

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen  
**Band:** 6 (1940-1941)

**Artikel:** Seitenstabilität durchgehender Balkenbrücken auf Zwischenstützen, welche als Pendel- oder Rahmenkonstruktionen ausgebildet sind  
**Autor:** Porell, O.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-7099>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# **SEITENSTABILITÄT DURCHGEHENDER BALKENBRÜCKEN AUF ZWISCHENSTÜTZEN, WELCHE ALS PENDEL- ODER ALS RAHMENKONSTRUKTIONEN AUSGEBILDET SIND.**

**LA STABILITÉ TRANSVERSALE DES PONTS EN POUTRES  
CONTINUES SUR APPUIS INTERMÉDIAIRES EN FORME DE  
PENDULES OU DE CADRES.**

**LATERAL STABILITY OF CONTINUOUS GIRDER BRIDGES  
ON INTERMEDIATE SUPPORTS WHICH ARE FORMED AS ROCKING  
OR FRAME CONSTRUCTIONS.**

Zivilingenieur O. PORELL, † 1940, Stockholm<sup>1)</sup>.

## **Einleitung.**

Bei durchgehenden Balkenbrücken auf Pendelstützen werden die in der Ebene der Fahrbahn angreifenden Seitenkräfte wie Winddruck, Zentrifugalkräfte u. a. durch die Horizontalverbände der Fahrbahntafel auf feste Endwiderlager oder feste Mittelpfeiler übertragen.

Die oberen Enden der Pendelstützen führen hierbei zusammen mit der Fahrbahntafel horizontale Verschiebungen aus. Infolge dieser Verschiebungen nehmen die ursprünglich lotrechten Pendelstützen eine etwas geneigte Stellung ein. Diese Schiefstellung erzeugt, wie leicht einzusehen ist, eine horizontale Reaktion in jeder Stütze, die in gleicher Richtung wie die äußere Horizontalbelastung wirkt.

Diese Horizontalreaktionen sind proportional zu den Stützindrücken und Horizontalverschiebungen und umgekehrt proportional zu den Längen der Pendelstützen.

Die horizontale Ausbiegung der Brücke ist also nicht nur von der horizontalen, sondern auch von der vertikalen Belastung der Brücke abhängig.

Es liegt also ein statisches System vor, das sich auf ähnliche Weise verhält wie ein gedrückter Stab, der außer durch eine mittige Druckkraft noch durch Querkräfte beansprucht ist.

Bei einer durchgehenden Balkenbrücke, die anstatt auf Pendelstützen auf biegungsfesten Rahmenkonstruktionen gelagert ist, ist das Kräftespiel komplizierter. Bei steifen Querkonstruktionen tritt eine Entlastung der Fahrbahntafel durch die Stützen ein. Bei schlanken Querkonstruktionen dagegen verhalten sich die biegungsfesten Stützen wie Pendelstützen.

---

<sup>1)</sup> Diese Arbeit, deren Veröffentlichung für den Brückenbaukongreß 1940 in Warschau beabsichtigt war, wurde von S. KASARNOWSKY vollendet und vervollständigt.

## I. Seitenstabilität durchgehender Balkenbrücken auf Pendelstützen.

Bezeichnungen:

$l$  = Brückenlänge,

$h$  = Höhe der Pendelstütze, konstant für alle Stützen,

$J$  = Trägheitsmoment des Fahrbahntafel-Querschnitts in Bezug auf die vertikale Schweraxe,

$E$  = Elastizitätsmodul.

Besteht die Fahrbahntafel aus Betonplatte und Stahlbalken, so setzen wir

$$JE = J_b \cdot E_b + J_f \cdot E_f$$

( $J_b$  und  $E_b$  = Trägheitsmoment und Elastizitätsmodul der Betonkonstruktion,  $J_f$  und  $E_f$  = Trägheitsmoment und Elastizitätsmodul der Stahlkonstruktion),

$q$  = vertikale Belastung der Brücke per Laufmeter,

$q_{kr}$  = kritischer Wert von  $q$

$$\nu = q/q_{kr},$$

$p$  = horizontale Belastung der Brücke per Laufmeter,

$y$  = horizontale Ausbiegung der Brücke.

### 1. Durchgehende Balkenbrücke mit zwei Feldern und zwei festen Endauflagern.

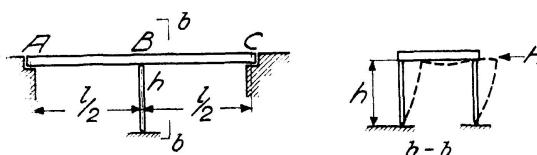


Fig. 1

Eine Horizontalverschiebung  $y$  der Brücke im Stützenpunkt  $B$  erzeugt eine Horizontalreaktion  $H$  in der Pendelstütze, proportional zur Vertikalbelastung  $V$  (die Anzahl Pendelstützen in einer Querreihe ist hierbei ohne Bedeutung) und dem Neigungswinkel  $y/h$  (siehe Fig. 1)

$$H = \frac{y}{h} V. \quad (1)$$

Nehmen wir an, daß die Brücke durch eine gleichmäßig verteilte Belastung  $p$  per Laufmeter belastet ist, so wird die Horizontalverschiebung in  $B$

$$y = y_0 + y_1 H, \quad (2)$$

worin

$y_0$  die Horizontalverschiebung in  $B$  infolge der Belastung  $p$ ,  
 $y_1$  die Horizontalverschiebung in  $B$  infolge  $H = 1$  bedeuten.

In unserem Falle sind

$$y_0 = \frac{5}{384} \cdot \frac{pl^4}{JE}; \quad y_1 = \frac{l^3}{48JE}. \quad (3)$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) folgt nun

$$y = \frac{y_0}{1 - \frac{y_1}{h} V} \quad (4)$$

Der kritische Wert  $V_{kr}$  der Stützenbelastung  $V$  wird erreicht, wenn der Nenner der Gleichung (4) gegen Null konvergiert, d. h. wenn

$$1 - \frac{y_1}{h} V = 0$$

ist, somit ergibt sich

$$V_{kr} = \frac{h}{y_1} = \frac{48JEh}{l^3}. \quad (5)$$

Setzen wir  $\nu = V/V_{kr}$ , so wird

$$y = \frac{y_0}{1 - \nu}. \quad (6)$$

Ist die Brücke durch eine gleichmäßig verteilte Vertikalbelastung  $q$  belastet, so wird mit  $V = 5ql/8$  die kritische Belastung

$$q_{kr} = \frac{8 \cdot 48 \cdot JEh}{5 \cdot l^4} = 76,80 \frac{JEh}{l^4}. \quad (7)$$

Die kritische Vertikalbelastung der Brücke ist somit unabhängig vom Querschnitt und Trägheitsmoment der Pendelstütze. Eine lokale Ausknickung einer Pendelstütze kann natürlich stattfinden auch bei niedrigerer Belastung, abhängig vom Widerstand der Stütze, es ist aber unmöglich, nur durch Verstärkung der Pendelstützen das Tragvermögen der Brücke über den hier berechneten Betrag zu erhöhen.

