Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 6 (1940-1941)

Artikel: Théorie du flambement par torsion
Autor: Massonet, Ch.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-7097

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 18.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

THÉORIE DU FLAMBEMENT PAR TORSION.

THEORY OF BUCKLING BY TWISTING.

THEORIE DES KNICKENS DURCH VERDREHUNG.

CH. MASSONNET, Ingénieur civil des Constructions A. I. Lg., Aspirant du Fonds National Belge de la Recherche Scientifique, Liége.

1. Hypothèses de base et notations.

L'hypothèse fondamentale de la théorie est que les sections droites de la colonne ne subissent aucune déformation au cours du flambement. On admet donc que le treillis de la colonne est composé de barres infiniment rapprochées. Ces barres sont infiniment rigides à la flexion et maintiennent les deux membrures opposées dans leur position relative. Le treillis a de plus une résistance nulle à la torsion autour de l'axe de la colonne. Si la colonne possède des âmes pleines, ces âmes sont également supposées infiniment rigides à la flexion autour de leur axe.

La théorie développée dans les paragraphes suivants s'appliquera donc à toutes les colonnes en treillis ou à âme pleine dont la section droite possède un centre de symétrie. On trouvera à la figure 1 quelques exemples de telles sections.

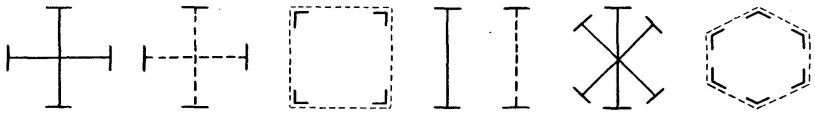

Fig. 1

Nous établirons la théorie pour une colonne à âmes en treillis; le cas de la colonne à âmes pleines sera examiné à part dans la suite.

Appelons (fig. 2):

z l'ordonnée d'une section droite courante dans la colonne.

β l'angle de torsion de la colonne, c'est-à-dire l'angle dont a tourné la section droite d'abscisse z après flambement. Cet angle est compté positivement dans le sens dextrogyre (c'est-à-dire dans le sens de rotation d'un tire-bouchon dirigé vers les z positifs).

r la demi-largeur de la colonne, ou encore le rayon de la surface cylindrique contenant les fibres moyennes des membrures déformées.

y le déplacement d'un point de la fibre moyenne, mesuré suivant la tangente horizontale au cylindre en ce point.

I_r le moment d'inertie de la membrure dans le plan tangent au cylindre.

I_t le moment d'inertie de la membrure dans le plan radial.

C la rigidité torsionnelle d'une membrure.

n le nombre de membrures.

nP la force axiale concentrée appliquée à l'extrémité supérieure de la colonne.
np la valeur unitaire des forces axiales réparties le long de la colonne.
$n\mu$ le moment de torsion transmis (à titre de réaction d'appui) par l'appui à l'extrémité supérieure de la colonne.

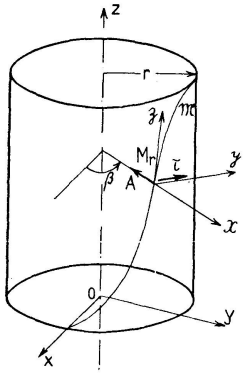

Fig. 2

Les éléments de réduction de tous les couples et forces extérieurs appliqués à la colonne au-dessus de la section courante z sont, dans chaque membrure:

Un effort axial N compté positivement comme compression.

Un moment de flexion d'axe radial M_r dont le vecteur représentatif est compté positivement vers l'intérieur du cylindre.

Un moment de flexion d'axe tangentiel M_t dont le vecteur représentatif est dirigé positivement vers les y positifs.

Un moment de torsion $\mathfrak{M}$ compté positivement dans le sens dextrogyre.

Un effort tranchant T dont la composante tangentielle au cylindre est τ.

2. Théorie du flambement par torsion selon la méthode d'Euler.

L'équation de la fibre moyenne déformée d'une membrure est:

$$\beta = f(z)$$

le déplacement tangentiel horizontal du point A, supposé infiniment petit, vaut:

$$y = \beta r \tag{1}$$

aux quantités du second ordre près.

L'équilibre statique de la portion de la colonne située au-dessus de la section z exige que l'on ait:

translation verticale: $\left(N + Tr\frac{d\beta}{dz}\right) + P + p(l - z) = 0.$

rotation autour de Oz: $\mathfrak{M} + Tr - Nr^2\frac{d\beta}{dz} - \mu - M_t \cdot r\frac{d\beta}{dz} = 0.$ (2)

L'effort tranchant T est nul au départ et dû au flambement. C'est donc un infiniment petit du premier ordre. Comme β est également infiniment petit du premier ordre, le terme $T \cdot r\, d\beta/dz$ est infiniment petit du second ordre et peut être négligé devant N dans la première équation (2). On en conclut que:

$$N + P + p(l - z) = 0. \tag{3}$$

aux deuxième ordre près.

Pour la même raison, le terme $- M_t \cdot r\, d\beta/dz$ peut être négligé dans la seconde équation (2).

La Résistance des Matériaux nous apprend de plus que:

$$M_r = EI_r r\frac{d^2\beta}{dz^2} \qquad \tau = -\frac{dM_r}{dz} \qquad \mathfrak{M} = C\frac{d\beta}{dz} \tag{4}$$

d'où:
$$\tau = -EI_r r \frac{d^3\beta}{dz^3}. \tag{5}$$

En remplaçant N et τ par leurs valeurs (9) et (11) dans la deuxième équation (2), on obtient:

$$C\frac{d\beta}{dz} - EI_r r^2 \frac{d^3\beta}{dz^3} - [P + p(l-z)]\, r^2 \frac{d\beta}{dz} - \mu = 0. \tag{6}$$

En divisant cette relation par $-r^2$ et en l'ordonnant, on obtient l'équation différentielle générale du flambement par torsion:

$$EI_r \frac{d^3\beta}{dz^3} + \left\{[P + p(l-z)] - \frac{C}{r^2}\right\} \frac{d\beta}{dz} + \mu = 0. \tag{7}$$

Il nous reste à examiner quelles modifications subit l'équation (7) lorsque la colonne possède des âmes pleines.

La colonne étant uniformément comprimée dans toute sa section, la tension unitaire de compression vaut:

$$\sigma = \frac{P}{S}.$$

Le moment de torsion $-Nr^2 d\beta/dz$ intervenant dans la seconde équation (2) doit être remplacé ici par l'expression:

$$-\frac{d\beta}{dz}\sigma \int_S r'^2\, d\omega = -\frac{d\beta}{dz}\sigma I_p,$$

où $d\omega$ représente l'élément d'aire et r' sa distance au centre de la section. Mais $\int r'^2 d\omega$ n'est autre que le moment d'inertie polaire I_p de la section autour de son centre. Le terme ci-dessus peut donc s'écrire:

$$[P + p(l-z)] \frac{d\beta}{dz} \varrho^2,$$

où ϱ est le rayon d'inertie de la section droite de la colonne. L'équation différentielle du flambement par torsion prend ici la forme:

$$EI_r \frac{d^3\beta}{dz^3} + \left\{[P + p(l-z)]\, \varrho^2 - C\right\} \frac{1}{r^2}\frac{d\beta}{dz} + \mu = 0. \tag{8}$$

Comme l'âme possède dans le cas actuel une résistance à la torsion appréciable, C doit représenter ici le nième de la rigidité torsionnelle de toute la colonne.

