

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

**Band:** 6 (1940-1941)

**Artikel:** La stabilité de l'âme des poutres munies de raidisseurs horizontaux et sollicitées par flexion pure

**Autor:** Massonet, Ch.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-7098>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# **LA STABILITÉ DE L'ÂME DES POUTRES MUNIES DE RAIDISSEURS HORIZONTAUX ET SOLLICITÉES PAR FLEXION PURE.**

**THE STABILITY OF THE WEBS OF GIRDERS PROVIDED WITH  
HORIZONTAL STIFFENING AND SUBJECTED TO BENDING.**

**DIE STABILITÄT VON DURCH REINE BIEGUNG BEANSPRUCHTEN  
STEHBLECHEN MIT HORIZONTALER AUSSTEIFUNG.**

CH. MASSONNET, Ingénieur civil des Constructions A. I. Lg.,  
Aspirant du Fonds National Belge de la Recherche Scientifique, Liège.

## **I. Introduction.**

Le présent travail examine comment il convient de dimensionner l'âme et les raidisseurs d'une poutre à âme pleine dans sa partie médiane, de manière à rendre cette poutre à la fois stable au voilement et la plus économique possible.

Ce problème a déjà été partiellement traité dans deux études de M. E. CHWALLA (Réf. 2 et 3). Le travail actuel complète ces recherches en fournit la solution numérique du problème pour tous les cas qui peuvent se présenter en pratique.

## **II. Résumé de la théorie de la stabilité des plaques.**

En vue de simplifier le problème, on fait les deux hypothèses suivantes :

1. On considère le panneau d'âme compris entre deux entretoises consécutives du tablier du pont comme une plaque rectangulaire isolée et simplement appuyée sur son pourtour.
2. Dans la partie médiane d'une poutre, la sollicitation de flexion l'emporte de loin sur celle de cisaillement; on peut donc négliger cette dernière sans erreur sensible.

La méthode presqu'exclusivement utilisée pour résoudre les problèmes de voilement des plaques est celle de RAYLEIGH-RITZ-TIMOSHENKO. Elle peut se résumer comme suit :

Lorsque les forces extérieures agissant sur la plaque atteignent leur intensité critique provoquant le voilement, la plaque entre en équilibre indifférent, c'est à dire que sa forme plane et sa forme infiniment peu voilée sont toutes deux des formes d'équilibre.

Appelons  $E_1$  et  $E_2$  l'énergie potentielle totale de la plaque prise respectivement dans son état plan et dans son état voilé. D'après le théorème du minimum de l'énergie potentielle, on sait que l'énergie potentielle totale d'un corps élastique en équilibre est plus faible pour sa déformée réelle

que pour toutes les autres déformées imaginables. Cette propriété se traduit mathématiquement par les relations

$$\delta E_1 = 0 \quad \delta E_2 = 0.$$

On en déduit:

$$\delta(E_2 - E_1) = 0$$

ou encore:

$$\delta(\Delta E) = 0, \quad (1)$$

en posant:

$$\Delta E = E_2 - E_1. \quad (2)$$

La variation  $\Delta E$  de l'énergie totale pendant le voilement est évidemment égale à l'accroissement d'énergie potentielle interne dû au voilement ( $\Sigma V$ ) diminué du travail des forces extérieures pendant le voilement ( $\Sigma T$ ).

De sorte que l'on peut écrire:

$$\Delta E = \Sigma V - \Sigma T, \quad (3)$$

et la condition du voilement (1) s'écrit:

$$\delta(\Delta E) \equiv \delta(\Sigma V - \Sigma T) = 0. \quad (4)$$

Cette équation nous permet de calculer la charge critique de voilement.

Appliquons les considérations précédentes à une plaque rectangulaire simplement appuyée sur son pourtour et renforcée par un raidisseur horizontal de section  $S$  et de moment d'inertie  $I$  placé dans la zone comprimée de l'âme (fig. 1). Les longueurs  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont définies par la fig. 1.

Appelons:

$w$  le déplacement d'un point quelconque de la plaque, mesuré perpendiculairement au plan moyen.

$h$  l'épaisseur de la plaque.

$\sigma_0$  la tension maximum de flexion appliquée à la plaque.

$\sigma = \left(1 - \frac{2y}{b}\right) \cdot \sigma_0$  la tension courante de flexion.

$B = EI$  la rigidité flexionnelle du raidisseur.

$E$  le module d'élasticité longitudinale.

$\nu$  le coefficient de POISSON.

Posons :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}. \quad (5)$$

$D$  s'appelle la rigidité flexionnelle de la plaque.

On démontre en élasticité que l'énergie potentielle interne de flexion de la plaque a pour expression:

$$V_p = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ (w_{xx} + w_{yy})^2 - 2(1 - \nu)(w_{xx}w_{yy} - w_{xy})^2 \right\} dx dy. \quad (6)$$

On peut d'ailleurs montrer, en utilisant le théorème de GREEN, que la seconde partie de l'intégrale (6) est nulle si  $w$  s'annule sur tout le contour, de sorte que  $V_p$  se réduit à

$$V_p = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b (w_{xx} + w_{yy})^2 dx dy. \quad (7)$$