Das Biegemoment in Brückenmitte infolge der Horizontalbelastung  $p$  wird

$$M = \frac{pl^2}{8} + \frac{l}{4} \cdot \frac{5ql}{8} \cdot \frac{y}{h} = \frac{pl^2}{8} \left( 1 + \frac{5}{4} \cdot \frac{q}{p} \cdot \frac{y}{h} \right).$$

Aus den Gl. (3), (6) und (7) folgt

$$\nu = q/q_{kr} = \frac{q}{p} \cdot \frac{y_0}{h} = \frac{q}{p} \frac{(1 - \nu)}{h} y$$

oder

$$M = \frac{pl^2}{8} \cdot \frac{(1 + 0,25 \nu)}{1 - \nu}. \quad (8)$$

Auf die gleiche Weise erhalten wir die Auflagerreaktionen in  $A$  und  $C$  für die Horizontalbelastung zu

$$A = \frac{pl}{2} \cdot \frac{(1 - 0,375 \nu)}{1 - \nu}. \quad (9)$$

## 2. Durchgehende Balkenbrücke mit drei Feldern und zwei festen Endauflagern.

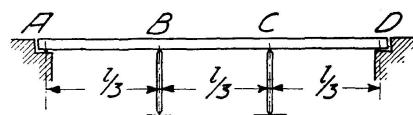


Fig. 2

Mit den gleichen Bezeichnungen wie im ersten Abschnitt erhalten wir hier:

$$y_0 = \frac{11}{6 \cdot 162} \frac{pl^4}{JE}; \quad y_1 = \frac{5}{162} \frac{l^3}{JE}. \quad (3a)$$

Der Auflagerdruck  $V$  in  $B$  und  $C$  bei gleichmäßig verteilter Vertikabbelastung  $q$  ist wie bekannt  $V = 11ql/30$ .

Die kritische Belastung folgt aus

$$q_{kr} = \frac{30}{11} \frac{V_{kr}}{l} = \frac{30}{11} \cdot \frac{h}{y_1 l} = \frac{30 \cdot 162}{11 \cdot 5} \frac{JEh}{l^4} = 88,36 \frac{JEh}{l^4}. \quad (10)$$

Auf die gleiche Weise wie vorher erhalten wir für das Moment in Brückenmitte

$$M = \frac{pl^2}{8} \frac{(1 - 0,022 \nu)}{1 - \nu} \quad (11)$$

und für die Auflagerreaktion in den Endstützen  $A$  und  $D$

$$A = \frac{pl}{2} \frac{(1 - 0,267 \nu)}{1 - \nu}. \quad (12)$$

### **3. Durchgehende Balkenbrücke mit vier Feldern und zwei festen Endauflagern.**

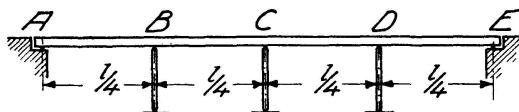


Fig. 3

Nehmen wir an, daß die Brücke durch eine gleichmäßig verteilte Horizontalbelastung  $p$  per Laufmeter belastet sei, so werden die Horizontalverschiebungen der Brückentafel in  $B$  resp.  $C$

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = y_{01} + y_{11} H_1 + \frac{1}{2} y_{12} H_2 \\ y_2 = y_{02} + y_{12} H_1 + y_{22} H_2 \end{array} \right\} \quad (13)$$

Es bedeuten hier:

$y_{01}$  = resp.  $y_{02}$  die Horizontalverschiebungen in  $B$  resp.  $C$  für eine gleichmäßig verteilte Belastung  $p$

$y_{11}$  die Horizontalverschiebung in  $B$  für  $H_1 = 1$

$$y_{12} \quad , \quad , \quad , \quad , \quad C \quad , \quad H_1 = 1$$

$$y_{22} \quad , \quad , \quad , \quad , \quad C \quad , \quad H_2 = 1$$

### *H<sub>1</sub>* „Horizontalreaktion in *B* und *D*

$H_2$  " " " C

In unserem Fall ist wie bekannt

$$y_{11} = y_{22} = \frac{8l^3}{384JE}; \quad y_{12} = \frac{11l^3}{384JE} \quad (14)$$

$$y_{01} = \frac{57}{80} y_{02}; \quad y_{02} = \frac{5pl^4}{384JE}. \quad (15)$$

Zwischen den Horizontalreaktionen  $H_1$  und  $H_2$  und den Vertikalreaktionen  $V_1$  und  $V_2$  in  $B$  und  $C$  bestehen analog der Gleichung (1) folgende Beziehungen:

$$H_1 = \frac{y_1}{h} V_1; \quad H_2 = \frac{y_2}{h} V_2. \quad (16)$$

Aus den Gl. (13) und (16) folgt

$$\left. \begin{aligned} \left(1 - \frac{y_{11}}{h} V_1\right) y_1 - \frac{1}{2} \frac{y_{12}}{h} V_2 y_2 &= y_{01} \\ - \frac{y_{12}}{h} V_1 y_1 + \left(1 - \frac{y_{11}}{h} V_2\right) y_2 &= y_{02}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Der kritische Wert der Vertikalbelastung wird erreicht, wenn

$$\left| \begin{array}{cc} \left(1 - \frac{y_{11}}{h} V_1\right) & - \frac{1}{2} \frac{y_{12}}{h} V_2 \\ - \frac{y_{12}}{h} V_1 & \left(1 - \frac{y_{11}}{h} V_2\right) \end{array} \right| = 0. \quad (18)$$

Ist die Brücke durch eine gleichmäßig verteilte Vertikalbelastung  $q$  belastet, so werden die Stützendrücke

$$V_1 = \frac{16}{56} ql \quad \text{und} \quad V_2 = \frac{13}{56} ql.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$c = \frac{ql^4}{56 \cdot 384 J Eh},$$

so erhalten wir aus den Gl. (14) und (18)

$$1 - 232c + 728c^2 = 0.$$

Die kleinste Wurzel dieser Gleichung ist  $c = 0,00440$ . Die niedrigste kritische Belastung wird somit

$$q_{kr} = 0,00440 \cdot 56 \cdot 384 \frac{J Eh}{l^4} = 94,62 \frac{J Eh}{l^4}. \quad (20)$$

#### 4. Durchgehende Balkenbrücke auf $\infty$ vielen Zwischenstützen und zwei festen Endauflagern.

Für eine Balkenbrücke mit größerer Anzahl Zwischenstützen wird die in vorigen Abschnitten für eine, zwei und drei Mittelstützen angewandte Methode schwerfällig.