3. Etablissement des conditions d'extrémité.

Les extrémités de la poutre peuvent être liées au monde extérieur de trois manières différentes; elles peuvent être, soit encastrées, soit guidées, soit libres.

1. Extrémité encastrée: l'encastrement empêche toute rotation de la colonne et toute inclinaison des membrures à leur extrémité, ce qui se traduit par les conditions:

$$\beta = 0 \quad (9) \qquad\qquad \frac{d\beta}{dz} = 0. \quad (10)$$

L'encastrement peut transmettre à la colonne un moment de torsion d'axe vertical.

2. Extrémité guidée: le guide empêche toute rotation de la colonne, ce qui se traduit par:

$$\beta = 0, \tag{11}$$

et ne peut transmettre aucun couple de flexion aux membrures, d'où:

$$M_r = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2\beta}{dz^2} = 0. \tag{12}$$

Le guide peut transmettre à la colonne un moment de torsion d'axe vertical.

3. Extrémité libre: aucun moment de flexion ne peut être transmis aux membrures, d'où:

$$M_r = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2\beta}{dz^2} = 0. \tag{13}$$

De plus, le moment extérieur de torsion d'axe vertical est nécessairement nul, ce qui entraîne

$$EI_r \frac{d^3\beta}{dz^3} + \left\{[P + p(l - z)] - \frac{C}{r^2}\right\} \frac{d\beta}{dz} = 0. \tag{14}$$

Remarque importante: il découle de nos hypothèses de départ que le treillis est capable de transmettre un moment de torsion aux membrures afin de réaliser l'équilibre statique. En effet, s'il en était incapable, il en résulterait une rotation de la section de la membrure autour de son centre, ce qui est contraire à l'hypothèse fondamentale de l'indéformabilité des sections droites de la colonne.

4. Formule générale du flambement par torsion.

Si l'on compare l'équation (7) à l'équation générale du flambement des pièces chargées de bout, à savoir:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + [P + p(l - x)] \frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \tag{15}$$

on constate que ces équations deviennent identiques si l'on remplace EI par EI_r, y par $r\beta$, P par $P - C/r^2$.

Les conditions d'extrémité du § 3 coïncident de même avec celles du flambement ordinaire quand on fait les substitutions ci-dessus. On en conclut que la charge critique de flambement par torsion peut s'obtenir en remplaçant dans l'expression de la charge critique d'Euler correspondant aux mêmes conditions d'extrémité P par $P - C/r^2$ et EI par EI_r.

La charge critique d'Euler a comme expression générale:

$$P_{cr} = \frac{kEI}{l^2} \tag{16}$$

avec

$$k = \begin{cases} \pi^2 & \text{poutre biarticulée.} \\ 4\pi^2 & \text{poutre biencastrée.} \\ \pi^2/4 & \text{poutre encastrée-libre.} \\ 20{,}19 & \text{poutre encastrée-articulée.} \end{cases}$$

La charge critique de flambement par torsion vaut par conséquent:

$$P'_{cr} = \frac{k E I_r}{l^2} + \frac{C}{r^2}. \tag{17}$$

La charge critique totale de la colonne au flambement par torsion vaut nP'_{cr}, n étant le nombre de membrures dans la colonne en question.

Si la colonne est à âmes pleines, la formule (17) doit être remplaçée par la formule:

$$n P'_{cr} = n \frac{r^2}{\varrho^2} \frac{k E I_r}{l^2} + C, \tag{18}$$

C étant la rigidité torsionnelle totale de la colonne.

Le flambement par torsion ne peut effectivement se produire que lorsque la charge critique qui y correspond est inférieure à la charge critique d'EULER du flambement par flexion. La condition pour qu'il en soit ainsi est évidemment:

$$n P'_{cr} \leq P_{cr}$$

d'où l'on tire:

$$\text{soit} \quad E I_r \leq \frac{E I}{n} - \frac{C l^2}{k r^2}, \qquad \text{soit} \quad l^2 \leq \frac{k (E I - n E I_r) r^2}{n C}$$

$$\text{soit} \quad r^2 \geq \frac{n C l^2}{k (E I - n E I_r)}. \tag{19}$$

Pour les colonnes à âmes pleines, on établirait des formules analogues.

5. Effet du poids propre de la colonne.

Dès qu'on a remplaçé EI_r par EI, $r\beta$ par y, et P par $P - C/r^2$, on retombe sur l'équation (15) du flambement ordinaire par flexion. Appelons P_{cr} la charge critique d'une poutre lorsqu'elle est soumise à la force concentrée P. Soit $(pl)_{cr}$ la charge critique de la même poutre soumise uniquement aux forces uniformément réparties p. Nous avons montré ailleurs (voir Réf. 5, pages 117 à 120) que, lorsque les forces P et pl agissent simultanément sur la poutre, on a l'inégalité:

$$\frac{P}{P_{cr}} + \frac{p l}{(p l)_{cr}} \geq 1, \tag{20}$$

le premier membre étant toujours très voisin de l'unité. On déduit de là:

$$P \approx P_{cr} \left[1 - \frac{p l}{(p l)_{cr}} \right].$$

Si l'on remplace P par $P' - C/r^2$, on obtient la charge critique P' de flambement par torsion sous la forme:

$$P' = P_{cr} \left[1 - \frac{p l}{(p l)_{cr}} \right] + \frac{C}{r^2} = P'_{cr} - p l \frac{P_{cr}}{(p l)_{cr}}. \tag{21}$$

Pour pouvoir appliquer cette formule, il faut connaître les valeurs de $(pl)_{cr}$ pour tous les modes d'appui usuels. Ces valeurs sont les suivantes:

1. poutre biarticulée: $(pl)_{cr} = 18{,}65 \frac{EI}{l^2}$ (Réf. 2, p. 122) ou $(pl)_{cr} \approx \frac{2\pi^2 EI}{l^2} = 2 P_{cr}$ [1])

2. poutre biencastrée: $(pl)_{cr} \approx \frac{8\pi^2 EI}{l^2} = 2 P_{cr}$ [1])

3. poutre encastrée-libre: $(pl)_{cr} = 7{,}837 \frac{EI}{l^2}$ (Réf. 2, pp. 425 à 426; Réf. 6, pp. 115 à 122.)

4. poutre encastrée-articulée: $(pl)_{cr} = \begin{cases} 30{,}03 \frac{EI}{l^2} \\ 58{,}34 \frac{EI}{l^2} \end{cases}$

selon le sens des forces réparties. (Ref. 4, pp. 215 à 223.)

6. Méthode énergétique.

Bien que les paragraphes précédents aient complètement résolu le problème du flambement par torsion, il nous semble utile d'établir l'équation différentielle et les conditions aux limites par une méthode tout à fait différente, la méthode énergique. Nous en profiterons pour examiner de plus près la question des grandes déformations (§ 7). Pour ne pas compliquer inutilement les calculs, nous supposerons que les forces réparties p sont nulles.

Nous ne revenons pas sur les principes qui sont à la base de la méthode énergétique. On trouvera ceux-ci exposés avec tout le détail désirable dans l'excellent livre de M. S. TIMOSHENKO consacré à la stabilité élastique (Réf. 6).

---

[1]) Il est facile de montrer que l'on a approximativement

$$(pl)_{cr} = 2 P_{cr}$$

dans tous les cas où la déformée de flambement est symétrique.