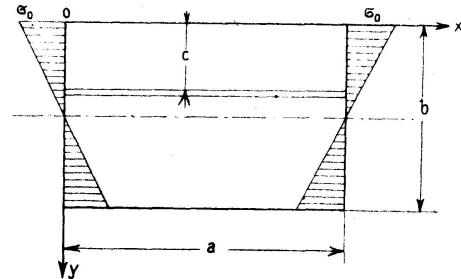


Fig. 1

L'énergie potentielle interne accumulée dans le raidisseur se compose de l'énergie de flexion :

$$V_r = \frac{B}{2} \int_0^a (w_{xx})^2 y=c dx \quad (8)$$

et de l'énergie de torsion, qui est négligeable devant la première. Le travail des forces extérieures de flexion pure agissant sur la plaque dans le plan moyen de celle-ci vaut :

$$T_p = \frac{h}{2} \int_0^a \int_0^b \sigma w_{xx}^2 dx dy = \frac{h \sigma_0}{2} \int_0^a \int_0^b \left(1 - \frac{2y}{b}\right) w_{xx}^2 dx dy. \quad (9)$$

Enfin, le travail de ces mêmes forces sur le raidisseur vaut :

$$T_r = \frac{P}{2} \int_0^a (w_x)^2 y=c dx. \quad (10)$$

$P$  représentant la force de compression appliquée au raidisseur,

or  $P = S \sigma_{y=c} = \sigma_0 S \left(1 - \frac{2c}{b}\right)$ ,

d'où :  $T_r = \frac{\sigma_0 S}{2} \left(1 - \frac{2c}{b}\right) \int_0^a (w_x)^2 y=c dx. \quad (11)$

La condition de voilement (4) se traduit donc explicitement par la relation :

$$\delta(\Delta E) = \delta(V_p + V_r - T_p - T_r) = 0. \quad (12)$$

D'après la première hypothèse énoncée plus haut, la plaque est supposée simplement appuyée sur ses quatre bords. On peut alors représenter le déplacement transversal  $w$  par la série double de FOURIER :

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b}, \quad (13)$$

car chacun des termes de cette série satisfait aux deux conditions d'appui simple sur les bords de la plaque.

En introduisant l'expression (13) de  $w$  dans la formule de la variation d'énergie totale  $\Delta E$ , on obtient une expression contenant une double infinité de coefficients arbitraires  $a_{mn}$ .

La condition de voilement (12) exige que l'on ait :

$$\frac{\partial(\Delta E)}{\partial a_{mn}} = 0 \quad (14)$$

quels que soient  $m$  et  $n$ .

Nous ne pouvons donner ici le détail des calculs et renvoyons pour des éclaircissements sur ce point à l'ouvrage de M. S. TIMOSHENKO (Réf. 1).

Tous calculs faits, on obtient la double infinité d'équations suivante<sup>1)</sup> :

$$a_{mn} (m^2 + n^2 \varrho^2)^2 + 2 \gamma m^4 \sin \frac{n \pi c}{b} \sum_{p=1}^{\infty} a_{mp} \sin \frac{p \pi c}{b} - \frac{k \varrho^2}{\pi^2} \left\{ 16 m^2 \cdot \sum_i^{*1)} a_{mi} \frac{n i}{(n^2 - i^2)^2} + 2 \pi^2 \left(1 - \frac{2c}{b}\right) \delta m^2 \sin \frac{n \pi c}{b} \sum_{p=1}^{\infty} a_{mp} \cdot \sin \frac{p \pi c}{b} \right\} = 0 \\ (m, n = 1, 2, 3, \dots), \quad (15)$$

<sup>1)</sup> L'astérisque (\*) affectant le signe  $\Sigma$  signifie que  $i$  est tel que  $(n+i)$  est toujours impair.

moyennant les notations :

$$\varrho = \frac{a}{b}, \gamma = \frac{B}{bD}, \delta = \frac{S}{bh}, \sigma_e = \frac{\pi^2 D}{b^2 h}, k = \frac{\sigma_0^{cr}}{\sigma_e}. \quad (16)$$

Les équations (15) constituent un système d'équations linéaires et homogènes par rapport aux constantes arbitraires  $a_{mn}$ . Pour qu'elles soient compatibles, il faut que le déterminant des coefficients des inconnues  $a_{mn}$  soit nul. Cette condition nous fournit la valeur de  $k$  et par conséquent la valeur de la tension critique de voilement  $\sigma_0^{cr}$ .

### III. La stabilité de la plaque munie d'un raidisseur horizontal placé au milieu de la zone comprimée.

Pour résoudre ce cas, il suffit de poser  $c = \frac{b}{4}$  dans le système d'équations (15).

Divisons les deux membres de (15) par  $m^4$  puis introduisons le coefficient :

$$\varrho' = \frac{\varrho}{m}. \quad (17)$$

Il vient :

$$a_{mn} (1 + n^2 \varrho'^2)^2 + (2\gamma - k \varrho'^2 \delta) \sin \frac{n\pi}{4} \sum_{p=1}^{\infty} a_{mp} \sin \frac{p\pi}{4} - \frac{16k\varrho'^2}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} a_{mi} \frac{ni}{(n^2 - i^2)^2} = 0 \quad (m, n = 1, 2, \dots) \quad (18)$$

On constate aisément que tous les coefficients  $a_{mn}$  intervenant dans une équation (18) ont le même indice  $m$ . Il suit de là que le système (18) peut se fractionner en  $m$  groupes d'équations indépendants, correspondant chacun à une valeur déterminée de  $m$ . Si l'on envisage en particulier l'un de ces groupes, on peut y supposer  $m$  constant. On se rend compte ainsi que la forme de voilement de la plaque se compose de  $m$  „voussures“ identiques séparées par  $(m-1)$  lignes nodales verticales équidistantes. Conservons les 4 premiers termes du développement (13) de  $w$ , qui correspondent aux coefficients  $a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}, a_{m4}$  et annulons tous les autres coefficients  $a_{mn}$ . Posons de plus :

$$R = 2\gamma - k\varrho'^2 \delta, \quad X = \frac{16k\varrho'^2}{\pi^2}. \quad (19)$$