Die Berechnung wird vereinfacht, wenn man annimmt, daß die infolge der Schiefstellung der Pendelstützen entstehenden Horizontalreaktionen stetig über die Länge der Brücke verteilt sind.

Wir denken uns jedes Längenelement der Brücke  $dx$  durch eine äußere gleichmäßig verteilte Belastung  $pdx$  und durch eine Horizontalreaktion

$$q \frac{y}{h} dx$$

belastet. Die allgemeine Beziehung zwischen dem Biegemoment  $M$  und der Belastung lautet hier:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = - \left( p + q \frac{y}{h} \right). \quad (21)$$

Aus der Gleichung der elastischen Linie

$$JE \frac{d^2y}{dx^2} = -M$$

erhält man durch zweifaches Differenzieren

$$JE \frac{d^4y}{dx^4} = - \frac{d^2M}{dx^2} = p + q \frac{y}{h}$$

oder

$$\frac{JEh}{q} \cdot \frac{d^4y}{dx^4} - y = \frac{h}{q} p. \quad (23)$$

Setzt man

$$s^4 = JEh/q \quad \text{und} \quad \varphi = x/s, \quad (24)$$

so lautet das allgemeine Integral der Gl. (23)

$$y = A \sinh \varphi + B \cosh \varphi + C \sin \varphi + D \cos \varphi - h \frac{p}{q}. \quad (25)$$

$A, B, C$  und  $D$  sind Integrationskonstanten.

Wir verlegen den Koordinatenursprung in die Brückenmitte und nehmen an, daß die Auflagerbedingungen an beiden Endlagern die gleichen sind.

Aus Symmetriegründen werden dann  $A = C = 0$ . Die Gl. (25) vereinfacht sich zu

$$y = B \cosh \varphi + D \cos \varphi - h \frac{p}{q}. \quad (26)$$

Wir nehmen weiter an, daß die Fahrbahntafel in den Endlagern frei drehbar ist und erhalten folgende zwei Randbedingungen:

$$x = \pm l/2; \quad y = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = 0.$$

Aus der Gl. (26) folgt dann mit

$$\lambda = \frac{l}{2s} \quad (27)$$

$$B \cosh \lambda + D \cos \lambda = h \frac{p}{q}$$

$$B \cosh \lambda - D \cos \lambda = 0,$$

somit

$$B = \frac{1}{2 \cosh \lambda} \cdot h \frac{p}{q}; \quad D = \frac{1}{2 \cos \lambda} h \frac{p}{q} \quad (28)$$

und

$$y = \frac{ph}{q} \left\{ -1 + \frac{\cosh \varphi}{2 \cosh \lambda} + \frac{\cos \varphi}{2 \cos \lambda} \right\}. \quad (29)$$

Die kritische Belastung erhält man aus der Bedingung  $\cos \lambda = 0$ , somit  $\lambda = \pi/2$  und  $s = l/2\lambda = l/\pi$ .

Aus der Gl. (24) folgt dann

$$q_{kr} = \frac{JEh}{s^4} = \pi^4 \frac{JEh}{l^4} = 97,41 \frac{JEh}{l^4}. \quad (30)$$

Die Werte der kritischen Belastung als Funktion der Anzahl Zwischenstützen sind in Tafel I zusammengestellt.

T a f e l I.

Anzahl Zwischenstützen	$q_{kr}$
1	76,80 $JEh/l^4$
2	88,36 "
3	94,62 "
$\infty$	97,41 "

Aus der Tafel geht hervor, daß die kritische Belastung mit zunehmender Anzahl Zwischenstützen sich asymptotisch einem Grenzwert nähert. Der Unterschied zwischen der kritischen Belastung für drei und  $\infty$  viele Stützen ist nur 3 %.

Es ist für die nachstehenden Entwicklungen vorteilhaft, die Größe  $\lambda$  (Gl. 27) durch  $\nu = q/q_{kr}$  darzustellen. Aus Gl. (24) und (30) folgt nämlich:

$$\lambda = \frac{\pi}{2} \sqrt[4]{\nu}. \quad (27a)$$

Aus Gl. (29) folgt für die Brückenmitte ( $\varphi = 0$ )

$$y = \frac{p}{q} \cdot \frac{h}{2} (2 - \operatorname{sech} \lambda - \sec \lambda). \quad (29a)$$

Das Biegunsmoment berechnet sich aus Gl. (22) und (29) zu

$$M = \frac{pl^2}{8\lambda^2} \left( \frac{\cos \varphi}{\cos \lambda} - \frac{\cosh \varphi}{\cosh \lambda} \right),$$

in der Brückenmitte mit  $\varphi = 0$  zu

$$M = \frac{pl^2}{8\lambda^2} (\sec \lambda - \operatorname{sech} \lambda). \quad (31)$$

Schließlich berechnen wir die Scherkraft  $T$  aus

$$T = - \frac{dM}{dx}$$

zu

$$T = \frac{pl}{4\lambda} \left( \frac{\sin \varphi}{\cos \lambda} + \frac{\sinh \varphi}{\cosh \lambda} \right) \quad (32)$$

und die horizontale Auflagerreaktion mit  $\varphi = \lambda$  zu

$$A = \frac{pl}{4\lambda} (\operatorname{tg} \lambda + \operatorname{tgh} \lambda). \quad (33)$$

Die Berechnung der Biegunsmomente und Scherkräfte kann jetzt leicht mit Hilfe von Tabellen für hyperbolische Funktionen erfolgen. Wir wollen jedoch in Analogie mit Lösungen anderer Stabilitätsprobleme mit Hilfe von Reihenentwicklungen approximative Ausdrücke für Ausbiegungen, Momente und Scherkräfte suchen vom gleichen Typus wie die Gleichungen (6), (8), (9), (11) und (12).

