  und  $A$  ergeben sich numerisch aus dem angegebenen Rechnungsgang. Führen wir noch die Abkürzung  $a^2 = \frac{C l^2}{A}$  ein, so läßt sich Gleichung 17 mit  $t_\tau = C \cdot \varphi'$  in der Form schreiben

$$T = t_\tau - \frac{l^2}{a^2} \cdot t''_\tau. \quad (17a)$$

Diese Grundgleichung des Torsionsproblems ist für I-Träger schon von S. TIMOSHENKO<sup>5)</sup> angegeben worden; sie ist also in der gleichen Form für alle offenen Querschnittsformen gültig. Bei beliebiger Form der Belastungsfunktion  $T$  kann sie beispielsweise durch Umsetzen in ein dreigliedriges Gleichungssystem

$$-(6\gamma - 1)t_{m-1} + (12\gamma + 4)t_m - (6\gamma - 1)t_{m+1} = T_{m-1} + 4T_m + T_{m+1} = \frac{6}{\Delta x} \cdot K_T, \quad (18)$$

wobei  $\gamma = \frac{l^2}{\Delta x^2 \cdot a^2}$ , gelöst werden<sup>10)</sup>. Als Randbedingung ist bei frei drehbaren Flanschenden die Gleichung

$$(6\gamma + 2)t_A - (6\gamma - 1) \cdot t_1 = 2T_A + T_1 \quad (18a)$$

einzuführen; bei starr eingespannten Flanschenden ist  $t_A = 0$  zu setzen.

Mit den  $t$ -Werten sind aus Gleichung 13 auch die Werte  $\varphi'$  und damit aus Gleichung 17 die Werte  $\varphi'''$  bekannt; mit Hilfe von Gleichung 16a können damit die Werte  $\sigma'$  und durch Summation direkt oder über  $\varphi''$  auch die Längsspannungen  $\sigma$  bestimmt werden.

4. Genau genommen ist auch bei offenen Querschnitten ein Einfluß der Schubspannungen auf den Schubmittelpunkt vorhanden. Wir können uns dies am einfachen Beispiel der Fig. 7 veranschaulichen: Für jeden der beiden ungleichen Flanschen gehorcht die Durchbiegung der Beziehung

<sup>10)</sup> F. STÜSSI: Die Stabilität des auf Biegung beanspruchten Trägers. I. V. B. H., Abhandlungen Bd. III, 1935.

$$\eta'' = -\frac{M_x}{EJ_x} - \frac{M''_x}{G \cdot k \cdot F}$$

Die Last  $P$  verbiegt den Stab dann verdrehungsfrei, wenn jeder Flansch unter seinem Lastanteil die gleiche Durchbiegung aufweist. Da aber  $M$  und  $M''$  einander im allgemeinen nicht ähnlich sind und die Querschnittswerte  $J$  und  $F'$  sich mit verschiedenen Flanschhöhen verschieden verändern, wird die Lage des Schubmittelpunktes von der Lage des Querschnittes abhängig, für den wir die Verdrehungsfreiheit fordern. Der Schubmittelpunkt ist also nicht mehr ein Querschnittsfestpunkt, sondern auch von der Art der Belastung und der Stablänge abhängig. Praktisch ist jedoch dieser Einfluß der Schubspannungen bedeutungslos; er verursacht erst bei ganz kurzen Stäben, bei denen unsere Voraussetzungen der baupraktischen Biegungslehre auch sonst nicht mehr zutreffen, eine merkliche Änderung in der Lage des Schubmittelpunktes.