La condition de compatibilité des 4 équations (18) qui subsistent s'écrit :

$$\begin{vmatrix} (1 + \varrho'^2)^2 + \frac{R}{2} & -\frac{2}{9}X + R\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{R}{2} & -\frac{4}{225}X \\ -\frac{2}{9}X + R\frac{\sqrt{2}}{2} & (1 + 4\varrho'^2)^2 + R & -\frac{6}{25}X + R\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{R}{2} & -\frac{6}{26}X + R\frac{\sqrt{2}}{2} & (1 + 9\varrho'^2)^2 + \frac{R}{2} & -\frac{12}{49}X \\ -\frac{4}{225}X & 0 & -\frac{12}{49}X & (1 + 16\varrho'^2)^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (20)$$

L'équation (20) est du quatrième degré en  $X$  et peut se résoudre sans difficultés. On a effectué les calculs numériques pour une série de valeurs de  $\gamma$  et de  $\varrho'$ . Les résultats sont consignés dans le tableau n° I.

Tableau N° I des valeurs  $k$ .

$\varrho'$	$\gamma = 0$			$\gamma = 2$			$\gamma = 5$		
	$\delta = 0,05$	$\delta = 0,10$	$\delta = 0,20$	$\delta = 0,05$	$\delta = 0,10$	$\delta = 0,20$	$\delta = 0,05$	$\delta = 0,10$	$\delta = 0,20$
0,2	52,15	45,45	35,98	171,5	170,1	166,2	—	—	—
0,3	31,60	27,40	21,55	133,77	127,01	109,66	—	—	—
0,4	24,36	21,01	16,46	101,11	88,97	70,11	154,8	150,6	139,5
0,5	21,37	18,35	14,33	72,79	62,83	49,25	144,0	126,8	100,6
0,6	19,62	17,35	13,49	57,79	49,51	38,45	109,8	94,8	74,3
0,8	20,20	17,30	13,35	41,58	35,59	27,52	72,3	62,2	48,35
1,0	22,28	18,93	14,46	36,35	30,98	23,83	56,7	48,5	38,2
1,2	25,55	21,52	16,37	—	—	—	48,8	42,8	32,9
1,4	29,73	24,99	18,82	—	—	—	48,35	41,0	31,25
$\varrho'$	$\gamma = 10$			$\gamma = 15$			$\gamma = 20$		
	$\delta = 0,05$	$\delta = 0,10$	$\delta = 0,20$	$\delta = 0,05$	$\delta = 0,10$	$\delta = 0,20$	$\delta = 0,05$	$\delta = 0,10$	$\delta = 0,20$
0,6	190,4	168,7	134,0	—	—	—	—	—	—
0,8	123,2	107,2	82,75	173,6	149,6	117,1	223,9	193,5	151,5
1,0	90,0	77,2	60,0	123,1	105,7	84,6	155,8	133,9	104,3
1,2	73,85	63,3	48,8	97,35	83,25	64,5	125,7	103,2	80,5
1,4	66,3	56,85	43,4	83,40	71,70	55,1	101,3	85,8	66,8
$\varrho'$	$\gamma = 25$			raidisseur rigide		raidisseur strictement rigide			
	$\delta = 0,05$	$\delta = 0,10$	$\delta = 0,20$	$\varrho'$	$k$	$\gamma$	$\delta = 0,05$	$\delta = 0,10$	$\delta = 0,20$
1,0	206,29	176,62	132,86	0,175	110,88	2	0,400	0,368	0,319
1,2	143,45	123,11	95,76	0,20	103,49	5	0,636	0,572	0,500
1,4	118,50	101,40	78,53	0,225	101,12	10	0,919	0,833	0,706
1,6	104,48	89,10	68,62	0,25	100,80	15	1,163	1,034	0,892
				0,2667	101,85	20	1,407	1,222	1,023
				0,30	111,98	25	—	1,407	1,165

La comparaison de ces valeurs avec celles obtenues dans un cas particulier par M. E. CHWALLA (Réf. 3) montre que leur erreur probable est de 1 à 2 %. Rappelons que, d'après un théorème dû à Lord RAYLEIGH, les résultats fournis par la méthode de RAYLEIGH-RITZ-TIMOSHENKO sont toujours approchés par excès.

Pour connaître la stabilité au voilement d'une plaque de dimensions données, il suffit de chercher la valeur de  $k$  en interpolant dans ce tableau, puis d'en déduire la tension critique de voilement  $\sigma_0^{cr}$  par la formule :

$$\sigma_0^{cr} = k \sigma_e = k \frac{\pi^2 D}{b^2 h} \quad (22)$$

#### IV. Relèvement maximum de la stabilité que l'on peut obtenir par l'emploi d'un raidisseur horizontal placé au milieu de la zone comprimée.

L'étude faite au paragraphe III nous a fourni la charge critique de la plaque raidie lorsque les raidisseurs fléchissent pendant le voilement. Appelons forme *A* la forme que prend la plaque voilée dans ce cas. On conçoit facilement que, si l'on utilise un raidisseur suffisamment rigide, il ne fléchira pas, et la plaque raidie présentera une forme de voilement nouvelle (forme *B*), présentant une ligne nodale ( $w = 0$ ) au droit du raidisseur.