Wir setzen

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sech} \lambda &= 1 - E_1 \frac{\lambda^2}{2!} + E_2 \frac{\lambda^4}{4!} - \dots \\ \sec \lambda &= 1 + E_1 \frac{\lambda^2}{2!} + E_2 \frac{\lambda^4}{4!} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

wo  $E_1 \dots E_n$  EULER'sche Zahlen bedeuten (siehe: POTIN, „Formules et Tables Numériques, Seite 861).

$$E_1 = 1; \quad E_2 = 5; \quad E_3 = 61; \quad E_4 = 1385 \text{ usw.}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (34) schreiben wir jetzt die Ausbiegung in Brückenmitte

$$y = \frac{p}{q} h \frac{\lambda^4}{4!} E_2 \left\{ 1 + \frac{4! E_4}{8! E_2} \lambda^4 + \frac{4! E_6}{12! E_2} \lambda^8 + \dots + \frac{4! E_n}{(2n)! E_2} \lambda^{2n-4} + \dots \right\} \quad (35)$$

Der Ausdruck vor der Klammer wird mit Beachtung von Gl. (24) und (27) in

$$\frac{p}{q} h \frac{\lambda^4}{4!} E_2 = \frac{5}{384} \frac{p l^4}{J E}$$

verwandelt. Er stellt, wie leicht einzusehen ist, die Ausbiegung für die horizontale Belastung dar.

Der Ausdruck in der Klammer kann somit als Vergrößerungsfaktor infolge Schiefstellung der Pendelstützen betrachtet werden.

Wie bekannt, können die EULER'schen Zahlen durch folgende Reihen dargestellt werden:

$$E_n = \frac{2^{2n+2} (2n)!}{\pi^{2n+1}} \left( 1 - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} - + \dots \right)$$

$$\frac{E_n}{E_2} = \frac{(2n)!}{4!} \left( \frac{2}{\pi} \right)^{2n-4} \cdot \frac{\left( 1 - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} - + \dots \right)}{\left( 1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - + \dots \right)}.$$

Mit  $1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + - \dots = \frac{5\pi^5}{1536} = 0,9961$

und  $\lambda^{2n-4} = \left( \frac{\pi}{2} \right)^{2n-4} \cdot \nu^{\frac{2n-4}{4}}$  (siehe Gl. (27 a))

folgt  $\frac{4!}{(2n)!} \frac{E_n}{E_2} \cdot \lambda^{2n-4} = \frac{1536}{5\pi^5} \left( 1 - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} - + \dots \right),$

für  $n = 4$  wird  $\frac{4! E_4}{8! E_2} = \frac{1536}{5\pi^5} \left( 1 - \frac{1}{3^9} + \frac{1}{5^9} - + \dots \right) \nu$

für  $n = 6$  wird  $\frac{4! E_6}{12! E_2} = \frac{1536}{5\pi^5} \left( 1 - \frac{1}{3^{13}} + \frac{1}{5^{13}} - + \dots \right) \nu^2$   
usw.

Die Klammer in der Gl. (35) kann jetzt wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{1536}{5\pi^5} \left\{ [1 + \nu + \nu^2 + + \dots] - \frac{1}{3^5} \left[ 1 + \left( \frac{\nu}{3^4} \right) + \left( \frac{\nu}{3^4} \right)^2 + + \dots \right] + - \dots \right\}.$$

Wie man sieht, sind die Ausdrücke in den eckigen Klammern geometrische Reihen und da  $\nu < 1$ , geht der Ausdruck über in

$$\frac{1536}{5\pi^5} \left\{ \frac{1}{1-\nu} - \frac{1}{3^5} \frac{1}{1-\left(\frac{\nu}{3^4}\right)} + - \dots \right\}.$$

Werden  $\frac{\nu}{3^4}$ ,  $\frac{\nu}{5^4}$  usw. vernachlässigt, so wird der Vergrößerungsfaktor vereinfacht zu

$$\frac{1536}{5\pi^5} \left\{ \frac{1}{1-\nu} - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - + \dots \right\} = \frac{1536}{5\pi^5} \left\{ \frac{1}{1-\nu} - \left(1 - \frac{5\pi^5}{1536}\right) \right\}.$$

Mit  $1 - \frac{5\pi^5}{1536} = 0,0039$

wird schließlich der approximative Wert für die Ausbiegung in Brückenmitte

$$y = \frac{5pl^4}{384JE} \left\{ \frac{1 + 0,0039\nu}{1-\nu} \right\}. \quad (36)$$

Auf die gleiche Weise erhalten wir aus Gl. (31) einen einfachen Ausdruck für das Moment in Brückenmitte

$$y = \frac{pl^2}{8} \left\{ \frac{1 + 0,032\nu}{1-\nu} \right\}. \quad (37)$$

Um einen ähnlichen Ausdruck für die Auflagerreaktion zu finden, setzen wir

$$\operatorname{tgh} \lambda = 2 \left\{ (2^2 - 1) B_1 \frac{2\lambda}{2!} - (2^4 - 1) B_2 \frac{(2\lambda)^3}{4!} + + \dots \right\}$$

$$\operatorname{tg} \lambda = 2 \left\{ (2^2 - 1) B_1 \frac{2\lambda}{2!} + (2^4 - 1) B_2 \frac{(2\lambda)^3}{4!} + + \dots \right\}.$$

und  $\operatorname{tgh} \lambda + \operatorname{tg} \lambda = 4 \left\{ (2^2 - 1) B_1 \frac{2\lambda}{2!} + (2^6 - 1) B_3 \frac{(2\lambda)^5}{6!} + + \dots \right\},$

wo  $B_1 \dots B_n$  BERNOULLI'sche Zahlen bedeuten (siehe POTIN, Seite 856):

$$B_1 = \frac{1}{6}; \quad B_2 = \frac{1}{30}; \quad B_3 = \frac{1}{42}; \quad B_4 = \frac{1}{30} \text{ usw.}$$

Wir schreiben jetzt die Gleichung (33)

$$A = \frac{pl}{2} \left\{ 1 + \frac{2^6 - 1}{2^2 - 1} \cdot \frac{2!}{6!} \frac{B_3}{B_1} (2\lambda)^4 + + \dots + \frac{2^{2n} - 1}{2^2 - 1} \cdot \frac{2!}{(2n)!} \cdot \frac{B_n}{B_1} \cdot (2\lambda)^{2n-2} \right\} \quad (38)$$

Der Ausdruck vor der Klammer ist die Auflagerreaktion für die Horizontalbelastung  $p$  und der Ausdruck in der Klammer ist wiederum der Vergrößerungsfaktor infolge Schiefstellung der Pendelstützen.