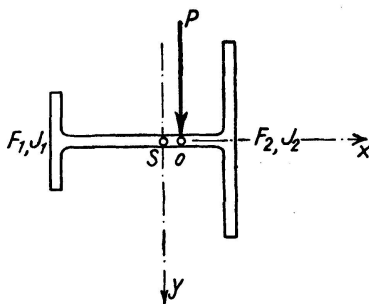


Fig. 7

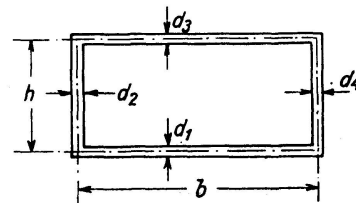


Fig. 8

5. Die angegebene und auf die klassische Biegungslehre aufbauende Darstellung des Torsionsproblems versagt bei geschlossenen Querschnitten, weil sich dort die Schubspannungen  $\tau_0$  bei verdrehungsfreier Biegung nicht mehr allein aus den Normalspannungen  $\sigma$  bzw.  $\sigma'$  durch Summation von einem freien Rand her berechnen lassen. Der Schubmittelpunkt ist also hier, wenigstens von den Normalspannungen  $\sigma$  bei verdrehungsfreier Biegung aus betrachtet, in seiner Lage unbestimmt. Für diese Fälle soll nachstehend am Beispiel des rechteckigen Kastenquerschnittes eine direkte Darstellung des Torsionsproblems skizziert werden.

In einem Querschnitt nach Fig. 8 wird ein Torsionsmoment in der Hauptsache durch den Schubfluß  $s$ ,

$$s = \tau_0 \cdot d$$

aufgenommen. Wegen der Voraussetzung dünner Scheiben darf  $\tau_0$  gleichmäßig über die Scheibenstärke angenommen werden oder die Torsionsschubspannung infolge der Verdrehung der Einzelscheiben darf gegenüber  $\tau_0$  vernachlässigt werden. Aus Gleichgewichtsgründen ist

$$\tau_{01} \cdot d_1 = \tau_{02} \cdot d_2 = \dots = s = \text{konst.} \quad (19)$$

Die Scheibenquerkräfte  $Q_s$  infolge  $s$

$$Q_{s1} = Q_{s3} = s \cdot b, \quad Q_{s2} = Q_{s4} = s \cdot h \quad (20)$$

bilden zusammen ein Drehmoment

$$t_s = 2 s \cdot b \cdot h. \quad (21)$$

Der zugehörige Drehwinkel  $\varphi$  wird durch die Scheibendurchbiegungen  $\eta$  bestimmt; es ist infolge der gleichmäßig über Scheibenhöhe verteilten Schubspannung  $\tau_0 = \frac{s}{d}$

$$\eta'_s = \frac{\tau_0}{G} = \frac{s}{G \cdot d}. \quad (22)$$

Für das Scheibenpaar 1 und 3 ergibt sich eine gegenseitige Verschiebung von  $\eta_1 + \eta_3$  und damit ein zugehöriger Drehwinkel

$$\varphi_{s1} = \frac{\eta_1 + \eta_3}{h}, \quad \varphi'_{s1} = \frac{s}{Gh} \left( \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_3} \right). \quad (23)$$

Analog ist

$$\varphi'_{s2} = \frac{s}{Gb} \left( \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_4} \right).$$

Sind die beiden Drehwinkel  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  gleich groß,

$$\varphi_{s1} = \varphi_{s2}, \quad (24)$$

so ist damit auch die Formänderungsbedingung von der Erhaltung der Querschnittsform erfüllt, der Schubfluß  $s$  nimmt allein das ganze Torsionsmoment auf: es ist  $T = t_s$ .