En effet, utilisons la méthode énergétique et comparons $(pl)_{cr}$ à P_{cr} en adoptant en première approximation comme déformée de flambement de la poutre soumise aux charges réparties p la déformée de flambement de la poutre chargée de bout.

L'énergie potentielle

$$V = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx$$

a évidemment la même valeur dans les deux cas.

Quant au travail T des forces extérieures, il vaut si la poutre est chargée de bout:

$$T_{(P)} = P u.$$

Pour calculer sa valeur quand la poutre est chargée uniformément sur toute sa longueur, il suffit de considérer deux points de la fibre moyenne symétriques par rapport au milieu. Par raison de symétrie, leurs déplacements u' et u'' ont comme somme le raccourcissement total u de la poutre. Le travail total des forces p s'obtient en faisant la somme des travaux élémentaires $p\,(u' + u'')\,dx$ pour toute la poutre, ce qui donne:

$$T_{(pl)} = \int_0^{l/2} p\,(u' + u'')\,dx = \frac{p^{u.l.}}{2}.$$

La relation fondamentale $V = T$ conduit ainsi à:

$$P_{cr} = \frac{V}{u} \quad \text{et} \quad (pl)_{cr} = \frac{2V}{u} = 2 P_{cr}.$$

Si l'on remarque de plus que la méthode énergétique fournit toujours une valeur de la charge critique supérieure à la valeur exacte, on en conclut que l'on a en réalité:

$$(pl)_{cr} \leq 2 P_{cr}.$$

Si T représente le travail des forces extérieures pendant le flambement et V l'énergie potentielle correspondante emmagasinée dans le corps déformé, la méthode énergétique se traduit analytiquement par la relation:

$$\delta(V - T) = 0, \tag{22}$$

qui exprime simplement que la quantité $(V - T)$ est stationnaire pour toutes les positions d'équilibre infiniment voisines qui coexistent sous la charge critique.

Evaluation de V: Considérons un point d'abscisse z de la fibre moyenne déformée d'une membrure. Appelons avec M. A. E. H. Love (Réf. 2, p. 382):

k et k' les composantes de la courbure de cette fibre.

τ la torsion de cette fibre.

k, k' et τ ne sont rien d'autre que les composantes de la vitesse angulaire de rotation du trièdre principal [2]) lorsque ce trièdre se déplace avec la vitesse unitaire le long de la fibre moyenne.

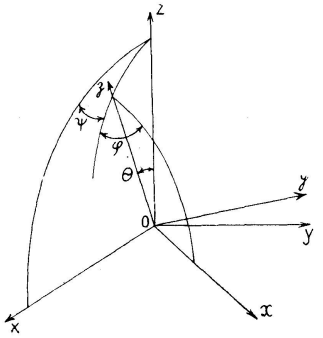

Fig. 3

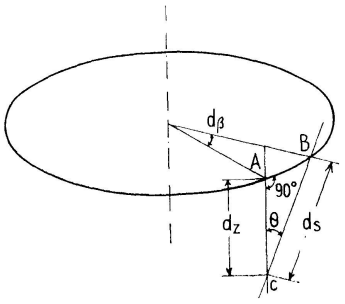

Fig. 4

On peut exprimer k, k' et τ en fonction des trois angles d'Euler Θ, φ, ψ (fig. 3) utilisés dans la théorie du mouvement d'un corps solide. On trouve (Réf. 1, p. 153; Réf. 2, p. 386):

$$\left.\begin{aligned} k &= \frac{d\Theta}{ds}\sin\varphi - \frac{d\psi}{ds}\sin\Theta\cos\varphi \\ k' &= \frac{d\Theta}{ds}\cos\varphi + \frac{d\psi}{ds}\sin\Theta\sin\varphi \\ \tau &= \frac{d\varphi}{ds} + \frac{d\psi}{ds}\cos\Theta \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

L'énergie potentielle interne de la membrure déformée a pour expression (Réf. 2, p. 395):

$$V = \frac{1}{2}\int_0^l (A k^2 + B k'^2 + C\tau^2)\, ds, \tag{24}$$

A, B et C représentant respectivement les deux rigidités flexionnelles principales et la rigidité torsionnelle de la membrure au point considéré. On a d'ailleurs (Réf. 2, p. 388) en première approximation:

[2]) Rappelons que le trièdre principal en un point d'une tige mince est le trièdre trirectangle formé par la tangente à la fibre moyenne et les axes principaux d'inertie de la section droite.

$$A = EI_r \qquad B = EI_t. \tag{25}$$

L'élément d'arc ds de la fibre moyenne déformée est donné par:

$$ds^2 = r^2 d\beta^2 + dz^2 \quad (26) \qquad \text{car} \qquad dr = 0.$$

Il s'ensuit que (fig. 4):

$$\sin \Theta = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{ds^2 - dz^2}}{ds} = r\frac{d\beta}{ds}. \tag{27}$$

D'autre part:

$$\left.\begin{aligned} \psi &= \frac{\pi}{2} - \beta \\ \varphi &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

La déformation de flambement pouvant être supposée infiniment petite, Θ est un infiniment petit du premier ordre, et l'on a, au second ordre près:

$$\Theta = \frac{r\,d\beta}{ds}. \tag{29}$$

Appliquons les formules (23) en tenant compte des égalités (28) et (29). Négligeons de plus les infiniment petits d'ordre supérieur au premier; nous avons dès lors le droit de remplacer ds par dz, $\sin\beta$ par β et $\sin\Theta$ par Θ, $\cos\beta$ et $\cos\Theta$ par l'unité; il vient ainsi

$$k = r\frac{d^2\beta}{dz^2} \qquad k' = -r\left(\frac{d\beta}{dz}\right)^2 \qquad \tau = -\frac{d\beta}{dz}. \tag{30}$$

La courbure k' est infiniment petite du second ordre; elle est donc nulle à l'approximation envisagée; d'où, par la formule (24), il vient, si on néglige le terme $B \cdot K'^2$

$$V = \frac{1}{2}\int_0^l \left\{EI_r r^2 \left(\frac{d^2\beta}{dz^2}\right)^2 + C\left(\frac{d\beta}{dz}\right)^2\right\} dz. \tag{31}$$

Le travail de la force extérieure P vaut: $T = Pu$, u étant le raccourcissement axial de la colonne dû au flambement. u est la différence entre la longueur initiale

$$L = \int_0^l ds$$

de la colonne, et sa longueur après flambement

$$l = \int_0^l dz.$$

On a donc:

$$u = L - l = \int_0^l (ds - dz) = \int_0^l \left(\sqrt{1 + \left(r\frac{d\beta}{dz}\right)^2} \cdot dz - dz\right) \approx \frac{r^2}{2}\int_0^l \left(\frac{d\beta}{dz}\right)^2 dz$$

et

$$T = \frac{Pr^2}{2}\int_0^l \left(\frac{d\beta}{dz}\right)^2 dz. \tag{32}$$

L'équation $\delta(V - T) = 0$ s'écrit ainsi sous forme développée:

$$\delta\left(\frac{1}{2}\int_0^l \left\{E I_r r^2 \left(\frac{d^2\beta}{dz^2}\right)^2 + C\left(\frac{d\beta}{dz}\right)^2 - Pr^2\left(\frac{d\beta}{dz}\right)^2\right\} dz\right) = 0. \tag{33}$$