Nach CAUCHY können die BERNOULLI'schen Zahlen durch folgende Reihe dargestellt werden:

$$B_n = \frac{2(2n)!}{(2^{2n} - 1)\pi^{2n}} \left( 1 + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + + \dots \right),$$

somit ist  $\frac{B_n}{B_2} \frac{(2n)!}{2!} \frac{(2^2 - 1)}{(2^{2n} - 1)} \cdot \frac{1}{\pi^{2n-2}} \frac{\left( 1 + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + + \dots \right)}{\left( 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + + \dots \right)}$

und mit

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8} = 1,2337$$

sowie

$$(2\lambda)^{2n-2} = \pi^{2n-2} \cdot \nu^{\frac{2n-2}{4}}$$

folgt  $\frac{2^{2n}-1}{2^2-1} \cdot \frac{2!}{(2n)!} \frac{B_n}{B_1} (2\lambda)^{2n-2} = \frac{8}{\pi^2} \nu^{\frac{2n-2}{4}} \cdot \left(1 + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \dots\right)$ ,

für  $n = 3$  wird  $\frac{2^6-1}{2^2-1} \frac{2!}{6!} \frac{B_3}{B_1} (2\lambda)^4 = \frac{8}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \dots\right) \nu$

für  $n = 5$  wird  $\frac{2^{10}-1}{2^2-1} \frac{2!}{10!} \frac{B_5}{B_1} (2\lambda)^8 = \frac{8}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \dots\right) \nu^2$ .

usw.

Die Klammer der Gl. (38) kann jetzt wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{8}{\pi^2} \left\{ [1 + \nu + \nu^2 + \dots] + \frac{1}{3^2} \left[ 1 + \left(\frac{\nu}{3^4}\right) + \left(\frac{\nu}{3^4}\right)^2 + \dots \right] + \dots \right\}.$$

Wie man sieht, sind die Ausdrücke in den eckigen Klammern geometrische Reihen, somit wird der Vergrößerungsfaktor

$$\frac{8}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{1-\nu} + \frac{1}{3^2} \frac{1}{1-\left(\frac{\nu}{3^4}\right)} + \frac{1}{5^2} \frac{1}{1-\left(\frac{\nu}{5^4}\right)} + \dots \right\}.$$

Werden  $\nu/3^4$ ,  $\nu/5^4$  usw. vernachlässigt, so vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$\frac{8}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{1-\nu} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right\} = \frac{8}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{1-\nu} + \left(1 - \frac{8}{\pi^2}\right) \right\}$$

mit  $1 - \frac{8}{\pi^2} = 0,1894$ ,

und der approximative Wert für die Auflagerreaktion wird schließlich

$$A = \frac{pl}{2} \frac{1 - 0,1894 \nu}{1 - \nu}. \quad (39)$$

Als Beispiel für die Bedeutung des hier entwickelten Stabilitätsproblems geben wir einen Auszug der statischen Berechnung der Hochbrücke bei Skanstull in Stockholm.

Diese Brücke besitzt zwei Fahrbahnen:

Eine Straße von 25,5 m Breite und eine zweigleisige Vorortsbahn von 8,0 m Breite (siehe Fig. 4). Die Brücke war ursprünglich als eine durchgehende Balkenbrücke auf 13 Pendelstützen mit einer größten Spannweite von 42,5 m und einer Totallänge von  $l = 552,5$  m projektiert.

Die tragende Konstruktion bestand aus sechs geschweißten Blechträgern aus Stahl St. 48. Die mittlere Höhe der Pendelstützen war  $h = 26,0$  m.

Bei Berechnung der Seitenstabilität dieser Brücke wurde auch die etwa 25 cm starke Eisenbetonplatte berücksichtigt.

Bei Annahme von  $E_b/E_f = 1/10$  wird das Trägheitsmoment der Fahrbahntafel zu  $J = 98,5 \text{ m}^4$  berechnet.

Die kritische Belastung wird mit  $E = 21 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2$  (siehe Gl. (30))

$$q_{kr} = \pi t^4 \frac{J Eh}{l^4} = 97,41 \cdot \frac{98,5 \cdot 21 \cdot 10^{+6} \cdot 26,0}{552,5^4} = 56,22 \text{ t/m' Brücke.}$$

Die wirkliche Belastung der Brücke beträgt:

Straßenbelag und Eisenbetonplatte	23,6	t/m	Brücke
Geleise und Schwellen	1,0	"	"
Stahlkonstruktion	8,4	"	"
Verkehrslast der Straßenbrücke	10,2	"	"
Verkehrslast der Vorortsbahn	3,0	"	"
<hr/>			
$q = 46,2$ t/m Brücke			

Die Knicksicherheit ist somit nur  $56,22/46,2 = 1,21$  fach. Es ist somit unmöglich, diese Brücke ohne besondere Maßnahmen, wie Einsetzen von festen Zwischenstützen oder Verminderung des Abstandes zwischen den Endauflagern, auf Pendelstützen auszuführen.

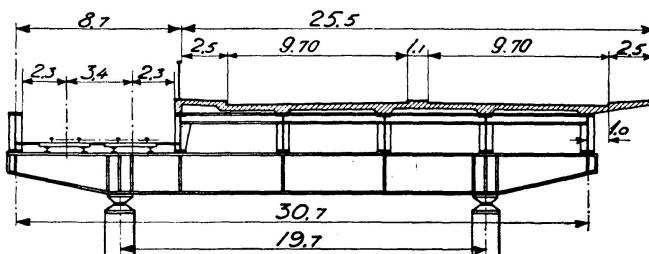


Fig. 4

Im endgültigen Entwurf vom Jahre 1939 sind die Pendelstützen durch in der Querrichtung steife Zweigelenkrahmen ersetzt und die Länge der Brücke gleichzeitig auf 528,0 m vermindert worden.

## **II. Seitenstabilität durchgehender Balkenbrücken auf steifen Rahmenkonstruktionen.**

## 1. Die Horizontalverschiebung eines Rahmens und seine kritische Belastung.

Ist  $H$  die Horizontalbelastung eines Rahmens und  $V$  seine Vertikabelastung, so kann die Horizontalverschiebung des Rahmens in der Höhe des Querriegels  $z_0$  wie folgt geschrieben werden:

$$z_0 = \delta \cdot H \cdot \Gamma \quad (40)$$

Es bedeuten hier:

$\delta$  = Horizontalverschiebung infolge  $H = 1$ ,  
 $\Gamma$  = eine Funktion der Vertikalbelastung.

In Analogie mit anderen Stabilitätsproblemen sowie mit Resultaten der Entwicklungen im I. Teil dieser Arbeit, setzen wir angenähert:

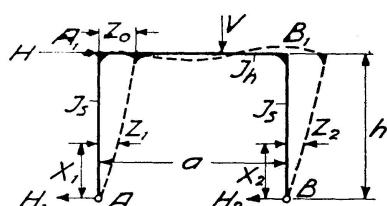


Fig. 5

$$\Gamma = \frac{V_k}{V_i - V}, \quad (41)$$

wo  $V_k$  die kritische Belastung des Rahmens ohne Rücksicht auf verstifende Wirkung der Fahrbahntafel bedeutet.

Im folgenden berechnen wir  $V_k$  für einen symmetrischen Zweigelenkrahmen nach Fig. 5 mit einer auf beide Stützen gleich verteilten Vertikallastung  $V$ .