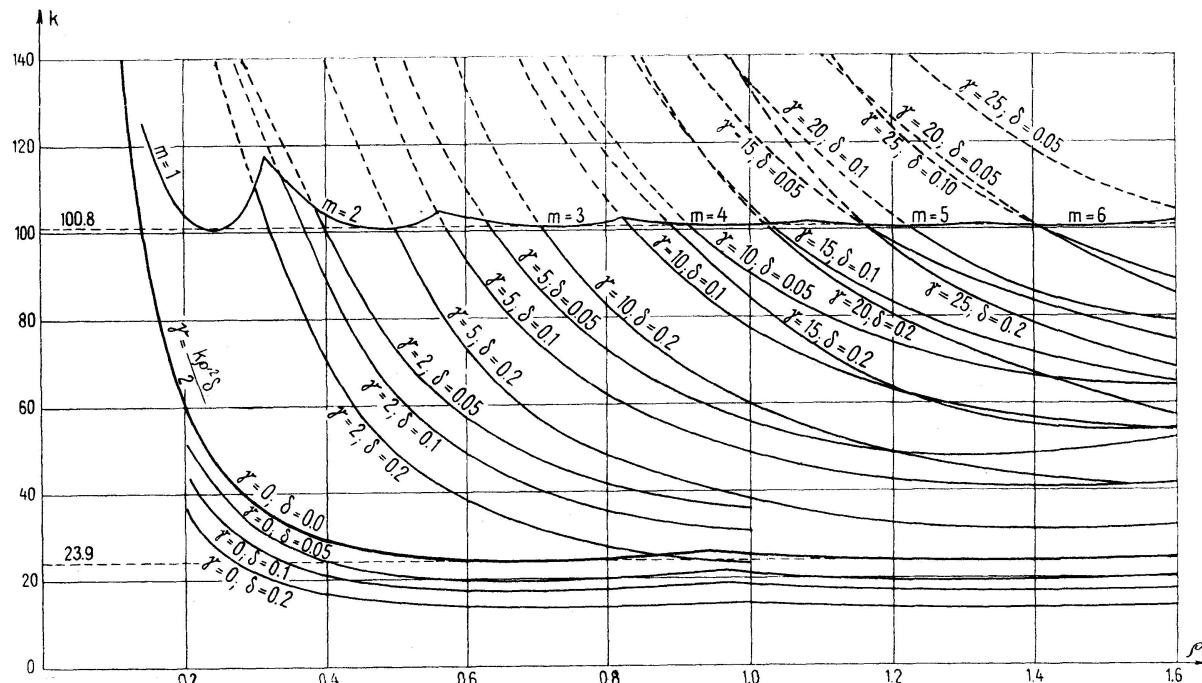


Fig. 2

Nous allons examiner à présent la stabilité de cette nouvelle forme de voilement. Le raidisseur ne se déformant pas, les termes  $V$ , et  $T$ , qui lui correspondent dans l'expression de la variation de l'énergie totale  $\Delta E$  sont nuls. Cette quantité se réduit à :

$$\Delta E = \frac{\pi^4 D b}{8 a^3} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 (1 + n^2 \rho'^2)^2 - 2 X \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{mn} a_{mi} \frac{n i}{(n^2 - i^2)^2} \right]. \quad (23)$$

Le raidisseur oblige la plaque à présenter une ligne de noeuds au niveau  $y = \frac{b}{4}$ , ce qui se traduit par la condition :

$$\sum_{p=1}^{\infty} a_{mp} \sin \frac{p \pi}{4} = 0. \quad (24)$$

Un essai préliminaire nous a montré que, pour obtenir des résultats suffisamment précis, il était nécessaire de conserver 6 termes dans le développement en série de  $w^2$ ).

<sup>2)</sup> Si l'on ne conserve que 5 termes dans le développement de  $w$ , on obtient des résultats plus élevés d'environ 10 %.

Conservons donc les 6 premiers coefficients  $a_{m_1}, a_{m_2}, \dots, a_{m_6}$ , et annulons tous les autres. Tirons  $a_{m_6}$  de la relation (24) et remplaçons-le par sa valeur dans l'expression (23) de  $\Delta E$ .

Dérivons  $\Delta E$  par rapport aux 5 coefficients restants  $a_{m_1}, a_{m_2}, \dots, a_{m_5}$ , nous obtenons l'équation :

$$\begin{aligned} & a_{m_1} (1 + \varrho'^2)^2 + \left( \frac{a_{m_1}}{\sqrt{2}} + a_{m_2} + \frac{a_{m_3}}{\sqrt{2}} - \frac{a_{m_5}}{\sqrt{2}} \right) \frac{(1 + 36 \varrho'^2)^2}{\sqrt{2}} - X \left[ \frac{2}{9} a_{m_2} + \frac{4}{225} a_{m_4} \right. \\ & \left. + \frac{6}{1225} \left( \frac{a_{m_1}}{\sqrt{2}} + a_{m_2} + \frac{a_{m_3}}{\sqrt{2}} - \frac{a_{m_5}}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{6}{1225} a_{m_1} + \frac{2}{81} a_{m_3} + \frac{30}{121} a_{m_5} \right) \right] = 0 \quad (25) \end{aligned}$$

Le déterminant de ces équations, égalé à zéro, constitue une équation du cinquième degré en  $X$ . On l'a résolue numériquement par approximations successives, pour une série de valeurs de  $\varrho'$ . Les résultats sont consignés au bas du tableau n° I.