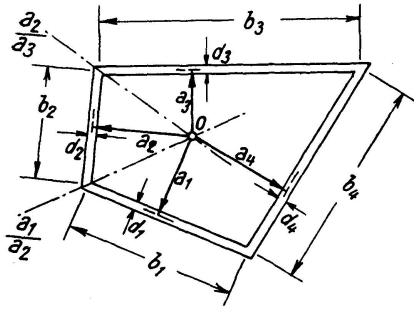


Fig. 9

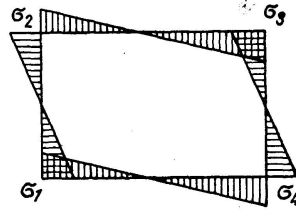


Fig. 10

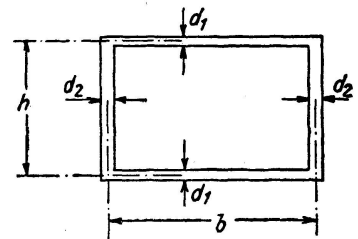


Fig. 11

Für die Verwirklichung dieses „reinen Torsionsfalles“ können, auch bei beliebiger Querschnittsform des Kastenquerschnittes, die Stärken dreier Seiten beliebig angenommen werden, während die vierte daraus bestimmt ist. In Fig. 9 muß für diesen Fall die Bedingung

$$\frac{1}{d_1 \cdot a_1} = \frac{1}{d_2 \cdot a_2} = \frac{1}{d_3 \cdot a_3} = \frac{1}{d_4 \cdot a_4} \quad (24a)$$

erfüllt sein; der Schubmittelpunkt 0 ist durch den Schnittpunkt der zwei Geraden

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{d_2}{d_1} \quad \text{und} \quad \frac{a_2}{a_3} = \frac{d_3}{d_2}, \quad (\text{Fig. 9})$$

also durch drei Seitenstärken  $d$ , bestimmt.

Ist die Bedingung 24 bzw. 24a nicht erfüllt, so verlangt der Zusammenhang der Einzelscheiben zusätzliche Formänderungen und damit das Auftreten von Normalspannungen  $\sigma$  (Fig. 10). Wird einer der vier Spannungswerte  $\sigma$  beliebig angenommen, so sind die andern drei aus den Gleichgewichtsbedingungen

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \int \sigma \cdot y \cdot dF = 0 \\ M_y &= \int \sigma \cdot x \cdot dF = 0 \\ N &= \int \sigma dF = 0 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

bestimmbar. Aus den Spannungsänderungen  $\sigma'$ , deren Verteilung zu der von  $\sigma$  ähnlich verläuft, ergeben sich nun, beginnend an einer Ecke, nach Gleichung 11, Scheibenquerkräfte  $\mathfrak{Q}_\sigma$ , die ihrerseits wieder ein Drehmoment  $t_\sigma$  bilden:

$$t_\sigma = \mathfrak{Q}_1 \cdot h + \mathfrak{Q}_2 \cdot b. \quad (26)$$

Zur Bestimmung des einen angenommenen Wertes von  $\sigma$  müssen nun die Gleichgewichtsbedingung

$$T = t_s + t_\sigma \quad (27)$$

und die Formänderungsbedingung

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad (28)$$

erfüllt sein.

Diese Berechnungen werden wohl am einfachsten numerisch durchgeführt. Mit Rücksicht auf möglichst einfache Darstellung soll der Rechnungsgang am Beispiel der Fig. 11 für einen rechteckigen Kastenquerschnitt mit je paarweise gleichen Seiten gezeigt werden, für den alle vier Werte  $\sigma$  und  $\sigma'$  je gleich groß werden.

Die Gleichgewichtsbedingung Gleichung 27 lautet

$$T = 2s \cdot h \cdot b + \frac{hb^2 d_1}{6} \cdot \sigma' - \frac{bh^2 d_2}{6} \cdot \sigma' \quad (29)$$

oder

$$s = \frac{T}{2bh} + \frac{hd_2 - bd_1}{12} \cdot \sigma' \quad (29a)$$

Bei den Scheibendurchbiegungen  $\eta$  und damit auch bei den Drehwinkeln  $\varphi$  ist zu beachten, daß nun außer dem Schubfluß  $s$  (Gleichung 22) und den Normalspannungen  $\sigma$  (Gleichung 6) auch die Scheibenquerkräfte  $\mathfrak{Q}_\sigma$  Beiträge liefern; es ist