Effectuons l'opération de variation; il vient, tous calculs faits:

$$\int_0^l \left\{E I_r r^2 \frac{d^4\beta}{dz^4} - C\frac{d^2\beta}{dz^2} + Pr^2\frac{d^2\beta}{dz^2}\right\}\delta\beta\, dz + E I_r r^2\left[\frac{d^2\beta}{dz^2}\,\delta\left(\frac{d\beta}{dz}\right) - \frac{d^3\beta}{dz^3}\,\delta\beta\right]_0^l$$

$$+ C\left[\frac{d\beta}{dz}\,\delta\beta\right]_0^l - Pr^2\left[\frac{d\beta}{dz}\,\delta\beta\right]_0^l = 0. \tag{34}$$

La variation $\delta\beta$ étant arbitraire, le coefficient de $\delta\beta$ dans l'intégrale définie doit s'annuler, ce qui donne:

$$E I_r r^2 \frac{d^4\beta}{dz^4} - C\frac{d^2\beta}{dz^2} + Pr^2\frac{d^2\beta}{dz^2} = 0. \tag{35}$$

De plus, les termes tout intégrés doivent s'annuler en vertu des conditions d'extrémité. Examinons celles-ci successivement:

1. Extrémité encastrée: l'encastrement impose $d\beta/dz = 0$, donc $\delta(d\beta/dz) = 0$ et $\beta = 0$, donc $\delta\beta = 0$. Les termes intégrés s'annulent donc d'eux-mêmes.

2. Extrémité guidée: $\beta = 0$, donc $\delta\beta = 0$; mais la membrure peut tourner à son extrémité, c'est-à-dire que $\delta(d\beta/dz)$ est $\neq 0$.

Pour que le terme intégré s'annule, il faut donc nécessairement qu'on ait:

$$\frac{d^2\beta}{dz^2} = 0.$$

3. Extrémité libre: β et $\frac{d\beta}{dz}$ sont arbitraires, donc $\delta\beta$ et $\delta\left(\frac{d\beta}{dz}\right)$ sont différents de zéro. Les termes intégrés ne s'annulent que si:

$$E I_r \frac{d^3\beta}{dz^3} + \left(P - \frac{C}{r^2}\right)\frac{d\beta}{dz} = 0.$$

On retrouve ainsi tous les résultats établis précédemment dans les §§ 2 et 3.

7. Etude des grandes déformations.

L'étude du phénomène de flambement par torsion quand les déformations ne sont pas infiniment petites, s'effectue le plus aisément en adoptant comme variable l'angle Θ que la tangente à la fibre moyenne fait avec les génératrices du cylindre. Les angles d'Euler Θ, φ, ψ, valent dans le cas actuel:

$$\Theta = \Theta \qquad \psi = \frac{\pi}{2} - \beta \qquad \varphi = \frac{\pi}{2} \tag{36}$$

avec

$$\beta = \frac{1}{r}\int_0^l \sin\Theta\, ds, \quad \text{d'où} \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\sin\Theta}{r}. \tag{37}$$

On en déduit, par les formules (23),

$$\left.\begin{aligned} k &= \frac{d\Theta}{ds} \\ k' &= -\frac{d\beta}{ds}\sin\Theta = -\frac{\sin^2\Theta}{r} \\ \tau &= -\frac{d\beta}{ds}\cos\Theta = -\frac{\sin\Theta\cos\Theta}{r} = -\frac{\sin 2\Theta}{r}. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

L'énergie potentielle interne a donc pour expression exacte:

$$V = \frac{1}{2}\int_0^l \left[A\left(\frac{d\Theta}{ds}\right)^2 + B\frac{\sin^4\Theta}{r^2} + C\frac{\sin^2 2\Theta}{4r^2}\right] ds. \tag{39}$$

D'autre part, le travail de la force extérieure P vaut:

$$T = P\left[\int_0^l ds - \int_0^l \cos\Theta\, ds\right] = P\int_0^l (1-\cos\Theta)\, ds. \tag{40}$$

L'équation fondamentale de la méthode énergétique s'écrit dès lors:

$$\delta(V-T) = \delta\left\{\frac{1}{2}\int_0^l \left[A\left(\frac{d\Theta}{ds}\right)^2 + B\frac{\sin^4\Theta}{r^2} + \frac{C\sin^2 2\Theta}{4r^2} - 2P(1-\cos\Theta)\right] ds\right\} = 0. \tag{41}$$

Effectuons la variation de cette intégrale; il vient, tous calculs faits:

$$\int_0^l \left\{-A\frac{d^2\Theta}{ds^2} + 2\frac{B}{r^2}\sin^3\Theta\cos\Theta + \frac{C\sin 4\Theta}{4r^2} - P\sin\Theta\right\}\delta\Theta\, ds + \left[2A\frac{d\Theta}{ds}\delta\Theta\right]_0^l = 0. \tag{42}$$

Si l'on peut considérer la variation $\delta\Theta$ comme arbitraire, le coefficient de $\delta\Theta$ dans l'intégrale définie (42) doit s'annuler, ce qui donne l'équation différentielle:

$$A\frac{d^2\Theta}{ds^2} - 2\frac{B}{r^2}\sin^3\Theta\cos\Theta - \frac{C\sin 4\Theta}{4r^2} + P\sin\Theta = 0. \tag{43}$$

Cette équation n'est exacte que dans le cas de la colonne encastrée-libre. En effet, dans tous les autres modes de fixation des extrémités, les sections terminales ne peuvent tourner l'une par rapport à l'autre autour de l'axe de la colonne, ce qui se traduit par la condition

$$\Delta\beta = \beta_l - \beta_0 = \int_0^l d\beta = \frac{1}{r}\int_0^l \sin\Theta\, ds = 0. \tag{44}$$

Il nous faut donc rechercher la fonction $\Theta = \Theta(s)$ qui rend minimum la quantité $(V - T)$ sous la condition que l'intégrale $\Delta\beta$ ait une valeur constante (ici 0). On sait par le calcul des variations que cela revient à rechercher la fonction $\Theta(s)$ qui rend minimum l'expression

$$V - T - \lambda\Delta\beta$$

où λ est un paramètre arbitraire.

Si l'on effectue l'opération:

$$\delta(V - T - \lambda\Delta\beta) = 0,$$

on trouve aisément l'équation différentielle:

$$A\frac{d^2\Theta}{ds^2} - 2\frac{B}{r^2}\sin^3\Theta\cos\Theta - \frac{C\sin 4\Theta}{4r^2} + P\sin\Theta + \frac{\lambda}{r}\cos\Theta = 0. \tag{45}$$

Si la colonne est à âmes pleines, il suffit, par analogie avec ce qui a été dit au § 2, de remplacer P par $P\frac{\varrho^2}{r^2}$.

Dans le cas des petites déformations, on peut poser:

$$\sin\Theta = \Theta = \frac{d\beta}{ds}, \quad \cos\Theta = 1$$

et négliger le terme en B. On retrouve ainsi l'équation (7) du § 2.

Les conditions aux limites sont les suivantes:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \text{extrémité encastrée: } \Theta = 0. \\ 2.\ \text{extrémité guidée: } \dfrac{d\Theta}{ds} = 0. \end{array}\right\} + \int_0^l \sin\Theta\, ds = 0. \tag{46}$$

$$3.\ \text{extrémité libre: } \frac{d\Theta}{ds} = 0.\lambda = 0.$$

On voit ainsi que l'on a dans chaque cas trois conditions aux limites. Elles sont nécessaires pour déterminer la valeur de λ et les 2 constantes d'intégration.