Au moyen du tableau n° I, on peut dresser le diagramme fig. 2, en portant en abscisses les valeurs de  $\varrho$  et en ordonnées les valeurs de  $k$  correspondantes. On remarquera que la plaque peut se voiler en une infinité de formes différentes correspondant respectivement à  $m = 1, 2, 3, 4 \dots$ . La forme qui se produit réellement est évidemment celle qui correspond à la plus petite valeur de  $\sigma_0^{cr}$ . C'est pourquoi le diagramme de la fig. 2 comporte plusieurs courbes notées  $m = 1, m = 2, m = 3$ , etc....

## V. Le dimensionnement du raidisseur horizontal placé au milieu de la zone comprimée.

Pour la discussion détaillée de la raideur rationnelle à donner au raidisseur, nous renvoyons aux mémoires de M. E. CHWALLA (Réf. 2 et 3). Nous nous bornerons ici à rappeler que la rigidité relative  $\gamma$  du raidisseur doit être comprise entre deux limites bien déterminées.

### 1. Limite inférieure.

On constate directement que si l'on pose :

$$R = 2\gamma - k\varrho'^2\delta = 0 \quad (26)$$

dans les équations (18) relatives à la plaque raidie, ces équations ne contiennent plus aucun terme dépendant du raidisseur et se réduisent donc aux équations de la plaque non raidie.

En d'autres termes, si la raideur relative  $\gamma$  du raidisseur satisfait à la relation :

$$\gamma = \gamma_{cr} = \frac{k\varrho'^2\delta}{2} \quad (27)$$

où  $k$  représente le coefficient de voilement de la plaque non raidie, le raidisseur ne relève en rien la stabilité de la plaque et est „strictement inefficace“. L'explication de ce fait est très simple; en effet, si l'on remplace  $\varrho'$ ,  $\gamma$  et  $\delta$  par leurs valeurs explicites dans (27), on obtient :

$$\frac{m^2 \pi^2 EI}{a^2 S} = \frac{k \pi^2 D}{2 b^2 h} = \frac{\sigma_0^{cr}}{2} \quad (28)$$

ce qui signifie que le raidisseur atteint justement sa tension critique de flambement d'EULER au moment où la plaque atteint sa tension critique de voilement (puisque la tension au droit du raidisseur est la moitié de la tension maximum  $\sigma_0^{cr}$ ). Le raidisseur est donc totalement incapable de renforcer la plaque.

Le tableau n° II donne les valeurs de la raideur relative critique  $\gamma_{cr}$  du raidisseur en fonction de  $\varrho'$  et pour 3 valeurs différentes de  $\delta$ .

Tableau N° II des valeurs critique  $\gamma_{cr}$ .

$\varrho'$	$k_{libre}$	$\delta = 0,05$	$\delta = 0,1$	$\delta = 0,2$
0,2	60,44	0,060	0,121	0,242
0,3	37,46	0,084	0,169	0,337
0,4	29,10	0,116	0,232	0,465
0,5	25,53	0,156	0,313	0,626
0,6	24,12	0,217	0,434	0,868
0,7	24,28	0,297	0,595	1,190
0,8	24,27	0,391	0,782	1,565
0,9	25,79	0,522	1,045	2,090
1,0	25,54	0,638	1,277	2,554
1,1	24,83	0,750	1,501	3,002
1,2	24,12	0,869	1,737	3,475
1,3	24,20	1,023	2,045	4,090
1,4	24,28	1,190	2,380	4,760

## 2. Limite supérieure.

On a vu au paragraphe IV que, si une plaque possède un raidisseur relativement flexible, elle prend une forme de voilement à raidisseurs fléchis (forme A). Il s'ensuit que la charge critique correspondant à cette forme est plus faible que celle correspondant à la forme B.

Inversement, si le raidisseur est très rigide, la plaque se voile suivant la forme B dont la stabilité est par conséquent plus grande que celle de la forme A.

Par raison de continuité, il est possible de trouver un raidisseur de raideur relative  $\gamma^*$  telle que les formes de voilement A et B aient même stabilité. Nous désignerons un tel raidisseur sous le nom de „strictement rigide“. Une plaque possédant un raidisseur strictement rigide se voile indifféremment sous la forme A ou B.

Pour obtenir  $\gamma^*$ , il suffit d'exprimer que la charge critique de voilement est la même, que le raidisseur fléchisse ou non. Ou encore, il suffit de rechercher sur le diagramme, fig. 2, les points de rencontre des courbes cotées en  $\gamma$ ,  $\delta$ , avec la courbe du raidisseur rigide.

A l'aide des coordonnées de ces points, on peut construire facilement le diagramme de la fig. 3 qui donne la raideur relative  $\gamma^*$  du raidisseur strictement rigide en fonction de  $\varrho$ , pour diverses valeurs de la section relative  $\delta$ . Si une plaque est renforcée par un raidisseur „strictement rigide“ elle possède une stabilité maximum. En effet, on ne peut accroître cette stabilité en accroissant encore la raideur du raidisseur, puisque la forme de voilement ne se modifie plus. Un raidisseur „strictement rigide“ est ainsi équivalent à un raidisseur de raideur infinie. Il est donc le plus économique dans la catégorie des raidisseurs rigides. Il reste à prouver qu'il est plus économique que les raidisseurs flexibles.

Le problème se pose comme suit:

Les raidisseurs verticaux placés au droit de chaque entretoise du tablier sont supposés assez rigides pour ne pas flétrir pendant le voilement; ils divisent donc l'âme de la poutre en panneaux indépendants de longueur  $a$ . Admettons que le prix de chaque partie de la poutre soit proportionnel au poids de métal qui y entre. Prenons comme prix unitaire le prix du kilo de tôle mis en oeuvre; désignons par  $\alpha$  le prix du kilo de raidisseur, main d'oeuvre comprise.