Nehmen wir den Koordinatenursprung in  $A$  an, so wird das Biegemoment in der Stütze  $AA_1$

$$M_1 = H_1 x_1 + \left( \frac{V}{2} - \frac{Hh}{a} \right) z_1 = -J_s E \frac{d^2 z_1}{dx_1^2} \quad (42)$$

und in der Stütze  $BB_1$

$$M_2 = H_2 x_2 + \left( \frac{V}{2} + \frac{Hh}{a} \right) z_2 = -J_s E \frac{d^2 z_2}{dx_2^2}.$$

Um die Berechnung zu vereinfachen, nehmen wir an, daß die Normalkräfte in den beiden Stützen gleich seien. Wir vernachlässigen somit das Glied  $\frac{Hh}{a}$  in den Momentengleichungen. Aus Symmetriegründen werden:  $x_1 = x_2 = x$ ;  $z_1 = z_2 = z$ ;  $H_1 = H_2 = H/2$ . Die Gleichungen (42) und (43) können in eine Gleichung zusammengefaßt werden:

$$\frac{2J_s E}{V} \cdot \frac{d^2 z}{dx^2} + z = -\frac{H}{V} x. \quad (44)$$

Setzen wir  $k^2 = 2J_s E/V$  und  $\xi = x/k$ , so wird

$$z = A \sin \xi + B \cos \xi - \frac{H}{V} x. \quad (46)$$

Die Integrationskonstanten  $A$  und  $B$  werden aus den Randbedingungen bestimmt:

$$x = 0, z = 0, \text{ somit } B = 0.$$

In  $A_1$  und  $B_1$  ( $x = h$ ) fällt die Tangente  $dz/dx$  der elastischen Linie  $AA_1$  mit der Tangente der elastischen Linie  $A_1B_1$  zusammen, somit

$$\frac{dz}{dx} = \frac{A}{k} \cos \xi - \frac{H}{V} = \frac{a}{6J_0 E} \left( \frac{H}{2} h + z_0 \frac{V}{2} \right). \quad (47)$$

Hierbei ist der Einfluß der Normalkraft im Querriegel nicht berücksichtigt, da er für unser Problem in der Regel ohne Bedeutung ist.

Wir setzen:

$$m = \frac{h}{k} \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{a J_s}{6 h J_0} \quad (48)$$

und erhalten aus Gl. (46)

$$z_0 = A \sin m - \frac{H}{V} h$$

$$\frac{H}{2} h + z_0 \frac{V}{2} = \frac{V}{2} A \sin m.$$

Aus Gl. (47) folgt dann

$$\frac{A}{k} \cos m - \frac{H}{V} = \frac{a}{6J_0 E} \frac{V}{2} A \sin m$$

oder

$$\frac{A}{k} (\cos m - \alpha m \sin m) = \frac{H}{V}.$$

Die horizontale Verschiebung  $z_0$  in  $A_1$  kann jetzt gesetzt werden:

$$z_0 = \frac{Hh^3}{2J_s E} \cdot \frac{1}{m^3} \left\{ \frac{\operatorname{tg} m}{1 - \alpha m \operatorname{tg} m} - m \right\}. \quad (49)$$

Die kritische Vertikalbelastung für den Zweigelenkrahmen erhalten wir aus der Bedingung:

$$1 - \alpha m \operatorname{tg} m = 0. \quad (50)$$

Diese Gleichung wird für Werte von  $m$ , welche zwischen 0 und  $\pi/2$  liegen, befriedigt. Der obere Wert von  $m$  wird erreicht, wenn  $\alpha$  sich 0 nähert, d. h. für einen sehr steifen Querriegel.

Aus Gl. (45) und (48) folgt

$$\frac{V_k}{2} = m^2 \frac{J_s E}{h^2}.$$

Ist  $(\mu h)$  die freie Knicklänge eines Druckstabes mit gleicher kritischer Belastung wie der Zweigelenkrahmen, so wird

$$m^2 \frac{J_s E}{h^2} = \frac{\pi^2 J_s E}{(\mu h)^2} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{\pi}{m}. \quad (51)$$

In Tafel II ist  $\mu$  als Funktion von  $\alpha$  aus Gl. (50) und (51) berechnet.

T a f e l II.

$\alpha$	$\mu$	$\alpha$	$\mu$
0	2,000	0,5	2,920
0,1	2,198	0,6	3,077
0,2	2,391	0,7	3,229
0,3	2,575	0,8	3,374
0,4	2,751	0,9	3,514
0,5	2,920	1,0	3,653

Wie bekannt, ist die Ausbiegung eines Zweigelenkrahmens, welcher nur durch eine Horizontalkraft  $H = 1$  (angebracht in der Schweraxe des Querriegels) belastet ist:

$$\delta = \frac{h^3}{6J_s E} (1 + 3\alpha). \quad (52)$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Gl. (49) ein, so wird

$$z_0 = \delta H \frac{3}{1 + 3\alpha} \frac{1}{m^3} \left( \frac{\operatorname{tg} m}{1 - \alpha m \operatorname{tg} m} - m \right).$$

Nach Gl. (40) folgt dann

$$F = \frac{3}{1 + 3\alpha} \frac{1}{m^3} \left( \frac{\operatorname{tg} m}{1 - \alpha m \operatorname{tg} m} - m \right). \quad (53)$$

Durch analoge Reihenentwicklungen wie im I. Teil dieser Arbeit erhalten wir einen Näherungswert

$$\Gamma = \frac{V_k}{V_k - V} \quad (41)$$

Aus Tafel III geht die gute Übereinstimmung der Näherungsformel (41) mit der genauen Gl. (53) hervor. Die Tafel ist berechnet für  $V/V_k = 0,5$ .

T a f e l III.

$\alpha$	$\Gamma$ nach Gl. (53)	$\Gamma$ nach Gl. (41)
0	1,987	2,000
0,5	1,996	2,000
1	1,996	2,000

Ist das Trägheitsmoment der Stützen veränderlich  $= J_x$ , so erhält man eine gute Näherung für  $V_k$  und  $\Gamma$ , wenn ein konstantes Trägheitsmoment  $J_s$ , definiert durch

$$\frac{1}{J_s} = \frac{3}{h^3} \int_A^{A_1} x^2 \frac{dx}{J_x}$$

in die Berechnung eingesetzt wird. Genaue Werte für  $V_k$  und  $\Gamma$  können mit Hilfe der Theorie der Knickung von Stäben mit veränderlichem Trägheitsmoment erhalten werden.