Nous avions trouvé au § 3 quatre conditions aux limites, tandis qu'actuellement nous n'en obtenons que trois. Cette différence résulte simplement du fait que l'équation différentielle actuelle est du second ordre, tandis que l'équation (7) intervenant au § 3 était du troisième ordre.

Etudions maintenant de plus près l'équation (43) valable dans le cas de la poutre encastrée-libre. Si l'on se borne à conserver les termes en Θ, Θ^2 et Θ^3, on obtient:

$$2\frac{B}{r^2}\sin^3\Theta\cos\Theta \approx 2\frac{B}{r^2}\Theta^3; \quad \frac{C\sin 4\Theta}{4r^2} \approx \frac{C}{r^2}\left(\Theta - \frac{8\Theta^3}{3}\right); \quad P\sin\Theta \approx P\left(\Theta - \frac{\Theta^3}{6}\right)$$

et l'équation (43) se réduit à:

$$A\frac{d^2\Theta}{ds^2} + \left(P - \frac{C}{r^2}\right)\Theta + \left(\frac{8C}{3r^2} - \frac{2B}{r^2} - \frac{P}{6}\right)\Theta^3 = 0. \tag{47}$$

Elle peut s'écrire:

$$\frac{d^2\Theta}{ds^2} + p^2\Theta + \alpha\Theta^3 = 0, \tag{48}$$

à condition de poser:

$$p^2 = \frac{1}{A}\left(P - \frac{C}{r^2}\right), \quad \alpha = \frac{1}{A}\left(\frac{8}{3}\frac{C}{r^2} - \frac{2B}{r^2} - \frac{P}{6}\right). \tag{49}$$

Sous sa forme (48), l'équation du flambement par torsion est tout à fait analogue à celles que l'on rencontre dans l'étude des vibrations des systèmes non linéaires. (Voir Réf. 7, pp. 117 à 154). Ces équations sont de la forme générale:

$$x'' + k^2 f(x) = 0.$$

Dans le cas où $f(x)$ est de la forme:

$$f(x) = ax + bx^2 + cx^3,$$

on peut obtenir la solution de l'équation (48) en se servant des fonctions elliptiques. Mais ces fonctions sont compliquées et peu favorables à une application technique.

On peut aussi utiliser des méthodes graphiques ou numériques, ou encore une méthode d'approximations successives. On trouvera à la Réf. 7, pp. 125 à 140, l'exposé détaillé de ces méthodes.

Pour notre objet, nous nous contenterons d'une solution approchée, mais commode à manier.

Tant que les déformations ne sont pas trop grandes, la fonction Θ obéit approximativement à la loi:

$$\Theta = a \sin \frac{\pi s}{2l} \tag{50}$$

trouvée dans l'hypothèse des déformations infiniment petites. Le paramètre a représente la valeur Θ_m que prend Θ à l'extrémité libre de la membrure.

Introduisons la solution (50) dans l'équation (48). Nous trouvons:

$$-\frac{\pi^2 a}{4l^2} \sin \frac{\pi s}{2l} + p^2 a \sin \frac{\pi s}{2l} + \alpha a^3 \sin^3 \frac{\pi s}{2l} = 0. \tag{51}$$

Il n'est évidemment pas possible de trouver une valeur de p^2 telle que la relation (51) soit vérifiée en tout point de l'intervalle $(0,l)$. Mais nous pouvons choisir p^2 de manière que l'égalité (51) soit v é r i f i é e e n m o y e n n e, c'est-à-dire de manière que l'intégrale du premier membre de (51), étendue à toute la longueur de la colonne, soit nulle. p^2 doit ainsi satisfaire à la condition:

$$-\frac{\pi^2 a}{4l^2} \int_0^l \sin \frac{\pi s}{2l} ds + p^2 a \int_0^l \sin \frac{\pi s}{2l} ds + \alpha a^3 \int_0^l \sin^3 \frac{\pi s}{2l} ds = 0. \tag{52}$$

Si l'on remarque que:

$$\sin^3 \frac{\pi s}{2l} = \frac{3}{4} \sin \frac{\pi s}{2l} - \frac{1}{4} \sin \frac{3\pi s}{2l},$$

on obtient aisément, en résolvant les intégrales,

$$\frac{2l}{\pi}\left(-\frac{\pi^2 a}{4l^2} + p^2 a\right) + \alpha a^3 \left(\frac{3}{4}\frac{2l}{\pi} - \frac{1}{4}\frac{2l}{3\pi}\right) = 0$$

ou, après simplifications,

$$-\frac{\pi^2}{4l^2} + p^2 + \frac{2}{3}\alpha a^2 = 0.$$

En remplaçant p^2 et α par leurs valeurs (49), il vient:

$$-\frac{\pi^2}{4l^2} + \frac{1}{A}\left(P - \frac{C}{r^2}\right) + \frac{2}{3}\frac{a^2}{A}\left(\frac{8}{3}\frac{C}{r^2} - \frac{2B}{r^2} - \frac{P}{6}\right) = 0,$$

d'où:

$$\frac{P}{A}\left(1 - \frac{a^2}{9}\right) = \frac{\pi^2}{4l^2} + \frac{1}{Ar^2}\left(C - \frac{16a^2C}{9} + \frac{4}{3}a^2B\right).$$

En remplaçant A et B par leurs valeurs (25), on obtient finalement:

$$P = \frac{1}{1 - \frac{a^2}{9}} \left\{ \left(\frac{\pi^2 E I_r}{4 l^2} + \frac{C}{r^2} \right) - \frac{a^2}{E I_r r^2} \left(\frac{16}{9} C - \frac{4 E I_t}{3} \right) \right\}. \tag{53}$$

Si la colonne est à âmes pleines, il suffit de multiplier le second membre de (53) par le facteur $\frac{r^2}{\varrho^2}$.

Pour vérifier la précision de la solution approchée (53), appliquons-la au cas du flambement ordinaire par flexion. Il suffit pour cela d'y faire $B = C = 0$. On obtient alors:

$$P = \frac{1}{1 - \frac{a^2}{9}} \frac{\pi^2 E I}{4 l^2} = \frac{P_{cr}}{1 - \frac{a^2}{9}}. \tag{54}$$

La relation exacte qui lie P à $a = \Theta_m$ peut s'obtenir par l'emploi des fonctions elliptiques (voir p. ex. Réf. 6, pp. 69 à 75).

Le tableau ci-dessous fournit à la fois les résultats numériques exacts et les résultats approchés fournis par la formule (54).

a en degrés	0°	20°	40°	60°
a en radians	0	0,3491	0,6981	1,047
$a^2/9$	0	0,01354	0,05415	0,1218
$P/P_{cr} = 1/(1 - a^2/9)$	1	1,014	1,057	1,139
P/P_{cr} exact	1	1,015	1,063	1,152
y/l	0	0,221	0,426	0,583
(y/l) exact	0	0,220	0,422	0,593

Ce tableau fournit également pour chaque valeur de a la valeur exacte du déplacement horizontal y de l'extrémité supérieure de la poutre.

La valeur approchée de ce déplacement se calcule aisément. On a:

$$\int_0^l \sin \Theta \, ds \approx \int_0^l \left(\Theta - \frac{\Theta^3}{6} \right) ds = \int_0^l \left(a \sin \frac{\pi s}{2 l} - \frac{a^3}{6} \sin^3 \frac{\pi s}{2 l} \right) ds,$$

ce qui donne, après calcul de l'intégrale:

$$\frac{y}{l} \approx \frac{2a}{\pi} \left(1 - \frac{a^3}{9} \right).$$

Cette formule a servi à calculer l'avant-dernière ligne du tableau ci-dessus.