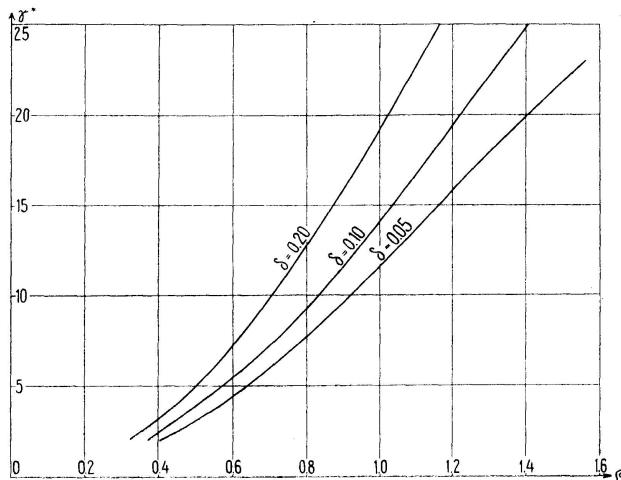


Fig. 3

Si l'on désigne par  $\Omega$  la section d'une des tables de la poutre, le prix total du panneau sera:

$$P = a(bh + 2\Omega + \alpha S). \quad (29)$$

La poutre doit satisfaire aux trois conditions suivantes:

a) La condition de résistance, représentée par l'équation d'équarrissage:

$$\sigma_0 = \frac{M\nu}{I}, \quad (30)$$

$\sigma_0$  étant le taux de travail admis.

b) La condition de stabilité, qui demande que la poutre ait un coefficient de sécurité  $s$  suffisant au voilement. Avec le règlement provisoire allemand (Réf. 5) nous prendrons  $s = 1,4$ . La condition s'écrit dès lors:

$$s\sigma_0 = \sigma_0^{cr} = k\sigma_e. \quad (31)$$

c) La condition d'économie, qui demande que le prix soit minimum; elle s'écrit:

$$\delta P = 0. \quad (32)$$

Ces 3 conditions peuvent se mettre sous une forme plus explicite. En effet, pour l'acier doux ordinaire (de 37—44 kg/mm<sup>2</sup> de résistance) on adopte généralement:

$$E = 21000 \text{ kg/mm}^2; \quad \nu = 0,3; \quad \sigma_0 = 14 \text{ kg/mm}^2. \quad (33)$$

On en déduit:

$$D = 1923 h^3 \text{ kg/mm.} \quad \sigma_e = 18980 \left(\frac{h}{b}\right)^2 \text{ kg/mm}^2. \quad (34)$$

D'autre part, le moment d'inertie de la poutre vaut:

$$I = \Omega \frac{b^2}{2} + \frac{b^3 h}{12}.$$

Si l'on néglige l'épaisseur des tables, la distance de la fibre la plus fatiguée à l'axe neutre est  $\frac{b}{2}$ . Le module de flexion vaut donc:

$$\frac{I}{v} = \Omega b + \frac{b^2 h}{6}.$$

La condition de résistance (30) s'écrit dès lors:

$$M = \sigma_0 \left( \Omega b + \frac{b^2 h}{6} \right). \quad (35)$$

La condition de stabilité (31) prend la forme:

$$s \sigma_0 = 18980 k \left( \frac{h}{b} \right)^2. \quad (36)$$

La hauteur  $b$  de l'âme étant supposée connue, on connaît donc les quantités  $a$ ,  $b$ ,  $\sigma_0$ ,  $s$ ,  $M$  et  $a$ . Les inconnues du problème sont l'épaisseur  $h$  de l'âme, la section  $\Omega$  des tables, enfin le moment d'inertie  $I$  et la section  $S$  du raidisseur. Ces 2 dernières inconnues ne sont d'ailleurs pas indépendantes; elles sont liées par une relation qui dépend du type de raidisseur choisi.

Le problème comporte donc 3 équations et 3 inconnues, c'est à dire qu'il est déterminé.

En pratique, la solution doit être obtenue par approximations successives.

Les calculs que nous avons effectués (et que nous ne pouvons développer ici) montrent que, pour tous les types courants de raidisseurs et pour toutes les valeurs de  $a$  comprises entre 1 et 2, le prix minimum est obtenu lorsqu'on adopte un raidisseur strictement rigide. Cette conclusion n'est bien entendu valable que si le voilement se produit dans le domaine élastique. Si le raidisseur est strictement rigide, le diagramme 2 montre que l'on ne commet pas une grande erreur en supposant le coefficient  $k$  constant et égal à 100,8.

En appliquant la formule (36) pour  $s = 1,4$ ;  $\sigma_0 = 14 \text{ kgs/mm}^2$ ;  $k = 100,8$ , on trouve:

$$\frac{h}{b} = 3,176 \cdot 10^{-3}. \quad (37)$$

On voit ainsi que l'épaisseur  $h$  de l'âme est déterminée dès que sa hauteur est connue.

## **VI. La plaque munie d'un raidisseur horizontal médian.**

Ce cas a été résolu par M. M. HAMPL (Réf. 4). Cet auteur ne conserve que les trois premiers termes dans le développement du déplacement  $w$ . Les résultats numériques qu'il obtient sont reproduits dans le tableau no III.

Les valeurs contenues dans ce tableau ont permis de construire le diagramme fig. 4.

Tableau N° III des valeurs  $k$  (raidisseur médian).