$$\eta'_{\mathfrak{Q}} = \frac{\mathfrak{Q}_\sigma}{kFG}. \quad (30)$$

Wegen der ungleichmäßigen Schubspannungsverteilung ist hier der reduzierte Querschnitt  $kF = F'$  einzuführen. Damit ergibt sich

$$\varphi''_1 = \frac{2}{d_1 h G} \cdot s' + \frac{2b^2 d_1}{6h \cdot kb d_1 \cdot G} \cdot \sigma'' + \frac{4}{bhE} \cdot \sigma$$

und

$$\varphi''_2 = \frac{2}{d_2 b G} \cdot s' - \frac{2h^2 d_2}{6b \cdot kh d_2} \cdot \sigma'' - \frac{4}{bhE} \cdot \sigma.$$

Setzen wir nun  $\varphi_1'' = \varphi_2''$  (Formänderungsbedingung) und führen wir dabei den Wert  $s'$  aus der einmal differenzierten Gleichgewichtsbedingung Gleichung 29a ein, so erhalten wir nach kurzer Zwischenrechnung die Gleichung:

$$\frac{d_2 b - d_1 h}{d_1 d_2 b h} \cdot T' + \left[ \frac{(h d_2 - b d_1)(d_2 b - d_1 h)}{6 d_1 d_2} + \frac{1}{3k} (h^2 + b^2) \right] \cdot \sigma'' + \frac{8G}{E} \cdot \sigma = 0. \quad (31)$$

Diese Grundgleichung des Torsionsproblems von Kastenquerschnitten hat den gleichen Bau wie diejenige der Torsion offener Querschnitte; ihre Auflösung, zum Beispiel durch Umsetzen in ein dreigliedriges Gleichungssystem, liefert aus den Änderungen  $T'$  der Torsionsmomente, d. h. aus den äußern Drehmomenten, die Kantenspannung  $\sigma$ .

Durchgerechnete Beispiele zeigen, daß der Anteil der Momente  $t_\sigma$  am gesamten Torsionsmoment auch bei vom reinen Torsionsfall stark abweichenden Verhältnissen der Scheibenstärken ziemlich gering ist, sodaß der Schubfluß auch dort mit

$$s = \frac{t_s}{2bh} \approx \frac{T}{2bh}$$

nach Gleichung 21 näherungsweise ermittelt werden darf, eine Feststellung, die mit den früheren Untersuchungen von A. EGGENSCHWYLER<sup>4)</sup> übereinstimmt. Immerhin ist die genauere Untersuchung mit Berücksichtigung der Randspannungen  $\sigma$  dieses Problems dort angezeigt, wo die Formänderungen zuverlässig bekannt sein müssen.

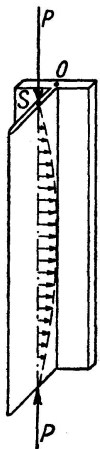


Fig. 12

6. Die Torsion bei unsymmetrischen Querschnitten beeinflusst auch, wie schon A. OSTENFELD<sup>11)</sup> festgestellt hat, das Knicken eines zentrisch belasteten Stabes.

Infolge einer Ausbiegung  $\eta$  des Stabes entstehen Ablenkungskräfte  $P \cdot \eta''$  (Fig. 12), in der Schwerachse des Stabes wirkend, die nicht nur eine zusätzliche Verbiegung, sondern auch eine Verdrehung um 0 bewirken: der Stab kippt und die kritische Belastung erfährt gegenüber der EULER'schen Knicklast eine Abminderung. Eine baupraktische Behandlung von Kippaufgaben, auch bei gleichzeitig wirkender Längskraft, habe ich bereits früher angegeben<sup>10)</sup>.