8. Application numérique. (empruntée à la Réf. 3)

Soit à calculer la charge critique de flambement par torsion d'une colonne constituée par deux poutres en double té de dimensions et caractéristiques ci-dessous:

Ame: 1000 × 10 mm, soit 100 cm²
2 semelles: 150 × 15 mm, soit 45 cm² } 145 cm².
Section totale: 290 cm².
Poids par mètre courant: 230 kgs.
Longueur: 27 mètres.

Caractéristiques élastiques de l'acier:

$$E = 21\,500 \text{ kgs/mm}^2;$$
$$G = 8\,500 \text{ kgs/mm}^2.$$

Le moment d'inertie d'une semelle dans son plan vaut:

$$I_r = \frac{1{,}5 \cdot 15^3}{12} = 421{,}9 \text{ cm}^4.$$

La rigidité à la torsion de la colonne vaut, d'après M. S. TIMOSHENKO (Théorie de l'élasticité, p. 278):

$$C = G \cdot 2 \frac{100 \cdot 1^3 + 2 \cdot 15 \cdot 1{,}5^3}{3} = 134{,}2 \cdot G \cdot \text{kgs} \cdot \text{cm}^2.$$

Le moment d'inertie minimum d'une poutre en double té est:

$$I_{min} = \frac{100 \cdot 1^3}{12} + \frac{2 \cdot 1{,}5 \cdot 15^3}{12} = 852 \text{ cm}^4.$$

Le moment d'inertie maximum de la même poutre vaut:

$$I_{max} = \frac{1 \cdot 100^3}{12} + 2 \cdot 22{,}5 \cdot 50^2 = 195\,833 \text{ cm}^4.$$

Le moment d'inertie de la colonne autour d'un axe central quelconque est donc:

$$I = 852 + 195\,833 = 196\,685 \text{ cm}^4$$

et son moment d'inertie polaire vaut:

$$I_p = 2 \times 196\,685 = 393\,370 \text{ cm}^4.$$

Le rayon d'inertie polaire de la section vaut donc:

$$\varrho = \sqrt{\frac{393\,370}{290}} = 36{,}8 \text{ cm}.$$

La charge critique de flambement par torsion est donnée par la formule (18):

$$P'_{cr} = n \frac{r^2}{\varrho^2} \frac{KEI_r}{l^2} + \frac{C}{\varrho^2}.$$

En remplaçant les lettres par leurs valeurs numériques, on obtient:

$$P'_{cr} = 4 \frac{50^2}{36{,}8^2} \cdot \frac{K \cdot 2\,150\,000 \cdot 421{,}9}{2700^2} + \frac{850\,000 \cdot 134{,}2}{36{,}8^2} = 918\,K + 84\,200.$$

Supposons que la colonne soit guidée à ses deux extrémités ($K = \pi^2$). On obtient:

$$P'_{cr} = 93\,250 \text{ kgs}.$$

La charge critique d'EULER de la même colonne vaut:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{9{,}87 \cdot 2\,150\,000 \cdot 196\,685}{2700^2} = 572\,000 \text{ kgs}.$$

Si la colonne est soumise en outre à son poids propre 230 kgs/m. ct, sa charge critique utile vaut d'après la formule (21),

$$P = P'_{cr} - pl \frac{P_{cr}}{(pl)_{cr}} = 93\,250 - 230 \cdot 27 \frac{\pi^2}{18{,}65} = 89\,965 \text{ kgs}.$$

9. Théorie complète du flambement par torsion en tenant compte de l'élasticité du treillis.

L'effet du poids propre ayant été élucidé au § 5, nous pourrons supposer dans l'étude actuelle $p = 0$.

La supposition fondamentale de la théorie du flambement par torsion (telle qu'elle a été développée dans les paragraphes 2 à 4), à savoir l'indéformabilité des sections droites de la colonne, n'est jamais réalisée en pratique. Le treillis est toujours flexible, et les membrures tendent à la déformer de manière à absorber elles-mêmes le travail de torsion minimum.

Comme c'est le terme de torsion qui prédomine de loin dans la formule (17) de la charge critique, la réduction de ce terme affecte très fort la valeur de cette charge.

Nous nous proposons dans le paragraphe actuel de calculer la charge critique de flambement par torsion en tenant compte de l'élasticité du treillis ou de l'âme de la colonne.

Désignons par α l'angle supplémentaire dont tourne la section droite d'une membrure autour de son centre par suite de la déformation du treillis.

Le treillis est composé généralement de barres à section rectangulaire de hauteur h et d'épaisseur b. La rigidité flexionnelle minimum d'une telle barre est:

$$B_t = E\frac{bh^3}{12},$$

et sa rigidité torsionnelle vaut:

$$C_t = G\frac{bh^3}{3}.$$

Si le treillis ne comporte que des barres horizontales, on peut le remplacer par un treillis continu équivalent ayant par unité de longueur des rigidités flexionnelle et torsionnelle:

$$b = nB_t, \qquad c = nC_t, \tag{55}$$

n étant le nombre moyen de barres de treillis par unité de longueur.

Si le treillis comporte des barres obliques, on prend comme rigidités b et c les valeurs

$$b = 2r\sum_{i=1}^{n}\frac{Bi}{l_i} \qquad c = 2r\sum_{i=1}^{n}\frac{Ci}{l_i}; \tag{56}$$

où l_i est la longueur de la $i^{\text{ème}}$ barre du treillis.

Enfin, si la colonne est à âmes pleines, on a, d'après la théorie des plaques:

$$b = \frac{Eh^3}{12(1-\eta^2)} \qquad c = \frac{Gh^3}{3}, \tag{57}$$

où η est le coefficient de Poisson ($\eta = 0{,}3$ pour l'acier normal); on remarquera que la rigidité torsionnelle de l'âme autour de son axe est égale à $2cr$.

Etudions à présent l'équilibre d'une barre élémentaire de hauteur dz du treillis continu. Cette barre est soumise à deux moments de flexion opposés mdz et $-mdz$ et à 2 moments de torsion opposés πdz et $-\pi dz$ (fig. 5). D'après les lois de la torsion, on a:

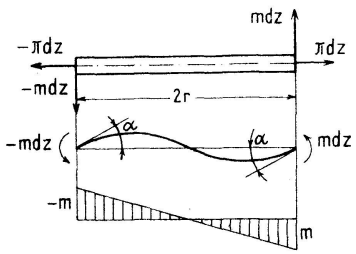

Fig. 5

$$\pi = c\,\frac{d\beta}{dz}. \tag{58}$$

D'autre part, on sait par la Résistance des Matériaux que la rotation α d'une poutre prismatique soumise à deux moments de flexion M égaux et opposés vaut

$$\alpha = \frac{Ml}{6EI}.$$

Si l'on remplace M par $m\,dz$, l par $2r$ et EI par $b\,dz$, on obtient:

$$\alpha = \frac{mr}{3b}, \qquad \text{d'où} \qquad m = \frac{3b\alpha}{r}. \tag{59}$$

L'effort tranchant dans la barre est constant et vaut, d'après la fig. 5:

$$t\,dz = \frac{m}{r}\,dz = \frac{3b\alpha}{r^2}\,dz. \tag{60}$$

Considérons l'élément de membrure compris entre deux plans horizontaux infiniment voisins z et $z + dz$. Cette partie sera, après déformation, en équilibre sous l'influence des forces suivantes:

1. La force tangentielle $t\,dz$ appliquée au centre de gravité de la section droite.
2. Le moment de flexion $m\,dz = t\,r\,dz$.
3. Le moment de torsion $\pi\,dz = c\,\dfrac{d\beta}{dz}\,dz$.
4. Sur la section inférieure z les efforts exercés par le restant inférieur de la membrure, et qui se réduisent à un effort tranchant τ, un moment fléchissant M_r, un effort axial N et un moment de torsion $\mathfrak{M}$.
5. Sur la section supérieure $z + dz$, les sollicitations analogues $\tau + d\tau$, $M_r + dM_r$, $N + dN$ *et* $\mathfrak{M} + d\mathfrak{M}$.