$\frac{\gamma}{\varrho}$	0	1	5	10	$\infty$
0,35	32,4	36,0	37,5	37,8	38,2
0,40	29,4	33,6	35,8	36,25	37,0
0,45	27,0	31,8	35,0	35,6	36,43
0,50	25,6	30,9	34,92	36,0	37,2
0,55	24,7	30,25	35,2	36,6	—
0,60	24,2	30,0	35,9	37,7	40,4
0,65	23,9	29,8	36,8	39,0	—
0,70	23,95	29,8	37,7	40,5	45,2
0,75	24,21	30,0	—	—	—
0,80	24,66	30,3	35,9	36,3	37,0
0,85	25,15	30,6	—	—	—
0,90	25,6	31,0	—	—	—
0,95	26,3	—	—	—	—
1,00	27,2	32,8	—	—	—

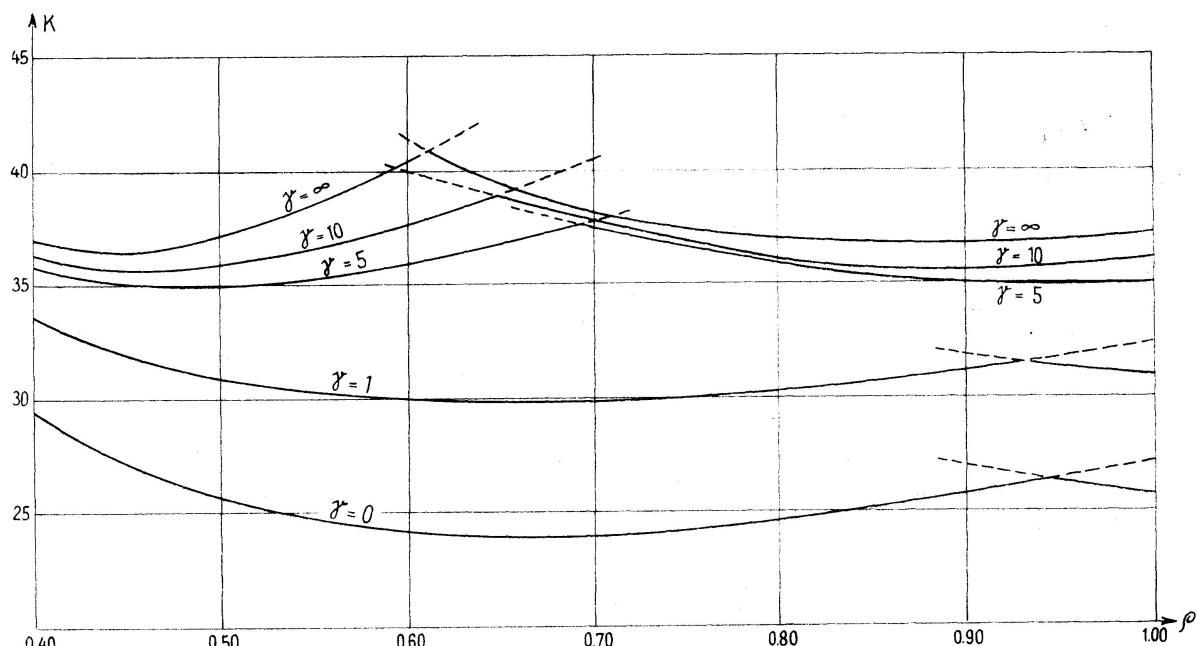


Fig. 4

## VII. Le raidissement rationnel des poutres à âme pleine soumises à la flexion pure.

Nous possédons à présent les données nécessaires pour pouvoir comparer les différents types de raidisseurs.

Tout d'abord, le diagramme fig. 2 montre que des raidisseurs verticaux sont extrêmement peu favorables pour relever la stabilité de l'âme d'une poutre soumise à la flexion pure.

En effet, examinons la courbe notée:  $\gamma = \frac{k \varrho'^2 \delta}{2}$  qui correspond à la

plaque non raidie. Il est visible par l'examen de cette courbe que, pour relever sensiblement la valeur de la charge critique, les raidisseurs verticaux devraient être suffisamment serrés pour que  $\varrho$  soit inférieur à 0,3 au moins.

Il s'ensuivrait un nombre considérable de raidisseurs et cette solution conduirait à un poids prohibitif des éléments de renforcement.

Il est probable que, dans le cas actuel, le raidisseur devient strictement rigide pour une raideur  $\gamma^*$  relativement faible. Mais, dans le choix pratique du raidisseur, on est toujours limité à un profil minimum par le danger de corrosion, de sorte que l'on ne peut bénéficier de la faible valeur de  $\gamma^*$ .

D'autre part, si l'on examine le mode d'action d'un raidisseur vertical, on constate que la portion de ce raidisseur située dans la zone comprimée de la plaque est très agissante, tandis que la portion située dans la zone tendue a un effet quasi-nul sur le relèvement de la stabilité. Il vient naturellement à l'esprit de supprimer cette moitié inactive du raidisseur et de disposer des renforcements verticaux partiels de hauteur  $\frac{b}{2}$  dans la zone comprimée. On peut donner à ces raidisseurs une forme triangulaire par raison de continuité. L'économie de métal réalisée par cette disposition est très appréciable.

Pour comparer à présent l'efficacité du raidisseur médian et de celui placé au milieu de la zone comprimée, il suffit d'examiner les diagrammes fig. n° 2 et 4.