## 2. Durchgehende Balkenbrücke mit zwei Feldern und zwei festen Endauflagern.

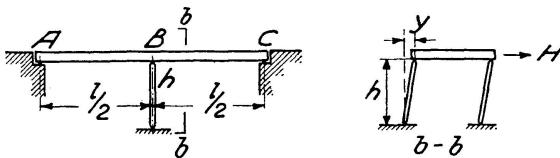


Fig. 6

Eine horizontale Belastung der Brücke erzeugt in der Mittelstütze eine Ausbiegung  $y$ . Mit gleichen Bezeichnungen wie im I. Teil, 1. Abschnitt wird

$$y = y_0 - y_1 H.$$

Da die Ausbiegung  $y$  der Brücke gleich ist der Ausbiegung  $z_0$  des Rahmens, so folgt aus Gl. (40) und (53)

$$\delta H \Gamma = y = y_0 - y_1 H$$

oder

$$H = \frac{y_0}{y_1 + \delta \Gamma} = \frac{y_0}{y_1} \frac{1}{\left(1 + \frac{\delta \Gamma}{y_1}\right)} = \frac{5pl}{8} \frac{1}{\left(1 + \frac{\delta \Gamma}{y_1}\right)}. \quad (54)$$

Der kritische Wert des Auflagerdruckes  $V$  wird erreicht, wenn der Nenner der Gl. (54) Null wird:

$$1 + \frac{\delta}{y_1} \Gamma = 0. \quad (55)$$

Für den Zweigelenkrahmen wird (siehe Gl. (3) und (52))

$$\frac{\delta}{y_1} = 8(1 + 3\alpha) \frac{J}{J_s} \left(\frac{h}{l}\right)^3 \quad (56)$$

und mit Hilfe von Gl. (53)

$$1 + 24 \left( \frac{h}{l} \right)^3 \frac{J}{J_s} \cdot \frac{1}{m^3} \left( \frac{\operatorname{tg} m}{1 - \alpha m \operatorname{tg} m} - m \right) = 0. \quad (57)$$

Dies ist die verallgemeinerte Gleichung (50) für die kritische Belastung eines Zweigelenkrahmens mit elastischer Querstützung. Der höchste Wert von  $m$ , der diese Gleichung befriedigt, ist  $m = 4,49$ , er entspricht  $\alpha = 0$  und  $\delta/y_1 = \infty$ , d. h. einem sehr steifen Querriegel und sehr steifer Fahrbahntafel.

Einen einfachen Ausdruck für die kritische Belastung erhält man aus der angenäherten Gl. (41) und (55)

$$V_{kr} = V_k \left( 1 + \frac{\delta}{y_1} \right). \quad (58)$$

Im 1. Abschnitte haben wir mit  $V_k$  die kritische Belastung des Rahmens ohne Querstützung nach Gl. (50) bezeichnet. Wir bezeichnen hier mit  $V_{kr}$  die kritische Belastung des Rahmens mit Querstützung nach Gl. (57) oder (58).

Die Gl. (58) gilt, wie leicht einzusehen ist, nicht für große Werte von  $\delta/y_1$ .

Die Bedeutung der Gl. (54) für die Horizontalbelastung des Rahmens wird verdeutlicht, wenn man diese Gleichung mit Hilfe von Gl. (41) und (58) umwandelt zu:

$$1 + \frac{\delta}{y_1} \Gamma = 1 + \frac{\delta}{y_1} \frac{V_k}{V_k - V} = 1 + \frac{V_{kr} - V_k}{V_k - V} = \frac{V_{kr} - V}{V_k - V}$$

und 
$$H = \frac{5pl}{8} \frac{V_k - V}{V_{kr} - V}. \quad (54a)$$

Ist die Vertikalbelastung des Rahmens kleiner als  $V_k$ , so ist  $H$  positiv, d. h. der Rahmen übernimmt einen Teil der Horizontalbelastung der Brücke und entlastet die Fahrbahntafel.

Ist die Vertikalbelastung des Rahmens gleich  $V_k$ , so wird  $H = 0$ , d. h. die ganze äußere Horizontalbelastung wird durch die Fahrbahntafel auf die Endauflager  $A$  und  $C$  übertragen.

Ist dagegen die Vertikalbelastung des Rahmens größer als  $V_k$ , so wird  $H$  negativ, d. h. der Rahmen verhält sich wie eine Pendelstütze und vergrößert die Horizontalbelastung der Brücke.

### 3. Durchgehende Balkenbrücke auf $\infty$ vielen Zwischenstützen und zwei festen Endauflagern.

Für eine Balkenbrücke mit größerer Anzahl Stützen wenden wir hier die gleiche Methode wie im I. Teil, 4. Abschnitt an.

In jedem Punkt der Fahrbahntafel muß die Ausbiegung  $y$  der Brücke gleich sein der Ausbiegung der Rahmen  $z_0$ , somit ist

$$y = z_0 = \delta \cdot H \cdot \Gamma.$$

Bezeichnen wir mit  $b$  den konstanten Abstand zwischen den Rahmen in der Längsrichtung der Brücke, so wird die totale Horizontalbelastung per Meter Brücke

$$p - \frac{y}{b \delta \Gamma}$$

( $p$  = äußere gleichmäßig verteilte Horizontalbelastung).

Die Gleichung der elastischen Linie wird (siehe Gl. (23))

$$JE \frac{d^4 y}{dx^4} = p - \frac{y}{b \delta \Gamma}$$

oder

$$b \delta \Gamma JE \frac{d^4 y}{dx^4} + y = b \delta \Gamma p. \quad (59)$$

Solange die Vertikalbelastung des Rahmens kleiner ist als  $V_k$  definiert durch die Gl. (50), verbleibt  $\Gamma$  positiv. In diesem Falle ist die Gl. (59) nichts anderes als der bekannte Ausdruck für die elastische Linie eines Balkens auf elastischer Unterlage.

Die spezielle Lösung dieser Gleichung für die gleichen Randbedingungen wie im I. Teil, d. h. für einen Balken mit frei aufgelagerten Enden, ist bekannt (siehe TIMOSHENKO, Theorie der Elastizität). Wir begnügen uns hier mit der Angabe der Resultate dieser Berechnung.