### Zusammenfassung.

Die doppelte Bedeutung des Schubmittelpunktes als Angriffspunkt der Belastung bei verdrehungsfreier Biegung und als Drehpunkt des Querschnittes bei biegungsfreier Verdrehung wird mit Hilfe des MAXWELL'schen Reziprozitätssatzes nachgewiesen. Die Formänderungen aus Verbiegung sind von denen aus Verdrehung unabhängig; jede Belastung läßt sich mit Hilfe des Schubmittelpunktes in einen rein verbiegenden und einen rein verdrehenden Anteil zerlegen. Für die verdrehungsfreie Biegung ist die Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte als Sonderfall der allgemeineren Formänderungsbedingung von der Unveränderlichkeit der Querschnittsform gültig; die klassische Biegungslehre nach NAVIER mit ihren Folgerungen bleibt hierfür voll anwendbar. Bei Stäben mit offenem Querschnitt kann aus der Biegungsbeanspruchung in zwei verschiedenen Richtungen der Schubmittelpunkt als Schnittpunkt der resultierenden inneren Querkräfte leicht bestimmt werden; vom Schubmittelpunkt ausgehend läßt sich aber auch eine einfache Darstellung des Torsionsproblemcs angeben. Bei Kastenquerschnitten kann der Schubmittelpunkt nicht von der klassischen Biegungslehre aus angegeben werden; für diese Fälle wird ein anderes, direktes Verfahren skizziert. Auf den Einfluß des Schubmittelpunktes auf das Knickproblem wird hingewiesen.

<sup>11)</sup> A. OSTENFELD: Mitt. Nr. 5 u. Nr. 6 des Lab. für Baustatik der Techn. Hochschule in Kopenhagen, 1931, 1932.

### Résumé.

En partant de la loi de réciprocité de MAXWELL, l'auteur démontre la double signification du centre des efforts tranchants (centre de torsion) qui est tout à la fois le point d'application de la force dans le cas d'une flexion sans torsion et le centre de rotation de la section dans le cas d'une torsion sans flexion. Les déformations engendrées par la flexion sont indépendantes de celles dues à la rotation; il en résulte que toute surcharge peut être décomposée, grâce au centre des efforts tranchants, en une portion de pure flexion et en une portion de pure torsion. Dans le cas de la flexion sans torsion, l'hypothèse disant que les sections restent planes est un cas particulier de la condition générale de déformation posant que la forme des sections reste invariable; c'est pourquoi la théorie classique de Navier et ses conséquences restent entièrement valables. Dans les barres à section ouverte, le centre des efforts tranchants peut être déterminé, en partant de la flexion dans deux directions différentes, comme point d'intersection des résultantes des efforts tranchants internes; on peut représenter de façon simple le problème de la torsion en partant du centre des efforts tranchants. Il n'est par contre pas possible de déterminer sur la base de la théorie classique de la flexion, le centre des efforts tranchants dans les sections en forme de caisson; l'auteur esquisse pour ce cas un autre procédé de détermination directe. L'auteur montre en outre l'influence du centre des efforts tranchants sur le problème du flambage.

### Summary.

The double significance of the centre of twist as point of application of the loading in the case of bending free from torsion, and as pivot point of the cross-section in the case of torsion free from bending, is demonstrated with the help of the MAXWELL law of reciprocity. The deformations caused by bending are independent of those caused by torsion; each loading can, by means of the centre of shear, be resolved into a purely bending and a purely twisting part. For bending free from torsion, the hypothesis of the cross-sections remaining plane holds good as a special case of the more general condition of elasticity from the immutability of the shape of cross-section; the classic theory of bending according to NAVIER with its conclusions holds still perfectly good for this. In bars with open cross-section the centre of twist as point of intersection of the resultant internal transverse forces can easily be determined from the bending stresses in two different directions; starting with the centre of twist, however, a simple representation of the torsion problem can also be obtained. In box-sections the centre of twist cannot be obtained from the classic theory of bending; for these cases another direct method is sketched. Reference is made to the influence of the centre of twist on the buckling problem.



Leere Seite  
Blank page  
Page vide