Les équations d'équilibre de l'élément de membrure considéré sont:

a) Equilibre de translation:

$$\frac{dN}{dz} = 0 \tag{61}$$

$$\frac{d\tau}{dz} - Nr\frac{d^2\beta}{dz^2} - t = 0 \tag{62}$$

b) Equilibre de rotation:

$$\frac{dMr}{dz} + \tau - c\frac{d\beta}{dz} = 0 \tag{63}$$

$$\frac{d\mathfrak{M}}{dz} + tr = 0\,. \tag{64}$$

La théorie de la flexion nous apprend de plus que:

$$M_r = EJ_r r\,\frac{d^2\beta}{dz^2}. \tag{65}$$

Enfin, comme le treillis est supposé encastré sur les membrures, la rotation de la section droite d'abscisse z autour de son centre est $(\alpha + \beta)$.

La théorie de la torsion nous permet donc d'écrire:

$$\mathfrak{M} = C \frac{d(\alpha + \beta)}{dz}. \tag{66}$$

De (61), on tire directement:

$$N = C^{te} = P. \tag{67}$$

De (64) et (66), on déduit:

$$t = -\frac{C}{r} \frac{d^2(\alpha + \beta)}{dz^2}. \tag{68}$$

Les égalités (62), (67) et (68) combinées fournissent alors la relation:

$$\frac{d\tau}{dz} - Pr \frac{d^2\beta}{dz^2} + \frac{C}{r} \frac{d^2(\alpha + \beta)}{dz^2} = 0. \tag{69}$$

Si l'on dérive (63), on obtient:

$$\frac{d^2 Mr}{dz^2} + \frac{d\tau}{dz} - c \frac{d^2\beta}{dz^2} = 0. \tag{70}$$

En remplaçant dans cette équation $\frac{d\tau}{dz}$ par sa valeur tirée de (69) et $\frac{d^2 M_r}{dz^2}$ par sa valeur obtenue en dérivant 2 fois (65), on obtient finalement:

$$EI_r \frac{d^4\beta}{dz^4} + \left(P - \frac{c}{r}\right) \frac{d^2\beta}{dz^2} - \frac{C}{r^2} \frac{d^2(\alpha + \beta)}{dz^2} = 0. \tag{71}$$

Il faut adjoindre à cette équation celle qu'on obtient en remplaçant dans (68) t par sa valeur (60), soit:

$$\frac{C}{r} \frac{d^2(\alpha + \beta)}{dz^2} + \frac{3b\alpha}{r^2} = 0. \tag{72}$$

Les équations (71) et (72) résolvent ensemble le problème de flambement [3]).

[3]) Signalons en passant que les équations (71) et (72) peuvent s'obtenir aisément par la méthode énergétique (cf. § 6).

En se bornant aux termes du premier ordre, on trouve pour les composantes de la courbure et de la torsion les valeurs suivantes: ($\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$)

$$k = r \frac{d^2\beta}{dz^2}, \qquad k' = 0, \qquad \tau = -\frac{d(\alpha + \beta)}{dz}$$

d'où l'on déduit la valeur de l'énergie potentielle interne:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ EI_r r^2 \left(\frac{d^2\beta}{dz^2}\right)^2 + C \left[\frac{d(\alpha + \beta)}{dz}\right]^2 + \frac{3b\alpha^2}{r} + c\left(\frac{d\beta}{dz}\right)^2 \right\} dz.$$

Dans cette expression, le terme $\frac{1}{2} \cdot \frac{3b\alpha^2}{r}$ représente l'énergie de flexion et le terme $\frac{1}{2} c \left(\frac{d\beta}{dz}\right)^2$ l'énergie de torsion par unité de longueur de la moitié du treillis adjacente à la membrure considérée.

Le travail de la force extérieure P vaut comme précédemment:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l P r^2 \left(\frac{d\beta}{dz}\right)^2 dz.$$

Examinons maintenant les conditions d'extrémité. On peut les obtenir aisément par la méthode énergétique, comme au § 6. Nous ne donnerons ici que les résultats:

Les conditions aux limites relatives à β restent inchangées, sauf pour l'extrémité libre où elles deviennent:

$$\frac{d^2\beta}{dz^2} = 0; \qquad EI_r \frac{d^3\beta}{dz^3} + \left(P - \frac{c}{r}\right)\frac{d\beta}{dz} - \frac{C}{r^2}\frac{d(\alpha+\beta)}{dz} = 0.$$

En ce qui concerne les conditions d'extrémité relatives à α, il faut distinguer 2 cas:

1. Si la colonne est renforcée par une plaque d'assise terminale ou assemblée par ses membrures aux autres pièces de la charpente, on a nécessairement

$$\alpha = 0$$

aux deux extrémités.

2. Si, au contraire, les membrures ne sont liées entre elles que par le treillis, il est évident que le moment de torsion $\mathfrak{M}$ à l'extrémité des membrures est nul, parce que la tranche élémentaire extrême du treillis ne peut transmettre qu'un moment infiniment petit. On a donc aux extrémités:

$$\mathfrak{M} = 0; \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d(\alpha+\beta)}{dz} = 0.$$

Dans ce qui suit, nous supposerons toujours avoir affaire au premier cas et nous poserons aux deux extrémités de la colonne $\alpha = 0$.

Les équations différentielles (71) et (72) peuvent s'intégrer exactement dans tous les cas.

En effet, en éliminant α entre les relations (71) et (72), on obtient, après quelques calculs, l'équation différentielle du 6ème ordre:

$$\frac{r^3 EI_r}{3b}\frac{d^6\beta}{dz^6} + \left[\frac{r^3}{3b}\left(P - \frac{c}{r}\right) + \frac{EI_r r^2}{C}\right]\frac{d^4\beta}{dz^4} + \left[\left(P - \frac{c}{r}\right)\frac{r^2}{C} - 1\right]\frac{d^2\beta}{dz^2} = 0. \qquad (73)$$

L'intégrale générale de cette équation contient 6 constantes arbitraires. On peut les déterminer par les 6 conditions d'extrémité: 4 relatives à β et 2 relatives à α. Les formules de la charge critique qu'on obtient ainsi sont en général extrêmement compliquées.

Cependant, la solution exacte peut s'obtenir aisément dans le cas de la colonne guidée à ses deux extrémités.

Posons en effet:

$$\beta = \frac{1}{r}\sin\frac{\pi z}{l}; \qquad \alpha = A\beta, \qquad (74)$$

A étant une constante arbitraire.

Cette solution satisfait aux conditions aux limites relatives à α et à β. Remplaçons α et β par leurs valeurs (74) dans les équations (71) et (72).