Wir nehmen den Koordinatenursprung in der Brückenmitte an und setzen:

$$s^4 = 4 b \delta \Gamma JE; \quad \varphi = \frac{x}{s}; \quad \lambda = \frac{l}{2s}$$

$$\psi_1 = \frac{2 \sinh \lambda \cdot \sin \lambda}{\cosh 2\lambda + \cos 2\lambda}; \quad \psi_2 = \frac{2 \cosh \lambda \cdot \cos \lambda}{\cosh 2\lambda + \cos 2\lambda}.$$

Die Horizontalbelastung eines Rahmens wird dann

$$H = \frac{y}{\delta \Gamma} = b \cdot p \{1 - \psi_1 \sinh \varphi \cdot \sin \varphi - \psi_2 \cosh \varphi \cdot \cos \varphi\}, \quad (60)$$

das Biegunsmoment

$$M = \frac{pl^2}{8} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \{\psi_1 \cosh \varphi \cos \varphi - \psi_2 \sinh \varphi \cdot \sin \varphi\} \quad (61)$$

und die Scherkraft

$$T = \frac{pl}{2} \frac{1}{2\lambda} \{-(\psi_1 + \psi_2) \cosh \varphi \sin \varphi + (\psi_1 - \psi_2) \sinh \varphi \cos \varphi\}. \quad (62)$$

Ist die Vertikalbelastung der Rahmen  $V = V_k$ , so wird  $\Gamma = \infty$  und  $H = 0$ , d. h. die ganze Horizontalbelastung der Brücke wird von der Fahrbahntafel aufgenommen.

Ist die Vertikalbelastung der Rahmen größer als  $V_k$ , so wird  $\Gamma$  negativ. Setzen wir

$$-r^4 = b \delta \Gamma JE, \quad (63)$$

so verwandelt sich die Gl. (59) in

$$r^4 \frac{d^4 y}{dx^4} - y = -b \delta \Gamma p$$

d. h. in eine Gleichung von gleichem Aufbau wie Gl. (23).

Wir setzen hier

$$\eta = \frac{x}{r} \quad \text{und} \quad \varrho = \frac{l}{2r} \quad (64)$$

und erhalten

$$H = \frac{y}{\delta \Gamma} = p \cdot b \left\{ 1 - \frac{\cosh \eta}{\cosh \varrho} - \frac{\cos \eta}{\cos \varrho} \right\}. \quad (65)$$

Die kritische Belastung wird aus der Bedingung  $\cos \varrho = 0$  bestimmt. Aus den Gl. (63) und (64) folgt

$$\varrho^4 = \frac{\pi^4}{16} = \frac{l^4}{16r^4} = - \frac{l^4}{16b\delta\Gamma JE}$$

und

$$1 + \frac{\pi^4 b \delta \Gamma JE}{l^4} = 0.$$

Für den Zweigelenkrahmen wird mit Hilfe von Gl. (52) und (53) diese Knickbedingung

$$1 + \frac{\pi^4}{2} \left( \frac{b}{l} \right) \left( \frac{h}{l} \right)^3 \frac{J}{J_s} \frac{1}{m^3} \left( \frac{\operatorname{tg} m}{1 - \alpha m \operatorname{tg} m} - m \right). \quad (66)$$

Diese Gleichung, welche für eine Brücke mit  $\infty$  vielen Stützen gilt, gibt gute Näherungswerte sogar für eine Brücke mit zwei Feldern. Setzt man nämlich  $l = 2b$ , so wird

$$\frac{\pi^4}{2} \left( \frac{b}{l} \right) = \frac{\pi^4}{8} = 24,35.$$

Der entsprechende Koeffizient in der Gl. (57), die für eine Brücke mit zwei Feldern gilt, ist 24, der Unterschied ist somit unbedeutend.

Auf die gleiche Weise wie im vorigen Abschnitt bestimmen wir einen angenäherten Ausdruck für  $V_{kr}$

$$V_{kr} = V_k \left( 1 + \frac{\pi^4 JE b}{l^4} \delta \right). \quad (67)$$

Für diese Gleichung gilt die gleiche Einschränkung wie für Gl. (58).

Wir können jetzt ähnlich wie im vorigen Abschnitt einfache angenäherte Ausdrücke für die Horizontalbelastung der Rahmen, das Biegemoment in Brückenmitte und die Auflagerreaktion bilden.

Gl. (60) gibt

$$H = p \cdot b \frac{V_k - V}{V_{kr} - V}, \quad (68)$$

Gl. (61) gibt für das Biegemoment in Brückenmitte

$$M = \frac{pl^2}{8} \frac{V_{kr} - V_k}{V_{kr} - V} \quad (69)$$

und Gl. (62) gibt für die Auflagerreaktion

$$A = \frac{pl}{2} \frac{V_{kr} - V_k}{V_{kr} - V}. \quad (70)$$

Diese Näherungsgleichungen gelten sowohl für  $V < V_k$  als auch für  $V > V_k$ .

Die Wirkungsweise der Stützen ist hier im Prinzip die gleiche wie im Abschnitt 1 bei einer Brücke mit nur einer Mittelstütze.

### **Zusammenfassung.**

Bei kontinuierlichen Brücken auf Pendelstützen ergeben sich aus der Neigung der Stützen quer zur Brückenaxe bei horizontal wirkender Belastung waagrechte Zusatzbelastungen der Fahrbahntafel, die von ihrer Seitensteifigkeit und Belastung abhängig sind. Die Zusatzbeanspruchungen können formelmäßig durch die kritische Belastung, bei der die Fahrbahntafel schon allein aus vertikalen Lasten ausweicht, ausgedrückt werden.

Bei Balkenbrücken auf rahmenförmigen Stützen richtet sich das Verhalten nach der Seitensteifigkeit der Rahmen. Sehr steife Rahmen nehmen einen Teil der Horizontalbelastung auf, sehr weiche Rahmen vergrößern hingegen wie Pendelstützen diese Seitenlast.

### **Résumé.**

Dans les poutres continues sur appuis en forme de béquilles, les surcharges agissant horizontalement produisent dans le tablier des surcharges horizontales supplémentaires dues à l'inclinaison des appuis dans le sens perpendiculaire à l'axe du pont. Ces surcharges supplémentaires dépendent de la rigidité transversale et de la surcharge du tablier. Les sollicitations supplémentaires qui en résultent peuvent être exprimées en formules en partant de la surcharge critique pour laquelle le tablier se déforme sous la seule action de charges verticales.

Pour les ponts en poutres sur appuis en forme de cadres, le comportement dépend de la rigidité transversale des cadres. Les cadres très rigides prennent une partie de la surcharge horizontale alors que les cadres très peu rigides augmentent au contraire cette charge transversale, tout comme dans le cas des béquilles.

### **Summary.**

In continuous bridges on rocking supports, the inclination of the supports transversely to the bridge axis with horizontally acting loads causes horizontal additional loadings of the roadway covering, which are dependent on its lateral stiffness and the loading. The additional stresses may be expressed as formulae by the critical loading at which the roadway covering is already deflected by vertical loads alone.

In girder bridges on frame-shaped supports, the behaviour depends on the lateral stiffness of the frames. Very stiff frames take a part of the horizontal loading, but very weak frames on the other hand increase this lateral load, just like the rocking supports.