On constate que le raidisseur médian est plus avantageux que l'autre pour les faibles valeurs de  $\gamma$ , dépassant de très peu la limite inférieure  $\gamma_{cr} = \frac{k \rho'^2 \delta}{2}$  pour laquelle le raidisseur est inefficace (cf. Réf. 2 et 3).

Mais dès que  $\gamma$  devient important, le raidisseur comprimé donne à raideur égale un relèvement beaucoup meilleur de la stabilité, malgré l'influence défavorable de la force de compression qu'il subit.

L'examen des diagrammes fig. 2 et 4 montre aussi que le raidisseur comprimé est spécialement intéressant pour les plaques hautes et étroites, tandis que le raidisseur médian convient surtout pour les plaques larges.

En résumé, il est très généralement à conseiller d'employer un raidisseur horizontal placé au milieu de la zone comprimée.

### VIII. Exemples numériques :

a) On demande de chercher la charge critique de voilement de l'âme d'une poutre renforcée par un raidisseur horizontal placé au milieu de la zone comprimée et présentant les dimensions suivantes:

âme:  $a = 3000 \text{ mm}$     $b = 2500 \text{ mm}$     $h = 10 \text{ mm}$

raidisseur: P.N. 12 coupée en deux et soudée par l'âme.

$S = 1420 \text{ mm}^2$     $I = 3280000 \text{ mm}^4$ .

Le diagramme fig. 2 donne par double interpolation:

$$k = 63,9,$$

d'où

$$\sigma_0^{cr} = 18980 k \left( \frac{h}{b} \right)^2 = 19,4 \text{ kg/mm}^2.$$

b) On demande de dimensionner rationnellement la partie médiane d'une poutre à âme pleine soumise à un moment de flexion de 1250 tonnes-mètres. L'intervalle des entretoises est de 4 mètres. Les raidisseurs sont réalisés par

des poutrelles normales coupées le long de la fibre moyenne et soudées symétriquement de part et d'autre de l'âme.

Ce problème se résout par tâtonnements. On se donne une série de valeurs pour la hauteur  $b$  de la poutre. On calcule le coefficient  $\varrho$ , puis l'épaisseur de l'âme par la formule (37), puis la section  $\Omega$  des tables par la formule (35), enfin la rigidité de la plaque  $D$  par la formule (34). Au moyen du diagramme fig. 3, on détermine la valeur de  $\gamma$  qui correspond au coefficient  $\varrho$  et à une valeur moyenne de  $\delta$ . On en déduit le moment d'inertie du raidisseur par la formule:

$$I = \frac{\gamma \cdot b \cdot D}{E}.$$

On a ainsi tous les éléments pour déterminer le prix du panneau par la formule (29). On choisit alors par interpolation la hauteur  $b$  qui correspond au prix minimum. Les opérations décrites sont résumées dans le tableau n° IV.

Tableau N° IV.

$b$ essayé mm	$\varrho$	$h$ mm	$\Omega$ $\text{mm}^2$	$D$ $\text{kg} \cdot \text{mm}$	$\gamma$ pour	
					$\delta = 0,05$	$\delta = 0,10$
3,000	1,333	10	24,800	$1923 \cdot 10^8$	18,4	23,0
3,500	1,142	11	19,100	$2560 \cdot 10^8$	14,5	17,8
4,000	1,000	13	13,600	$4225 \cdot 10^8$	11,6	14,1
4,500	0,889	14	9,320	$5280 \cdot 10^8$	9,4	11,3
Profil essayé	$\delta$	$\gamma$ exact	$I$ nécessaire $\text{mm}^4$	No. du profil adopté	$S$ $\text{mm}^2$	$P \cdot 10^{-9}$ pour $a=2$
PN 14	0,061	19,4	$5,33 \cdot 10^6$	PN 14	1830	333,04
PN 15	0,053	14,7	$6,27 \cdot 10^6$	PN 15	2040	323,12
PN 16	0,044	11,3	$9,09 \cdot 10^6$	PN 16	2280	335,04
PN 17	0,040	9,0	$10,17 \cdot 10^6$	PN 17	2520	346,72

La hauteur la plus économique est donc  $b = 3500$  mm.

### Bibliographie.

1. S. TIMOSHENKO, Elastic Stability. McGraw Hill Book Co., New-York 1936.
2. E. CHWALLA, 2ème Congrès de l'A. I. P. C., Berlin 1936. Publication Préliminaire, pp. 961 à 989.
3. E. CHWALLA, Der Stahlbau, Heft 21—22, 9. Oktober 1936.
4. M. HAMPL, Der Stahlbau, Heft 2—3, 15.—29. Januar 1937.
5. Berechnungsgrundlagen für stählerne Eisenbahnbrücken (B. E.). Deckblatt zu § 42. Zbl. Bauverw. 57 (1937), S. 287.

### Résumé.

Après un bref rappel de la méthode utilisée pour étudier la stabilité au voilement des plaques renforcées par des raidisseurs, l'auteur donne un tableau numérique qui indique le relèvement de stabilité qu'on peut obtenir par l'emploi d'un raidisseur horizontal placé au quart supérieur de l'âme.

**Summary.**

After a brief review of the method used for investigating the resistance to buckling of plates reinforced with stiffeners, the author gives a numerical table which shows the increase in stability obtainable by adopting a horizontal stiffener located in the upper quarter of the web.

**Zusammenfassung.**

Nach einer kurzen Wiedergabe der Methode zur Untersuchung der Beulstabilität von ausgesteiften Scheiben macht der Verfasser numerische Angaben, woraus man die bedeutende Erhöhung der Beulstabilität bei Anordnung einer horizontalen Steife im oberen Viertel des Stehbleches ersieht.