La variation de $(V-T)$ doit être nulle.

Comme le problème comporte 2 variables indépendantes α et β, il nous faut annuler la variation de $(V-T)$ successivement par rapport à α puis par rapport à β. Les calculs (que nous ne reproduirons pas ici) conduisent respectivement aux équations différentielles (72) et (71).

Il vient:

$$\begin{cases} EI_r \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\pi}{l}\right)^4 - \left(P - \dfrac{c}{r}\right)\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\pi}{l}\right)^2 + \dfrac{C}{r^2}\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\pi}{l}\right)^2(1 + A) = 0 \\ \dfrac{C}{r}\left(\dfrac{\pi}{l}\right)^2(1 + A) + \dfrac{3bA}{r^2} = 0 \end{cases}$$

En éliminant A entre ces 2 équations, on obtient:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_r}{l^2} + \frac{c}{r} + \frac{C}{r^2}\frac{1}{1 + \dfrac{\pi^2 Cr}{3bl^2}}. \tag{75}$$

Dans les autres cas de fixation, on ne peut obtenir aussi simplement la solution exacte du problème parce que α et β doivent obéir à des conditions d'extrémité différentes, de sorte qu'on ne peut poser $\alpha = A\beta$.

Remarquons ici que, dans le cas-limite où le treillis est infiniment flexible ($b = 0$), les membrures sont comme articulées sur lui et leurs sections droites peuvent tourner librement autour de leurs centres. Le travail de torsion des membrures est alors nul et l'on a simplement:

$$P_{cr} = \frac{kEI_r}{l^2} + \frac{c}{r}. \tag{76}$$

On obtient une bonne formule approchée de la charge critique, applicable à tous les cas de fixation, en remplaçant dans la formule (75) π^2 par k, ce qui donne la relation:

$$P_{cr} = \frac{kEI_r}{l^2} + \frac{c}{r} + \frac{C}{r^2}\frac{1}{1 + \dfrac{kC^2}{3bl^2}}. \tag{77}$$

Cette formule coïncide avec la formule exacte (75) dans le cas de la colonne guidée à ses deux extrémités. Elle se réduit à la formule (17) si le treillis est infiniment rigide. Enfin, elle se réduit à la formule (76) si le treillis est infiniment flexible.

Cette formule n'est pas valable dans le cas de la colonne encastrée-libre si les membrures ne sont liées entre elles que par le treillis; car, dans ce cas, on a à l'extrémité supérieure $\dfrac{d(\alpha + \beta)}{dz} = 0$ et non pas $\alpha = 0$.

Application numérique: Reprenons l'exemple numérique du § 8 et évaluons le facteur de réduction $\dfrac{1}{1 + \dfrac{\pi^2 Cr}{3bl^2}}$ qui affecte le terme de torsion $\dfrac{C}{r^2}$ dans la formule (75).

C représente ici la rigidité torsionnelle d'une seule membrure, soit:

$$C = G \cdot \frac{100 \cdot 1^3}{3} = 33{,}3 \cdot G = 28{,}3 \cdot 10^6 \text{ kgs} \cdot \text{cm}^2.$$

$$b = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} = \frac{2{,}15 \cdot 10^6 \cdot 1^3}{12(1 - 0{,}3^2)} = 196\,800 \text{ kg} \cdot \text{cm}.$$

$$c = \frac{Gh^3}{3} = \frac{850\,000 \cdot 1^3}{3} = 283\,400 \text{ kg} \cdot \text{cm}.$$

D'où:

$$\frac{\pi^2 C r}{3 b l^2} = \frac{9{,}87 \cdot 28{,}3 \cdot 10^6 \cdot 50}{3 \cdot 196\,800 \cdot 2700^2} = 0{,}00324.$$

Le facteur de correction $\dfrac{1}{1 + \dfrac{\pi^2 C r}{3 b l^2}}$ vaut donc ici 0,997, et la correction est négligeable.

Remarque finale: Dans les colonnes en treillis, b est beaucoup plus faible que ci-dessus et C généralement plus grand. Si la colonne est courte, le facteur de correction peut être de l'ordre de 0,8 et la correction due à l'élasticité du treillis atteint 20 %, ce qui n'est pas du tout négligeable.

Bibliographie.

1. P. Appell, Traité de Mécanique Rationnelle, tome 2, quatrième édition. Paris, Gauthier-Villars, 1931.
2. A. E. H. Love, Theory of Elasticity, 4ème édition revisée. Cambridge, University Press, 1934.
3. A. de Marneffe, Flambage par torsion. Revue Universelle des Mines, octobre 1939, pp. 501 à 511.
4. C. Massonnet, Flambement d'une colonne prismatique encastrée-articulée soumise à des charges axiales réparties uniformément sur toute sa longueur. Bulletin scientifique de l'Association des Elèves des Ecoles Spéciales de l'Université de Liége, mai 1939, pp. 215 à 223.
5. C. Massonnet, Les relations entre les modes normaux de vibration et la stabilité des systèmes élastiques. Bulletin des Cours et des Laboratoires d'Essais des Constructions du Génie Civil et d'Hydraulique Fluviale, Tome 1, 1940, No. 1 et 2, pp. 4 à 353.
6. S. Timoshenko, Theory of Elastic Stability. New-York, McGraw Hill Book Co., 1936.
7. S. Timoshenko, Théorie des Vibrations. Paris et Liége, Béranger, 1939.

Résumé.

L'auteur recherche, dans le domaine élastique, la charge critique de colonnes à section évidée symétrique, lorsque le flambement se produit non par dérobement transversal, mais par torsion autour de l'axe de la pièce. La solution est établie à partir de l'équation différentielle de l'angle de torsion dans le cas ordinaire de flambement et à partir de considérations énergétiques, également dans le cas des grandes déformations. L'auteur établit une formule approximative pour tenir compte du poids propre. En complément, il établit la diminution de la charge critique résultant des déformations élastiques de la section en suite de la flexion des éléments de liaison des membrures (que ces éléments soient en treillis ou à âme pleine).

Summary.

The author investigates the buckling load in the elastic range in columns of hollow, symmetrical cross-section, when buckling takes place not by lateral displacement, but by twisting round the axis of the bar. The solution is obtained from the differential equation for the angle of twist based on the usual case of buckling, or also from energy considerations. The case of

large deformations is also checked. For taking the weight of the bar into account, the author gives a formula of approximation. Then the diminution in the buckling load is determined, which is caused by a change in shape of the cross-section in consequence of bending of the ties (whether these are hollow or solid).

Zusammenfassung.

Der Verfasser untersucht die Knicklast im elastischen Bereich von Säulen mit aufgelöstem, symmetrischem Querschnitt, wenn das Knicken nicht durch seitliches Ausweichen, sondern durch Verdrehung um die Stabachse erfolgt. Die Lösung ergibt sich aus der Differentialgleichung für den Verdrehungswinkel in Anlehnung an den gewöhnlichen Knickfall oder aber aus einer Energiebetrachtung. Der Fall der großen Formänderungen wird auch berücksichtigt. Zur Berücksichtigung des Eigengewichtes gibt der Verfasser eine Näherungsformel. Ergänzend wird die Abnahme der Knicklast bestimmt, die durch eine Veränderung der Querschnittsgestalt infolge Verbiegung der Bindungen (seien diese nun aufgelöst oder vollwandig) verursacht wird.

Leere Seite
Blank page
Page vide